博士論文（課程博士）

ふりがな	いしがき　とものり
氏名	石垣智徳
本籍	三重県
専攻名	物質工学専攻
指導教官	大野勝久　教授
審査員主査	大野勝久　教授
審査員	小和田　正　教授
審査員	松井　寛　教授
学位授与年月日	平成　5年　3月23日
学位記番号	第104号

博士論文

最適在庫管理政策に関する研究

1993年1月

名古屋工業大学大学院博士後期課程

生産システム工学専攻

石 垣 智 徳

目 次

1 序論 **1**

1.1 はじめに 1

1.2 在庫管理の歴史 2

1.3 1品目在庫管理システム 3

1.4 (σ, S) 政策と (s, c, S) 政策 4

1.5 1品目多階層在庫問題 6

1.6 多品目在庫問題 10

1.7 本研究の目的 11

2 固定在庫・品切れ費用がある在庫管理 **13**

2.1 まえがき 13

2.2 1品目有限期間問題 14

2.3 1期間問題 15

2.4 多期間問題 17

2.5 種々の需要分布 19

2.6 あとがき 23

3 需要に時間的なずれがある在庫管理 **25**

3.1 まえがき 25

3.2 定式化と最適在庫管理政策 26

3.3 種々の需要分布 31

3.4 あとがき 33

4 周期観測多品目在庫管理 **35**

4.1 まえがき 35

4.2 多品目在庫管理システム 36

4.3 マルコフ決定過程 38

4.4 新アルゴリズム 41

4.5 総割引期待費用 46

4.6 数値例 48

4.7 あとがき 51

5 連続時間観測多品目在庫管理 **53**

5.1 まえがき 53
5.2 多品目在庫管理システム 54
5.3 アルゴリズムの導出 57
5.4 新アルゴリズム 59
5.5 総割引期待費用 64
5.6 数値例 65
5.7 他の政策との比較 68
5.8 あとがき 71

6 結論 **73**

6.1 1品目在庫管理システム 73
6.2 多品目在庫管理システム 74
6.3 おわりに 75

謝辞

参考文献

第 1 章

序論

1.1　はじめに

在庫管理システムは、生産、物流、販売等の種々の領域における基本的な管理問題としてオペレーションズ・リサーチ、経営工学で、長年にわたり研究が進められてきた。単一品目 1 期間問題に始まった研究も、今日、多品目、多階層、多期間を想定した動的な在庫管理を対象とし、その最適化をはかることが切望されている。これは、在庫管理問題を含む現在の物流システムが、企業の最重要な経営戦略手段となりつつあるからにほかならない。

本章の目的は、在庫管理の歴史的意味をとらえ、1 品目在庫管理システムから現在の物流システムからの要請に対応した多品目あるいは多階層の多期間在庫管理システムの文献までを概説すると同時に、以後の各章の成果に位置づけを与えることである。

第 1.2節では簡潔に在庫管理の歴史を振り返り、第 1.3節においては、本論文に関連する 1 品目在庫管理システムの過去の研究を概説する。第 1.4節では、これまで論じられてきた多品目在庫管理政策である (σ, S) 政策および (s, c, S) 政策について述べる。第 1.5節では 1 品目多階層在庫管理問題を考察し、第 1.6節において多品目在庫管理問題を論ずる。最後に第 1.7節において本研究の目的と本論文の構成を述べる。

1.2 在庫管理の歴史

17世紀までの在庫管理は比較的単純なものであった。というのは、このころの在庫という概念は、主に生産者および経営者等に富の尺度として考えられていたからである。したがって、企業者は将来必要となる資材をできるだけ多く倉庫に保管する政策が、将来の不確実性に対する有効な対策として考えられていた。このような在庫管理に対する考え方が20世紀はじめまで続くが、1920年代前半に起こった在庫恐慌によって今までの在庫に関する概念が一変した。かつては企業者に富をもたらした在庫は不要な代物となり、必要最小限の在庫さえ保管すればよく、それ以上の在庫を保管するよりは、在庫を購入する手段、すなわち、現金等の流動資産を有することがより重要となった。このような歴史をたどって、企業者は多過ぎず、かつ少な過ぎない在庫管理の重要性を認識し、最適な在庫管理政策に関する研究の発端を生じた。

その後、第二次世界対戦中に米軍のORグループによって研究された軍事、軍備に関する重要な結果が、最適在庫管理政策に援用された。この時期以後、在庫管理システムに需要を不確定な量としてとらえ、定式化する手法が主流になった。すなわち、オペレーションズ・リサーチの分野における期待費用（あるいは利潤）の最小化（あるいは最大化）を評価基準にした最適政策の研究とその決定である。

1950年代にはいると、1品目在庫管理システムにおいて需要、注文の納期等が確率的に変動する問題や多品目を取り扱う在庫管理システムを考察の対象とするようになった。1品目に関する研究では第1.3節でみるように、確率的に変動する複数要素の導入とシステムの費用関数の一般化が主な研究対象であった。一方、多品目に関する研究は1960年頃から盛んになり、はじめは1品目で得られた結果を多品目に拡張することが主な成果であったが、物流を考慮した多階層在庫問題等様々な形態の多品目在庫管理システムが議論の対象となってきた。この時代に発達した動的計画法、マルコフ決定過程、確率制御等の数学的な結果はこれらの問題を解析する強力な道具となり、このころから最適在庫管理政策に関する研究が盛んに行われるようになった。

1980年代以降、特にこの分野の研究は、調達、設計、生産、販売を考慮に入れた、物流システムを総合的在庫管理システムとしてとらえる傾向が強くなり、これまで、現場における「かん」に頼っていた在庫管理政策を理論的、もしくは実証的に明らかにしようとする試みが行われている。しかしながら、双方ともに考慮すべき構成要素

の多数化という現実問題が壁となり、飛躍的に進歩したと言われる今日のコンピュータを駆使しても厳密に解けない問題が多々有るのが現状である。

1.3 1品目在庫管理システム

1品目在庫管理システムに対する過去の概説文献としては、Aggarwal [2], Bartmann and Beckmann [14], Clark [27], Hadley et al. [61], Heyman et al. [63], Nahmias [97], Prastacos [106], Scarf [119], Silver [130], Tinarelli [139], Veinott [142] 等があり多くの研究が行われている。本節では本論文の第2章、第3章に関連する1品目在庫管理システムの研究を概説する。まず、有限期間で周期的に在庫量が観測される1品目在庫管理システムについて述べる。特に各期ごとの需要が確率的であり、その最適政策が (s, S) 政策となる文献を中心に概説する。

本論文で考察する対象となる1品目多期間在庫管理システムの最適在庫政策に関する研究は Arrow et al. [7] によってはじめられた。有限期間在庫管理システムに関しては、Scarf [117] が動的計画法を用いることによって、最適政策がある条件の下で (s,S) 政策になるという歴史的結果をもたらした。この研究は Veinott [144] によってさらに拡張され、(s,S) 政策が最適となる新しい条件および証明法が与えられた。その後 Lippman [83] [84] によって Scarf [117],Veinott [144] の費用関数の仮定がゆるめられ、(s,S) 政策が最適となる十分条件が示された。一方、Porteus [105] は需要の確率密度関数に条件を課し、発注費用が凹かつ増加関数であるとき、(s,S) 政策が最適となることを示した。その後、Aneja and Noori [5] によって固定品切れ費用がある場合にも (s,S) 政策が最適となる必要十分条件が与えられている。

無限期間在庫管理システムに関しては、Iglehart [67] によって定常 (s,S) 政策が最適になることが期待在庫・品切れ費用が凸関数であるという条件で導かれている。その後 Veinott and Wagner [141] によって総割引期待利得を最小化する基準でも定常 (s,S) 政策が最適になることが導かれた。また、Bell [18] は最適停止ルールを利用することによって、(s,S) 政策が最適となることを示した。近年、Zheng [150] によって (s,S) 政策が最適になる簡潔な証明が与えられた。

第3章において論じられる需要に時間的なずれがある問題は Beckmann [17], Rothstein [112] および Sawaki [115] が旅客機の座席管理問題として論じた問題に端を発し

ている。これらの研究は、Belobaba [19] または沢木 [116] によって拡張された。類似した問題にホテルの空部屋の管理問題あり、Liberman and Yechiali [81] と石垣 [71] が考察している。しかし、これら従来のモデルは、2 種類以上の需要の独立性を仮定している。近年、1 品目在庫管理システムの概説を手がけた Bartmann and Beckmann [14] はオーバーブッキングの問題を新聞売り子問題として取り扱っている。

1.4 (σ, S) 政策と (s, c, S) 政策

多品目在庫問題の中心的課題は、その最適あるいは最適に近い管理政策の導出である。本節では (σ, S) 政策と (s, c, S) 政策について述べる。

Johnson [75] は、多品目、周期的観測の無限期間在庫問題を取り扱い、確率的な需要変動のもとで (σ, S) 政策を提案し、その最適政策の計算法を導いている。その後、Kalin [77], Ling et al. [82] と Sivazlian [132] により、その最適性等が研究されている。M品目在庫問題において、ある M次元領域σと M次元ベクトル S=($S_1, ..., S_M$) が与えられたとき、(σ, S) 政策は、「期首在庫水準が x=($x_1, ..., x_M$) が与えられ、x $\in \sigma$ならば、S まで発注し、さもなければ、発注しない。」政策である (図 1.1参照:M=2) 。この政策の特別な場合として、単一品目 ($M = 1$) を考えると、「x $\leq$ s ならば S まで発注する」(s, S) 政策が導かれる (図 1.2参照) 。

一方、Balintfy [12] は、連続観測の在庫問題を考察し、(s, c, S) 政策を提案している。すなわち、S=($S_1, ..., S_M$)，c=($c_1, ..., c_M$)，s=($s_1, ..., s_M$) とし、任意の i 品目に着目したとき、在庫水準 x_iが s_i以下になれば、S_iまで発注し (図 1.3参照) 、$j(\neq i)$ 品目に対しては、x_jが c_j以下であれば S_jまで発注 (実線) 、さもなくば、j品目は発注しない（破線）政策である (図 1.4参照) 。

(σ, S) 政策と (s, c, S) 政策を比較するために、2 品目在庫問題を考える。まず始めに (s, c, S) 政策の c を S に近づけたときを考える。このとき、図 1.5に示すように、$\sigma = \{(x_1, x_2); x_1 \leq s_1$ あるいは $x_2 \leq s_2\}$ とした (σ, S) 政策と一致する。次に、c を s に近づけたときを考える。この場合、図 1.6に示すように、(s, c, S) 政策は品目 $i(i = 1, 2)$ に対して独立に (s, S) 政策をとる政策となる。

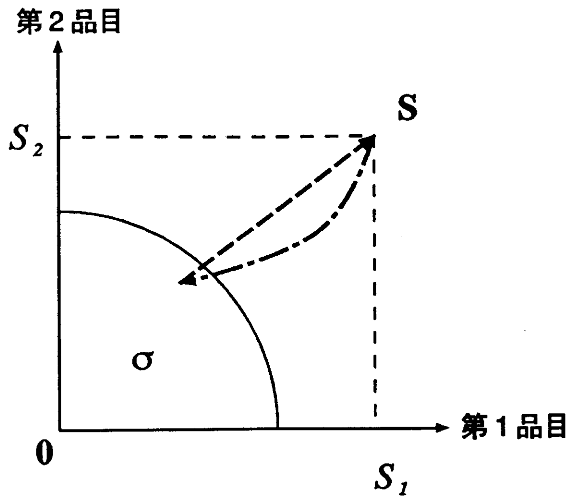

図 1.1: (σ, S) 政策

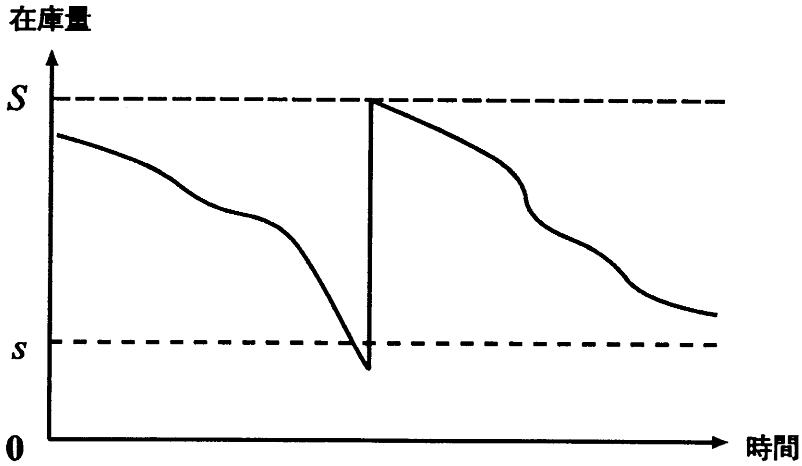

図 1.2: (s, S) 政策

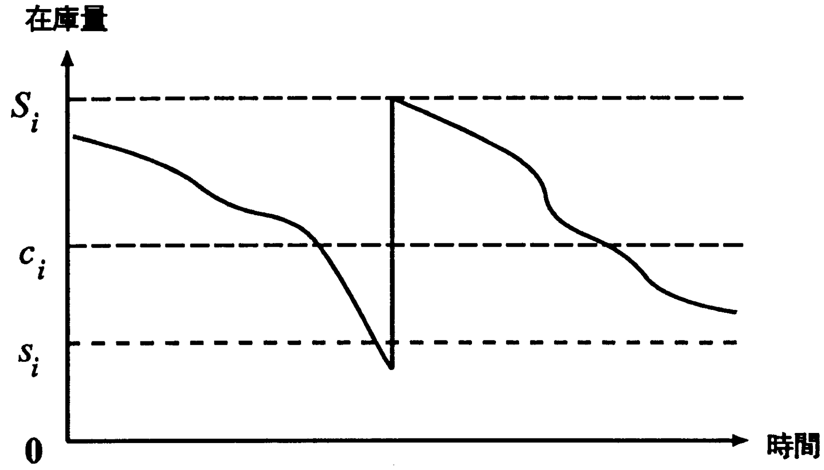

図 1.3: (s, c, S) 政策 (i 品目)

1.5 1 品目多階層在庫問題

Silver [130] は 1984 年までの多品目あるいは多階層の在庫管理システムに関してまとめているが、1985 年以降についてまとめたものはない。したがって、第 1.5、第 1.6 節では 1985 年から 1990 年までを中心に概説する。我々の考察の対象となる文献は、Aggarwal [2] の分類に従えば、Dynamic, Stochastic, Known Demand Distribution に属するものであるが、重要と思われるものはこの範囲外のものも含まれている。

Clark et al. [26] に始まる多階層在庫問題は Bessler et al. [20], Gross [59], Hadley et al. [61], Love [85], Hochstaedter [65] によって研究され、Sherbrooke [125] が修理可能な品目に対する多階層在庫問題の近似モデルである METRIC(A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control) を提案している。Simon [131] は、修理時間が確定的であるという仮定のもとで、厳密な解析を与え、その後、METRIC は修理可能な品目を取り扱うモデルとして有用なために種々の形に拡張され、今日に至っている（ Ding [40], Ehrhardt [41], Gallego et al. [53], Jackson et al. [72], Karmarkar [78], Mitchell [87], Pyke [107], Sherbrooke [127], Stulman [135], Svoronos et al. [136] ）。

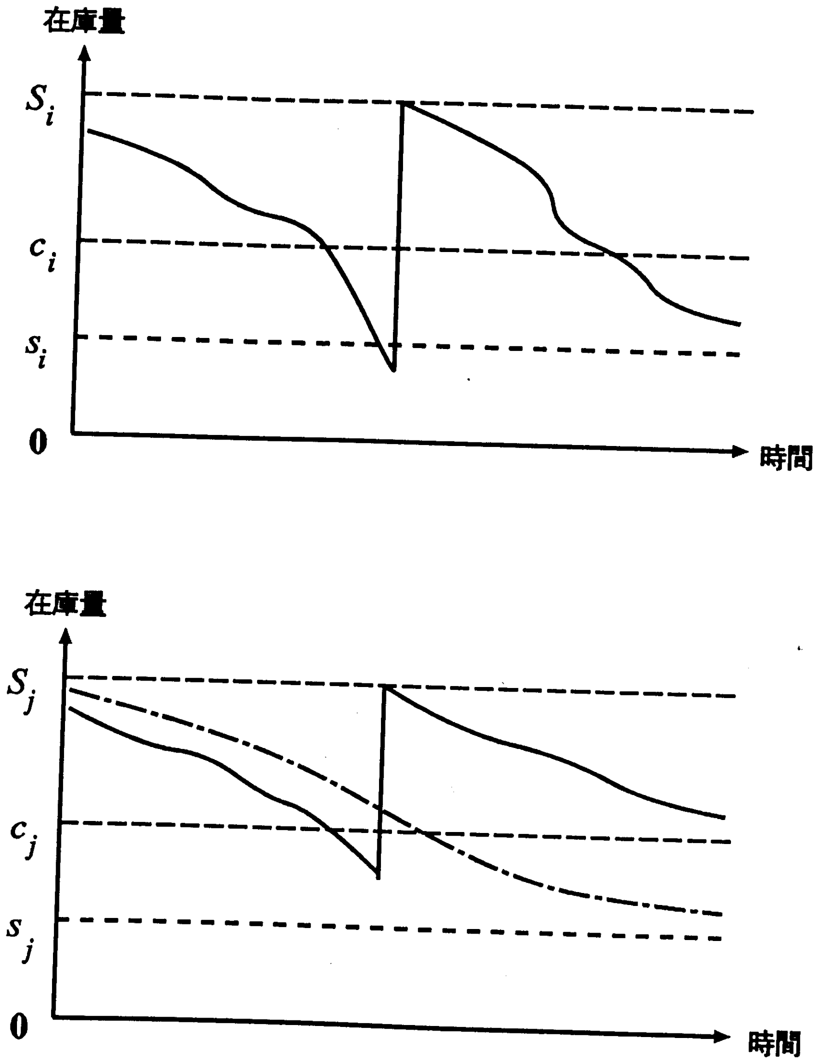

図 1.4: (s, c, S) 政策 (j品目)

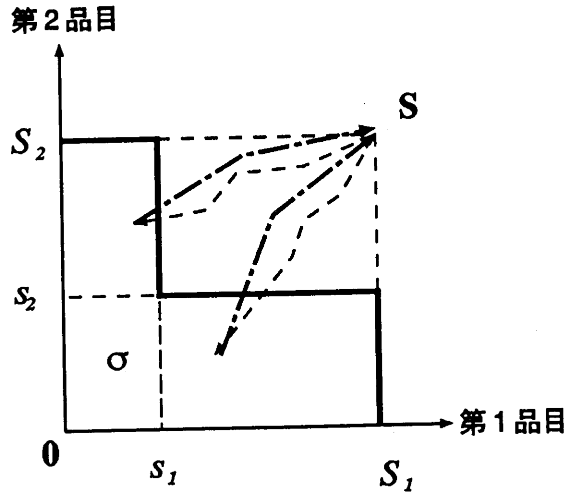

図 1.5: 変形 (σ, S) 政策

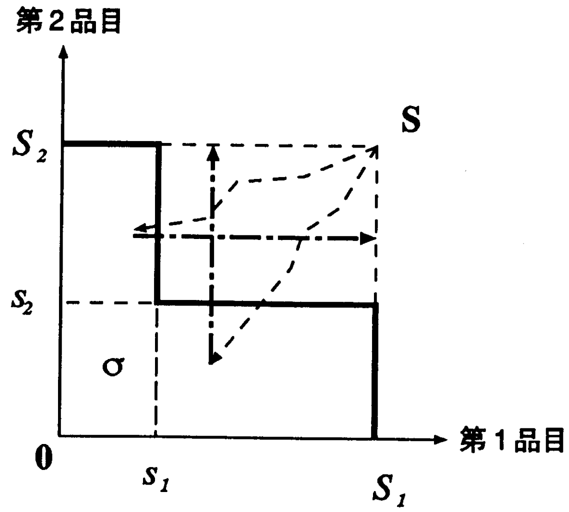

図 1.6: 独立した (s, S) 政策

Sherbrooke [126] が METRIC に Multi-indenture の概念を導入したことは業績として大きい。この概念は、METRIC が無視してきた仕上がり品とその品目を製造するために必要なモジュール間に存在する繰延べを考慮し、費用最小化を図るものである（Lambrecht et al. [79], Nahmias [96]）。

Eppen et al. [42] は、在庫の再分配のない場合を取り扱い、多期間発注周期での在庫保持費用と繰延べによる費用を最小化している。Graves [57] Sherbrooke [127] は、新たな近似モデルを提案しているが、どちらのモデルも、緊急水平移送（同一レベルでの相互補充）が許されていない。緊急移送という点で、在庫の保管場所間での移送を考慮した初期のモデルに Gross [59] があるが、基本的に複数の在庫保管場所をもつ単一階層モデルであった。また、Hoadley et al. [64] も、同じ階層間に水平移送を許した単一期間多階層在庫問題を論じているが、METRIC や他の修理可能な在庫モデルで想定されている連続観測ではなく、周期観測を仮定している。この研究における最も大きな制約は、在庫補充のための納期が 0 であることであり、この制約が緩められればより現実的にはなるが、解析的には複雑になりすぎる。

Cohen et al. [31] は、同じ階層間に貯蔵機能がある多階層在庫問題を考察し、その後この問題は、Clark [29], Cohen et al. [30], Debodt [35], Dekok [36], Demmy et al. [37], Deuermeyer et al. [39], Muckstadt et al. [93] [94], Page et al. [100], Rosenbaum [109] [110], Schaffer [120], Schwarz [121] [123], Williams [145] [146] [147], Zipkin [151] によって研究されている。

Lee [80] は、Sherbrooke [127] と Graves [57] の METRIC モデル同様に、連続観測の下で修理可能な品目の多階層在庫問題を取り扱っている。需要発生間隔が長いときに 1 単位づつの補充政策が採用され、同じ階層の在庫場所間の緊急水平移送が許されている。ここでは 70%というかなり高いサービス基準を考えている。

Jonsson et al. [76] は、周期観測の下で、需要が正規分布に従う在庫問題を考察している。中央倉庫（在庫管理本部）は、予め決められたＨ期間の発注サイクルで補充を行い、再分配が、発注サイクルの最後の 1 期間でなされる問題である。

Erkip et al. [43] は、Eppen et al. [42] に端を発するモデルであり、Federgruen et al. [47] [48] [49] においても研究されている。これらの研究では発注費に固定費を考慮した場合とそうでない場合の双方を考えているが、Erkip et al. [43] は固定費を考

えない場合のみを扱っている。しかし、各期間の需要が、その期間における違った場所で発生した需要に関して独立でなくてもよいところが前者よりも拡張されている。そして、彼らは最適な安全在庫が需要に関する共分散の関数として表現できることを導いている。これらの結果は、1) 中央倉庫は供給所から十分な供給を受けている 2) 任意の品目に対し、各在庫保管場所における需要率が一定であるという 2 つの仮定の下で導かれている (Altiok [4], Anily et al. [6], Axsater [11], Chen [24], Jackson [74], Moinzadeh [90], Pyke [107], Roy [114])。血液など、時間経過と共に陳腐化が発生する品目の在庫問題は Cohen [28], Federgruen et al. [50], Gregor [58], Iglehart et al. [68], Moinzadeh et al. [89], Nakagami [98] により研究されている。

1.6 多品目在庫問題

Johnson [75] に始まる多品目在庫問題の (σ, S) 政策は、固定費を考慮した線形の発注費用と在庫・品切れ費用の費用構造の下で導かれている。Sivazlian [132] は需要分布が指数分布であるとき、問題の費用関数を解析し、発注量が大きいときには、その最適値の解析解を求めている。また、品目数が増加すれば、各々の品目を独立に取り扱うことができることを示している。さらに、Kalin [77] は、最適政策が存在するための一般条件をあたえ、(σ, S) 政策が最適となる条件を示している。

Balintfy [12] にはじまる (s, c, S) 政策は多品目在庫問題においては"Can-order" Policy の代表的政策として Silver [129] [130], Federgruen et al. [46] を中心に研究が進められてきた (Cohen et al. [32], Curry et al. [33], Evans [44], Geoffrion et al. [54], Mitchell [88], Morey et al. [91], Oral [99], Popplewell et al. [104], Sivazlian [133], Veinott [140])。しかし、Ignall [69] によって (s, c, S) 政策が最適でない例が示されていることも注意すべきである。

Thompstone et al. [138] は需要が複合ポアソン過程に従い、納期 0 の多品目在庫問題を考察し、複合ポアソン過程を同値なポアソン過程へ変換する方法を用いて解析している (Noddor [95])。

Federgruen et al. [46] は多品目在庫問題を考え、いくつかのサービス地点が散在し、その需要が独立である単一品目在庫問題に適用できることを示している。モデルとしてはセミ・マルコフモデルであるが、非常に複雑であるので、Balintfy [12] と

Silver [129] の制御規則を採用している。Silver [129] は需要がポアソン到着に従い、納期が 0 の多品目在庫問題を取り扱い準最適制御規則を導く逐次近似法を提案しているが、この方法は、多品目在庫問題を個々の単一品目在庫問題に分解して行う方法である。さらに、Silver [129] は納期が正の場合の解法も与えている。

Atkins et al. [9] [10] は、(s, c, S) 政策におけるパラメータ s, c, S を変化させて得られる最小費用の新しい下限を導いている。この最小費用を与えるパラメータの値を s^*, c^*, S^* と表したとき、彼らは、(s^*, c^*, S^*) 政策より単純な周期的政策（P型，MP型）を提案し、数値例により (s^*, c^*, S^*) 政策より優れていることを示している。ここで、周期型政策とは、(R, T) 政策とも呼ばれ、T_iごとに品目 i の在庫水準を R_iまで増加させる政策である。Atokins et al. [9] では (R, T) 政策のＰ（ periodic ）型とＭＰ（ modified periodic ）型の双方で計算した結果が与えられ、共通の固定費が 0 である時をのぞいて (s, c, S) 政策よりもよい結果を与えている。

Fedegruen et al. [46] は需要が複合ポアソン過程に従い、需要に対するサービスにある種の制約があるモデルを考察している。一方、Atkins et al. [10] は、需要がポアソン過程に従い、サービスに対する制約がないかわりに、品切れ費用に固定費を考慮したモデルを論じている。Silver [129] と Fedegruen et al. [46] は、(s, c, S) 政策のほうが各品目に対して独立に発注する政策よりも 20%程よいという結果を示している。 Chacravasky [23] は在庫費用、需要率、固定費で各品目をグループ分けし、そのグループごとに一括補充する政策を提案している。さらに、在庫費用、需要率、固定費いう 3 つのパメータによる品目のグループ分けが理論的に最適であることを証明している。その証明は Barany [13], Jackson [72], Zangwill [148] の結果を援用している。また、従来は示されていなかった収束を証明している。この研究は Aggarwal [3], Bastian [15], Chakravarty [21], Chakravarty et al. [22] によって進められている。

1.7 本研究の目的

本研究の目的は、ある特定の在庫管理システムがいかなる環境（条件）の下でどのような在庫管理政策を最適政策としてもつかを明らかにすることである。

本研究では数多くある在庫管理システムの中から、1 品目に関しては 1 品目周期的観測多期間在庫管理システムと 2 種類の需要がある 1 期間在庫管理システムに焦点

を当てる。これらのシステムはそれぞれ第2章、第3章で議論され、第2章では(s,S)政策が最適となる条件、第3章では配分政策がいかなる条件で有効であり、どれぐらいどちらに配分すべきかを導く。多品目に関しては、品目間の依存関係を考慮した一般的な在庫管理システムを定式化し、第4章で周期的観測システム、第5章で連続観測システムを考察する。第4章、第5章ともに最適政策を導く新しいアルゴリズムを提案し、従来のPIMに比べて格段に優れていることを例証する。第6章では、本研究で得られた成果を単一品目在庫システムと多品目在庫管理システムについてまとめ、その適用可能性と今後の課題について述べる。

第 2 章

固定在庫・品切れ費用がある在庫管理

2.1 まえがき

(s, S) 政策が段取り費用と線形発注費用を含む確率的在庫システムにおいて最適となることはよく知られている (Scarf[117], Veinott[140] [142] [144])。さらに、計画期間を多期間で考える動的システムでは $K-$convexity という概念が (s, S) タイプである最適政策の議論において重要である。しかし、もし在庫費用に固定費用が含まれると、(s, S) 政策はもはや最適でなくなる。Aneja and Noori[5] は品切れ費用に固定費用が含まれる場合について (s, S) 政策が最適になる十分条件を示しているが、在庫費用についての固定費用は考慮してない。

本章では (s, S) 政策の最適性と費用構造（固定費用を持つ発注費用に加えて、在庫、品切れの双方に固定費用をもつ在庫・品切れ費用）の関係を議論する。我々のシステムは Aneja and Noori[5] の拡張であるだけでなく、この多期間確率的在庫システムにおいて (s, S) 政策が最適となる簡潔かつ前者と異なった証明を与える。またこの章では以下の 3 つの質問の答を与える。
（1）固定在庫費用がある場合に (s, S) 政策が最適となる十分条件はどんなものであるか。いいかえれば在庫費用関数に関して (s, S) 政策はどの程度影響を受けるか。（2）上記の十分条件とはどのようなものか。（3）需要分布を特定化したときその十分条件は成立するのか。

2.2　1品目有限期間問題

本章では 1 品目で計画期間が有限期間である確率的在庫システムを考える。以下の仮定と記号で在庫システムを考察していく。

仮定 1 超過需要は失われる（ロストセール）

仮定 2 もし、需要が在庫量より少ないならば、各期末において在庫費用が生ずる。この在庫費用は固定在庫費用 $[B_1]$ と線形在庫費用 $[h]$ から構成されている。

仮定 3 もし、需要が在庫量より大きいならば、各期末において品切れ費用が生ずる。この品切れ費用は固定品切れ費用 $[B_2]$ と線形品切れ費用 $[p]$ から構成されている。

仮定 4 発注がなされるとき、固定発注費用 $[K]$ と線形発注費用 $[c]$ がかかる。

仮定 5 各期間の需要は独立な確率変数 $[\xi]$ で与えられ、その分布は確率密度関数 (p. d. f.)$\phi(\xi)$ に従う。また、p. d. f. は微分可能であると仮定する。

仮定 6 費用関数および p.d.f. は期間に対して同一であり、割引率 $\rho(0 < \rho \leq 1)$ を仮定する。

計画期間は離散的であり、有限である N 期間と仮定し、まずはじめに n 期間 $(n \leq N)$ の期待費用を考えよう。もし、発注直後の在庫水準が y ならば、その期に発生する期待在庫・品切れ費用 $L(y)$ は以下によって与えられる。

$$L(y) = h\int_0^y (y-\xi)\phi(\xi)d\xi + B_1\int_0^y \phi(\xi)d\xi + p\int_y^\infty (\xi-y)\phi(\xi)d\xi + B_2\int_y^\infty \phi(\xi)d\xi, \quad (2.1)$$

ここで B_2 と B_1 は等しくないと仮定する。もし、$B_1 = B_2$ であるならば、(2.1) 式より固定在庫費用と固定品切れ費用の和は y と独立であることが容易にわかる。したがって、このシステムは固定費用を発注費用のみに含む古典的な確率的在庫管理システムに退化する。x が第 n 期間の期首在庫水準であるとき、$C_n(x)$ を $n-$期間の総割引期待費用の最小値とする。このとき、最適性の原理より以下の式を得る。

$$C_n(x) = \min_{y \geq x}\{H(y-x) + L(y) + \rho\int_0^\infty C_{n-1}([y-\xi]^+)\phi(\xi)d\xi\}, \quad (2.2)$$

ここで $[y]^+ = \max\{y, 0\}$, $n = 1, 2, ..., N$, であり、すべての x について $C_0(x) = 0$ であり、関数 $H(\cdot)$ は次式で定義される。

$$H(y-x) = \begin{cases} K + c\cdot(y-x), & y-x>0; \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{2.3}$$

このシステムの目的は総割引期待費用を最小化するような最適政策を見つけることである。多期間在庫システムに関する (s, S) 政策の最適性を証明するためにまず、このシステムの 1 期間問題を考察する。

2.3 1 期間問題

本節では 1 期間問題における (s,S) 政策の最適性を証明する。$N = 1$ に対して、(2.2) 式は以下のようになる。

$$C_1(x) = \min_{y \ge x}\{H(y-x) + L(y)\}. \tag{2.4}$$

定理 2.1. 1 期間問題に関して (s,S) 政策が最適となる十分条件は条件 (A) である。

条件 (A)

$B_2 - B_1 \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} 0$ に対して、$\dfrac{\phi'(y)}{\phi(y)} \left\{\begin{matrix} \le \\ \ge \end{matrix}\right\} \dfrac{h+p}{B_2 - B_1}$ がすべての $y \in \Re^+$ について成立する。 (2.5)

ここで $\Re_+ = \{y | y \ge 0\}$ とする。

証明: $B_2 - B_1 < 0$, である場合を証明すれば十分である。$B_2 - B_1 > 0$ である場合は $B \equiv B_2 - B_1$ とし、Aneja and Noori [5] の結果を適用することによって証明できる。$F_1(y)$ を (2.4) 式の右辺の $\{\}$ の内部とし、$G_1(y) = F_1(y) - K + cx$ とおく。$y > x$ である場合は $G_1(y)$ を以下のようにおく。

$$G_1(y) = cy + h\int_0^y (y-\xi)\phi(\xi)d\xi + B_1 \int_0^y \phi(\xi)d\xi + p\int_y^\infty (\xi - y)\phi(\xi)d\xi + B_2 \int_y^\infty \phi(\xi)d\xi. \tag{2.6}$$

このとき、関数 $G_1(y)$ の 1 、2 回微分は以下のようになる。

$$G_1'(y) = c + h\int_0^y \phi(\xi)d\xi + B_1\phi(y) - p\int_y^\infty \phi(\xi)d\xi - B_2\phi(y) \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} G_1''(y) &= h\phi(y) + B_1\phi'(y) + p\phi(y) - B_2\phi'(y) \\ &= (h+p)\phi(y) - (B_2 - B_1)\phi'(y) \end{aligned} \tag{2.8}$$

条件 (A) より以下の式を得る。

$$G_1''(y) = (h+p)\phi(y) - (B_2 - B_1)\phi'(y) \geq 0, \tag{2.9}$$

これは $G_1(y)$ が yで凸であることを意味する。
$y = x$ である場合は $G_1(x) - cx = F_1(x)$ であり、$G_1(x)$ は以下のようになる。

$$G_1(x) = cx + h\int_0^x (x-\xi)\phi(\xi)d\xi + B_1\int_0^x \phi(\xi)d\xi + p\int_x^\infty (\xi - x)\phi(\xi)d\xi + B_2\int_x^\infty \phi(\xi)d\xi. \tag{2.10}$$

この場合も同様に (2.10) 式の 1 、2 回微分を求めると以下のようになる。

$$G_1'(x) = c + h\int_0^x \phi(\xi)d\xi + B_1\phi(x) - p\int_x^\infty \phi(\xi)d\xi - B_2\phi(x) \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} G_1''(x) &= h\phi(x) + B_1\phi'(x) + p\phi(x) - B_2\phi'(x) \\ &= (h+p)\phi(x) - (B_2 - B_1)\phi'(x) \end{aligned} \tag{2.12}$$

この式は (2.9) 式と同一であるので (2.9) 式と (2.13) 式は $G_1(y)$ が $y \geq x$ について凸であることを意味する。
したがって、以下の式が成立する。

$$F_1(y) = \begin{cases} G_1(y) + K - cx, & \text{if } y > x; \\ G_1(x) - cx, & \text{if } y = x. \end{cases} \tag{2.13}$$

ここで $C_1(x)$ の最小値は以下で与えられる。

$$C_1(x) = \begin{cases} G_1(S) + K - cx = G_1(s) - cx, & \text{if } x < s; \\ G_1(x) - cx, & \text{if } x \geq s \end{cases} \tag{2.14}$$

ここで S, s は以下の式で与えられる。

$$S = arg\min\{G_1(y)\}, \tag{2.15}$$

$$s = min\{z | G_1(S) + K = G_1(z)\}. \tag{2.16}$$

したがって、条件 (A) のもとで以下で与えられるような政策が最適政策となる。

1. if $x < s$, order $(S - x)$,

2. if $x \geq s$, do not order.

このような政策は (s,S) 政策と呼ばれる政策である。

□

注 1. 定理 2.1 は条件 (A) が (s,S) 政策が最適政策となる十分条件であることを示している。もし、条件 (A) の右辺が正であるならば、非増加であるすべての p.d.f. に関して条件 (A) は成立する。さらにこの問題は Aneja and Noori[5] のタイプの問題 $(B_2 = B, B_1 = 0)$ と Scarf[117] タイプの問題 $(B_2 = B_1 = 0)$ を含んでいる。

2.4 多期間問題

この節では条件 (A) が多期間問題においても (s,S) 政策が最適となる十分条件であることを示す。このことは Aneja and Noori に関しては成立しない。なぜならばこの証明と彼らの証明は異なるからである。$G_n(y)$ を以下で定義する。

$$G_n(y) = cy + L(y) + \rho \int_0^\infty C_{n-1}([y-\xi]^+)\phi(\xi)d\xi \qquad (y > x) \tag{2.17}$$

$n = 1, \ldots, N.$

我々は定理 2.2 を証明するために以下で定義する $K-$凸関数の性質を利用する。

定義 (K-凸関数 [117]). $K \geq 0$ 、$G_n(x)$ は微分可能であるとする。任意の x と $a > 0$ に対して、以下の式が成立するならば、$G_n(x)$ は $K-$関数である。

$$K + G_n(a+x) - G_n(x) - aG_n'(x) \geq 0, \tag{2.18}$$

定理 2.2 を証明するために重要な命題 2.1 、2.2 で与えられる $K-$凸関数に対する性質を示す。

命題 2.1(Scarf[117]).

1. 0−凸 関数 は通常の凸関数である。
2. もし $f(x)$ が $K-$凸であるならば $f(x+h)$ もすべての h について $K-$凸である。
3. もし f と g がそれぞれ K_1-凸、K_2-凸であるならば、正である α と β に対して $(\alpha f+\beta g)$ は $(\alpha K_1+\beta K_2)-$凸である。
4. $g_n(x)$ が $K-$凸ならば、$\int_0^\infty g_n(x-\xi)\phi(\xi)d\xi$ も $K-$凸である。

命題 2.2(Denardo[38]). $h(y)$ は凸かつ Y 上で非減少であるとする。$C(x)$ は集合 $X \supseteq \{h(y)|y \in Y\}$ 上で $K-$凸であるとする。もし、X の集合の要素である $a < c$ に対して $C(a) \le C(c)+K$ であるならば、$C[h(y)]$ は Y 上で $K-$凸である。

定理 2.2. 条件 (A) が成立するならば、$G_n(y)$ は各 n に対し、y 上で $K-$凸である。

証明: 証明は n に関する帰納法による。$n=1$ に関して、第 2.3節で見たように条件 (A) の下で $G_1(y)=cy+L(y)$ が凸であることがわかる。Scarf の議論 (もしくは (2.14) 式) に従うと、$C_1(x)$ は $K-$凸である。$C_{n-1}(\cdot)$ が $K-$凸であると仮定する。$F_n(y|x)$ を以下で定義する。

$$F_n(y|x) \equiv H(y-x)+L(y)+\rho\int_0^\infty C_{n-1}([y-\xi]^+)\phi(\xi)d\xi, \tag{2.19}$$

また、$G_n(y)$ を以下のようにおく。

$$G_n(y)=\begin{cases} F_n(y|x)-K+cx, & \text{if } y>x \\ F_n(x|x)+cx, & \text{if } y=x. \end{cases} \tag{2.20}$$

$y \ge x$ に対して、

$$G_n(y)=cy+L(y)+\rho\int_0^\infty C_{n-1}([y-\xi]^+)\phi(\xi)d\xi \tag{2.21}$$

である。第 1 項と第 2 項の和は $G_1(y)$ であるので、仮定 (A) の下では 0−凸である。第 3 項の $K-$凸性は以下の議論より導かれる。
命題 2.2 との関係より、$C(x)=C_{n-1}(x)$ 、 $h(y)=[y-\xi]^+$ とする。$C_{n-1}(x)$ は $K-$凸であるので、$a<c\le S$ もしくは $a<S<c$ に対して $C_{n-1}(a)-C_{n-1}(c)\le K$ が

成立する。$C_{n-1}(x)$ は $x \geq S$で非減少であるので $S < a < c$ を満たすすべてに対し、$C_{n-1}(a) \leq C_{n-1}(c) + K$が成立する。一方、$h(y) = [y - \xi]^+$は非減少かつ yで凸であることから、合成関数 $C_{n-1}([y-\xi]^+)$ は yで $K-$凸となる。したがって、命題 2.1 より

$$\rho \int_0^\infty C_{n-1}([y-\xi]^+)\phi(\xi)d\xi \tag{2.22}$$

は$\rho K-$凸である。$K-$凸性の定義より、$0 < \rho \leq 1$ であるρに対して$\rho K-$凸は $K-$凸である。$G_n(y)$ は $0-$凸と $K-$凸の和の関数であるので命題 2.1 より $K-$凸であることがわかる。

□

定理 2.3. 需要の p.d.f.,$\phi(\xi)$, が条件 (A) を満たすならば、多期間問題に関して (s_n, S_n) 政策が最適である。

証明: 定理 2.2 から、すべての n について $G_n(y)$ が $K-$凸であることがわかる。Scarf [117] の古典的な $n-$期間問題に関する証明の議論に従えば、最適政策は (s_n, S_n) 政策となる。ここで

$$G_n(S_n) = Min_y G_n(y) \qquad \text{かつ} \qquad G_n(s_n) = K + G_n(S_n) \tag{2.23}$$

である。この政策は手持ち在庫が再発注水準 s_nより小さいならば、発注することによって在庫補充水準 S_nまで十分再補充し、さもなくば（ s_n以下のとき)、発注しない。この政策にしたがう最小期待費用は以下のようになる。

$$C_n(x) = \begin{cases} K + c(S_n - x) + C_n(S_n) = K - cx + G_n(S_n), & \text{if } x < s_n, \\ -cx + G_n(x), & \text{if } x \geq s_n. \end{cases} \tag{2.24}$$

□

2.5 種々の需要分布

この節では p.d.f. $\phi(\cdot)$ が与えられたとき、条件 (A) がどのようになるかを見ていく。もし、p.d.f. $\phi(\cdot)$ として一様分布、 指数分布、 正規分布、ガンマ分布をそれぞ

表 2.1: 条件 (A) の左辺

分布	関数 ϕ	ϕ'	$\frac{\phi'}{\phi}$
一様	$\frac{1}{b-a}$	0	0
指数	$\alpha exp(-\alpha y)$	$-\alpha^2 exp(-\alpha y)$	$-\alpha$
正規	$\frac{e(y)}{\sqrt{2\pi}\sigma}$	$-\frac{(y-\mu)e(y)}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}$	$-\frac{y-\mu}{\sigma^2}$
ガンマ	$\frac{F(y)}{\Gamma(\nu)}$	$\frac{F(y)(\nu-1-\alpha y)}{\Gamma(\nu)y}$	$\frac{\nu-1}{y}-\alpha$

$$e(y) \equiv exp(\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}), F(y) \equiv \alpha^\nu y^{\nu-1} exp(-\alpha y), \nu \neq 1$$

れとるならば、条件 (A) は表 2.1に示されるようなものとなる。以下では2つの場合（1）、（2）に分けてみていく。

(1):

$$B_2 - B_1 > 0 \text{ に対して、} \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} \leq \frac{h+p}{B_2 - B_1} \text{がすべての } y \in \Re^+ \text{について成立する。} \tag{2.25}$$

もし、$\sup_{0<y<\infty}\{\frac{\phi'(y)}{\phi(y)}\} \leq \frac{h+p}{B_2-B_1}$ が成立すれば、条件 (A) はただちに満たされる。したがって、任意の一様分布と指数分布に関しては条件 (A) が満たされる。一方ϕがパラメータ (μ, σ), を持つ正規分布である時条件 (A) は以下のように表せる。

$$y \geq \mu - \frac{(h+p)\sigma^2}{B_2 - B_1} > 0. \tag{2.26}$$

$Pr\{-4\sigma + \mu < y < 4\sigma + \mu\} \approx 1$ と $Pr\{0 \leq y < \infty\} = 1$ であることから、条件 (A) は以下の場合に満たされることになる。

$$4\sigma \leq \mu \quad \text{かつ} \quad \frac{(h+p)\sigma}{B_2 - B_1} > 4. \tag{2.27}$$

すなわち、$(h+p)$ が $|B_2 - B_1|$ に比べて十分大きいならば、(2.27) 式は満たされる。

パラメータ (α, ν) をもつガンマ分布に対しては条件 (A) は以下のようにかける。

$$y \geq \frac{(\nu - 1)(B_2 - B_1)}{\alpha(B_2 - B_1) + h + p}. \tag{2.28}$$

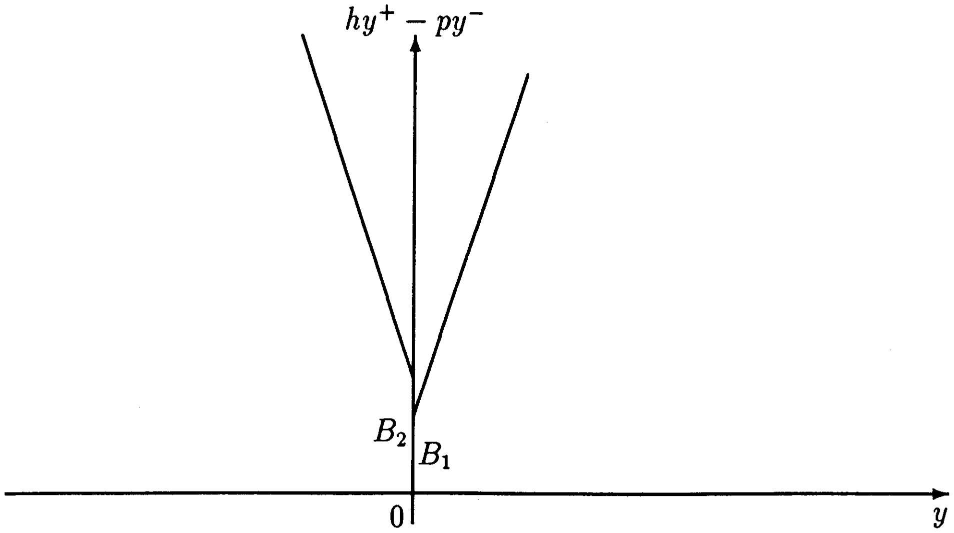

図 2.3: $B_1 < B_2$である場合の在庫費用

したがって、もし、以下の式が満たされれば、

$$0 < \nu < 1 \tag{2.29}$$

条件 (A) は成立する。さらに、もし、(2.29) が成立しなくとも $(h+p)$ が $|B_2 - B_1|$ に比べて十分大きいならば (2.28) 式は成立する。(図 2.3参照).

(2):

$$B_2 - B_1 < 0 \text{ に対して、} \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} \geq \frac{h+p}{B_2 - B_1} \text{がすべての } y \in \Re^+ \text{について成立する。} \tag{2.30}$$

もし、$\inf_{0<y<\infty}\{\frac{\phi'(y)}{\phi(y)}\} \geq \frac{h+p}{B_2-B_1}$ が成立するならば、条件 (A) は満たされ、一様分布である場合直ちに条件 (A) は満たされる。

平均が $1/\alpha$である指数分布に対しては条件 (A) は以下のように書ける。

$$\alpha < |\frac{h+p}{B_2 - B_1}|. \tag{2.31}$$

この場合 $(h+p)$ が $|B_2 - B_1|$ に比べて十分大きいとき、不等式 (2.31) は成立する (図 2.4参照)。

パラメータ (μ, σ) を持つ正規分布に関して、条件 (A) は以下のように書ける。

$$y \leq \mu - \frac{(h+p)\sigma^2}{B_2 - B_1}(< \mu). \tag{2.32}$$

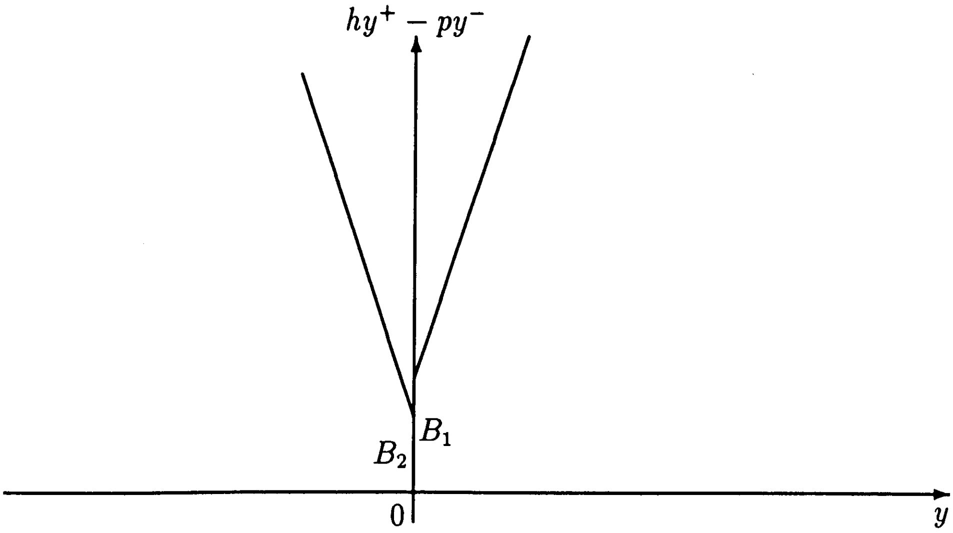

図 2.4: $B_1 > B_2$である場合の在庫費用

$Pr\{-4\sigma + \mu < y < 4\sigma + \mu\} \approx 1$ と $Pr\{0 \leq y < \infty\} = 1$ であることから、条件 (A) は以下の場合に満たされることになる。

$$4\sigma \leq \mu \quad \text{かつ} \quad -\frac{(h+p)\sigma}{B_2 - B_1} > 4. \tag{2.33}$$

すなわち、$(h+p)$ が $|B_2 - B_1|$ に比べて十分大きいならば、(2.33) 式は満たされる。

パラメータ (α, ν) をもつガンマ分布に対しては条件 (A) は以下のようにかける。

$$y \leq \frac{(\nu - 1)(B_2 - B_1)}{\alpha(B_2 - B_1) + h + p}. \tag{2.34}$$

したがって、もし

$$\alpha(B_2 - B_1) + h + p < 0, \tag{2.35}$$
$$|\alpha(B_2 - B_1) + h + p| \approx 0, \qquad \text{かつ } \nu > 1,$$

であるならば、不等式 (2.34) は成立する。以上の議論をまとめると以下に示される命題 2.3 を得る。

命題 2.3.(表 2.2)

(1)

任意の一様分布、指数分布に対して条件 (A) は成立する。

表 2.2: 例に対する結果

場合	分布			
	一様	指数	正規	ガンマ
(1)	○	○	△ : (2.27)	△ : (2.28)
(2)	○	△ : (2.31)	△ : (2.33)	△ : (2.34)

○:仮定なしで条件 (A) が成立する。
△:もし不等式の条件が満たされれば条件 (A) は成立する。

もし、ϕが (2.27) 式を満たす正規分布もしくは (2.28) 式を満たすガンマ分布であるならば条件 (A) は成立する。

(2)

任意の一様分布に t に対して条件 (A) は成立する。

ϕが (2.31) 式を満たす指数分布、(2.33) 式を満たす正規分布、(2.34) 式を満たすガンマ分布であるならば、条件 (A) は成立する。

2.6 あとがき

本章では、固定発注費用に加え固定在庫・品切れ費用を含む有限期間確率的在庫管理システムが条件 (A) の下で (s,S) 政策が最適となることを示した。この結果の証明は Aneja and Noori[5]. によって与えられたものと違いより簡潔なものであった。また、この章では固定的な費用を含む在庫システムについて (s,S) 政策のクラスがいかに重要であるかも示した。

さらに、多期間問題に対して (s,S) 政策が最適となるための十分条件である条件 (A) を導いた。しかし、この条件は (s,S) 政策が最適になる需要のクラスを制限することになった。すなわち、実際、需要の確率分布が一様、指数、正規、ガンマと具体的に与えた場合条件 (A) が成立するための他のパラメータに対する制約が必要なものがあることが明らかになった。

第3章

需要に時間的なずれがある在庫管理

3.1 まえがき

ホテルの空部屋、旅客機やコンサート等の座席などはそれぞれの業界で“在庫”と呼ばれている。これらの在庫品の特徴は、販売可能な総量が予め固定されていて売れ残った在庫を次期に繰り越すことが不可能であることである。このように在庫を次期に繰り越すことができないという物理的特性に対抗するために、これらの企業は同一の質の在庫品に対して複数の料金を設定し、比較的に早い時期に種々の割引券を発行して需要の確保を意図している。一方、利用者も同一の質の在庫品に対して種々の選好を有している。たとえば、旅客機をビジネス上の出張等で利用する場合と異なり、観光目的で利用する場合はできるだけ安い割引料金で比較的に早い時期に予約するのが通例である。

本章では、予め販売可能な在庫量が固定しているとき、これらの在庫品に対して発生時点と収益性の違いからくる2種類の需要がある場合を想定し、この2種類の需要の間で在庫品をどうのように配分すればよいかの決定問題を考察する。

ここで取り扱う在庫に対する2種類の需要を次のように定義する。早い時期に発生する需要を“早い需要”と呼び、その収益性は低い。一方、遅くれて発生する需要を“遅い需要”と呼び、その収益性は高い。ここでの在庫品の特徴は、スペース(空間)を売ることであるため、次期に繰り越しすることができないことと、満たされなかった需要は永遠に失われることである。この種の在庫品を取り扱う企業は、低い料金で商品を早い時期に提供することによって需要を掘り起こす。しかし、このことによって高い収益をもたらす需要を逃すことなく最終的な期待収益を最大にするような

管理政策を求めようとするのである。本章では、このタイプの決定問題を一般的な形で期待収益を最大にする問題として定式化する。ここで得られた知見は、収益性の高い需要が将来に遅れて実現すると期待されるならば、収益性の低い早い需要に対する在庫品の配分量に上限を設定することが望ましいということである。この知見は、季節物商品などピーク時を過ぎた場合に催されるバーゲン・セールにも適用可能である。バーゲン・セールのとき販売可能数量 (在庫量) に上限を設けて先着順何名までという販売戦略がしばしば採用される。この販売戦略の精神は、ピーク時を過ぎた需要を喚起すると共に類似の商品を通常の価格で購入しても良いと思っている客が、バーゲン商品の購入に移行するのを防止するためと見なすことができる。

Beckmann [17], Rothstein [112] および Sawaki [115] は旅客機の座席管理について類似の議論を展開している。旅客機の座席管理および収益管理の展望について、Belobaba [19] または沢木 [116] が行っている。ホテルの部屋の在庫管理については Liberman and Yechiali [81] と石垣 [71] が考察している。これらの従来のモデルは、2 種類の需要の独立性を仮定しているが、本章ではそのような独立性を仮定しない。従って、割引価格によって購入することができなかった早い需要が、普通価格で購入することを意図して、遅い需要に移行する可能性を認めている。

第 3.2節では、モデルの定式化を行った後で最適な在庫管理政策について分析する。特に、簡単な最適政策が存在するための十分条件について考察する。第 3.3節では、需要分布を特定化したとき、このモデルの最適な在庫管理政策について詳しく議論する。第 3.4節では、このモデルで得られた知見をまとめるとともに、モデルの応用範囲と将来の拡張の方向について言及する。

3.2 定式化と最適在庫管理政策

いま販売可能な在庫品の総量を C で表し、固定的な既知の値とし、次に述べる遅い需要の単位で表現されたものとする。この在庫品に対して 2 種類の需要を X,Y とし、それぞれ早く実現する需要 (早い需要) 及び遅く実現する需要 (遅い需要) と呼ぶことにする。計画期間のはじめで X および Y は確率変数であり、X の分布関数を $F(x)$, $X = x$ が与えられたときの Y の条件付き分布を $G(y|x)$ とする。決定変数を I とし、早い需要に配分される在庫量の上限とする。すなわち、早い需要からの売上量

は $\min\{I,X\}$ となる。したがって、遅い需要への在庫の配分量を $Q(I)$ とすれば、

$$Q(I) = C - \alpha \min\{I,X\} \tag{3.1}$$

となる。ただし、ここでαは早い需要 1 単位の遅い需要への換算率で、$\alpha \geq 0$ である。$\alpha = 1$ ならば、早い需要 1 単位は遅い需要 1 単位に等しく、$0 \leq \alpha < 1$ ならば、返品やオーバーブッキングの場合を想定する。旅客機の場合、早い需要を団体客のエコノミー席とし、遅い需要を個人客のビジネス席として座席のサイズを変更することが可能ならば、たとえば$\alpha = 2/3$ となる。さらに次のような記号を使用する。

$$\begin{aligned}
p_1 &= \text{早い需要への単位価格} \\
p_2 &= \text{遅い需要への単位価格} \\
h &= \text{売れ残った在庫品の単位保持費用} \\
s_1 &= \text{早い需要への単位当り品切れ費用} \\
s_2 &= \text{遅い需要への単位当り品切れ費用}
\end{aligned}$$

仮定 3.1 $\alpha(p_2+s_2)Pr\{Y > C\} < p_1 + s_1 < \alpha(p_2+s_2)$

早い需要の収益性を遅い需要の収益性よりも小さいことを保証するために $p_1 < \alpha p_2, s_1 < \alpha s_2$と仮定してもよいが、以下の最適な在庫管理政策を得るためには上記の仮定 3.1 で十分である。

早い需要に対して I単位の在庫量を配分したときの総期待利潤を $T(I)$ とすれば、$T(I)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
T(I) &= p_1 E[\min\{X,I\}] + p_2 E E_{Y|X}[\min\{Y,Q(I)\}] \\
&- hEE_{Y|X}[\max\{Q(I)-Y,0\}] - s_1 E[\max\{X-I,0\}] \\
&- s_2 EE_{Y|X}[\max\{Y-Q(I),0\}]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

問題は条件 $0 \leq \alpha I \leq C$の下で総期待利潤を最大にするように早い需要と遅い需要の間に在庫量 Cを配分することである。$\alpha = 1, X > I, Y < C - I$ のときの在庫量の変動を図示すれば図 3.1のようになる。図 3.1の場合、結果的には早い需要に対する在庫の配分が小さすぎたために遅い需要を満足した後にも 在庫の残りが発生したこと

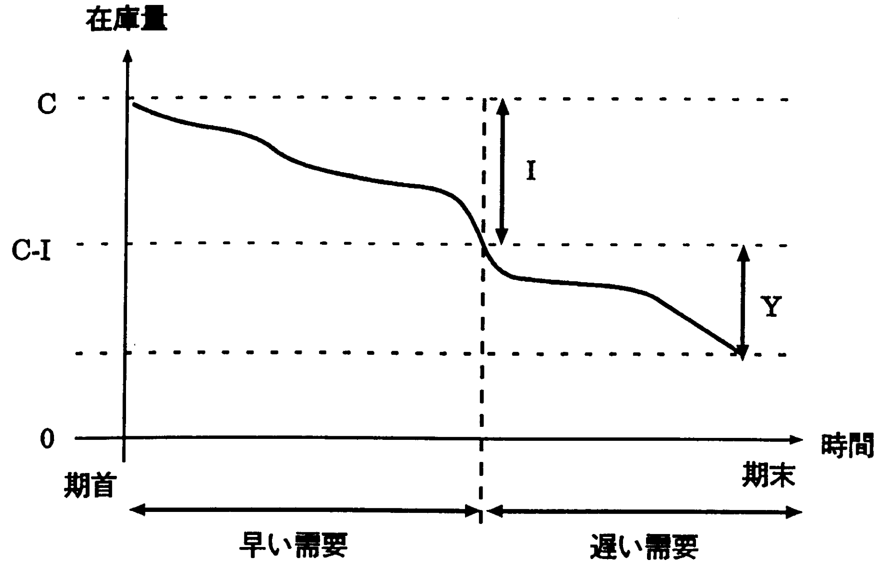

図 3.1: $\alpha = 1, X > I, Y < C - I$である場合の在庫変動

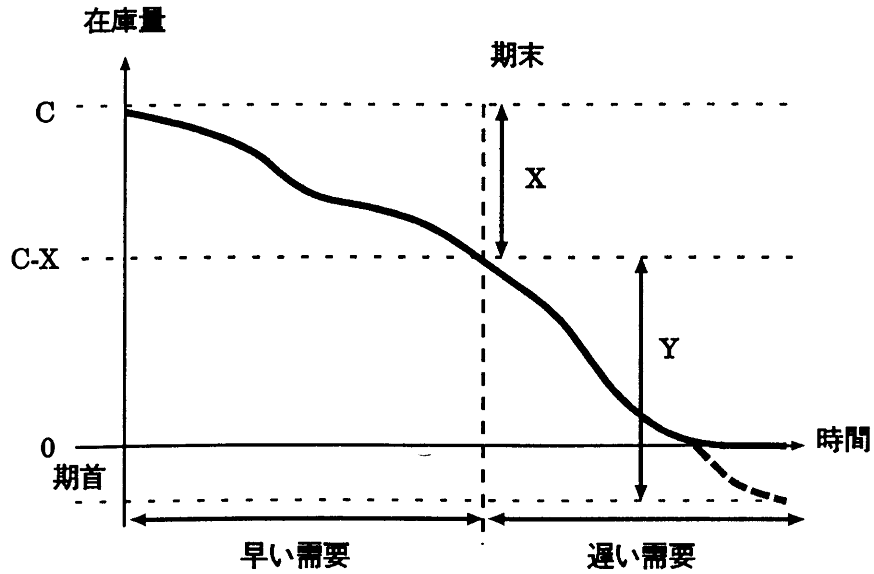

図 3.2: $\alpha = 1, X < I, Y > C - I$である場合の在庫変動

になる。逆に、図 3.2は$\alpha = 1, X < I, Y > C - X$ のときの図で、早い需要に対する在庫の配分量が過大で収益性の高い、遅い需要を喪しなった場合になっている。2つの需要の間で最適な在庫の配分量を求めるために次の仮定 3.2 を用意しよう。

仮定 3.2 $P[Y \geq C - \alpha I | X \geq I]$ は Iの単調増加関数である。

補助定理 3.1 仮定 3.1, 3.2 の下で、$T(I)$ は Iの単峰型である。

証明： (3.2) 式の $T(I)$ を Iに関して微分すれば、

$$\frac{dT(I)}{dI} = \overline{F}(I)\{(p_1 + s_1 + \alpha h) - \alpha(p_2 + s_2 + h)P[Y > C - \alpha I | X \geq I]\} \tag{3.3}$$

を得る。明らかに$\overline{F}(I) \geq 0$ であるから、上式の符号は右辺のカッコ { } の中の値によって決まる。仮定 3.1 より $(p_1 + s_1 + \alpha h) < \alpha(p_2 + s_2 + h)$ であり、仮定 3.2 より $P[Y \geq C - \alpha I | X \geq I]$ は Iの単調増加関数であるから $dT(I)/dI$の符号は正から負に一回変化する。すなわち、$dT(I)/dI = 0$ となる I^*が存在して、$I < I^*$では $T(I)$ は I の増加関数であり、$I > I^*$では Iの減少関数である。よって、$T(I)$ は Iの単峰型である。

□

補助定理 3.1 より、単峰型 $T(I)$ を最大にする I^*は次の定理 3.1 によって与えられる。

定理 3.1 すべての Iについて $F(I) < 1$ で $P[Y > C] \leq (p_1+s_1+\alpha h)/\alpha(p_2+s_2+h)$ かつ $P[Y > (1-\alpha)C | X \geq C] \geq (p_1 + s_1 + \alpha h)/\alpha(p_2 + s_2 + h)$ と仮定する。仮定 3.1, 3.2 の下で早い需要に対する在庫の最適な配分量 I^*は次式によって与えられる。

$$I^* = \max\{0 \leq \alpha I \leq C | P[Y > C - \alpha I | X \geq I] \leq \frac{p_1 + s_1 + \alpha h}{\alpha(p_2 + s_2 + h)}\} \tag{3.4}$$

証明： 条件 $F(I) < 1$ によって $dT(I)/dI = 0$ となる Iは (3.3) 式より

$$\alpha(p_2 + s_2 + h)P[Y > C - \alpha I | X \geq I] - (p_1 + s_1 + \alpha h) = 0 \tag{3.5}$$

を満たす。条件 $P[Y > C] \leq (p_1 + s_1 + \alpha h)/\alpha(p_2 + s_2 + h)$ かつ $P[Y > (1-\alpha)C | X \geq C] \geq (p_1 + s_1 + \alpha h)/\alpha(p_2 + s_2 + h)$ の下で仮定 3.1, 3.2 より (3.5) 式を満足する Iが少

なくとも 1 つ存在する。したがって、補助定理 3.1 より $T(I)$ を最小にする Iは (3.4) 式によって与えられる。

□

注 1. 定理 3.1 において、もし $P[Y > C] \geq (p_1 + s_1 + \alpha h)/\alpha(p_2 + s_2 + h)$ ならば、最適な在庫の配分量は $I^* = 0$ となる。これは、高い収益を生む遅い需要が総在庫量よりも大きい確率が早い需要の相対的な価格よりも大きいならば、早い需要への在庫の配分量は 0 であることを意味している。逆に、もし $P[Y > (1-\alpha)C | X \geq C] \leq (p_1 + s_1 + \alpha h)/\alpha(p_2 + s_2 + h)$ ならば、$I^* = C$となる。この場合は、早い需要が十分あるという情報の下で、遅い需要がある一定量 $(1-\alpha)C$以上で確率が早い需要の相対的な価格よりも小ならば、総在庫量をすべて早い需要に配分せよと主張している。

注 2. 定理 3.1 の (3.4) 式を注意深く観察すれば、早い需要への在庫の最適な配分量 I^*は、早い需要と遅い需要の価格比 $(p_1 + s_1 + \alpha h)/\alpha(p_2 + s_2 + h)$ のみに依存して、各々の p_1, p_2, s_1, s_2の値には依存しない。

注 3. $P[Y > C - I | X \geq I]$ は Cの減少関数であるから、I^*は Cの増加関数である。

Xと Yが互いに独立ならば定理 3.1 は次の系 3.1 のごとく退化する。特に、最適な配分量が明示的な型で与えられる。

系 3.1 もし $\alpha = 1$ でかつ Yと Xが互いに独立で Yの分布 $G(\cdot)$ が厳密な増加関数ならば、早い需要への最適な在庫配分量 I^*は

$$I^* = \left\{ \begin{array}{ll} C, & \overline{G}(0) \geq \frac{p_1+s1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)} \text{のとき} \\ C - \overline{G}^{-1}\left(\frac{p_1+s1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)}\right), & \overline{G}(0) < \frac{p_1+s1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)} < \overline{G}(C) \text{ のとき} \\ 0, & \overline{G}(C) \leq \frac{p_1+s1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)} \text{のとき} \end{array} \right\} \tag{3.6}$$

となる。ただし、$\overline{G} = 1 - G$ である。

注 4. Xと Yが互いに独立ならば、$T(I)$ が単峰型になるために仮定 3.1 を必要としない。したがって、最適な在庫の配分量 I^*は仮定 3.1, 3.2 が成立しなくても系 3.1

のように与えられる。一方、遅い需要への配分量は $C - I^* = \overline{G}^{-1}(\frac{p_1+s1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)})$ となって、Cと Fから独立である。

注 5. 定理 3.1 の注 3 で I^*が Cの増加関数であることを言及したが、系 3.1 では、比率 I^*/Cもまた Cの増加関数である。

注 6. 系 3.1 のように Xと Yが互いに独立ならば、早い需要への最適な在庫の配分量は早い需要の分布関数 $F(\cdot)$ から独立であって、遅い需要の分布関数 $G(\cdot)$ と 2 つの需要の価格比のみに依存する。

3.3 種々の需要分布

この節では、第 3.2節のモデルの特別な場合や需要の分布関数を特定化した場合について議論する。

例 3.1–早い需要が十分にある場合

$I \leq C$なるすべての Iに対して $\Pr(X > I) = 1$ と仮定しよう。このとき $\Pr[Y > C - I|X > I] = \Pr[Y > C - I] = \overline{G}(C - I)$ となる。$\alpha = 1$ のとき、(3.2) 式の $T(I)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} T(I) &= p_1 I + p_2 E[\min\{Y, C - I\}] \\ &- hE[\max\{C - I - Y, 0\}] - s_1 E[X - I] \\ &- s_2 E[\max\{Y - C - I, 0\}] \end{aligned} \tag{3.7}$$

上式の右辺において、第 1 項は Iの線形であり、その他の項はすべて Iの凹関数であることが判る。従って、$T(I)$ は Iの凹関数である。条件 $0 \leq I \leq C$の下で $T(I)$ を最大にする Iを求めるために、その導関数を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dT(I)}{dI} &= p_1 - p_2 P[Y > C - I] + hP[Y < C - I] + s_1 - s_2 P[Y > C - I] \\ &= (p_1 + s_1 + h) - (p_2 + s_2 + h)P[Y > C - I] \end{aligned}$$

故に、仮定 3.1 の下で最適な在庫の配分量 I^*は

$$I^* = C - \overline{G}^{-1}(\frac{p_1 + s_1 + h}{p_2 + s_2 + h}) \tag{3.8}$$

となる。(3.8) 式で与えられる I^*は定理 3.1 の (3.4) 式および系 3.1 の (3.6) 式と基本的には同類であるが、(3.8) 式の I^*は仮定 3.2 を必要としないことである。

例 3.2–需要が 2 変量正規分布に従う場合

ここでは$\alpha = 1$ とする。Xと Yが 2 変量正規分布に従い、Xと Yの相関係数が非負ならば、仮定 3.2 が成立することは容易に確認できる。直観的な説明は次のようになる。明らかに、$\Pr[Y \geq C - I]$ は Iの増加関数である。Xと Yの間に非負の相関関係があるとき、$X \geq I$であるという情報は、$\Pr[Y \geq C - I|X \geq I]$ の単調性を逆転させない。ここでは、2 種類の需要が依存する場合と独立である場合について定理 3.1 と系 3.1 の最適な在庫の配分量を数値的に求めてみよう。

Xと Yの平均及び標準偏差をそれぞれ$\mu_X = 70$、$\mu_Y = 30$、$\sigma_X = 26.5$、$\sigma_Y = 11.5$、とし、相関係数は$\rho = 0$（独立な場合）と$\rho = 0.9$（依存する場合）の 2 つ場合を考える。価格や費用については、その比率のみが意味を持つから、$(p_1+s_1+h)/(p_2+s_2+h) = 0.6$ とする。表 3.1は、総在庫量が $46, 60, 80, 100, 120, 140$ 単位である種々の値の場合について、早い需要と遅い需要に対する最適な在庫の配分量を表している。表 3.1を観察すると、独立な場合、総在庫量の値にかかわらず遅い需要への配分量は常に 27 単位の定量となっている。系 3.1 からも判るように独立の場合、最適な配分量が遅い需要の分布関数と相対価格の比率のみによって決まるからである。さらに、この数値例では依存する場合の最適な早い需要への配分量 I^*は、独立の場合の I^*を超過することはない。これは直観的に次のように考えられる。Xと Yの間に正の高い相関関係があるから、$X \geq I$という情報は収益性の高い遅い需要が大である可能性を示唆する。従って、依存する場合には、早い需要（低い収益性）への在庫の配分量は小さくなる。定理 3.1 と系 3.1 から、最適な配分量 I^*は Cの増加関数である。I^*/Cもまた Cの増加関数であることが判る。さらに、依存する場合の比率 I^*/Cは独立の場合のそれを下回っている。

例 3.3–需要が指数分布に従う場合

Xが平均 $1/\lambda$の指数分布に従い、$Y = X/\beta, \beta > 0, \alpha = 1$ とする。早い需要の $(1/\beta)\%$ が遅い需要を形成すると見做そう。

$Pr[Y > C - I|X \geq I] = e^{-\beta\lambda C}e^{\lambda(\beta+1)I}, I \leq \beta C/(1+\beta)$、その他の正の Iに対しては 1 とする。明らかに Iの増加関数であるから、仮定 3.2 を満足する。故に、定理

表 3.1: 最適な在庫の配分量 $(I^*, C-I^*)$

ρ	C 46	60	80	100	120	140
独立な場合 (ρ=0)	(19, 27)	(33, 27)	(53, 27)	(73, 27)	(93, 27)	(113, 27)
依存する場合 (ρ=0.9)	(19, 27)	(32, 28)	(49, 31)	(65, 35)	(81, 39)	(97, 43)
$I^*/C(\rho=0)$	0.41	0.55	0.66	0.73	0.77	0.80
$(\rho=0.9)$	0.41	0.53	0.61	0.65	0.67	0.69

3.1 より

$$I^* = \frac{\beta}{\beta+1}C + \log(\frac{p_1+s_1+h}{p_2+s_2+h})^{\frac{1}{\lambda(\beta+1)}} \tag{3.9}$$

となって、$I^* \leq C$を満たす。一方、XとYが独立であるとすれば

$$\begin{aligned} P[Y > C-I] &= P[X > \beta(C-I)] \\ &= e^{-\lambda\beta(C-I)} \end{aligned}$$

となり、独立の場合の最適な在庫の配分量をI^{**}とすれば、系 3.1 より

$$I^{**} = C + \log(\frac{p_1+s_1+h}{p_2+s_2+h})^{\frac{1}{\lambda\beta}} \tag{3.10}$$

となる。(3.9)、(3.10) 式を比較すれば、$\beta > 0$、仮定 3.1 の下で

$$I^* \ < \ I^{**}$$

を得る。これは例題 2 の 2 変量正規分布の場合の結論と一致する。

3.4 あとがき

本章では、発生時期に違いのある 2 種類の需要に対して固定的な総在庫量をどのように配分すれば良いかについて分析した。収益性の高い遅い需要が将来に期待されるとき、収益性の低い早い需要への在庫の配分量に上限を設定することにより総在庫量の配分から獲得される期待収益を最大にすることが可能であることを示した。早い需要と遅い需要の間に確率的な依存関係がある場合、条件付分布関数にある種の単調性が成立するならば（仮定 3.2 ）、早い需要への最適な在庫の配分量 I^*が

$$I^* = \max\{0 \leq \alpha I \leq \alpha C | P[Y \geq C - \alpha I | X \geq I] \leq \frac{p_1+s_1+\alpha h}{\alpha(p_2+s_2+h)}\}$$

で与えられる。早い需要の中で在庫品を購入できなかった客がより高い価格で遅い需要として在庫品を購入する可能性があるならば、このように、収益性の低い早い需要に対して在庫品の配分量に上限を設けることは我々の経済的直観とも一致する。

ここで取り扱ったモデルは 1 期間の静的モデルであって、早い需要が実現される過程を観察しつつ、在庫量の配分の上限を修正・更新するような動的な在庫管理モデルではない。在庫量の減少を絶えずモニターしながら在庫の配分の上限を逐次に改定するようなモデルが次に考えられるであろう。さらに、モデルの拡張方向として、単に 2 種類の需要だけでなく、より一般に N 種類の需要が存在するとき各需要への在庫量の配分政策を議論することである。いずれの場合もここで取り扱ったモデルよりも複雑で難解なモデルであるが、在庫の繰越しが認められず総在庫量が固定しているよう商品を販売する企業にとっては重要で現実的な問題であると言わなければならない。

第 4 章

周期観測多品目在庫管理

4.1 まえがき

本章では計画期間が無限である周期観測のもとで確率的な多品目在庫管理システムを考える。需要は各期独立かつ同一な既知の分布に従う確率ベクトルであるとする。このタイプの在庫管理システムは多くの研究者によって研究が進められてきた。

Veinott [140][142] と Ignall and Veinott [70] は需要が発注後の在庫水準と独立であり、発注費用が線形である在庫管理システムに付いて議論した。このシステムは満たされない需要の部分的な繰り越しと完全なバックログを許すものであった。さらに満たされない需要がバックログされるときには、発注に対する固定的な納入遅れが仮定された。彼らは付加的な条件の下で、任意の初期条件に対して N−期間問題に対する最適政策が myopic ordering policy となることを示した。

発注費用が線形費用と固定的な段取り費用の和で表せる多品目在庫システムに関しては Johnson [75], Kalin [77], Mahoney and Sivazlian [86], Sivazlian [132][133] ,Sivazlian and Wei [134] らによって研究がなされてきた。

Johnson [75] は満たされない需要がバックログされ、各品目の在庫水準が整数値のみをとる多品目在庫システムを論じた。各品目に対する需要は非負の整数値をとり、その分布は発注後の在庫水準に依存するものと仮定された。この条件の下で彼は (σ, S) 定常政策の最適性を証明し、その最適政策を実際に計算するための効率的なアルゴリズムを提案している。Sivazlian [132] と Mahoney and Sivazlian [86] は需要がアーラン分布に従い、連続的な在庫水準をとる在庫システムで (σ, S) 政策に関する分析を行った。一般的な発注費用を含む 2 品目在庫システムに関して Goswick and

Sivazlian [56] は$\sigma, S)$ 政策よりもより一般的な混合政策 (mixed reorder poilcy) を提案している。

Kalin [77] は需要の部分的もしくは完全なバックログが認められる場合の多品目在庫システムに関し、かなり一般的な条件の下で (σ, S) 政策の最適性を証明している。近年 Sivazlian and Wei [134] が近似的な最適発注政策の計算アルゴリズムを提案した。Goswick and Sivazlian [56] を除くすべての研究者は発注費を各品目の発注量に比例的な費用と固定的な費用の和と仮定している。

以下本章では、満たされない需要の部分的もしくは完全なバックログを認め、一般的な発注費用を有する周期観測のもとで確率的な多品目在庫管理システムを考える。この一般的な在庫管理システムに関しては、第4.6節で反例として示すように (σ, S) 政策も混合発注政策も最適とならない。我々の目的は、この在庫管理システムにおいて単位時間当たりの平均費用を最小にするような最適発注政策を計算する新しいアルゴリズムを提供することである。この問題はマルコフ決定過程 (Undiscounted Markov Decision Process;UMDP) として定式化でき、標準的な解法として政策反復法 (Policy Iteration Method;PIM) がよく知られている。しかし、この方法によると各反復ごとに状態数と同次元の連立一次方程式を解くことが要求され、問題（状態数）が大きくなるにつれて、計算時間が莫大なものとなり適用が困難になる。我々はこの問題を緩和するために問題の構造を利用し、新しいアルゴリズムを提供する。第4.2節では一般的な多品目在庫管理システムを説明し、この章を通して仮定される条件を列挙する。第4.3節ではこの多品目在庫管理システムが UMDP として定式化され、さらに有限 UMDP の単純連鎖となることを示す。第4.4節ではシステムの構造を明かにする定理を示し、その定理と PIM より新しいアルゴリズムを導出する。第4.5節は前節で導出した性質を割引を考慮した MDP(Discounted Markov Decision Process;DMDP) に適用する。第4.6節では数値例によって提案したアルゴリズムを PIM と比較し、新しいアルゴリズムの優位性を示す。

4.2 多品目在庫管理システム

発注費用の形が一般的であり、超過需要が部分的もしくはすべてバックログされ、周期的な観測を行う N品目在庫管理システムを考える。もしロストセールを仮定す

るならば、品物の納入遅れはないものとする。ここで $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)^\top$ を各期首における発注前の手持ち在庫水準とする。ここで $x_n \in \mathbf{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \cdots\}(n \in \mathrm{N} = \{1, 2, \cdots, N\})$ であり、$\top$ は転置を表す。Johnson [75] を除くすべての論文は連続状態を論じているが、我々はより現実的である離散状態を議論する。発注は $\mathbf{x}$ と発注政策 fによって決定され、$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_N)^\top \in \mathbf{Z}^N$ まで発注したとき、段取り費用を含む発注費 $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が発生する。各期の需要 $\mathbf{D} = (D_1, D_2, \cdots, D_N)^\top$, $D_n \in \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}(n \in \mathrm{N})$ は独立な同一分布$\phi(\mathbf{y}, \mathbf{D})$ に従うものと仮定する。その期に需要 $\mathbf{D}$ が発生したならば、1 期間当たり在庫・品切れ費用 $l(\mathbf{y}, \mathbf{D})$ が発生する。したがって、各期における期待在庫・品切れ費用 $L(\mathbf{y})$ は

$$L(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{D} \geq \mathbf{0}} \phi(\mathbf{y}, \mathbf{D}) l(\mathbf{y}, \mathbf{D})$$

で与えられる。ここで $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Z}^N)$ は $x_n \leq y_n (n \in \mathrm{N})$ を表し、$\mathbf{x} < \mathbf{y}$ は $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ を意味するものとする。また、次期の期首在庫は $u(\mathbf{y}, \mathbf{D})$ によって与えられるものとする。例えば、バックログを仮定する場合、$u_B(\mathbf{y}, \mathbf{D}) = \mathbf{y} - \mathbf{D}$ となり、ロストセールを仮定する場合、$u_L(\mathbf{y}, \mathbf{D}) = ([y_1 - D_1]^+, [y_2 - D_2]^+, \cdots, [y_N - D_N]^+)^\top$, $[y_n - D_n]^+ = \max\{y_n - D_n, 0\}(n \in \mathrm{N})$ である。

状態 $\mathbf{x}$ の値からなる状態空間 $\mathbf{X}$ は倉庫容量$\overline{\mathrm{M}}$ と在庫処理環境（例えはバックログ (B), ロストセール (L) ）によって制約される。例えば、バックログの場合

$$\mathbf{X}_B = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^N ; \sum_{n \in \mathrm{N}} a_n x_n^+ \leq \overline{\mathrm{M}}\}$$

であり、ロストセールの場合

$$\mathbf{X}_L = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}_+^N ; \sum_{n \in \mathrm{N}} a_n x_n \leq \overline{\mathrm{M}}\}$$

となる。ここで a_nは n 番目の品目 1 個当たりの大きさであり、$x_n^+ = \max\{x_n, 0\}, n \in \mathrm{N}$ である。X_Bは加算集合であり X_Lは有限集合である。以下の条件を本章を通じて仮定する。

条件 4.1. $\mathbf{x} < \mathbf{y} < \mathbf{z}$ であるような任意の在庫水準 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}$ に対して以下の式が成立する。

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + K(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \text{かつ} \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0.$$

条件 4.2. もし $\mathbf{X}$ が有限でないならば $\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} L(\mathbf{x}) = \infty$ である。すなわち、すべての実数 Mに対して、$\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ かつ $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{z}_M$を満たすすべての $\mathbf{x}$ に対して $L(\mathbf{x}) > M$ となる $\mathbf{z}_M \in \mathbf{X}$ が存在する。

条件 4.3. もし $\mathbf{X}$ が有限でないならば各期の需要は有界である。すなわち、すべての $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ に対して

$$\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{D}) = 1$$

を満たすような有界集合 $\mathbf{B} \subset \mathbf{Z}_+^N$が存在する。

条件 4.4. ロストセールの仮定の下での $x_n = 0$ を除くすべての $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ と $n \in \mathbf{N}$ に対し $x_n > u_n(\mathbf{x}, \mathbf{D})$ が正の確率で成立する。

Johnson [75] と Kalin [77] では固定発注費用 $K > 0$ に対して

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K\delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

と仮定されている。ここで$\delta(\mathbf{0}) = 0$ であり、$\mathbf{x} > 0$ ならば$\delta(\mathbf{x}) = 1$ 、$\mathbf{c}$ は N次元の価格行ベクトルである。明らかにこの発注費用は条件 4.1 を満たし、条件 4.2 と条件 4.3 は可算である Xに対してのみ要求される条件である。また、確率 1 で需要 0 をとる品目は在庫管理の対象として無視できるので条件 4.4 は一般的な在庫管理システムについて成立する。目的は計画期間が無限にわたる在庫管理システムの単位期間当たりの期待費用を最小にする最適発注政策を見つけることである。

4.3 マルコフ決定過程

前節の多品目在庫管理システムは UMDP に定式化することができ、その最適方程式は次式で与えられる (Schweitzer and Federgruen [124]) 。

$$g(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in Y(\mathbf{x})}\{K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + L(\mathbf{y}) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}} \phi(\mathbf{y}, \mathbf{D}) v(u(\mathbf{y}, \mathbf{D}))\}, \tag{4.1}$$

$$g(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\{\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}} \phi(\mathbf{y}, \mathbf{D}) g(u(\mathbf{y}, \mathbf{D}))\}, \tag{4.2}$$

ここで

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{X}; \mathbf{y} \geq \mathbf{x}\},$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{Y} : g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}} \phi(\mathbf{y}, \mathbf{D}) g(u(\mathbf{y}, \mathbf{D}))\}.$$

である。$g(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})$ をそれぞれ初期状態が $\mathbf{x}$ である時の最小期待平均費用、相対値とし、作用素 $\mathbf{T}$ を

$$\mathbf{T}v(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})v(u(\mathbf{x},\mathbf{D}))$$

と定義する。有限である Xの場合、確定的な定常マルコフ政策の中に最適政策が存在することがよく知られている。定常政策 fは $\mathbf{X}$ の部分集合σとσから $\mathbf{X}$ への写像 $S(\cdot)$ を用いて $f = (\sigma, S(\cdot))$ と表わすことができる。σは $(\sigma, S(\cdot))$ 政策は在庫水準 $\mathbf{x}$ において次のように発注を決定する。

$$\mathbf{x} \in \sigma \text{のとき} \quad S(\mathbf{x}) \text{まで発注する。}$$
$$\mathbf{x} \in \sigma^c \equiv \mathbf{X} - \sigma \text{のとき} \quad \text{発注しない。}$$

したがって、σを発注状態集合、σ^cを非発注状態集合と呼ぶことにする。

定理 4.1. 最適発注政策 $(\sigma, S(\cdot))$ は以下を満たす。

i) もし $\mathbf{X}$ が有限でないならば

$$\sigma^c \quad \subset \quad (\sigma^0)^c = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}; \mathbf{x} \geq \mathbf{z}_{g^0}\}, \tag{4.3}$$

である。ここで $\mathbf{z}_{g^0}$は仮定 2 の Mを以下で与えられる g^0によって置き換えたものである。

$$g^0 \quad = \quad \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{L(\mathbf{y}) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}} \phi(\mathbf{y},\mathbf{D})K(u(\mathbf{y},\mathbf{D}),\mathbf{y})\}. \tag{4.4}$$

ii) $\qquad S(\mathbf{x}) \in \sigma^c, \quad \mathbf{x} \in \sigma.$

iii)

$$v(\mathbf{x}) \quad = \quad K(\mathbf{x}, S(\mathbf{x})) + v(S(\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x} \in \sigma. \tag{4.5}$$

証明 条件 4.2 と 4.3 より最小値 g^0を与える状態 $\mathbf{y}^0 \in \mathbf{X}$ が存在するので、$\sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}; \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^0\}$ とおく。このとき、$(\sigma, \mathbf{y}^0)$ 政策は平均期待費用 g^0を与える。条件 4.2 より $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{z}_{g^0}$ において発注が行われたならば、単位期間当たり g^0よりも大きいな費用がかかることがわかる。このことは i) を示している。ある $\mathbf{x} \in \sigma$に対して $S(\mathbf{x}) \in \sigma$ であると仮定する。(4.1) 式の右辺は $\mathbf{x} = \mathbf{x}$ であるとき $\mathbf{y} = S(\mathbf{x})$ で、$\mathbf{x} = S(\mathbf{x})$ であ

るとき $\mathbf{y} = S(S(\mathbf{x}))$ で最小化される。すなわち、

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) &= K(\mathbf{x}, S(\mathbf{x})) + \mathbf{T}v(S(\mathbf{x})) \\ &\leq K(\mathbf{x}, S(S(\mathbf{x}))) + \mathbf{T}v(S(S(\mathbf{x}))), \qquad (4.6) \\ g(S(\mathbf{x})) + v(S(\mathbf{x})) &= K(S(\mathbf{x}), S(S(\mathbf{x}))) + \mathbf{T}v(S(S(\mathbf{x}))) \leq \mathbf{T}v(S(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

である。したがって、

$$K(\mathbf{x}, S(\mathbf{x})) + K(S(\mathbf{x}), S(S(\mathbf{x}))) \leq K(\mathbf{x}, S(S(\mathbf{x})))$$

が成立する。条件 4.1 に矛盾し、ii) が示される。$S(\mathbf{x}) \in \sigma^c$であることから、(4.1) 式より

$$g(S(\mathbf{x})) + v(S(\mathbf{x})) = \mathbf{T}v(S(\mathbf{x})). \qquad (4.7)$$

である。さらに、状態 $\mathbf{x}$ と $S(\mathbf{x})$ は同じ連鎖に属しているので、$g(\mathbf{x}) = g(S(\mathbf{x}))$ である。そのため、(4.6) における等式とと (4.7) は (4.5) 式を導く。

□

もし $\mathbf{X}$ が有限でないならば $\mathbf{X}^0$を

$$(\sigma^0)^c \cup \{u(\mathbf{x}, \mathbf{D}) \ \ \text{for all} \quad \mathbf{x} \in (\sigma^0)^c \ \ \text{かつ} \ \ \mathbf{D} \in \mathbf{B}\}$$

とおき、$\mathbf{X}^0$の状態数を N^0とする。定理 4.1 は最適政策の候補となるようなすべての発注政策の下で $\mathbf{X}^0$がすべての再帰的状態を含むことを意味している。逆に $\mathbf{X}^0$の外側のすべての状態は最適政策の下で常に過渡的状態であり、この状態における発注政策は最小平均期待費用に影響しない。したがって、有限集合 $\mathbf{X}^0$のみに対して最適政策を探せば十分である。$\mathbf{x} \notin \mathbf{X}^0$に対する最適政策 $S(\mathbf{x})$ は (4.5) 式より容易に計算できる。次の定理 4.2 では $\mathbf{X}$ が有限であるとき、$\mathbf{X}^0$は $\mathbf{X}$ を意味するものとする。

定理 4.2. 最小平均期待費用 $g(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ に対して定数である。すなわち、$g(\mathbf{x}) = g$ であり、最適方程式 (4.1) と (4.2) は次式に帰着する。

$$g + v(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \{K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{T}v(\mathbf{y})\}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{X}^0, \qquad (4.8)$$

ここで右辺の最小値を与える決定が最適政策である。

証明 Bather [16] は UMDP が互いに到達可能であれば平均期待費用 $g(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ によらず、定数となることを示している。UMDP が互いに到達可能とは、任意の $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}$ に対してある政策 f と正整数 r が存在し、その f の下で r ステップかかって状態 $\mathbf{x}$ から $\mathbf{z}$ へ遷移する確率が正となることである。発注集合 σ を以下で与える。

$$\{\mathbf{x}' \in \mathbf{X}; u(\mathbf{y}, \mathbf{D}) = \mathbf{z} \quad \text{かつ} \quad \phi(\mathbf{y}, \mathbf{D}) > 0 \quad \text{となるある } \mathbf{y} \text{に対して } \mathbf{x}' \leq \mathbf{y} \in \mathbf{X}\}.$$

もし $\mathbf{x} \in \sigma$ であるならば、適当な $\mathbf{y}$ まで発注される。このとき、状態 $\mathbf{x}$ は状態 $\mathbf{z}$ へ確率 $\phi(\mathbf{y}, \mathbf{D}) > 0$ で 1 ステップで遷移する。$\mathbf{x} \notin \sigma$ である場合、σ に入るまで発注されない。条件 4.4 はある正の確率で有限回ステップのちこのことが生じることを保証している。

□

4.4 新アルゴリズム

最適方程式 (4.8) として定式化される UMDP の標準的な解法は PIM である。この方法によれば最適発注政策が有限回の反復でえられることが知られている (Howard [66])。政策 f は反復ごとに改良されるので、それを明示するため反復回数を示すパラメータ k を導入する。

PIM

step 1:

任意の政策 $f_0 = (\sigma_0, S_0(\cdot)))$ を選び、$k = 0$ とする。

step 2:(政策評価ルーチン)

ある状態 $\mathbf{x}$ に対して $v_k(\mathbf{x}) = 0$ とし、以下の連立一次方程式を解いて、g_k と $v_k(\cdot)$ を決定する。

$$g_k + v_k(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}, S_k(\mathbf{x})) + \mathbf{T}v_k(S_k(\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x} \in \sigma_k \tag{4.9}$$

$$g_k + v_k(\mathbf{x}) = \mathbf{T}v_k(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \sigma_k^c \tag{4.10}$$

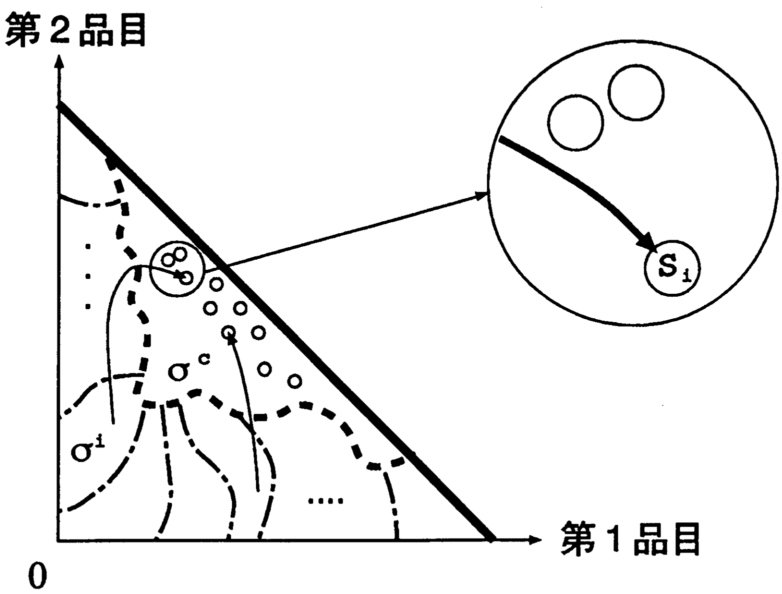

図 4.1: σ^iと S_iの関係

step 3:(政策改良ルーチン)

次式を満たす決定を選び、改良政策 f_{k+1} を定める。

$$\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\{K(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{T}v_k(\mathbf{y})\}, \tag{4.11}$$

ここで $\mathbf{Y}=\{\mathbf{y}\in\mathbf{X}^0;\mathbf{y}\geq\mathbf{x}\}$. もし f_kの決定が最小値を与えるならば、f_{k+1}の決定としてその決定をえらぶ。

step 4:

$f_k=f_{k+1}$ならば、政策 f_kは最適発注政策である。

さもなければ、$k=k+1$ とし、**step 2** へ戻る。

PIMから新しいアルゴリズムを導出するために以下の記号を定義する。$S_1,S_2,\cdots,S_m$ を $S(\mathbf{x})(\mathbf{x}\in\sigma)$ の相異なる発注先状態とし、σの分割$\sigma^1,\sigma^2,\cdots,\sigma^m$を $S_i=S(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\sigma^i(i=1,2,\cdots,m)$ であるようにとる (図 4.1) 。

また $\mathbf{x}\in\sigma^c$と $i=1,2,\cdots,m$ に対して $\mathbf{P}(\mathbf{x})^i$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ を以下のように定義

する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{x})^i &= \{\mathbf{D} \in \mathbf{B}; u(\mathbf{x},\mathbf{D}) \in \sigma^i\} \\
\mathbf{Q}(\mathbf{x}) &= \{\mathbf{D} \in \mathbf{B}; u(\mathbf{x},\mathbf{D}) \in \sigma^c \text{ かつ } \mathbf{x} \neq u(\mathbf{x},\mathbf{D})\} \\
\mathbf{R}(\mathbf{x}) &= \{\mathbf{D} \in \mathbf{B}; \mathbf{x} = u(\mathbf{x},\mathbf{D})\}
\end{aligned}$$

定理 4.3. 政策 $f = (\sigma, S(\cdot))$ に対して、相対値 $v(\mathbf{x})(\mathbf{x} \in \sigma)$ は (4.5) 式によって与えられ、期待平均費用 gと相対値 $v(\mathbf{x})(\mathbf{x} \in \sigma^c)$ は以下の式によって与えられる。

$$v(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} b^i(\mathbf{x})v(S_i) - c(\mathbf{x})g, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{x}) &= \frac{L(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})a(u(\mathbf{x},\mathbf{D}))}{1 - \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{R}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})} \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})K(u(\mathbf{x},\mathbf{D}),S_i)}{1 - \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{R}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
b^i(\mathbf{x}) &= \frac{\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})b^i(u(\mathbf{x},\mathbf{D}))}{1 - \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{R}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})} + \frac{\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})}{1 - \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{R}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})} \\
& i = 1, 2, \cdots, m,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$c(\mathbf{x}) = \frac{1 + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})c(u(\mathbf{x},\mathbf{D}))}{1 - \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{R}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})} \tag{4.15}$$

証明 σ^cが有限であるので$\gamma = \sum_{n=1}^{N} x_n$の帰納法で証明する。政策 $f = (\sigma, S(\cdot))$ に対して (4.10) 式を書き換えると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
g + v(\mathbf{x}) &= L(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})v(u(\mathbf{x},\mathbf{D})) \\
&= L(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})v(u(\mathbf{x},\mathbf{D})) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})v(u(\mathbf{x},\mathbf{D})) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{R}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})v(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{N} x'_n < \gamma$であるような任意の状態 $\mathbf{x}' \in \sigma^c$に対し (4.12) 式が成立するものとする。定理 4.1 と (4.12) 式から$\gamma = \sum_{n=1}^{N} x_n$であるような状態 $\mathbf{x} \in \sigma^c$に対して以下の式が成立する。

$$(1 - \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{R}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D}))v(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i} \phi(\mathbf{x},\mathbf{D})\{K(u(\mathbf{x},\mathbf{D}),S_i) + v(S_i)\}$$

$$+\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x},\mathbf{D})\{a(u(\mathbf{x},\mathbf{D}))+\sum_{i=1}^{m}b^i(u(\mathbf{x},\mathbf{D}))v(S_i)-c(u(\mathbf{x},\mathbf{D}))g\}-g$$

$$=L(\mathbf{x})+\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x},\mathbf{D})a(u(\mathbf{x},\mathbf{D}))+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i}\phi(\mathbf{x},\mathbf{D})K(u(\mathbf{x},\mathbf{D}),S_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\{\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i}\phi(\mathbf{x},\mathbf{D})+\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x},\mathbf{D})b^i(u(\mathbf{x},\mathbf{D}))\}v(S_i)$$

$$-\ \{1+\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\phi(\mathbf{x},\mathbf{D})c(u(\mathbf{x},\mathbf{D}))\}g. \tag{4.16}$$

(4.16) 式において $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ を空集合とすれば、σ^c内の最小水準γとなる状態 $\mathbf{x}$ で (4.12) 式が成立することを示している。したがって、$\mathbf{x}\in\sigma^c$であるようなすべての状態で (4.12) 式が成立する。

□

本定理は g, $v(S_1),\cdots$, $v(S_m)$ の値が与えられれば (4.12) 式によって $v(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in\sigma^c$ を計算できることを示している。これらの未知数は状態 $S_1,S_2,\cdots,S_m$が代入された (4.12) 式で $v(S_m)=0$ とおいた m 変数の連立一次方程式を解くことによって求められる。したがって、PIM のステップ 2 における N_0変数をもつ連立一次方程式 (4.9) と (4.10) は m 変数を持つ連立一次方程式に減らすことができる。次はステップ 3 政策改良ルーチンを考察する。

定理 4.4. PIM における政策改良式 (4.11) の領域 $\mathbf{Y}$は $(\sigma_k^c\cap\mathbf{Y})\cup\{\mathbf{x}\}$ に縮小できる。すなわち、(4.11) 式は次式でおきかえることができる。

$$\min\{\mathbf{T}v_k(\mathbf{x}),g_k+\min_{\mathbf{y}\in(\sigma_k^c\cap\mathbf{Y})}\{K(\mathbf{x},\mathbf{y})+v_k(\mathbf{y})\}\}. \tag{4.17}$$

証明 定理 4.1 の ii) より、$\mathbf{x}\in\sigma_k$であるとき $S_k(\mathbf{x})\in\sigma_k^c$である。一方、$\mathbf{x}\in\sigma_k^c$であれば、$f_k$の決定は $\mathbf{x}$ である。したがって、f_kの決定は必ず縮小された決定空間に含まれる。改良された政策 $f_{k+1}\neq f_k$が得られたならば、Veinott [143] の系 1 より $f_k\neq f_{k+1}$であるような $\mathbf{x}$ では $g_k>g_{k+1}$あるいは $g_k=g_{k+1},v_k(\mathbf{x})>v_{k+1}(\mathbf{x})$ が成立

する。今、ステップ 4 で $f_k = f_{k+1}$ であると仮定する。このとき $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \sigma_k \cap \mathbf{Y}$であるような任意の $\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ に対して

$$K(\mathbf{z}, S_k(\mathbf{z})) + \mathbf{T}v_k(S_k(\mathbf{z})) \leq \mathbf{T}v_k(\mathbf{z}).$$

を満たす $S_k(\mathbf{z}) \in \sigma_k^c$が存在する。

条件 4.1 から

$$K(\mathbf{x}, S_k(\mathbf{z})) \leq K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + K(\mathbf{z}, S_k(\mathbf{z})),$$

であるので、

$$K(\mathbf{x}, S_k(\mathbf{z})) + \mathbf{T}v_k(S_k(\mathbf{z})) \leq K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{T}v_k(\mathbf{z})$$

が成立する。すなわち、ステップ 4 において取り除かれた決定空間の中に改良された決定は含まれることは起こらない。(4.10) より $\mathbf{y} \in \sigma_k^c$に対して

$$\mathbf{T}v_k(\mathbf{y}) = g_k + v_k(\mathbf{y})$$

である。したがって、(4.17) 式が示される。

□

定理 4.3, 4.4 の結果をまとめると以下の新しいアルゴリズムをうる。

新しいアルゴリズム

Step 1: $\mathbf{x} \in \sigma_0$に対して $S_0(\mathbf{x}) \in \sigma_0^c$を満たす初期発注政策 $f_0 = (\sigma_0, S_0(\cdot))$ を定め、$k = 0$ とおく。

Step 2:(政策評価ルーチン)

2-1: $\mathbf{x} \in \sigma_k^c$に対して、$\sigma_k^c$における最小の$\gamma = \sum_{n=1}^{N} x_n$をもつ $\mathbf{x}$ から始め、(4.13) から (4.15) 式を用いて順次 $a(\mathbf{x}), b^i(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \cdots, m-1), c(\mathbf{x})$ を計算する。

2-2: $v_k(S_m) = 0$ として、以下の連立一次方程式を解き、g_k と $v_k(S_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$ を求める。

$$\begin{aligned} c(S_i)g_k + v_k(S_i) &= a(S_i) + \sum_{j=1}^{m-1} b^j(S_i)v_k(S_j) \\ &\qquad i = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned} \tag{4.18}$$

2-3: $v_k(\cdot)$ の値を、$\mathbf{x}\in\sigma_k$に対する (4.5) 式を用い、$\mathbf{x}\in\sigma_k^c$に対しては (4.12) 式より計算する。

Step 3:(政策改良ルーチン)

各 $\mathbf{x}$ に対して、

$$U_k(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) + v_k(\mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}\in\sigma_k^c\cap\mathbf{Y}}\{K(\mathbf{x},\mathbf{y}) + v_k(\mathbf{y})\}$$

および

$$V_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_k(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\sigma_k^c\text{に対して} \\ \mathbf{T}v_k(\mathbf{x}) - g_k, & \text{上記以外} \end{cases}$$

を計算する。もし $U_k(\mathbf{x}) \le V_k(\mathbf{x})$ ならば $\mathbf{x}\in\sigma_{k+1}$, $S_{k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^*$とおく。さもなければ、$\mathbf{x}\in\sigma_{k+1}^c$とする。一意的に改良された決定が決まらない状態に対しては、政策 f_k の決定を可能であれば採択せよ。

Step 4: もし $f_k = f_{k+1}$ならば $f_k = (\sigma_k, S_k(\cdot))$ は最適発注政策である。さもなければ、$k = k+1$ とし Step 2 へ戻る。

注 1. 上記において状態空間は有限集合 $\mathbf{X}^0$である。もし集合 $\mathbf{X}^0$が不必要に多くの状態を含むならば、第 k回目反復のステップ 2 で $\mathbf{X}^0$は $\mathbf{X}^k = \sigma_k^c\cup\{$ すべての $\mathbf{x}\in\sigma_k^c$, $\mathbf{D}\in\mathbf{B}$ に対する $u(\mathbf{x},\mathbf{D})$ $\}$にでき、ステップ 3 では $\mathbf{X}^{k+1} = \sigma_{k+1}^c\cup\{$ すべての $\mathbf{x}\in\sigma_{k+1}^c$, $\mathbf{D}\in\mathbf{B}$ に対する $u(\mathbf{x},\mathbf{D})$ $\}$ に限定できる。この操作はγの最大水準から始め、$\mathbf{x}\in\sigma_{k+1}^c$ が決められるごとに $\mathbf{X}^{k+1}$を $\mathbf{X}^{k+1}\cup\{\mathbf{x}$ およびすべての $\mathbf{D}\in\mathbf{B}$ に対する $u(\mathbf{x},\mathbf{D})$ $\}$ と拡大することで実行できる。

注 2. 例外的な場合、連立一次方程式 (4.18) は正則ではない。なぜならば政策 f_kは必ずしも単一連鎖のマルコフ連鎖を導かないからである。もし、正則でなければ、ステップ 2 では状態分類を行わない。ステップ 3 では

$$\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}^k}\{\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}}\phi(\mathbf{y},\mathbf{D})g(u(\mathbf{y},\mathbf{D}))\}$$

を考慮にいれる必要がある。ここで $\mathbf{Y}^k = \{\mathbf{y}\ge\mathbf{x}; \mathbf{y}\in\mathbf{X}^k\}$ である。

4.5 総割引期待費用

本節では、割引率$\alpha < 1$ のもとでの総割引期待費用を最小化する最適発注政策の新しい計算アルゴリズムを導く。この導出は前節の場合とほとんど同じであるのでア

ルゴリズムのみを述べる。

総割引期待費用問題に対する新しいアルゴリズム

STEP 1: $\mathbf{x} \in \sigma_0$に対して $S_0(\mathbf{x}) \in \sigma_0^c$を満たす初期発注政策 $f_0 = (\sigma_0, S_0(\cdot))$ をえらび、$k = 0$ とおく。

STEP 2:(政策評価ルーチン)

2-1: $\mathbf{x} \in \sigma_k^c$に対して、$a(\mathbf{x}), b^i(\mathbf{x})\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ を次式よりσ_k^cである最小の在庫水準 $\mathbf{x}$ から順次計算する。

$$\begin{aligned} a(\mathbf{x}) &= \frac{L(\mathbf{x}) + \alpha \sum_{\mathbf{D} \in \mathbf{Q}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{D}) a(u(\mathbf{x}, \mathbf{D}))}{1 - \alpha \sum_{\mathbf{D} \in \mathbf{R}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{D})} \\ &+ \frac{\alpha \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mathbf{D} \in \mathbf{P}(\mathbf{x})^i} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{D}) K(u(\mathbf{x}, \mathbf{D}), S_i)}{1 - \alpha \sum_{\mathbf{D} \in \mathbf{R}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{D})} \\ b^i(\mathbf{x}) &= \frac{\alpha \sum_{\mathbf{D} \in \mathbf{Q}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{D}) b^i(u(\mathbf{x}, \mathbf{D})) + \alpha \sum_{\mathbf{D} \in \mathbf{P}(\mathbf{x})^i} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{D})}{1 - \alpha \sum_{\mathbf{D} \in \mathbf{R}(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{D})}. \end{aligned}$$

2-2: 以下の連立一次方程式を解き $v_k(S_i)\ \ (i = 1, 2, \cdots, m)$ を求める。:

$$v_k(S_i) = a(S_i) + \sum_{j=1}^{m} b^j(S_i) v_k(S_j), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

2-3: (4.5) 式より $\mathbf{x} \in \sigma_k$に対する $v_k(\mathbf{x})$ を計算し、$\mathbf{x} \in \sigma_k^c$に対しては

$$v_k(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} b^i(\mathbf{x}) v_k(S_i)$$

より求める。

STEP 3:(政策改良ルーチン)

各 $\mathbf{x}$ に対して

$$U_k(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) + v_k(\mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y} \in \sigma_k^c \cap \mathbf{Y}} \{K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + v_k(\mathbf{y})\}$$

と $$V_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_k(\mathbf{x}) & , \quad \mathbf{x} \in \sigma_k^c \text{に対して} \quad , \\ L(\mathbf{x}) + \alpha \sum_{\mathbf{D} \in \mathbf{B}} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{D}) v_k(u(\mathbf{x}, \mathbf{D})), & \quad \text{上記以外}. \end{cases}$$

を計算し、もし $U_k(\mathbf{x}) \le V_k(\mathbf{x})$ ならば $\mathbf{x} \in \sigma_{k+1}$, $S_{k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^*$とおく。さもなければ $\mathbf{x} \in \sigma_{k+1}^c$とおく。一意的に改良された決定が決まらない状態に関しては、可能ならば政策 f_kの決定を採択せよ。

表 4.1: 需要分布

品目 i	$Pr(D_i = 0)$	$Pr(D_i = 1)$	$Pr(D_i = 2)$	$Pr(D_i = 3)$	$Pr(D_i = 4)$
1	1/27	2/9	4/9	8/27	0
2	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

STEP 4:
もし $f_k = f_{k+1}$ ならば $f_k = (\sigma_k, S_k(\cdot))$ は最適発注政策である。さもなければ $k = k+1$ とし STEP 2 へ戻れ。

4.6　数値例

本節では数値例により提案した新アルゴリズムが PIM よりも優れていることを数値的に実証する。簡単のため、ロスト・セールを仮定した 2 品目在庫システムを考える。需要は品目および手持ち在庫に関して独立であると仮定する。各期における i 品目の需要確率は以下の表 4.1によって与えられる。さらに発注費 $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ と在庫・品切れ費用 $l(\mathbf{y},\mathbf{D})$ は以下の式で与えられるものとする。

$$
\begin{aligned}
K(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 15\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + 10\delta(y_1 - x_1) \\
&\quad +5\delta(y_2 - x_2) + 6(y_1 - x_1) + 3(y_2 - x_2) \\
l(\mathbf{y},\mathbf{D}) &= 2[y_1 - D_1]^+ + 2[y_2 - D_2]^+ \\
&\quad +21[D_1 - y_1]^+ + 14[D_2 - y_2]^+
\end{aligned}
$$

$a_1 = a_2 = 1$ とおき、倉庫容量 ($\overline{M}$ = 13, 19, 23, 27, 30) とおいた 5 つの数値例を名古屋大学大型計算機センター FACOM M-1800/20 を用いて計算した。プログラムはすべて FORTRAN77 で記された。表 4.2は新アルゴリズムと PIM の最適発注政策を得るまでの計算時間を示している。表 4.3は容量が$\overline{M} = 23$(300 状態) である場合の各反復におけるステップの計算時間を示している。また、この場合の最適政策は図 4.2 によって示される。ここで状態 $j(< 27)$ は j番目のアルファベットの状態まで発注され、状態 $j(\geq 27)$ は $(j-26)$ 番目のダブルアルファベット（i.e. AA, BB, $\cdots$）の状態まで発注される。さらに状態**は発注をしない、かつ発注先とならない状態を示

表 4.2: 容量 $(\overline{M})$ の変化による新アルゴリズム (NEW) の効率

容量 (状態)	13 105	19 210	23 300	27 406	30 496
PIM	301 ms	2346 ms	6302 ms	14859 ms	26466
NEW	31 ms	106 ms	200 ms	349 ms	509
$\frac{NEW}{PIM}$	10.3 %	4.5 %	3.2 %	2.3 %	1.9 %

している。この最適政策は発注状態σから一点 Sに発注する (σ, S) 政策のような単純なものでもなく、Goswick and Sivazlian [56] の提案した mixed reorder policy でもない。この例では反復回数が 5 回で PIM による計算時間が 6302ms で新アルゴリズムが 200ms である。その内訳をさらに詳しく見ると (表 4.3参照)、新アルゴリズムがステップ 2、3 ともに計算時間を大幅に短縮していることがよくわかる。ステップ 2 による時間短縮の原因は連立一次方程式の変数の数が PIM の 300 個（反復が進んでも一定）であるのに対し、新アルゴリズムでは発注先 $(\{S_i\}_{i=1}^{m})$ の状態数個（政策に依存して変化する）であるという点である。また、ステップ 3 による時間短縮の原因は定理 4.4 で示したとおり政策の比較回数が減少している点である。また、表 4.2より システム状態数が増加すれば PIM に対する NEW の計算時間の比率が減少していく傾向が読み取れる。

表 4.3: 計算時間

$\overline{M} = 23$ (300 状態)				
Method		P I M	New algorithm	
反復 (平均費用)	ステップ	時間 (ms)	時間 (ms)	(4.18) 式の 未知数 m の数
0	1	7	6	
1 (56.73312)	2 3	940 119	19 18	1
2 (52.02375)	2 3	927 119	9 10	28
3 (43.42930)	2 3	927 119	18 17	27
4 (41.26868)	2 3	928 119	17 15	33
5 (40.93308)	2 3	928 120	20 15	35
6 (40.90745)	2 3	929 120	20 16	35
計		6302	200	

ms: ミリ秒

4.7 あとがき

本章では計画期間が無限である周期観測のもとで確率的な多品目在庫管理システムを考えた。第 4.6節で示されたように、この一般的な在庫管理システムに関しては、(σ, S) 政策も混合発注政策も最適政策とならない。すなわち、最適政策が複雑になる場合に適当な近似政策の中から近似最適政策を最適政策として採用するとにより、予期せぬ費用を出費することになる。したがって、どのような費用構造の下で近似政策がどれぐらい最適政策に劣るか等の情報がない限り、近似政策のみでのシステム最適化は奨励できない。ある費用構造のもとで 1 つの近似政策が最適政策に近い有効性を発揮したとしてもそれは 1 つの例であり、一般性はもち得ない。一般的な費用構造のもとで、最適政策を求めることは PIM によって理論上は数十年前に解決されてる。しかし、「どれぐらいの時間がかかるのか？」という問には有限時間としか答えられない。本章では数値例において、新アルゴリズムが PIM の約 1/10 の時間で最適政策を計算できるという一歩進んだ答を出せた。

```
第 2 品目
   |

23    **
22    ****
21    35**II
20    34****HH
19    32******FF
18    30********DD
17    2828********BB
16    2626********** Z
15    2424************ X
14    2222************ V**
13    2020************ T****
12    1818************ R******
11    1616************ P********
10    1414************ N**********
 9    1212************ L************
 8    1010********** J****************
 7     8 8********** H I K M O Q S U W Y
 6     1 1******** A G******************AA
 5     6 6**** C E F**********************CC
 4     4**** B** D**************************EE
 3     1**************************************GG
 2     1******************************************
 1     1 1****** 5 1 7 9****************************
 0     1 1 1 2 3 5 1 7 9111315171921232527293133******

       0 1 2 3 4 5 6 7 8 91011121314151617181920212223 第 1 品目
```

図 4.2: 最適政策

第 5 章

連続時間観測多品目在庫管理

5.1 まえがき

多品目在庫管理システムの在庫量を連続的に観測し、管理するための研究はこれまで数多くなされてきた。特に Balintfy[12] は連続時間観測の在庫管理政策としてよく知られた (s,c,S) 政策を最初に提案している。各品目に対する需要が独立なポアソン過程にしたがって発注するとき、Silver[128] は各品目のサービスレベルに制約を設け (s,c,S) 政策のパラメータ s, c, S を決めるアルゴリズムを提案した。さらに Thompstone and Silver[138] は各品目に対する需要が独立な複合ポアソン過程にしたがって到着するとき、Silver [128] 同様各品目のサービスレベルに制約を設け (s,c,S) 政策のパラメータ s, c, S を決めるアルゴリズムを提案した。しかしながら、Ignall[69] は２品目で需要が独立なポアソン過程に従う場合、最適在庫管理政策が必ずしも (s,c,S) 政策にならないことを示している。近年、前章で述べた周期的観測多品目在庫管理システムにおける (σ,S) 政策を連続時間観測においても適用し、その政策がが最適となる条件について Girlich and Barche[55] が論じられている。

上記の研究はすべて発注の納入遅れがないことが仮定されていたが、実際問題としては納入遅れがある方がより一般的である。すべての品目に対する納入遅れが一定である場合、Silver[128][129] は各品目の需要がポアソンまたは複合ポアソン過程に従って発生する場合を論じ、サービスレベル制約の下で (s,c,S) 政策のパラメータ s, c, S を最も期待費用が小さくなるように決めるアルゴリズムを提案した。Federgruen et al.[46] は Silver[129] の結果を品目ごとに納入遅れが異なる場合に一般化した。各品目に対する需要が独立なポアソン過程にしたがって発生するとき、Atkins and Iyogun[10]

は単純な周期政策 MP が (s,c,S) 政策よりもすぐれていることを数値的に示した。また、近年 Pantumsinchai [101] が Renberg and Planche [108] によって初めて提案された (Q,S) 政策と MP 政策、(s,c,S) 政策とを数値的に比較し、その優劣を論じている。

本章では計画期間が無限であり、超過需要が繰り越され、一定の納入遅れをもつ連続時間観測多品目在庫管理システムを考える。一般的な費用構造の下で単位時間当たりの期待費用を最小にする最適発注政策を求めたい。ここでの主な目的は最適発注政策の基本的な性質を明らかにし、その性質を利用した新しい計算アルゴリズムを導くことである。第 5.2節では多品目在庫管理システムの条件と費用構造を説明し、その最適発注政策を求める問題が時間平均セミ・マルコフ決定過程として定式化されることを示す。第 5.3節では標準的なアルゴリズムである PIM がこの問題に適用される。このときシステムの構造を利用し、最適発注政策の基本的な性質を述べた定理を示す。そして、この定理を適用し、根本的に PIM を改良した新しいアルゴリズムを提案する。第 5.6節では PIM と新しいアルゴリズムを数値的に比較するために簡単な数値例を考え、新しいアルゴリズムの優位性を実証する。第 5.7節では Atkins and Iyogun[10] によって提案されている周期的政策、(s, c, S) 政策、(Q, S) 政策と最適発注政策を数値的に比較し、その優劣を論ずる。

5.2 多品目在庫管理システム

POS システムのように連続的に観測を行う N品目在庫管理システムを考える。発注費用を始めとする費用構造は一般的であり、超過需要はすべて繰り越されるものとする。また、発注の納入遅れ (L) がある場合には品目によらずすべて同一値となるものとする。本章では状態 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)^\top$ として、(手持ち在庫量)+(発注済みであるが未納入である量) -(繰り越し需要) で表される手持ち在庫水準をとる。ここで $x_n \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} (n \in \mathbf{N} = \{1, 2, \cdots, N\})$ であり、$\top$ は転置を表す。状態 $\mathbf{x}$ の可能な値からなる状態空間 $\mathbf{X}$ は倉庫容量$\overline{\mathbf{M}}$ によって制約され、

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^N; \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n x_n^+ \leq \overline{\mathbf{M}}\}$$

で与えられる。ここで a_nは n 番目の品目 1 個当たりの大きさであり、$x_n^+ = \max\{x_n, 0\}$, $n \in \mathbf{N}$ である。発注は現在の手持ち在庫水準 $\mathbf{x}$ と発注政策 fによって決定される。$\mathbf{y} =$

$(y_1, y_2, \cdots, y_N)^\top \in \mathbf{Z}^N$ まで発注したとき、段取り費用を含む発注費 $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が発生する。客の到着は、率λのポアソン過程に従い、客一人の需要量 $\mathbf{D} = (D_1, D_2, \cdots, D_N)^\top$, $D_n \in \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}(n \in \mathbf{N})$ は独立な同一分布$\varphi(\mathbf{D})$ に従うものと仮定する。$h(\mathbf{x})$ で単位時間当たり $\mathbf{x}$ を在庫 ($\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$) あるいは繰り越し ($\mathbf{x} < \mathbf{0}$) する費用、$\mathbf{x} < \mathbf{0}$ のとき$\pi(-\mathbf{x})$ で$-\mathbf{x}$ 個の需要が満たされない品切れ費用を表すことにする。$r = 0, 1, \cdots$に対し、発注した品目がすべて納入されている状態でr番目の客の到着時刻をτ_rで表し、$\tau_0 = 0$ とおく。計画期間 $[0, \infty)$ を $\{[\tau_r, \tau_{r+1})\}_{r=0}^{\infty}$に分割し、各々を期間と呼ぶ。$\tau_r$における手持ち在庫水準を $\mathbf{x}$ とし、(y-x) を発注とすれば、期間 rの期首における手持ち在庫水準は $\mathbf{y}$ となる。しかし、納入遅れが L であるため、実際に発注量が納入され $\mathbf{y}$ となるのは$\tau_r + L$ である。したがって、期間 rの平均費用として $(\tau_r + L, \tau_{r+1} + L]$ における平均費用を考えることにする。期間 $(\tau_r, \tau_r + L]$ における需要 $\mathbf{j}$ の分布を $r(\mathbf{j})$ とすれば、

$$r(\mathbf{j}) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda L} \frac{(\lambda L)^m}{m!} \varphi^{(m)}(\mathbf{j}),$$

ここで$\varphi^{(m)}$は客一人の需要分布φ の m 重畳み込みであり、$\varphi^{(1)} = \varphi$, $\varphi^{(0)}(\mathbf{0}) = 1$ である (図 5.1参照) 。ゆえに期間 rの期首における手持ち在庫水準が $\mathbf{y}$ のときの期間 rの平均在庫・繰り越し費用を $L(\mathbf{y})$ とおけば、$\tau_r + L$ における手持ち在庫水準は y-j となり、tau_{r+1}には $(r+1)$ 番目の客の需要 $\mathbf{l}$ が発生するから、

$$L(\mathbf{y}) \quad = \quad \frac{1}{\lambda} \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} h(\mathbf{y} - \mathbf{j}) r(\mathbf{j}) + \sum_{\mathbf{j} \geq \mathbf{0}} r(\mathbf{j}) \sum_{\mathbf{l} \geq \mathbf{y} - \mathbf{j}} \pi(\mathbf{l} - \mathbf{y} + \mathbf{j}) \varphi(\mathbf{l}) \tag{5.1}$$

で与えられる (Adelson [1], Federgruen and Schechner [45] 参照) 。

決定はτ_r直後の状態 $\mathbf{x}$ に基づいて決定され、"$\mathbf{y}$ まで発注する" もしくは "発注しない ($\mathbf{y} = \mathbf{x}$)" のいずれかをとる。

以下の条件が本章を通じて仮定される。

条件 5.1. $\mathbf{x} < \mathbf{y} < \mathbf{z}$ であるような任意の在庫レベル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}$ に対して以下の式が成立する。

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + K(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \text{かつ} \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0.$$

条件 5.2. $\lim_{\mathbf{x} \to -\infty} L(\mathbf{x}) = \infty$ である。すなわち、すべての実数 Mに対して $L(\mathbf{x}) > M$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ かつ $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{z}_M$ であるような $\mathbf{z}_M \in \mathbf{X}$ が存在する。

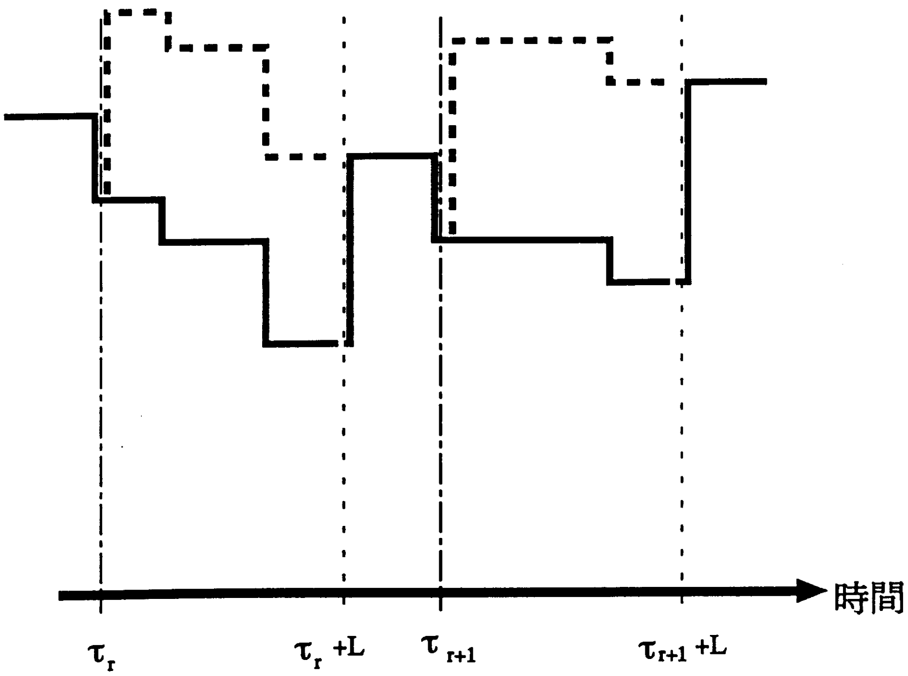

図 5.1: $[\tau_r, \tau_r + L)$ における在庫水準過程

条件 5.3. 客一人の需要は有界であり、すべての品目に対する需要がある。

$$\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}} \varphi(\mathbf{D}) = 1$$

を満たすような有界集合 $\mathbf{B} \subset \mathbf{Z}_+^N$が存在し、任意の $n(\in \mathrm{N})$ に対して

$$\sum_{D_n>0} \varphi(\mathbf{D}) > 0$$

である。

Federgruen et al. [46] と Pantumsinchai [101] では固定発注費用 $K, k_n(n \in \mathrm{N}) > 0$ に対して

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = K\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{N} k_n\delta(y_n - x_n) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}),$$

ここで$\delta(\mathbf{0}) = 0, \mathbf{x} > 0$ なら$\delta(\mathbf{x}) = 1$、$\mathbf{c}$ は N次元の行ベクトルである。明らかにこの発注費用は条件 5.1 を満たす。本研究の目的は計画期間が無限にわたる在庫管理システムの単位時間当たりの期待費用を最小にする最適発注政策を見つけることである。

5.3 アルゴリズムの導出

前節で説明した在庫管理システムはセミ・マルコフ決定過程として定式化することができ、その最適方程式は次のようになる (Schweitzer and Federgruen [124]) 。

$$\frac{1}{\lambda}g(\mathbf{x})+v(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in Y(\mathbf{x})}\{K(\mathbf{x},\mathbf{y})+L(\mathbf{y})+\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}}\varphi(\mathbf{D})v(\mathbf{y}-\mathbf{D})\}, \tag{5.2}$$

$$g(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\{\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}}\varphi(\mathbf{D})g(\mathbf{y}-\mathbf{D})\}, \tag{5.3}$$

$$\mathbf{Y}=\{\mathbf{y}\in\mathbf{X};\mathbf{y}\geq\mathbf{x}\},$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x})=\{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}:g(\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}}\varphi(\mathbf{D})g(\mathbf{y}-\mathbf{D})\}.$$

$g(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})$ をそれぞれ初期状態が $\mathbf{x}$ である時の最小期待平均費用、相対値とし、オペレータ $\mathbf{T}$ を

$$\mathbf{T}v(\mathbf{x})=L(\mathbf{x})+\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}}\varphi(\mathbf{D})v(\mathbf{x}-\mathbf{D})$$

とする。定常政策 f は $f=(\sigma,S(\cdot))$ によって表され、σ は $\mathbf{X}$ の部分集合であり、$S(\cdot)$ は σ から $\mathbf{X}$ への写像である。$(\sigma,S(\cdot))$ 政策は手持ち在庫水準 $\mathbf{x}$ において以下のルールによって発注量を決定する。

$$\begin{array}{rl} \mathbf{x}\in\sigma \text{のとき} & S(\mathbf{x}) \text{まで発注する} \\ \mathbf{x}\in\sigma^c\equiv\mathbf{X}-\sigma \text{のとき} & \text{発注しない} \end{array}$$

ここで σ は再発注状態集合、σ^c は非発注状態集合である。

定理 5.1. 最適発注政策 $(\sigma,S(\cdot))$ は以下を満たす。

i) 再発注集合 σ は

$$\sigma^c \subset (\sigma^0)^c=\{\mathbf{x}\in\mathbf{X};\mathbf{x}\geq\mathbf{z}_{g^0}\}, \tag{5.4}$$

となる。ここで $\mathbf{z}_{g^0}$ は仮定 5.2 の M を以下で与えられる g^0 によって置き換えたものである。

$$g^0 = \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{X}}\{L(\mathbf{y})+\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}}\varphi(\mathbf{D})K(\mathbf{y}-\mathbf{D},\mathbf{y})\}. \tag{5.5}$$

ii) $S(\mathbf{x}) \in \sigma^c, \quad \mathbf{x} \in \sigma.$

iii)

$$v(\mathbf{x}) \;=\; K(\mathbf{x}, S(\mathbf{x})) + v(S(\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x} \in \sigma. \tag{5.6}$$

証明 条件 5.2 と 5.3 は最小値 g^0を得る状態 $\mathbf{y}^0 \in \mathbf{X}$ が存在することを意味している。$\sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}; \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^0\}$ とする。このとき $(\sigma, \mathbf{y}^0)$ 政策は平均期待費用 g^0を与える。条件 5.2 より $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{z}_{g^0}$ において発注がなされなかったら、単位時間当たり g^0よりも大きい費用がかかることがわかる。このことは i) を示している。ある $\mathbf{x} \in \sigma$に対して $S(\mathbf{x}) \in \sigma$であると仮定する。(5.2) 式の右辺は $\mathbf{x} = \mathbf{x}$ であるとき $\mathbf{y} = S(\mathbf{x})$ で、$\mathbf{x} = S(\mathbf{x})$ であるとき $\mathbf{y} = S(S(\mathbf{x}))$ で最小化される。その結果

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}g(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) \;&=\; K(\mathbf{x}, S(\mathbf{x})) + \mathbf{T}v(S(\mathbf{x})) \\
&\leq\; K(\mathbf{x}, S(S(\mathbf{x}))) + \mathbf{T}v(S(S(\mathbf{x}))), \qquad (5.7)\\
\frac{1}{\lambda}g(S(\mathbf{x})) + v(S(\mathbf{x})) \;&=\; K(S(\mathbf{x}), S(S(\mathbf{x}))) + \mathbf{T}v(S(S(\mathbf{x}))) \leq \mathbf{T}v(S(\mathbf{x})).
\end{aligned}$$

となる。したがって、次の式が成立する。

$$K(\mathbf{x}, S(\mathbf{x})) + K(S(\mathbf{x}), S(S(\mathbf{x}))) \leq K(\mathbf{x}, S(S(\mathbf{x}))),$$

これは条件 5.1 に矛盾し、ii) が証明された。$S(\mathbf{x}) \in \sigma^c$であることから、(5.2) 式より以下の等式が成立する。

$$\frac{1}{\lambda}g(S(\mathbf{x})) + v(S(\mathbf{x})) \;=\; \mathbf{T}v(S(\mathbf{x})). \tag{5.8}$$

さらに、状態 $\mathbf{x}$ と $S(\mathbf{x})$ は同じ連鎖に属しているので、$g(\mathbf{x}) = g(S(\mathbf{x}))$ である。ゆえに、等式 (5.7) と (5.8) より (5.6) 式がえられる。

□

$\mathbf{X}$ は有限ではないので $\mathbf{X}^0$を

$$\mathbf{X}^0 = (\sigma^0)^c \cup \{\mathbf{x} - \mathbf{D} \text{ すべての } \mathbf{x} \in (\sigma^0)^c \text{ かつ } \mathbf{D} \in \mathbf{B}\}$$

として与え、 $\mathbf{X}^0$の状態数を N^0とする。定理 5.1 は $\mathbf{X}^0$が最適政策となるようなすべての発注政策の下ですべての再帰的状態を含むことを意味している。逆に $\mathbf{X}^0$の外側

のすべての状態は常に過渡的状態であり、この状態で選ばれる決定は平均期待費用に影響しない。したがって、有限集合 $\mathbf{X}^0$のみに対して最適政策を求めれば十分である。$\mathbf{x} \notin \mathbf{X}^0$に対する最適政策 $S(\mathbf{x})$ は (5.6) 式によって容易に計算できる。

定理 5.2. 最小平均期待費用 $g(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ に依存しない定数である。すなわち、$g(\mathbf{x}) = g$ であり、最適方程式 (5.2) と (5.3) は次式に帰着される。

$$\frac{1}{\lambda}g + v(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\{K(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \mathbf{T}v(\mathbf{y})\}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \tag{5.9}$$

ここで右辺を最小化する決定が最適発注政策である。

証明 すべての状態が互いに到達可能な状態のみで構成される (communicating) ならば、平均期待費用 $g(\mathbf{x})$ は定数となることが示されている (Bather [16]) 。communicating であるとは任意の状態の組 $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}$ に対してある政策 fが存在し、その fの下である正整数 rが存在し、rステップかかって状態 $\mathbf{x}$ から状態 $\mathbf{z}$ へ変化する正の確率が存在することである。発注集合σを

$$\{\mathbf{x}' \in \mathbf{X}^0; \mathbf{y} - \mathbf{D} = \mathbf{z} \ \text{かつ} \quad \varphi(\mathbf{D}) > 0 \text{ であるある } \mathbf{y} \text{に対して } \mathbf{x}' \leq \mathbf{y} \text{となる} \quad \mathbf{x}'\}$$

で与える。もし $\mathbf{x} \in \sigma$ならば、適当な $\mathbf{y}$ まで発注される。そして状態 $\mathbf{x}$ は状態 $\mathbf{z}$ へ確率$\varphi(\mathbf{D}) > 0$ で 1 ステップで変化する。$\mathbf{x} \notin \sigma$である場合、条件 5.3 より有限ステップで $\mathbf{x}$ からσに到達し、その後 1 ステップで $\mathbf{z}$ へ移る。

□

5.4 新アルゴリズム

最適方程式 (5.9) として定式化されるセミ・マルコフ決定過程の標準的な解法は PIM である。この方法は最適発注政策を有限回の反復で求めることがよく知られている (Howard [66]) 。政策 fは反復ごとに改良されるので、それを明示するため反復回数を示すパラメータ kを導入すれば PIM は次のように与えられる。

PIM

step 1:

$\mathbf{x} \in \sigma^0 \subset \mathbf{X}^0$において $S^0(\mathbf{x}) \in (\sigma^0)^c$ を満足する政策 $f_0 = (\sigma^0, S^0(\cdot))$ を選択し、$k = 0$ とおく。

step 2:(政策評価ルーチン)

ある状態 $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{X}^0$に対して $v_k(\mathbf{x}^0) = 0$ とし、以下の連立一次方程式を解いて、g_kと $v_k(\cdot)$ を決定する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}g_k + v_k(\mathbf{x}) &= K(\mathbf{x}, S_k(\mathbf{x})) + \mathbf{T}v_k(S_k(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \sigma_k \quad (5.10) \\ \frac{1}{\lambda}g_k + v_k(\mathbf{x}) &= \mathbf{T}v_k(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \sigma_k^c \quad (5.11) \end{aligned}$$

step 3:(政策改良ルーチン)

各 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}^0$、$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbf{X}^0; \mathbf{y} \geq \mathbf{x}\}$ に対して

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{Y}} \{K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{T}v_k(\mathbf{y})\}, \tag{5.12}$$

を計算する。もし $f_k(\mathbf{x})$ が最小値を与えるならば、$f_k = f_{k+1}$とおき、さもなければ、最小値を与える決定を $f_{k+1}(\mathbf{x})$ とする。

step 4:

すべての $\mathbf{x} \in \mathbf{X}^0$について $f_k = f_{k+1}$ならば、政策 f_kは最適発注政策である。

さもなければ、$k = k + 1$ とし、**step 2** へ戻る。

PIM に基づき新しいアルゴリズムを導出するために、$S_1, S_2, \cdots, S_m$を $S(\mathbf{x})(\mathbf{x} \in \sigma)$ の相異なる発注先状態、$\sigma^1, \sigma^2, \cdots, \sigma^m$を $S_i = S(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \sigma^i (i = 1, 2, \cdots, m)$ であるようなσの分割とする。また $\mathbf{x} \in \sigma^c$と $\mathbf{x} \in \sigma^i (i = 1, 2, \cdots, m)$ に対して $\mathbf{P}(\mathbf{x})^i$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x})^i &= \{\mathbf{D} \in \mathbf{B}; \mathbf{x} - \mathbf{D} \in \sigma^i\} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}) &= \{\mathbf{D} \in \mathbf{B}; \mathbf{x} - \mathbf{D} \in \sigma^c \quad \mathbf{D} > 0\} \end{aligned}$$

定理 5.3. 発注政策 $f = (\sigma, S(\cdot))$ に対して、相対値 $v(\mathbf{x})(\mathbf{x} \in \sigma)$ は (5.6) 式を満たし、相対値 $v(\mathbf{x})(\mathbf{x} \in \sigma^c)$ は次式を満たす。:

$$v(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} b^i(\mathbf{x}) v(S_i) - c(\mathbf{x}) \frac{g}{\lambda}, \tag{5.13}$$

$$
\begin{aligned}
a(\mathbf{x}) &= \frac{L(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{D})a(\mathbf{x}-\mathbf{D})}{1-\varphi(\mathbf{0})} \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i}\varphi(\mathbf{D})K(\mathbf{x}-\mathbf{D},S_i)}{1-\varphi(\mathbf{0})}
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

$$
b^i(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{D})b^i(\mathbf{x}-\mathbf{D}) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i}\varphi(\mathbf{D})}{1-\varphi(\mathbf{0})}
$$

$$
i = 1, 2, \cdots, m, \tag{5.15}
$$

$$
c(\mathbf{x}) = \frac{1 + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{D})c(\mathbf{x}-\mathbf{D})}{1-\varphi(\mathbf{0})} \tag{5.16}
$$

証明 σ^cが有限であるので$\gamma = \sum_{n=1}^{N} x_n$の帰納法で証明する。政策 $f = (\sigma, S(\cdot))$ に対して (5.11) 式を書き換えると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}g + v(\mathbf{x}) &= L(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}}\varphi(\mathbf{D})v(\mathbf{x}-\mathbf{D}) \\
&= L(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i}\varphi(\mathbf{D})v(\mathbf{x}-\mathbf{D}) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{D})v(\mathbf{x}-\mathbf{D}) + \varphi(\mathbf{0})v(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

$\sum_{n=1}^{N} x'_n < \gamma$ であるような任意の状態$\mathbf{x}' \in \sigma^c$に対し (5.13) 式が成立すると仮定する。定理 5.1 と (5.13) 式より$\gamma = \sum_{n=1}^{N} x_n$であるような状態$\mathbf{x} \in \sigma^c$に対し以下の式が成立する。

$$
\begin{aligned}
(1-\varphi(\mathbf{0}))v(\mathbf{x}) &= L(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i}\varphi(\mathbf{D})\{K(\mathbf{x}-\mathbf{D},S_i) + v(S_i)\} \\
&\quad + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{D})\{a(\mathbf{x}-\mathbf{D}) + \sum_{i=1}^{m} b^i(\mathbf{x}-\mathbf{D})v(S_i) - c(\mathbf{x}-\mathbf{D})\frac{g}{\lambda}\} - \frac{1}{\lambda}g \\
&= L(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{D})a(\mathbf{x}-\mathbf{D}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i}\varphi(\mathbf{D})K(\mathbf{x}-\mathbf{D},S_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\{\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i}\varphi(\mathbf{D}) + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{D})b^i(\mathbf{x}-\mathbf{D})\}v(S_i) \\
&\quad - \{1 + \sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{D})c(\mathbf{x}-\mathbf{D})\}\frac{1}{\lambda}g.
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

(5.17) 式において $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ を空集合とすれば、σ^c内の最小の水準γとなる状態$\mathbf{x}$で (5.13) 式が成立することを示している。したがって、$\mathbf{x} \in \sigma^c$であるようなすべての状態で

(5.13) 式が成立する。

□

この定理は $g, v(S_1), \cdots, v(S_m)$ の値が与えられれば (5.13) 式によって $v(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \sigma^c$ が計算できることを示している。これらの未知数は状態 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ が代入された (5.13) 式で $v(S_m) = 0$ とおいた m 変数の連立一次方程式を解くことによって求められる。したがってステップ 2 における N_0 元連立一次方程式 (5.10) と (5.11) m 元連立一次方程式に減らすことができる。次は政策改良ルーチンであるステップ 3 を考える。

定理 5.4. 政策改良ルーチンにおける (5.12) 式の $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ は $\mathbf{y} \in (\sigma_k^c \cap \mathbf{Y}) \cup \{\mathbf{x}\}$ に縮小可能である。すなわち、

$$\min\{\mathbf{T}v_k(\mathbf{x}), \frac{1}{\lambda}g_k + \min_{\mathbf{y} \in (\sigma_k^c \cap \mathbf{Y})}\{K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + v_k(\mathbf{y})\}\}. \tag{5.18}$$

証明 定理 5.1 の ii) より、$\mathbf{x} \in \sigma_k$ であるとき $S_k(\mathbf{x}) \in \sigma_k^c$ である。一方、$\mathbf{x} \in \sigma_k^c$ であるとき、f_k の決定は $\mathbf{x}$ である。したがって、f_k の決定は必ず縮小された決定空間に含まれる。改良政策 $f_{k+1} \neq f_k$ が得られたならば、Veinott [143] の系 1 より $f_k \neq f_{k+1}$ であるような $\mathbf{x}$ では $g_k > g_{k+1}$ あるいは $g_k = g_{k+1}$, $v_k(\mathbf{x}) > v_{k+1}(\mathbf{x})$ が成立する。今、ステップ 4 で $f_k = f_{k+1}$ であると仮定する。このとき $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \sigma_k \cap \mathbf{Y}$ であるような任意の $\mathbf{x}$ と $\mathbf{z}$ について、

$$K(\mathbf{z}, S_k(\mathbf{z})) + \mathbf{T}v_k(S_k(\mathbf{z})) \leq \mathbf{T}v_k(\mathbf{z}).$$

を満たす $S_k(\mathbf{z}) \in \sigma_k^c$ が存在する。条件 5.1 から以下の式

$$K(\mathbf{x}, S_k(\mathbf{z})) \leq K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + K(\mathbf{z}, S_k(\mathbf{z})),$$

が成立し、$K(\mathbf{x}, S_k(\mathbf{z})) + \mathbf{T}v_k(S_k(\mathbf{z})) \leq K(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{T}v_k(\mathbf{z})$ が成立する。すなわち、ステップ 4 において取り除かれた決定空間の中に改良された決定は含まれないことを意味する。(5.11) 式から $\mathbf{y} \in \sigma_k^c$ に対して $\mathbf{T}v_k(\mathbf{y}) = \frac{1}{\lambda}g_k + v_k(\mathbf{y})$ が成立する。このことより (5.18) 式が導かれる。

□

定理 5.3 と 5.4 をまとめれば、以下の新しいアルゴリズムを得る。

新しいアルゴリズム

Step 1: $\mathbf{x} \in \sigma_0$に対して $S_0(\mathbf{x}) \in \sigma_0^c$を満たす初期発注政策 $f_0 = (\sigma_0, S_0(\cdot))$ を選び、$k = 0$ とおく。

Step 2:(政策評価ルーチン)

2-1: $\mathbf{x} \in \sigma_k^c$に対して、$\sigma_k^c$における最小の$\gamma = \sum_{n=1}^{N} x_n$をもつ $\mathbf{x}$ から始め、(5.14) から (5.16) 式より順次 $a(\mathbf{x}), b^i(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \cdots, m-1), c(\mathbf{x})$ を計算する。

2-2: $v_k(S_m) = 0$ として、以下の連立一次方程式を解き g_kと $v_k(S_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$ を求めよ。

$$\frac{1}{\lambda}c(S_i)g_k + v_k(S_i) = a(S_i) + \sum_{j=1}^{m-1} b^j(S_i)v_k(S_j) \qquad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{5.19}$$

2-3: $\mathbf{x} \in \sigma_k$に対し、(5.6) 式を用いて $v_k(\mathbf{x})$ を計算する。$\mathbf{x} \in \sigma_k^c$に関しては (5.13) 式より求める。

Step 3:(政策改良ルーチン)

各 $\mathbf{x}$ に対して、

$$U_k(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) + v_k(\mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y} \in \sigma_k^c \cap \mathbf{Y}} \{K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + v_k(\mathbf{y})\}$$

および

$$V_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_k(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \sigma_k^c \text{に対して}, \\ \mathbf{T}v_k(\mathbf{x}) - \frac{1}{\lambda}g_k, & \text{上記以外}. \end{cases}$$

を計算する。もし $U_k(\mathbf{x}) \le V_k(\mathbf{x})$ ならば $\mathbf{x} \in \sigma_{k+1}$, $S_{k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^*$とおく。さもなければ $\mathbf{x} \in \sigma_{k+1}^c$とする。一意的に改良された決定が決まらない状態に関しては可能ならば政策 f_kの決定を採択せよ。

Step 4: もし $f_k = f_{k+1}$ならば $f_k = (\sigma_k, S_k(\cdot))$ は最適発注政策である。さもなければ $k = k + 1$ とし **Step 2** へ戻る。

5.5 総割引期待費用

本節では、割引要素$\alpha < 1$を考慮した総割引期待費用を最小化する最適発注政策を求めるための新しいアルゴリズムを導く。このとき (5.1) 式は

$$L(\mathbf{y}) = \frac{e^{-\alpha L}}{\lambda+\alpha}\sum_{\mathbf{j}\geq\mathbf{0}} h(\mathbf{y}-\mathbf{j})r(\mathbf{j}) + \frac{\lambda e^{-\alpha L}}{\lambda+\alpha}\sum_{\mathbf{j}\geq\mathbf{0}} r(\mathbf{j}) \sum_{\mathbf{l}\geq\mathbf{y}-\mathbf{j}} \pi(\mathbf{l}-\mathbf{y}+\mathbf{j})\varphi(\mathbf{l})$$

となる。アルゴリズムの導出は前節の場合とほとんど同じであるのでアルゴリズムのみを述べる。

割引問題に対する新しいアルゴリズム

Step 1: $\mathbf{x} \in \sigma_0$に対して$S_0(\mathbf{x}) \in \sigma_0^c$を満たす初期発注政策$f_0 = (\sigma_0, S_0(\cdot))$を選び、$k = 0$とおく。

Step 2:(政策評価ルーチン)

2-1: $\mathbf{x} \in \sigma_k^c$に対して、$\sigma_k^c$である最小の在庫水準$\mathbf{x}$から$a(\mathbf{x}), b^i(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$を次式より順次計算する。

$$\begin{aligned} a(\mathbf{x}) &= \frac{L(\mathbf{x}) + \alpha\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{D})a(\mathbf{x}-\mathbf{D})}{1-\alpha\varphi(\mathbf{0})} \\ &\quad + \frac{\alpha\sum_{i=1}^{m}\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i}\varphi(\mathbf{D})K(\mathbf{x}-\mathbf{D}, S_i)}{1-\alpha\varphi(\mathbf{0})} \\ b^i(\mathbf{x}) &= \frac{\alpha\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{Q}(\mathbf{x})}\varphi(\mathbf{D})b^i(\mathbf{x}-\mathbf{D}) + \alpha\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{P}(\mathbf{x})^i}\varphi(\mathbf{D})}{1-\alpha\varphi(\mathbf{0})}. \end{aligned}$$

2-2: 以下の連立一次方程式を解き$v_k(S_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$を求める。:

$$v_k(S_i) = a(S_i) + \sum_{j=1}^{m} b^j(S_i)v_k(S_j), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

2-3: $v_k(\mathbf{x})$値と$\mathbf{x} \in \sigma_k$に対しては (5.6) 式を用い、$\mathbf{x} \in \sigma_k^c$に対しては

$$v_k(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} b^i(\mathbf{x})v_k(S_i)$$

を用いて計算せよ。

Step 3:(政策改良ルーチン)

表 5.1: 需要分布

品目 i	$Pr(D_i=0)$	$Pr(D_i=1)$	$Pr(D_i=2)$	$Pr(D_i=3)$	$Pr(D_i=4)$
1	1/27	2/9	4/9	8/27	0
2	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

各 $\mathbf{x}$ に対し、以下を計算せよ。

$$U_k(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) + v_k(\mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y}\in\sigma_k^c\cap\mathbf{Y}}\{K(\mathbf{x},\mathbf{y}) + v_k(\mathbf{y})\}$$

$$V_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_k(\mathbf{x}) , & \mathbf{x}\in\sigma_k^c \text{に対して}, \\ L(\mathbf{x}) + \alpha\sum_{\mathbf{D}\in\mathbf{B}}\varphi(\mathbf{D})v_k(\mathbf{x}-\mathbf{D}), & \text{上記以外}. \end{cases}$$

もし $U_k(\mathbf{x}) \le V_k(\mathbf{x})$ ならば $\mathbf{x}\in\sigma_{k+1}$, $S_{k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^*$とおく。さもなければ $\mathbf{x}\in\sigma_{k+1}^c$とおく。一意的に改良された決定が決まらない状態に関しては可能であれば政策 f_kの決定を採択せよ。

STEP 4:

もし $f_k = f_{k+1}$ならば $f_k = (\sigma_k, S_k(\cdot))$ は最適発注政策である。さもなければ $k = k+1$ とし STEP 2 へ戻る。

5.6 数値例

本節では新アルゴリズムの優位性を示すために数値例として 2 品目在庫管理システムを考える。需要分布$\varphi(\mathbf{D})$ は表 5.1に示されている。さらに発注費 $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は以下の式で与えられるものとする。

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 15\delta(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + 10\delta(y_1-x_1) \\ &\quad +5\delta(y_2-x_2) + 6(y_1-x_1) + 3(y_2-x_2) \end{aligned}$$

また、在庫・品切れ費用 (5.1) 式における関数 h,πは

$$h(\mathbf{x}) = h_1x_1^+ + h_2x_2^+$$

$$\pi(\mathbf{x}) = P\delta([-x_1]^+ + [-x_2]^+) + p_1[-x_1]^+ + p_2[-x_2]^+$$

表 5.2: 費用パラメータ等

第 i 品目	平均 (i)	P	h_i	p_i
1	2.0	50.0	2.0	30.0
2	2.0		1.0	20.0

平均 (i) : 第 i 品目に対する客一人当たりの平均需要
$L(=2.0)$: 納入遅れ

表 5.3: 容量 $(\overline{M})$ の変化による新アルゴリズム (NEW) の効率

容量 (状態)	11 206	15 300	19 410	22 503
PIM	1255 ms	3654 ms	13544 ms	25186 ms
NEW	40 ms	51 ms	89 ms	158 ms
$\frac{NEW}{PIM}$	3.1 %	1.4 %	0.7 %	0.6 %

で与えれる。これらパラメータの値は表 5.2に示されている。

$a_1 = a_2 = 1$ とおき、倉庫容量 $(\overline{M} = 11, 15, 19, 22)$ とおいた 4 つの数値例を名古屋大学大型計算機センター FACOM M-1800/20 を用いて計算した。プログラムはすべて FORTRAN77 で記された。表 5.3は新アルゴリズムと PIM の最適発注政策を得るまでの計算時間を示している。表 5.4は容量が$\overline{M} = 22$(503 状態) である場合の各反復におけるステップの計算時間を示している。また、この場合の最適政策は図 5.2によって示される。表 5.3からは第 4 章同様、状態数が増加するにつれて新アルゴリズムの有効性が顕著にわかる。特に表 5.4のステップ 2 において新アルゴリズムの有効性が発揮されている。また、図 5.2から最適政策は (σ,S) 政策、(s,c,S) 政策という近似政策にはならないことがわかる。次節では、これらの政策に対する数値的な比較を行う。

表 5.4: 計算時間

$\overline{M} = 22$ (503 状態)				
Method		PIM	New algorithm	
反復 (平均費用)	ステップ	時間 (ms)	時間 (ms)	(5.13) 式の未知数 m の数
0	1	8	8	
1	2	4012	4	44
(157.51306)	3	147	39	
2	2	4062	1	23
(142.55059)	3	147	15	
3	2	4054	3	32
(127.55654)	3	147	23	
4	2	4054	3	27
(124.15107)	3	148	19	
5	2	4057	3	28
(122.46973)	3	147	20	
6	2	4056	3	29
(122.39510)	3	147	20	
計		25186	158	

ms:ミリ秒

表 5.5: 費用パラメータ等

第 i 品目	$\lambda(i)$	c_i	h_i	l_i	p_i	L_i
1	0.6	0.0	1.0	2.0	4.0	2.0
2	0.4	0.0	1.0	2.0	4.0	2.0

set up cost(K:3.0)

表 5.6: (R, T) 政策

第 i 品目	R_i	T_i
1	3.57	2.44
2	2.48	2.44
総費用		7.22

5.7 他の政策との比較

本節では多品目在庫管理システムの政策としてよく知られている (s,c,S) 政策、(R, T) 政策と新アルゴリズムによって導いた最適政策とを比較する。ここでは他の政策と比較するために、需要過程は品目に独立なポアソン過程であると仮定する。本節でも前節同様、2 品目の在庫管理システムについて考える。費用等のパラメータは表 5.5に示すとおりである。

表 5.6より (R,T) 政策は 2.44 時間ごとに第 1 品目を 3.57 第 2 品目を 2.48 まで発注する政策である。一方、(s,c,S) 政策はいずれかの在庫水準が 1 になるまで発注せず、1 になったとき他方が１０以下ならば、同時発注がなされ、さもなければ、1 になった品目のみ発注される政策である（表 5.7)。双方とも図 5.3に示される最適発注政策に比べると単純であり、費用を最適値の１１０ %以内にすることは難しい。

表 5.7: (s, c, S) 政策

第 i 品目	s_i	c_i	S_i
1	1	10	11
2	1	10	11
総費用			12.68

```
      第2品目
         |
29292929CC
28282828BB**
26262626 Z****
24242424**24** X
22222222**2222** V
2020202020202020** T
1818181818181818**** R
1616161616161616**** P
1414141414141414****** N
1212121212121212******** L
1010101010101010******** J
 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8******** H**
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1******** A F G
 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4**** C D****** I
 5 5 5 5 5 5 5 5 5**** B E********** K
 1 1 1 1 1 1 1 1 1******************** M
 1 1 1 1 1 1 1 1************ 1 6******** O
 1 1 1 1 1 1 1 1******** 3 4 1 6 7 9****** Q
 1 1 1 1 1 1 1 1 1**** 2 3 4 1 6 7 91113**** S
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 1 6 7 911131517** U
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 1 6 7 91113151719****
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 1 6 7 9111315171921****
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 1 6 7 91113151719** W YAA 第1品目
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 1 6 7 9111315171921232527
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 1 6 7 9111315171921232527
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 1 6 7 9111315171921232527
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 1 6 7 9111315171921232527
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 1 6 7 9111315171921232527

-4-3-2-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 910111213141516171819202122
```

図 5.2: 最適政策

```
     第2品目
        |
21212121 U
2020202020 T
1818181818** R
161616161616** P
141414141414**** N
121212121212****** L
10101010101010****** J
 8 8 8 8 8 8 8**** H****
 6 6 6 6 6 6**** F*********
 3 3 3 3 3 3 3****** C**** G
 2 2 2 2 2 2 2**** B**** E** I
 1 1 1 1 1 1 1** A**** D****** K
 1 1 1 1 1 1******************** M
 1 1 1 1 1 1**** 1 2 3** 5 7****** O
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 5 7 91113** Q
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 5 7 911131517 S   第1品目
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 5 7 91113151719
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 5 7 91113151719
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 5 7 91113151719
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 5 7 91113151719
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 3 4 5 7 91113151719
```

図 5.3: 最適政策

表 5.8: 3政策間の比較

	最適	(R,T)	(s,c,S)
費用	6.02	7.22	12.68
率 (費用/6.02)	1.00	1.19	2.10

この例では Atkins and Iyogun [10] が示しているように (R,T) 政策の方が (s,c,S) 政策よりも格段に良いことがわかる（表 5.8)。しかし、Pantumsinchai [101] に示されてるように (s,c,S) 政策には K の大きさに関係なく最適値に近い値を提供することが知られている。この報告によると (σ, S) 政策をポアソン需要において使用した (Q, S) 政策は K の値が小さいとき費用を節減するが、K が大きくなると (s,c,S) 政策にも劣ることが知られている。

5.8 あとがき

本章では連続的に観測され、納入遅れがある多品目在庫管理システムをセミ・マルコフ決定過程として定式化し、第 4 章同様、PIM によって最適政策が計算できることを示した。特に第 5.3節では、最適政策を求めるとき、繰り越しが認められているため状態数が加算であり、従来の PIM が使用でない欠点を定理 5.1 によって回避した。さらに第 5.4、第 5.5節では第 4 章同様、新しいアルゴリズムを平均期待費用、割引き期待費用の双方に関して提案した。第 5.7節では、これまで連続観測の在庫管理システムにおいて、近似最適政策として提案されている (s,c,S) 政策、(R,T) 政策との比較を試みた。ここでは費用構造が一般化したとき最適政策が簡単な近似政策にはならないことが明らかにされ、近似政策では費用節減に限界があることを示した。費用構造の一般化に伴う最適政策の複雑化は避けられず、高レベルで費用削減を行うには、最適発注政策をよりはやく計算することが要求される。そのとき新アルゴリズムの真価が発揮されるであろう。

第 6 章

結論

6.1　1 品目在庫管理システム

第 2 章では固定段取り費用に加えて固定在庫・品切れ費用を含む確率的な 1 品目在庫システムを考えた。このようなシステムのクラスにおいて (s, S) 政策が最適となる十分条件を議論した。さらに、例として需要分布を特定なものに仮定したとき、十分条件がどのようになるかも考えた。この例としては一様分布、指数分布、正規分布、ガンマ分布が使用された。第 2 章で導かれた結果は、固定在庫・品切れ費用を含んだこのシステムが簡単な条件の下で (s, S) 政策が最適発注政策となることである。また、多期間問題の証明について、固定品切れ費用のみのシステムで Aneja and Noori[5] が提案した証明と異なる、より簡潔な証明法を提案したことである。多品目在庫管理システムにおいても品目間の依存関係が認められない場合や他の品目に比べてある品目の収益（あるいは費用）がシステム管理上の重要部分である場合、この単一品目在庫管理システムで導かれた成果は十分利用可能である。研究がしつくされたように思われるこの単一品目在庫管理システムであるが、ここで得られた数々の有用と思われる結果が、まだ拡張として多品目在庫管理システムに反映されてないように思われる。今後、この分野における研究が期待される。

第 3 章では、次期に繰り越すことが不可能な在庫品を発生時点にズレのある 2 種類の需要の間でどのように配分すればよいかの問題を考察した。ホテルの空き部屋、旅客機やコンサートの座席などの在庫管理において、この種の在庫管理システムがあてはまる。従来のモデルでは、2 種類の需要の独立性を仮定していたが、ここでは 2 種類の需要間の確率的依存関係を認めている。この仮定によって最適な在庫の配分量

がどのような影響を受けるかを具体的な例を通して分析した。今後の課題としては、品物の多品目化と計画期間の期間化が挙げられるが、相当複雑になることが予想される。

6.2 多品目在庫管理システム

第4章では計画期間が無限であり、システムを周期観測する確率的多品目在庫管理システムを考えた。この在庫管理システムに対して得られた成果は、単位期間当たりの (あるいは割引) 平均費用を最小化する最適発注政策を導く新アルゴリズムを提案したことである。また、数値例を通してこのアルゴリズムを使用することにより、最適政策決定までの計算時間が従来の PIM で要した約 1/10 以下であることがわかった。

第5章では超過需要が繰り越され (バックログ)、一定の納入遅れがり、連続時間観測がなされる多品目在庫管理システムを考えた。ここでも、最適な発注政策を求める新しいアルゴリズムが導出された。また、一般的な費用構造の下で従来多品目在庫管理システムにおいて近似最適政策として使用されている政策との比較を試み、最適政策の複雑さと優位性を明らかにした。

第4章、第5章とも多品目を取り扱った現実的な問題であり、ここで得られた成果は、第3章において論じられた問題の多品目化に援用が可能と考えられる。特に、新アルゴリズム導出の考え方は全く別の分野にも応用が可能であると予想される。今後の研究課題としては、複数品目をグループ化し、一括発注する方法を考慮に入れた在庫管理システムに対して最適発注政策を議論することがまず挙げられる。この研究は第1章で紹介した文献の中でも議論された話題であるが、今日までの研究はグループ発注が可能となる条件が厳しく、まだまだ研究の余地がある。また、物流業界によくみられる階層的構造を持つ在庫管理システムを、本論文で論じた多品目在庫管理システムの多階層問題として定式化し、その最適発注 (在庫) 政策を求めること等も興味深い研究テーマになるであろう。

6.3 おわりに

今後、実際問題として、（１品目）多品目多階層在庫システムは、さらに複雑化、一般化し、意思決定に要する時間の短縮が切望されるであろう。そのためには、より効率的な在庫管理システムの構築が必要となり、コンピュータに多くを委ねざるを得なくなるであろう。すなわち、在庫費用最小化のための在庫管理システムの構築に費用がかかり過ぎるという皮肉な結果をもたらす恐れがある。しかし、コンピュータの能力向上と低価格化およびデーターベースの充実は在庫管理システムの効率を飛躍的に向上させるものと期待される。今後、コンピュータシステムと直結した大規模な経営戦略システムとしての在庫管理の研究が重要になるものと考えられる。

謝辞

本研究は、著者が名古屋工業大学工学研究科博士課程に在学中、同大学生産システム工学科教授大野勝久博士のご指導のもとに行ったものである。

本研究のために多大なご尽力を頂き、昼夜を問わず熱心な御指導を賜った大野勝久教授に心より厚く御礼申し上げます。そして、貴重なお時間をさいて本論文審査の副査をして頂いた同大学生産システム工学科小和田正教授と同大学社会開発工学科松井寛教授に厚く御礼申し上げます。

また、日頃、数多くの御助言および御指導を賜った同大学生産システム工学科助手中出康一先生、本研究を進める上でご協力頂きました新日本製鉄（株）吉井寿昭氏に感謝の意を表します。

最後に、著者が南山大学大学院博士前期課程時代大変お世話になり、かつ熱心な御指導を賜った南山大学経営学部情報管理学科教授沢木勝茂先生に厚く御礼申し上げます。

参考文献

[1] Adelson, R. M., "Compound Poisson Distributions," *Operational Research Quarterly 17*, pp. 73-75 (1966).

[2] Aggarwal, S. C., "A Review of Current Inventory Theory and Its Applications," *International Journal of Production Research 12*, pp. 443-482(1974).

[3] Aggarwal, V., "Grouping Multi-Item Inventory Using Common Cycle Periods," *European Journal of Operational Research 17*, pp. 369-372(1984).

[4] Altiok, T., "(R, r) Production/Inventory Systems," *Operations Research 37*, pp. 266-276 (1989).

[5] Aneja, Y., and H. A. Noori, "The Optimality of (s,S) Policies for a Stochastic Inventory Problem with Proportional and Lump-sum Penalty Cost," *Management Science 33*, pp. 750-755 (1987).

[6] Anily, S., and A. Federgruen, "One Warehouse Multiple Retailer Systems with Vehicle Routing Costs," *Management Science 36*, pp. 92-114(1990).

[7] Arrow, K. J., T. Harris, and J. Marschak, "Optimal Inventory Policy ," *Econometrica 19*, pp. 250-272 (1951).

[8] Arrow, K. J., S. Karlin, and H. Scarf, *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford University Press, 1958.

[9] Atkins, D., and P. Iyogum, "A Lower Bound on a Class of Coordinated Inventory/Production Problems," *Operations Research Letters 6*, pp. 63-67(1987).

[10] Atkins, D., and P. Iyogum, "Periodic versus 'Can-Order' Policies for Coordinated Multi-item Inventory Systems," *Management Science 34*, pp. 791-796(1988).

[11] Axsater, S., "Simple Solution Procedures for a Class of Two-Echelon Inventory Problems," *Operations Research 38*, pp. 64-69 (1990).

[12] Balintfy, J. L., "On Basic Class of Multi-Item Inventory Problems," *Management Science 10*, pp. 287-287 (1964).

[13] Barany, I., T. J. V. Roy, and L. A. Wolsey, "Strong Formulations for Multi-Item Capacitated Lot Sizing," *Management Science 30*, pp. 1255-1261 (1984).

[14] Bartmann, D., and M. J. Beckmann, *Inventory Control*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[15] Bastian, M., "Joint Replenishment in Multi-item Inventory Systems," *Journal of Operational Research Society 37*, pp. 1113-1120(1986).

[16] Bather, J., "Optimal Decision Procedures for Finite Markov Chains. Part II: Communicating Systems," *Advances in Applied Probability 5*, pp. 521-540 (1973).

[17] Beckmann, M. J., "Decision and Team Problems in Airline Reservations", *Econometrica 26*, pp. 134-145 (1958).

[18] Bell, C. E., "Improved Algorithms for Inventory and Replacement-Stocking Problems ," *SIAM Journal on Applied Mathematics 18*, pp. 558-566 (1970).

[19] Belobaba, P. P., "Airline Yield Management: An Overview of Seat Inventory Control", *Transportation Science 21*, pp. 63-73 (1987).

[20] Bessler, S. A., A. F. Veinott, Jr., and Decision Studies Group and Stanford University, "Optimal Policy for a Dynamic Multi-echelon Inventory Model," *Naval Research Logistics Quarterly 13*, pp. 355-389(1966).

[21] Chakravarty, A. K., "Multi-Item Inventory Aggregation into Groups," *Journal of Operational Research Society 32*, pp. 19-26(1981).

[22] Chakravarty, A. K., J. B. Orlin, and U. G. Rothblum, "Consecutive Optimizers for a Partitioning Problem with Applications to Optimal Inventory Groupings for Joint Replenishment," *Operations Research 33*, pp. 820-834 (1985).

[23] Chakravarty, A. K., "A Optimal Heuristic for Coordinated Multi-Item Inventory Replenishments," *Journal of Operational Research Society 36*, pp. 1027-1039(1985).

[24] Chen, M.-S., and C-T. Lin, "An Example of Disbenefits of Centralized Stocking," *Journal of Operational Research Society 41*, pp. 259-262(1990).

[25] Chow, Y. S., H. Robbins, and D. Siegmund, *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*, Houghton Mifflin Company, Boston 1971.

[26] Clark, A. J., and H. Scarf, "Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem," *Management Science 6*, pp. 475-490(1960).

[27] Clark, A. J., "An Informal Survey of Multi-Echelon Inventory Theory," *Naval Research Logistics 19*, pp. 621-650(1972).

[28] Clark, A. J., "Experiences with a Multi-Indentured, Multi-Echelon Inventory Model," *in Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 299-330.

[29] Cohen, M. A., W. P. Pierskalla, and S. Nahmias, "A Dynamic Inventory System with Recycling," *Naval Research Logistics Quarterly 27*, pp. 289-296(1980).

[30] Cohen, M. A., W. P, Pierskalla, and H.-C. Yen, "Analysis of Ordering and Allocation Policies for Multi-Echelon, Age-Differentiated Inventory Systems," *in*

Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 353-378.

[31] Cohen, M. A., P. R. Kleindorfer, and H. L. Lee, "Optimal Stocking Policies for Low Usage Items in Multi-Echelon Inventory Systems," *Naval Research Logistics Quarterly 33*, pp. 17-38(1986).

[32] Cohen, M. A., P. R. Kleindorfer, and H. L. Lee, "Near-Optimal Service Constrained Stocking Policies for Spare Parts," *Operations Research 37*, pp. 104-117(1989).

[33] Curry, G. L., R. W. Skeith, and R. G. Harper, "A Multiproduct Dependent Inventory Model," *AIIE Transactions 2*, pp. 263-267(1970).

[34] Datta, T. K., and A. K. Pal, "A Note on a Replenishment Policy for an Inventory Model with Linear Trend in Demand and Shortages ," *Journal of the Operational Research Society 43*, pp. 993-1001 (1992).

[35] Debodt, M. A., and S. C. Graves, "Continuous-Review Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem with Stochastic Demand," *Management Science 31*, pp. 1286-1299 (1985).

[36] Dekok, A. G., "Approximation for a Lost-Sales Production/Inventory Control Model with Service Level Constraints," *Management Science 31*, pp. 729-737 (1985).

[37] Demmy, W. S., and V. J. Pressuti, "Multi-Echelon Inventory Theory in the Air Force Logistic Command," *in Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 279-297.

[38] Denardo, E. V., *Dynamic Programming: Models and Applications.* Prentice Hall., Inc., 1982.

[39] Deuermeyer, B. L., and L. B. Schwarz, "A Model for the Analysis of System Service Level in Warehouse–Rerailer Distribution Systems: The Identical Retailer Case," *in Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 163-193.

[40] Ding, F.-Y., and T. J. Hodgson, "On Optimal and Approximate Policies for a Multistage Production/Inventory Problem," *International Journal of Production Research 26*, pp. 1937-1942 (1988).

[41] Ehrhardt, R. A., C. R. Schults, and H. M. Wagner, "(s, S) Policies for a Wholesale Inventory System," *in Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 145-161.

[42] Eppen, G., and L. Schrage, "Centralized Ordering Policies in a Multi-Warehouse System with Lead Times and Random Demand," *in Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 51-67.

[43] Erkip, N., W. H. Hausman, and S. Nahmias, "Optimal Centralized Ordering Policies in Multi-echelon Inventory Systems with Correlated Demands," *Management Science 36*, pp. 381-392(1990).

[44] Evans, R. V., "Inventory Control of a Multiproduct System with a Limited Production Resource," *Naval Research Logistics Quarterly 14*, pp. 173-184(1967).

[45] Federgruen, A., and Z. Schechner, "Cost formulate for Continuous Review Inventory Models with Fixed Delivery Lags," *Operations Research 31*, pp. 957-965 (1983).

[46] Federgruen, A., H. Groenevelt, and H. C. Tijms, "Coordinated Replenishments in a Multi-item Inventory System with Compound Poisson Demands," *Management Science 30*, pp. 344-357(1984).

[47] Federgruen, A., and P. Zipkin, "Approximations of Dynamic, Multilocation Production and Inventory Problems," *Management Science 30*, pp. 69-84 (1984).

[48] Federgruen, A., and P. Zipkin, "Computational Issues in an Infinite-Horizon, Multiechelon Inventory Model," *Operations Research 32*, pp. 818-836 (1984).

[49] Federgruen, A., and P. Zipkin, "Allocation Policies and Cost Approximations for Multiechelon Inventory Systems," *Naval Research Logistics Quarterly 31*, pp. 97-129 (1984).

[50] Federgruen, A., G. Prastacos, and P. H. Zipkin, "An Allocation and Distribution Model for Perishable Products," *Operations Research 36*, pp. 75-82 (1984).

[51] Ferdergruen, A., and Y.-S. Zheng, "The Joint Replenishment Problem with General Joint Cost Structures," *Operations Research 40*, pp. 384-403 (1992).

[52] Ferdergruen, A., and Y.-S. Zheng, "An Efficient Algorithm for Computing an Optimal (r, Q) Policy in Continuous Review Stochastic Inventory Systems," *Operations Research 40*, pp. 808-813 (1992).

[53] Gallego, G., and D. Simchi-Levi, "On the Effectiveness of Direct Shipping Strategy for the One-warehouse Multi-retailer *R*-systems," *Management Science 36*, pp. 240-243(1990).

[54] Geoffrion, A. M., and G. W. Graves, "Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition," *Management Science 20*, pp. 822-844(1974).

[55] Girlich, H.-J., and V. Barche, " On Optimal Strategies in Inventory Systems with Wiener Demand Process ," *International Journal of Production Economics 23*, pp. 105-110 (1991).

[56] Goswick, T. E., and B. D. Sivazlian, "The Mixed Ordering Policy in Periodic Review Stochastic Multi-commodity Inventory Systems," *Naval Research Logistics Quarterly. 21*, pp. 389-410 (1974).

[57] Graves, S. C., "A Multi-Echelon Inventory Model for a Repairable Item with One-for-One Replenishment," *Management Science 31*, pp. 1247-1256 (1985).

[58] Gregor, P. J., "An Evaluation of Inventory and Transportation Policies of a Regional Blood Distribution System," *European Journal of Operational Research 10*, pp. 106-113(1982).

[59] Gross, D., "Centralized Inventory Control in Multilocation Supply Systems," *in Multistage Inventory Models and Techniques*, Scarf, H. E., et al. (Eds.), Stanford University Press, 1963, pp. 47-84.

[60] Gross, D., C. E. Pinkus, and R. M. Soland, "Designing a Multi-Product, Multi-Echelon Inventory System," *in Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 11-49.

[61] Hadley, G., and T. M. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., pp. 235-260(1963).

[62] Hadley, G., and T. M. Whitin, "An Inventory-Transportation Model with N Locations," *in Multistage Inventory Models and Techniques*, Scarf, H. E., et al. (Eds.), Stanford University Press, 1963, pp. 116-142.

[63] Heyman, D. P., and M. J. Sobel, *Stochastic Models in Operations Research Volume II: Stochastic Optimization*, McGraw-Hill Book Company, 1984.

[64] Hoadley, B., and D. P. Heyman, "A Two-Echelon Inventory Model with Purchases, Dispositions, Shipments, Returns and Transshipments," *Naval Research Logistics Quarterly 31*, pp. 1-19 (1977).

[65] Hochstaedter, D., "An Approximation of the Cost Function for Multi-Echelon Inventory Model," *Management Science 16*, pp. 716-727(1970).

[66] Howard, R. A., *Dynamic Programming and Markov Processes*, Wiley, New York, 1960.

[67] Iglehart, D., "Optimality of (s, S) Policies in the Infinite-Horizon Dynamic Inventory Problem," *Management Science 9*, pp. 259-267 (1963).

[68] Iglehart, D. L., and S. C. Jaquette, "Multi-Class Inventory Models with Demand a Function of Inventory Level," *Naval Research Logistics Quarterly 16*, pp. 495-502 (1969).

[69] Ignall, E., "Optimal Continuous Review Policies for Two Product Inventory Systems with Joint Setup Costs," *Mangement Science 21*, pp. 277-279 (1969).

[70] Ignall, E., and A. F. Veinott, Jr, "Optimality of Myopic Inventory Policies for Several Substitute Products," *Management Science 15*, pp. 284-304 (1969).

[71] 石垣智徳、「ホテルの過剰予約問題とその最適政策」南山論集第 17 号経済・経営編 (1989).

[72] Jackson, P. L., W. L. Maxwell, and J. A. Muckstadt, "Determining Optimal Reorder Intervals in Capacitated Production-Distribution System," *Management Science 34*, pp. 938-958(1988).

[73] Jackson, P. L., "Stock Allocation in a Two-Echelon Distribution System or "What to do until your ship comes in"," *Management Science 34*, pp. 880-895(1988).

[74] Jackson, P. L., and J. A. Muckstadt, "Risk Pooling in a Two-Period, Two-Echelon Inventory Stocking and Allocation Problem," *Naval Research Logistics 36*, pp. 1-26 (1989).

[75] Johnson, E. L., "Optimality and Computation of (σ, S) Policies in the Multi-item Infinite Horizon Inventory Problem," *Management Science 13*, pp. 475-491(1967).

[76] Jonsson, H., and E. A. Silver, "Analysis of a Two-Echelon Inventory Control System with Complete Redistribution," *Management Science 33*, pp. 215-227 (1987).

[77] Kalin, D., "On the Optimality of (σ, S) Policies," *Mathematics of Operations Research 5*, pp. 293-307 (1980).

[78] Karmarkar, U. S., "The Multilocation Multiperiod Inventory Problems: Bounds and Approximations," *Management Science 33*, pp. 86-94 (1987).

[79] Lambrecht, M. R., J. V. Eecken, and H. Vanderveken, "Review of Optimal and Heuristic Methods for a Class of Facilities in Series Dynamic Lot-Size Problems," *in Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 69-94.

[80] Lee, H. L., "A Multi-Echelon Inventory Model for Repairable Items with Emergency Lateral Transshipments," *Management Science 33*, pp. 1032-1316 (1987).

[81] Liberman, V., and U. Yechiali, "On the Hotel Overbooking Problem-An Inventory System with Stochastic Cancellations", *Management Science 24*, pp. 1117-1126 (1978).

[82] Ling, D., and M. L. Puterman, "A Diffusion Process Model For a Two Product Inventory System," *Working Paper, Faculty of Commerce and Business Administration, University of British Columbia, Canada.*, (1979).

[83] Lippman, S. A., "Optimal Inventory Policy with Multiple Set-up Costs," *Management Science 16*, pp. 118-138(1969).

[84] Lippman, S. A., "Optimal Inventory Policy with Subadditive Ordering Costs and Stochastic Demands," *SIAM Journal on Applied Mathematics 17*, pp. 543-559 (1969).

[85] Love, R. F., "A Two-station Stochastic Inventory Model with Exact Methods of Computing Optimal Policies," *Naval Research Logistics Quarterly 14*, pp. 185-217(1967).

[86] Mahoney, J. F., and B. D. Sivazlian, "Probability of Shortage for Erlang Distributed Demand in a (σ, S) Inventory Problem," *SIAM Journal on Applied Mathematics 38*, pp. 156-162 (1980).

[87] Mitchell, J. S. B., "98%-Effective Lot-Sizing for One-Warehouse, Multi-Retailer Inventory Systems with Backlogging," *Operations Research 35*, pp. 399-404 (1987).

[88] Mitchell, J. C., "Multi-Item Inventory Systems with a Service Objective," *Operations Research 36*, pp. 747-755 (1988).

[89] Moinzadeh, K., and H. L. Lee, "Batch Size and Stocking Levels in Multi-Echelon Repairable System," *Management Science 32*, pp. 1567-1581 (1986).

[90] Moinzadeh, K., and H. L. Lee, "Approximate Order Quantities and Reorder Points for Inventory Systems where Orders Arrive in Two Shipments," *Operations Research 37*, pp. 277-287 (1989).

[91] Morey, R. C., and D. J. Sweeney, "A Budget Holdback Policy for Multi-Item Procurement Processes," *Management Science 30*, pp. 604-617(1984).

[92] Muckstadt, J. A., "A Model for a Multi-item, Multi-echelon, Multi-indenture Inventory System," *Management Science 20*, pp. 472-481 (1973).

[93] Muckstadt, J. A., and L. J. Thomas, "Are Multi-Echelon Inventory Methods Worth Implementing in Systems with Low-Demand-Rate Items?," *Management Science 26*, pp. 483-494 (1980).

[94] Muckstadt, J. A., and R. O. Roundy, "Multi-Echelon, One-Warehouse, Multi-Retailer Distribution Systems," *Management Science 33*, pp. 1613-1621 (1987).

[95] Naddor, E., "Optimal and Heuristic Decisions in Single- and Multi-Item Inventory Systems," *Management Science 21*, pp. 1234-1249 (1975).

[96] Nahmias, S., "Managing Repairable Item Inventory Systems: A Review," *in Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 253-277.

[97] Nahmias, S., "Perishable Inventory Theory: A Review," *Operations Research 30*, pp. 680-708 (1982).

[98] Nakagami, J., "Perishable Inventory Problem with Two Types of Warehouses," *Journal of the Operational Research Society of Japan 22*, pp. 29-39(1979).

[99] Oral, M., "Multi-Item Inventory Management with Monetary Objective Function," *AIIE Transactions 13*, pp. 41-46(1981).

[100] Page, E., and R. J. Paul, "Multi-product Inventory Situations with One Restriction," *Opl. Res. Q. 27*, pp. 815-834(1976).

[101] Pantumsinchai, P., " A Comparison of Three Joint Ordering Inventory Policies ," *Decision Sciences 23*, pp. 111-127 (1992).

[102] Park, K. S., and D. H. Kim, "Congruential Inventory Model for Two-Echelon Distribution Systems," *Operations Research 38*, pp. 643-650(1987).

[103] Platzman, L., "Improved Conditions for Convergence in Undiscounted Markov Renewal Programming," *Operations Research 25*, pp. 529-536 (1977).

[104] Popplewell, K., and M. C. Bonny, "The Application of Discrete Linear Control Theory to the Analysis and Simulation of Multi-product, Multi-level Production Control Systems," *International Journal of Production Research 25*, pp. 45-56 (1987).

[105] Porteus, E. L., "On the Optimality of Generalized (s,S) Policies," *Management Science 17*, pp. 411-426 (1971).

[106] Prastacos, G. P., "Blood Inventory Management: An Overview of Theory and Practice," *Management Science 30*, pp. 777-800 (1984).

[107] Pyke, F. D., "Priority Repair and Dispatch Policies for Reparable-Item Logistics Systems," *International Journal of Production Research 37*, pp. 1-30 (1990).

[108] Renberg, B., and R. Planche, " Un modèle pour la gestion simultanèe des n articles d'un stock ," *Revue Francaise d'Informatique et de Récherche Operationnelle 6 (Serie Bule)*, pp. 47-59 (1967).

[109] Rosenbaum, B. A., "Service Level Relationship in a Multi-Echelon Inventory System," *Management Science 27*, pp. 926-945 (1981).

[110] Rosenbaum, B. A., "Inventory Placement in a Two-Echelon Inventory System: An Application," *in Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 195-207.

[111] Ross, S. M., *Applied Probability Models with Optimization Applications,* Holden-Day, San Francisco, 1970.

[112] Rothstein, M., "An Airline Overbooking Model", *Transportation Science 5*, pp. 180-192 (1971).

[113] Roundy, R., "98%-Effective Integer-Ratio Lot-Sizing for One-Warehouse Multi-Retailer Systems," *Management Science 31*, pp. 1416-1430(1985).

[114] Roy, T. J. V., "Multi-level Production and Distribution Planning with Transportation Fleet Optimaization," *Management Science 35*, pp. 1443-1453 (1989).

[115] Sawaki, K., "An Analysis of Airline Seat Allocation," *Journal of Operations Research Society of Japan 32*, pp. 411-419 (1989).

[116] 沢木勝茂、「割引航空券と座席予約管理モデル」オペレーションズ・リサーチ, 34, pp. 337-339 (1989).

[117] Scarf, H., "The Optimality of (s-S) Policies in the Dynamic Inventory Problem," Chapter 13 in Arrow, K. J., Karlin, S. and Scarf, H.(Eds.), *Mathematical Method in the Social Science,* Stanford University Press, Stanford, 1960.

[118] Scarf, H. E., D. M. Gilford, and M. W. Shelly, *Multistage Inventory Models and Techniques*, Stanford University Press, 1963.

[119] Scarf, H. E., "A Survey of Analysis of Techniques in Inventory Theory," *in Multistage Inventory Models and Techniques*, Scarf, H. E., et al. (Eds.), Stanford University Press, 1963, pp. 185-225.

[120] Schaffer, M. K., "A Multi-Item Maintenance Center Inventory Model for Low-Demand Reparable Items," *Management Science 29*, pp. 1062-1068(1983).

[121] Schwarz, L. B., "A Simple Continuous Review Deterministic One-Warehouse N-Retailer Inventory Problem," *Management Science 19*, pp. 555-566(1973).

[122] Schwarz, L. B., *Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice*, North-Holland, 1981.

[123] Schwarz, L. B., B. L. Deuermeyer, and R. D. Badinelli, "Full-Rate Optimization in a One-Warehouse N-Identical Retailer Distribution Systems," *Management Science 31*, pp. 488-498 (1985).

[124] Schweitzer, P. J., and A. Federgruen, "The Functional Equations of Undiscounted Markov Renewal Programming," *Mathematics of Operations Research 3*, pp. 308-321 (1978).

[125] Sherbrooke, C. C., "METRIC: A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control," *Operations Research 14*, pp. 122-141 (1968).

[126] Sherbrooke, C. C., "An Evaluator for the Number of Operationally Ready Aircraft in a Multi-level Supply System," *Operations Research 19*, pp. 618-635 (1971).

[127] Sherbrooke, C. C., "VARI-METRIC: Improved Approximations for Multi-Indenture, Multi-Echelon Availability Models," *Operations Research 34*, pp. 311-319 (1986).

[128] Silver, E. A., "A Control System for Coordinated Inventory Replenishment," *International Journal of Production Research 12*, pp. 647-670 (1974).

[129] Silver, E. A., "Establish Reorder Point in the (s, c, S) Coordinated Control System Under Compounded Poisson Demand," *International Journal of Production Research 19*, pp. 743-750 (1981).

[130] Silver, E. A., and P. Peterson, *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning,* John Wiley & Sons, Inc., 1985.

[131] Simon, R. M., "Stationary Properties of a Two-Echelon Inventory Model for Low Demand Items," *Operations Research 19*, pp. 761-773 (1971).

[132] Sivazlian, B. D., "Asymptotic Approximations to Ordering Policies in a Stationary (σ, S) Inventory Problem," *SIAM Journal on Applied Mathematics 19*, pp. 155-166(1970).

[133] Sivazlian, B. D., "Stationary Analysis of a Multicommodity Inventory System with Interacting Set-up Costs," *SIAM Journal on Applied Mathematics 20*, pp. 264-278(1971).

[134] Sivazlian, B. D., and Y.-C. Wei, "Approximation Methods in the Optimization of a Stationary (σ, S) Inventory Problem," *Operations Research Letters 9*, pp. 105-113 (1990).

[135] Stulman, A., "Benefits of Centralized Stocking for the Multi-Centre Newsboy Problem with First Come, First Served Allocation," *Operations Research 38*, pp. 827-832(1987).

[136] Svoronos, A., and P. Zipkin, "Estimating the Performance of Multi-Level Inventory System," *Operations Research 36*, pp. 57-72 (1988).

[137] Thomas, L. C., "A Connectedness Conditions Used in Finite State Markov Decision Process ," *Journal of Mathematical Analysis and Applications 68*, pp. 548-556 (1979).

[138] Thompstone, R. M., and E. A. Silver, "A Coordinated Inventory Control System for Compound Poisson Demand and Zero Lead Time," *International Journal of Production Research 13*, pp. 581-602 (1975).

[139] Tinarelli, G. U., "Inventory Control: Models and Problems," *European Journal of Operational Research 14*, pp. 1-12(1983).

[140] Veinott, A. F., "Optimal Policy for a Multi-product Dynamic, Non-stationary Inventory Problems," *Management Science 12*, pp. 206-222(1965).

[141] Veinott, A. F., and H. Wagner, "Computing Optimal (s, S) Inventory Policies," *Management Science 11*, pp. 525-552(1965).

[142] Veinott, Jr., A. F., "The Status of Mathematical Inventory Theory," *Management Science 12*, pp. 745-777(1966).

[143] Veinott, Jr., A. F., "On Finding Optimal Policies in Discrete Dynamic Programming with No Discounting," *Ann. of Math. Statis. 37*, pp. 1284-1296 (1966).

[144] Veinott, A. F., "On the Optimality of (s,S) Inventory Policies: New Conditions and a New Proof," *SIAM Journal on Applied Mathematics 14*, pp. 1067-1083 (1966).

[145] Williams, J. F., "Multi-echelon Production Scheduling when Demand is Stochastic," *Management Science 20*, pp. 1253-1263 (1974).

[146] Williams, J. F., "Heuristic Techniques for Simultaneous Scheduling of Production and Distribution in Multi-Echelon Structures: Theory and Empirical Comparisons," *Management Science 27*, pp. 336-352 (1981).

[147] Williams, J. F., "A Hybrid Algorithm for Simultaneous Scheduling of Production and Distribution in Multi-Echelon Structures," *Management Science 29*, pp. 77-92 (1983).

[148] Zangwill, W. I., "A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System–A Network Approach," *Management Science 15*, pp. 506-527 (1969).

[149] Zhao, L.-G., and H.-S. Lau, "Reducing Inventory Costs and Choosing Suppliers with Order Splitting," *Journal of the Operational Research Society 43*, pp. 1003-1008 (1992).

[150] Zheng, Y.-S., "A Simple Proof for Optimality of (s, S) Policies in Infinite-Horizon Inventory Systems," *Journal of Applied Probability 28*, pp. 802-810 (1991).

[151] Zipkin, P., "On the Imbalance of Inventories in Multi-echelon Systems," *Mathematics of Operations Research 9*, pp. 402-423(1984).