有界正則関数の分類理論

中井三留
数学教室

（1990年8月10日受理）

Classification Theory Related to Bounded Analytic Functions

Mitsuru NAKAI
Department of Mathematics

We will construct in this paper a plane region on which there are no nonconstant bounded holomorphic functions and nevertheless there exists a subregion with an analytic relative boundary on which there is a nonconstant bounded holomorphic function whose real part vanishes on the relative boundary. In short we will show the existence of a plane region belonging to the class $O_{AB} \setminus O_{A^\circ B}$ in the notation of the classification theory of Riemann surfaces. A generalization of the Darboux theorem on conformal mappings is appended at the end of this paper.

Riemann 面 R 上の有界正則関数の全体を

$$AB(R)$$

と記し，$AB(R)$の各関数が定数となってしまう様な R の全体の族を

$$O_{AB}$$

と記す。次に相対境界が解析曲線から成る様な R の部分領域 S を R の許容部分領域と呼ぶことにするとき，$S \cup \partial S$ 上の有界正則関数 f で ∂S 上 $\mathrm{Re} f=0$ となる様なものの全体を記号

$$A^\circ B(S, \partial S)$$

で表す。R のすべての許容部分領域 S に対して常に $A^\circ B(S, \partial S)$ の各関数が定数と成ってしまうような R 全体の族を

$$O_{A^\circ B}$$

と記す。これら二つの Riemann 面の族 O_{AB} 及び $O_{A^\circ B}$ の持つ大体の意義は次のように述べられる。

複素平面 **C** 上の有界正則関数は定数に限ると言う Liouville の定理は，記号 O_{AB} を使って書けば $\mathbf{C} \in O_{AB}$ と表される。この理由で $R \in O_{AB}$ の時 R は Liouville の性質を持つと言い表すこともある。何れにしても R の理想境界が小さくて除去可能なのだと言う感じを基礎に持つ対象である。

一方 R 上の有理型関数 f の研究で，f を被覆面（R, f, $\hat{\mathbf{C}}$）とみたとき，或意味で R が $\hat{\mathbf{C}}$ を緊密に覆うと言う感じの Iversen の性質と呼ばれる性質を f が持つと便利なことが多い良い性質である。そして $R \in O_{A^\circ B}$ ならば R 上の有理型関数はどれも Iversen の性質を持つことが Kuroda により示されて以来 $O_{A^\circ B}$ は重要な族として認識されてきた。やはり R の理想境界が小さいと言う感じを基礎に持つ対象である。

そこでこれら2つの族 O_{AB} と $O_{A^\circ B}$ の比較の問題が出て来る。記号＜は真の包含関係を示すものとして，関係

$$O_{A^\circ B} < O_{AB}$$

が知られている。つまり $O_{A^\circ B} \subset O_{AB}$ であってしかも $O_{AB} \setminus O_{A^\circ B}$ に入る Riemann 面の実例が有る訳である。本論文の課題は此の点の研究にある。つまりこの実例として，いわゆる Myrberg 面と呼ばれる面を修飾したものとして与えられているのが標準的知識であるが，これは種数無限大の面であり，種数零の面，つまり平面領域，での実例は無いものかと言う点について論ずることを主題とする。

結論を言えば，$O_{AB} \setminus O_{A^\circ B}$ に入る**平面領域**の実例がある。このことは一部専門家の間では周知であると思われるが，しかし一般的にはそうとも言えないし，又内外の著書，論文，報文，口頭発表概要等の何れの形においても公刊されたものが見あたらないので，この知識が消失しない為にも又引用の便の為にも，ここに記録することは有意味であると思われる。これが本論文の目的である。

族 $O_{AB} \setminus O_{A^\circ B}$ に入る実例としては，比較の為にも又完全性も期して一般 Riemann 面として Myrberg 面を使うもの及び主目的であるところの平面領域に依るものの双方とも述べる。又便宜上族 O_{AB} や $O_{A^\circ B}$ に関連した事項で，上の実例の構成に必要なところは，特に大が

かりで書ききれぬものを除いては丁寧に説明を記す。関連したところ，特に省略した部分については Riemann 面の分類論の専門書［7］を見られたい。又本質的に証明なしに Lavrent'ev の一定理を使うがこの分かり易い証明を次回に発表したいと考えている。

本論文の末尾に，付録として，等角写像に関する Darboux の名前で呼ばれる一事実が，通常述べられている形で必要とする幾つかの条件を除去することが出来て，一般化されることを説明する。

記号. 一般に Riemann 面の部分集合 X の相対境界及び閉包をそれぞれ ∂X 及び $\overline{X}$ で表す．複素数 z の共役複素数も又 $\bar{z}$ と表すが混乱は無い。$\mathbf{C}$ は有限複素平面 $|z|<\infty$，$\hat{\mathbf{C}}$ は複素球面（又は単に複素平面とも言う）$|z|\leqq\infty$ を表すものとする。中心 $c\in\mathbf{C}$，半径 $r>0$ の開円板及び閉円板を各々

$$\Delta(c,\ r),\quad \bar{\Delta}(c,\ r)$$

と記す。特に単位円板を単に

$$\Delta=\Delta(0,1)$$

と略記する。更に中心∞半径ρの開円板及び閉円板を各々

$$\Delta(\infty,\ \rho)=\hat{\mathbf{C}}\setminus\bar{\Delta}(0,1/\rho),$$
$$\bar{\Delta}(\infty,\ \rho)=\hat{\mathbf{C}}\setminus\Delta(0,1/\rho)$$

と定めるものとする。最後に，Y が**平面領域**（又は**有限平面領域**）とは Y が複素球面 $\hat{\mathbf{C}}$（又は有限複素平面 $\mathbf{C}$）の部分領域であることを意味するものとする。平面領域 Y の相対境界 ∂Y は $\hat{\mathbf{C}}$ について考えるものとする。

1．族 O_{AB}

1.1.　Riemann 面 R 上の１価有界正則関数 f の作る関数族を

$$AB(R)$$

と記す。A は analytic（解析的）の又 B は bounded（有界）の頭文字をとって記号化したものである。関数論，特に Riemann 面の分類理論（［7］参照）に於て伝統的な記号である。他方関数環論等では特に Hardy 族との関連で，$AB(R)$の代わりに記号 $H^{\infty}(R)$が使われており，関数論でもこの記号を使うことが多くなって著者自身も混用している。大体に於て，上限ノルムによる Banach 環と考えたとき記号 $H^{\infty}(R)$を使い，単に関数族としてそのもつ Banach 代数的構造等を重視せぬ時記号 $AB(R)$を使うと言う傾向にあると思うが勿論判然とせぬ。しかし分類論では各種の記号との整合性等の見地から記号 $AB(R)$を使うのが普通である。

各定数は $AB(R)$に入るから $AB(R)\supset\mathbf{C}$ である。そこで $AB(R)$の各関数が定数ばかりからなる，つまり $AB(R)=\mathbf{C}$ となるとき，R は Liouville の性質を持つと言う。この様な R の全体の族を記号

$$O_{AB}$$

で表す。O は無いと言うことを示唆する記号で，O の添字である AB が定数以外には無いことを示している。古典関数論の Liouville の定理は簡単に $\mathbf{C}\in O_{AB}$ と表される訳である。Riemann 面 R として閉なもの，つまり R が完閉となるものは，明らかに $R\in O_{AB}$ である。この理由で Riemann 面 R として開なもの，つまり R が完閉でないもの，のみが分類論では自明でない対象となるので，大体 R は開 Riemann 面と思って議論することが多いが，とにかく O_{AB} には閉なものも含めておく方が便利である。R が閉とは R の理想境界が空と言うことであるが，いずれにしても $R\in O_{AB}$ の時 R の理想境界は少ない，又は小さい，と言う感じである。このことは平面領域の場合で見ると更にはっきりする。

1.2.　$R\in O_{AB}$ で R'がR に等角写像で写るときには，又 $R'\in O_{AB}$ でもある。つまり O_{AB} は等角不変である。そこで R を平面領域，即ち $R\subset\hat{\mathbf{C}}$ としていつ $R\in O_{AB}$ であるかを調べる。1次変換で等角同値なものとおきかえて考えたら良いから，

$$\infty\in R$$

と仮定して一般性を失うことが無い。そこで

$$K=\hat{\mathbf{C}}\setminus R$$

と置けば K は $\mathbf{C}$ の完閉集合であって

$$R=\hat{\mathbf{C}}\setminus K$$

の形となる。よって，$\hat{\mathbf{C}}\setminus K\in O_{AB}$ となる様な$\mathbf{C}$ の完閉集合 K の研究をすればよい。K が非退化連続体 E を含めば，$\hat{\mathbf{C}}\setminus E$ を Δ に等角写像する Riemann 写像関数 φ をとると，

$$\hat{\mathbf{C}}\setminus K\subset\hat{\mathbf{C}}\setminus E$$

だから $\varphi\in AB(\hat{\mathbf{C}}\setminus K)\setminus\mathbf{C}$ となり，$\hat{\mathbf{C}}\setminus K$ は O_{AB} に入らない。故に $\hat{\mathbf{C}}\setminus K\in O_{AB}$ か否かを論ずるのに，K のどの成分も１点である，つまり K は完全非連結であるとして良い。そうでないと常に O_{AB} には入らない。

上では$\mathbf{C}$ の完閉集合 K はあらかじめ $R=\hat{\mathbf{C}}\setminus K$ が連結となるものを考えたが，此の仮定は本質的ではない。$\mathbf{C}$ の一般の完閉集合 K を取るとき，$\hat{\mathbf{C}}\setminus K$ の∞を含む成分を R として考えれば良い。こうしても

$R\in O_{AB}$ ならば K は完全非連結

となることは同様に結論出来るからこの場合結局 $R=\hat{\mathbf{C}}\setminus K$ となる訳である。$\mathbf{C}$ の一般の完閉集合 K に対し $\hat{\mathbf{C}}\setminus K$ の∞を含む成分を R とし

$$K^{\wedge}=\hat{\mathbf{C}}\setminus R$$

と置くと，$K^{\wedge}$は又$\mathbf{C}$ の完閉集合であって $K\subset K^{\wedge}$であ

る。よって $\hat{C}\backslash K^{\wedge}\in O_{AB}$ となる C の完閉集合 K は何であるかを研究すると言えば最もすっきりした表現となり，$\hat{C}\backslash K^{\wedge}\in O_{AB}$ なら，とにかく $K^{\wedge}=K$ でこれが完全非連結となる訳である。

1.3. f を $\hat{C}$ の∞の近傍の正則関数とする。f の導関数の無限遠点∞に於ける値 $f'(\infty)$は，∞に於ける f の Taylor 展開
$$f(z)=f(\infty)+a_1/z+a_2/z^2+\cdots$$
の $1/z$ の係数 a_1 として定められる：
$$f'(\infty)=\lim_{z\to\infty}z(f(z)-f(\infty)).$$
そこで，K を C の完閉集合とし $\hat{C}\backslash K$ の∞を含む成分を R とするとき，即ち
$$R=\hat{C}\backslash K^{\wedge}$$
とするとき，
$$f(\infty)=0,\quad |f(z)|<1\quad(z\in R)$$
となる $f\in AB(R)$ の族$\mathscr{F}$に対して
$$c(K)=\sup_{f\in\mathscr{F}}|f'(\infty)|$$
を K の**解析容量**と呼ぶ，明らかに $c(K^{\wedge})=c(K)$ である。1.2で見たと同じ様に

$c(K)=0$ ならば K は完全非連結

となることが分かる。事実 K が非退化連続体 E を含むとして矛盾を出す。$\hat{C}\backslash E$ を $\varDelta$ に写す Riemann 写像関数 φ で $\varphi(\infty)=0$ となるものをとる。φ は $1:1$ なので $\varphi'(\infty)\neq 0$ に注意すると φ は
$$\varphi(\infty)=0,\quad |\varphi(z)|<1\quad(z\in\hat{C}\backslash K^{\wedge})$$
を満たすから $c(K)$ を定義する$\mathscr{F}$の関数であって
$$c(K)\geqq|\varphi'(\infty)|>0$$
と言う矛盾が出る。故に，$c(K)=0$ ならば $K^{\wedge}=K$ は完全非連結となる訳である。

補題 1.1. **C の完閉集合 K の $\hat{C}$ に関する補集合の∞を含む成分 R が O_{AB} に入るための必要十分条件は $c(K)=0$ となることである。**

証明. K はあらかじめ完全非連結として示せば十分である。そうでないと $R\notin O_{AB}$ で $c(K)>0$ だからである。すると $R=\hat{C}\backslash K$ である。$R\in O_{AB}$ ならば$\mathscr{F}=\{0\}$ だから明らかに $c(K)=0$ が言える。幾分自明でないのは，$c(K)=0$ から $AB(R)=C$ を導く部分である。

$c(K)=0$ として背理法により，$f\in AB(R)\backslash C$ が存在したとする。f を $f-f(\infty)$で置き換えたら良いから $f(\infty)=0$ とする。f の∞に於ける Taylor 展開を
$$f(z)=a_\nu/z^\nu+a_{\nu+1}/z^{\nu+1}+\cdots\quad(\nu\geqq 1,\ a_\nu\neq 0)$$
とするとき，$z^{\nu-1}f(z)$ は又 R 上有界正則で，$c>0$ を適当にとっておけば，$g(z)=cz^{\nu-1}f(z)$ と定めるとき，$g\in\mathscr{F}$となる。しかも
$$g(z)=ca_\nu/z+ca_{\nu+1}/z^2+\cdots$$
だから，$|g'(\infty)|=c|a_\nu|$ により
$$c(K)\geqq c|a_\nu|>0$$
となって矛盾が出る。　終

1.4. いつ $c(K)=0$ と成るかを調べるための一つの判定法に1次元測度に依るものが有力である。C の部分集合 E をとる。正数 $\varepsilon>0$ に対して
$$\bigcup_{j\geqq 1}\varDelta(z_j,d_j/2)\supset E,\quad 0<d_j<\varepsilon\quad(j\geqq 1)$$
となる E の可算被覆 $V=\{\varDelta(z_j,d_j/2)\}_{j\geqq 1}$ の全体を $\mathscr{V}_\varepsilon$ と記す。その時 E の1次元外測度を
$$\ell(E)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \inf_{V\in\mathscr{V}_\varepsilon}\sum_{j\geqq 1}d_j$$
で定める。すると ℓ は可測集合族上の測度となる。これを**1次元測度**（又は**線形測度**）と言う。

$\mathrm{Im}z=0$ 上の可測集合 E に対しては
$$\ell(E)=\int_E d(\mathrm{Re}z)$$
となる。$\partial\varDelta$ 上の可測集合 E に対しては
$$\ell(E)=\int_E|dz|$$
となる。依って例えば $\ell([0,1])=1$，$\ell(\partial\varDelta)=2\pi$ 等である。

この様に C の完閉集合 K に対しては，$\ell(K)$の方が $c(K)$よりもはるかに計算し易いものと思われる。又この時 $\ell(K)$を定義する $\mathscr{V}_\varepsilon$ の V は総て有限被覆で置き換えられること K の完閉性の直接の帰結である。

C の完閉集合に対して

$\ell(K)=0$ ならば K は完全非連結

である。そうでないと K は非退化連続体 L を含む。L の2点を結ぶ線分 S を固定する。$\{\varDelta(z_j,d_j/2)\}_{j=1}^n$ を L の任意の $\mathscr{V}_\varepsilon$ に入る有限被覆とする。S を含む直線上への z_j の射影を z'_j とするとき，$\{\varDelta(z'_j,d_j/2)\}_{j=1}^n$ は S の有限被覆となることが L が連続体であることから分かる。故に
$$\sum_{j=1}^n d_j\geqq|S|\qquad(S\text{ の長さ})$$
となる。これから
$$\ell(K)\geqq\ell(L)\geqq|S|>0$$
と言う矛盾が出ることになる。

補題 1.2 (Painlevé の定理). C の完閉集合 K に対して $\ell(K)=0$ ならば $c(K)=0$ となる。

証明. とにかく $\ell(K)=0$ だから K は完全非連結であることに先ず注意する。補題1.1により $c(K)=0$ を示す代わりに，任意の $f\in AB(\hat{C}\backslash K)$ は定数となることを言えば良い。f の代わりに $f-f(\infty)$ を考えることにより $f(\infty)=0$ と仮定して良い。だから $f\equiv 0$ を示せば良い。その為 $z\in\hat{C}\backslash K$ を任意に取り，$f(z)=0$ を言えば良い。

正数 $\eta>0$ を任意に取る。K は完閉であってしかも $\ell(K)=0$ だから，K の有限被覆 $\{\Delta(z_j, d_j/2)\}_{j=1}^{n}$ で

$$\sum_{j=1}^{n} d_j<\eta$$

となるものがとれる。あらかじめ d_j を小さくとっておくことにより

$$z\notin X=\bigcup_{j=1}^{n}\bar{\Delta}(z_j, d_j/2)$$

であるとしてよい。更に $\Delta(z_j, d_j/2)$ らのどの2円板も外接しないと仮定することも出来る。すると X の，従って $\hat{C}\backslash X$ の，境界 γ は高々有限個の互いに交わらぬ区分的に解析的な Jordan 曲線からなる。しかも

$$\gamma\subset\bigcup_{j=1}^{n}\partial\Delta(z_j, d_j/2)$$

であるから，γの長さを $|\gamma|$ と記すとき

$$|\gamma|\leqq\sum_{j=1}^{n}\pi d_j\leqq\pi\eta$$

となることに注意する。

さて $f\in AB(\mathbf{C}\backslash(X\backslash\gamma))$ だから $f(\infty)=0$ であることにより，$f(z)$ は Cauchy の積分公式により

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

と表される。$\hat{C}\backslash K$ 上 $|f|\leqq A$ となる正数 A をとる。又 z と ζ の距離を $\rho>0$ とする。すると

$$|f(z)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{A}{\rho}|d\zeta|=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{A}{\rho}\cdot|\gamma|$$

$$\leqq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{A}{\rho}\cdot\pi\eta=(A/2\rho)\eta$$

となる。ここで$\eta>0$ は任意だから $\eta\downarrow 0$ として $f(z)=0$ が結論出来る。 **終**

2. 族 $O_{A^\circ B}$

2.1. Riemann 面 R の真の部分領域 W で次の性質を持つ様なものを考える：任意の $z\in\partial W$ に対して z 中心の座標円板 U をうまくとると $U\cap\partial W$ が U の一つの直径となる。此の様な R の部分領域 W を R の**許容部分領域**と呼ぶ。依って許容部分領域 W は解析曲線からなる相対境界 ∂W と R の理想境界の W に触れる部分に依って囲まれた領域である。

境界のある Riemann 面 (W, γ) とは，或 Riemann 面 R があって W はその許容部分領域であり，$\gamma=\partial W$ と表されることであるとする。つまり Riemann 面 W の理想境界の一部分 γ が解析曲線として表現された組 (W, γ) が境界を持つ Riemann 面である。この時 $W\cup\gamma$ 上の有界正則関数 f で γ 上$\mathrm{Re}f=0$ となるような f の全体を記号

$$A^\circ B(W, \gamma)$$

と表す。W 自身は Riemann 面であるから，$AB(W)$ が考えられるが明らかに次の包含関係

$$A^\circ B(W, \gamma)\subset AB(W)$$

が成り立つ。さて，$\boldsymbol{R}$ を実軸とするとき，$A^\circ B(W, \gamma)\supset i\boldsymbol{R}$ であるが，$f\in A^\circ B(W, \gamma)$が定数$\alpha$となると $\mathrm{Re}\alpha=0$ だから $\alpha\in i\boldsymbol{R}$ となる。故に $A^\circ B(W, \gamma)$ の各関数が定数ばかりからなることと

$$A^\circ B(W, \gamma)=i\boldsymbol{R}$$

は同等であるが，とにかく，此の様な境界のある Riemann 面(W, γ) の全体の族を記号

$$SO_{AB}$$

で表す。$(W, \gamma)\in SO_{AB}$ とは W の理想境界の内 γ の補集合となる部分が小さい感じであることを意味している。このことをもっと具体的に述べる為の準備をする。

2.2. 境界のある Riemann 面 (W, γ) からそれ自身への恒等写像を j とする。局所的な表示の意味で $w=\overline{j(z)}$ (—は複素共役) が(W, γ) から $(j(W), j(\gamma))$ への等角写像となる様な等角構造を $(j(W), j(\gamma))$ に導入する。そこで γ と $j(\gamma)$ を同一視して W と $j(W)$ を$\gamma=j(\gamma)$ でつないだものは又一つの Riemann 面となる。これを (W, γ) の**対称化**と呼び記号

$$\hat{W}_\gamma$$

で表す。すると

$$j:\hat{W}_\gamma\to\hat{W}_\gamma$$

は $j\circ j=\mathrm{id.}$ (恒等写像) となる反等角写像であって，γ の各点は j の不動点となっている。

例えば上半平面を W として実軸を γ とするとき $\hat{W}_\gamma$ は $\mathbf{C}$ となる。この例でも (W, γ) に於ける W の γ 以外の理想境界は無限遠点ただ1点で小さいと思えるが，そこへ γ が集積しているので今一つはっきりしない。しかし $\hat{W}_\gamma=\mathbf{C}$ でははっきり無限遠点1点が理想境界で確かに少ない。

此の様に一般に (W, γ) の W の γ 以外の理想境界の小ささを，$\hat{W}_\gamma$ の理想境界の小ささで表現すると事情がはっきりする。この見地から次の事実は興味深い。

補題 2.1 (Kuroda の定理). 境界のある Riemann 面 (W, γ) が SO_{AB} に入る為の必要十分条件は (W, γ) の対称化 $\hat{W}_\gamma$ が O_{AB} に入ることである。

証明. 最初 $(W,\gamma)\in SO_{AB}$ とすると $\hat{W}_\gamma\in O_{AB}$ となることを示す。その為には任意の $f\in AB(\hat{W}_\gamma)$ をとると f は定数となることを示せば良い。j を $\hat{W}_\gamma$ の反等角写像であるとして，f から次の関数 f_1 と f_2 を作る：

$$f_1=f-\bar{f}\circ j,\quad f_2=-i(f+\bar{f}\circ j).$$

先ず f と共に $\bar{f}\circ j$ は $\hat{W}_\gamma$ 上有界正則であることを示す。その為に $\bar{f}\circ j$ が $\hat{W}_\gamma$ の各点 z で微分可能なことを見れば良い。局所的に考えて

$$\frac{(\bar{f}\circ j)(z+\Delta z)-(\bar{f}\circ j)(z)}{\Delta z} =\overline{\left(\frac{f(j(z+\Delta z))-f(j(z))}{j(z+\Delta z)-j(z)}\right)}\cdot\frac{\bar{j}(z+\Delta z)-\bar{j}(z)}{\Delta z}$$

であるが，右辺の第1因子は $\Delta z\to 0$ と共に $\overline{f'(j(z))}$ に収束し，第2因子は $\hat{W}_\gamma$ の等角構造の定め方により $\Delta z\to 0$ のとき $(\bar{j})'(z)$ に収束することが分かるからである。従って f_1, f_2 共に $AB(\hat{W}_\gamma)$ に入るが，作り方から γ 上

$$\mathrm{Re} f_k=0\quad(k=1,2)$$

となることが分かり，f_k を $W\cup\gamma$ 上に制限して考えると

$$f_k\in A^\circ B(W,\gamma)\quad(k=1,2)$$

となる。しかし $(W,\gamma)\in SO_{AB}$ であったから

$$f_k\equiv c_k\ (\text{定数})\quad(k=1,2)$$

である。所で $\hat{W}_\gamma$ 上 $f=f_1+if_2$ なので，特に W 上 $f\equiv c_1+ic_2$ となり，一致の定理より $\hat{W}_\gamma$ 上 f は定数 c_1+ic_2 となることが分かる。

逆に $\hat{W}_\gamma\in O_{AB}$ ならば $(W,\gamma)\in SO_{AB}$ であることを示したい。その為に任意に $f\in A^\circ B(W,\gamma)$ をとる。そこで

$$g(z)=\begin{cases} f(z) & (z\in W\cup\gamma),\\ \overline{f(j(z))} & (z\in j(W))\end{cases}$$

に依って $\hat{W}_\gamma$ 上の関数 g を定義する。γ 上 $\mathrm{Re}f=0$ であるから，鏡像の原理によって $g\in AB(\hat{W}_\gamma)$ が分かる。しかし $\hat{W}_\gamma\in O_{AB}$ だから g は $\hat{W}_\gamma$ 上，従って f は W 上定数となり $(W,\gamma)\in SO_{AB}$ が結論される。　**終**

2.3.　Riemann 面 R のすべての許容部分領域 W が境界のある Riemann 面 $(W,\partial W)$ と考えて常に SO_{AB} に入るような，つまり関数族 $A^\circ B(W,\partial W)$ が定数ばかりからなるような R の全体の族を記号

$$O_{A^\circ B}$$

と記す。此の族は Kuroda によって導入されたものであるがその意義を理解する為には Iversen の性質と呼ばれるものについて述べる必要がある。

Riemann 面 R 上の非定数の有理型関数 f を考える。f に対して $\hat{C}$ を基底面，f を被覆写像とする被覆面 $(R,f,\hat{C})$ を考える。任意の点 $\alpha\in\hat{C}$ を中心とする任意半径 $\rho>0$ の円板 $\Delta(\alpha,\rho)$ に対して $f^{-1}(\Delta(\alpha,\rho))\neq\phi$ であってその任意の成分 S をとるとき

$$\Delta(\alpha,\rho)\backslash f(S)$$

は非退化連続体を含まない時，f は **Iversen の性質** を持つと言う。

このとき，$\hat{C}$ の完全非連結閉集合 F があって $(R,f,\hat{C}\backslash F)$ は非有界有限葉被覆面であり F の各点は R の理想境界に於ける f の漸近値となる，と言うことが成り立つかまたは，R の理想境界に於ける f の集積値集合は $\hat{C}$ となる，と言うことが成り立つかのいずれかと成ることが知られており（例えば［7］参照），これを **Stoïlow の原理**と呼ぶ。しばらく Iversen の性質からはなれて後，又この説明に戻る。

境界のある Riemann 面 (W,γ) に於て，$W\cup\gamma$ 上の任意の有界正則関数 f を考えるとき，もし γ 上 $|f|=M$（正定数）ならば W 上 $|f|\leqq M$ となると言うことが成り立つならば，(W,γ) は **Lindelöf 型の性質**を持つと言う。此の様な (W,γ) の全体の族を記号

$$\mathscr{L}$$

と記すことにする。SO_{AB} の代わりに $\mathscr{L}$ を用いても $O_{A^\circ B}$ が定義出来る：

補題　2.2 (Noshiro の定理). Riemann 面 R が $O_{A^\circ B}$ に属する為の必要十分条件は，R の任意の許容部分領域 W を境界のある Riemann 面 と見た時 $\mathscr{L}$ にはいることである。

証明. R の任意許容部分領域 W に対して $(W,\partial W)\in\mathscr{L}$ と仮定するとき，R が $O_{A^\circ B}$ に入ることを言う。その為には $(W,\partial W)\in SO_{AB}$ を言えば良い。$W\cup\gamma$ 上有界正則な f で ∂W 上 $\mathrm{Re}f=0$ となるものを任意に取る。$e^{\pm f}$ は又 $W\cup\gamma$ 上有界正則で γ 上

$$|e^{\pm f}|=e^{\pm\mathrm{Re}f}=1$$

となるから，W 上 $|e^{\pm f}|\leqq 1$ となり，これから W 上

$$e^{\mathrm{Re}f}=|e^{f}|\equiv 1$$

が出る。故に W 上 $\mathrm{Re}f\equiv 0$ となって f は W 上定数となり，$(W,\partial W)\in SO_{AB}$ が結論される。

逆に $R\in O_{A^\circ B}$ を仮定する。R の任意の許容部分領域 W をとるとき $(W,\partial W)\in\mathscr{L}$ を言えば良い。その為 $W\cup\partial W$ 上有界正則関数 f で ∂W 上非負定数 M があって $|f|=M$ となるならば，W 上 $|f|\leqq M$ となることを言えば良い。背理法で，もし W の或点 z で $|f(z)|>M$ となるとき，$\{|f|=N\}$ が R 内の解析曲線からなるような $|f(z)|>N>M$ となる定数 N をとり，$\{|f|>N\}$ の z を含む成分を V とすると，V は R の許容部分領域であり ∂V 上 $|f|=N$ となる．f の代わりに f/N を考えたら良いから $N=1$ と仮定して構わない。

$$a=\sup_V |f| > 1$$

と置くとき等角写像

$$w=h(z)=\frac{1}{2i}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

により円環 $\{1 \leq |z| \leq a\}$ は虚軸上の線分 $[-i, i]$ と楕円により囲まれた閉領域に写され $\{|z|=1\}$ は $[-i, i]$ に対応する。そこで

$$g=h \circ f$$

と置くと g は $V \cup \partial V$ 上有正則で ∂V 上 $\mathrm{Re}g=0$ となる。$(V, \partial V) \in SO_{AB}$ だから，g 従って f は定数とならなければならぬ。これは矛盾である。 **終**

補題 2.3. 包含関係 $O_{A^\circ B} \subset O_{AB}$ が成り立つ。

証明. $R \notin O_{AB}$ ならば $R \notin O_{A^\circ B}$ を言えば良い。すると $f \in AB(R) \setminus \mathbf{C}$ が存在する。すると

$$|f(z_1)| < |f(z_2)|$$

となる R の2点 z_1, z_2 が取れるから

$$|f(z_1)| < M < |f(z_2)|$$

となる定数 M で $\{|f|=M\}$ が解析曲線からなる様なものを取る時，$\{|f|>M\}$ の z_2 を含む成分を S とすると，S は R の許容部分領域であり，∂S 上 $|f|=M$ なのに S 上 $|f|>M$ となって，$(S, \partial S) \notin \mathscr{L}$ である。依って補題2.2から $R \notin O_{A^\circ B}$ となる。 **終**

さて再び Iversen の性質に帰る。族 $O_{A^\circ B}$ の重要さは次の Kuroda の定理が成立することにある：

$R \in O_{A^\circ B}$ で f を R 上の任意の非定数有理型関数とすると f は Iversen の性質を持つ。

これを示す為に $\hat{\mathbf{C}}$ 上の任意円板 $\Delta(\alpha, \rho)$ をとる。$f^{-1}(\Delta(\alpha, \rho))$ が空であると $1/(f-\alpha)$（$\alpha=\infty$ なら f）は $AB(R) \setminus \mathbf{C}$ に入って補題2.3に反する。そこで $f^{-1}(\Delta(\alpha, \rho))$ の任意の成分 S をとる。必要なら ρ を小さくすることにより S は R の許容部分領域である様に出来る。そして

$$f(\partial S) \subset \partial \Delta(\alpha, \rho)$$

である。$\Delta(\alpha, \rho) \setminus f(S)$ が連続体 E を含むと，円環状領域 $\Delta(\alpha, \rho) \setminus E$ を円環 $1<|z|<M<+\infty$ に等角写像する関数 h で $\partial\Delta(\alpha, \rho)$ は $|z|=1$ に対応する様に出来る。すると $g=h \circ f$ は $S \cup \partial S$ 上有界正則で ∂S 上 $|g|=1$ なのに S 上 $|g|>1$ となるから $(S, \partial S) \notin \mathscr{L}$ となり，補題2.2から $R \in O_{A^\circ B}$ に反する。

補題2.3の等号の不成立を示す例として後出の4.1で説明する面に対しては Iversen の性質が成立せぬ事が分かるので，上の主張は最善である。

3. Riemann 写像

3.1. $\Delta=\Delta(0, 1)$ は単位円板でその周をここでは $\gamma=\partial\Delta$ とかくことにする。又 G を一つのJordan 領域とすると，その境界 $\Gamma=\partial G$ は Jordan 曲線である。**Riemann の写像定理**によれば Δ を G に等角に写像するいわゆる Riemann の写像関数 f が存在し，しかも f は Δ の1次自己変換を度外視すれば一意的である。更に **Carathéodory の定理**によれば f は自然に $\bar{\Delta}=\Delta \cup \gamma$ から $\bar{G}=G \cup \Gamma$ の上への位相写像に拡張される。従って特に f は γ と Γ の間の位相写像である。$E \subset \gamma$ には $f(E) \subset \Gamma$ が対応するのであるが各々の1次元測度 $\ell(E)$ と $\ell(f(E))$ の間には何か関係が有るだろうか？例えば $\ell(E)=0$ であることと $\ell(f(E))=0$ とは同等であるか否か？この様な問題は応用上重要である。

$\gamma=\partial\Delta$ は局所的には真直ぐであるが，$\Gamma=\partial G$ は一般にくねくねと曲がりくねっているであろう。Γ の外側へ膨らんだ部分に対応する γ の部分を f は引き延ばそうとするであろうし，Γ の内側へ窪んだ部分に対応する γ の部分を f は圧縮しようとすると思われる。γ の部分集合 E がこの f に依る伸張傾向（又は圧縮傾向）の部分にあれば E の1次元測度 $\ell(E)$ に較べて像 $f(E)$ の1次元測度 $\ell(f(E))$ はずっと大きい（又はずっと小さい）であろうし，Γ の曲がりくねり方がはなはだしくなればなる程此の度合は増すと思われる。これら両者の絡み合いで $\ell(E)$ と $\ell(f(E))$ の関係に何が起ってもおかしくない様に思われるであろう。但し Γ の長さが有限であると曲がりくねり方はあまり極端にはなれなくて次の整然とした事実が成立する：

補類 3.1 (Riesz 兄弟定理). Γ の長さ $|\Gamma|<\infty$ ならば，$\ell(E)=0$ となることと $\ell(f(E))=0$ となることとは同等である。

此の証明については標準的な教科書，例えば [1] や [8] 等を参照されたい。換言すると，$|\Gamma|<\infty$ ならば f は γ 上絶対連続になると言う事である。従って例えば $\ell(E)>0$ なのに $\ell(f(E))=0$ などと言う現象は起こるとすれば少なくとも $|\Gamma|=\infty$ となる位の極端さで Γ が曲がりくねっていないといけないと言うことになる。そして事実これが起こり得るのである：

補題 3.2 (Lavrent'ev の定理). 単位円板 Δ から Jordan 領域 G へのどんな等角写像も $\gamma=\partial\Delta$ 内の1次元測度 2π のある集合を $\Gamma=\partial G$ 内の1次元測度零の集合へ写すような Jordan 領域 G が存在する。

Δから G 上への等角写像の１つを f とするとき，Δ からそれ自身への１次変換を m とすると，Δ から G への任意の等角写像は $f\circ m$ の形に与えられる。γの可測部分集合 E で $\ell(E)=2\pi$, $\ell(f(E))=0$ となるものがあれば $f\circ m$ に対する集合は $m^{-1}(E)$ に取れば良い。$\ell(m^{-1}(E))=2\pi$ だからである。依って (G, f, E) の１組の存在が Lavrent'ev の定理の実質的な主張である。

3.2.　上の定理は Lavrent'ev が半世紀以上も前の1936年発表したものであるが，一つには論文がロシア語で書かれている為と，いま一つは証明が大変に難解であった為に，英訳がずっと後1963年に出版された後も主張の事実が一般には無懐疑に受け止められていると言う雰囲気ではなかった様に思われる（Lavrent'ev［２]）。元々の Lavrent'ev の定理では１次元測度正の集合を零のものに写すと言う形であって，測度 2π の形にしたのは McMillan と Piranian 共著の論文［４］である。更にここでは f がクラス (A)，即ち

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

と Δ で Taylor 展開するとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<\infty$$

となる様に G が作られている。［４］の証明は極めて幾何学的で大変見通しの良いものであるが，筆者の観点では，幾分直観的に過ぎる嫌いがあるように思える。そこで［３］で展開された解析的な道具立てをうまく利用した［６］の証明に準拠した，少なくとも筆者にとっては，大変分かり易い証明を与えることが出来るが，無論多大の紙数を要するので，次回を期したいと思う。ただここでは［４］の基本的なアイデアがどの様なものであるかのみを説明しておく。

3.3.　求める領域 G は，先ず Δ 上の単葉正則関数 $f(z)$を作り，

$$G=f(\Delta)$$

として与える。$f(z)$ は次の漸化式で定める多項式列 $\{f_j(z)\}_{j=0}^{\infty}$の極限として与える：先ず $f_0(z)\equiv z$とし，

$$f_j(z)=f_{j-1}(z)+\frac{k}{n_j}z^{n_j}f'_{j-1}(z)\qquad(j=1,2,\cdots)$$

とする。ここに k は $0<k<1$ となる実定数であり，又 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ はある自然数列である。$\{n_j\}$ を十分速く発散するようにすると，$\bar{\Delta}$ 上 $\{f_j(z)\}$ は，$\bar{\Delta}$ 上絶対かつ一様収束する巾級数で与えられるある関数 $f(z)$ に，一様収束する様に出来ることを示す。又 $f(z)$ は $\bar{\Delta}$ 上単射であることが示される。そこで f' の γ 内の Plessner 点の集合 P をとると，$\ell(P)=2\pi$, $\ell(f(P))=0$ となることが分かって構成が完結すると言うのが証明の概要である。

ここで $e^{i\theta}\in\gamma=\partial\Delta$ に於て Δ 内の有理型関数 g の近づき得る角内集積値の全体を g の $e^{i\theta}$ に於ける角集積値集合と言うが，これが $\hat{C}$ と一致する様な $e^{i\theta}$ を g の Plessner 点と言いその全体を $P(g)$ と記す。又 g が $e^{i\theta}$で角極限をもつとき $e^{i\theta}$を g の Fatou 点と言いその全体を $F(g)$ と記す。すると

$$\ell(P(g)\cup F(g))=2\pi$$

となると言うのが Plessner の定理である（［５］参照)。これを使って上の $\ell(P)=2\pi$ を出すのであり，いずれにしても初等的な道具立てのみでは処理されない。

4．族 $O_{AB}\backslash O_{A^\circ B}$ の例

4.1.　一般 Riemann 面の例． $\{z_n\}$ を原点０に収束する $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 内の任意の点列とする。$\{z_n\}$ の上にのみ分岐点を持つ $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 上の２葉の被覆面 $\mathscr{M}$ を Myrberg 面と呼ぶ。$\mathscr{M}$ を修飾して様々な Riemann 面を作り，分類論に於ける各種の反例として利用する。

決まりを付ける為に $z_n=1/n$ $(n=1,2,\cdots)$ としての Myrberg 面 $\mathscr{M}$を考える。基底面$\mathbf{C}\backslash\{0\}$ 上の閉円板 $K=\bar{\Delta}(-3, 1)$の上にある $\mathscr{M}$ の２つの閉円板を$K^{\pm}$, $\Delta(-3, 2)\backslash\bar{\Delta}(-3, 1)$の上にある円環領域 S で $K^{+}\cup S$ が $\Delta(-3, 2)$ 上の開円板と成るようなものをとる。そこで Riemann 面

$$R=\mathscr{M}\backslash K^{+}$$

を考えると，これが $O_{AB}\backslash O_{A^\circ B}$ に入ることがわかる：

$$R\in O_{AB}\backslash O_{A^\circ B}$$

先ず $R\in O_{AB}$ となることをみる。$f\in AB(R)$ を任意に取るとき，これが定数となることが言いたい。各 $z\in X$ の上にある$\mathscr{M}$の２点を $z^{\pm}$ とする。各 $z_n=1/n$ に対しては $z_n^{+}=z_n^{-}$ と考える。そこで

$$g(z)=(f(z^{+})-f(z^{-}))^2$$

と置くと $g\in AB(\mathbf{C}\backslash\{0\}\cup K)$ だから，Riemann の除去可能定理により $z=0$ でも正則で $g\in AB(\mathbf{C}\backslash K)$ となる。ところが $g(z_n)=0$ $(n=1, 2, \cdots)$ により，一致の定理に依って $g\equiv 0$ となる。従って $\mathbf{C}\backslash K$ の各点 z に対して $f(z^{+})=f(z^{-})$ だから，$z^{+}\in K^{+}$ に対しても $f(z^{+})=f(z^{-})$ に依り $f\in AB(\mathscr{M})$ となる様に拡張出来る。

$$h(z)=f(z^{+})=f(z^{-})$$

と定めた $h\in AB(\mathbf{C}\backslash\{0\})$ で，再び Riemann の除去可能定理に依って $h\in AB(\mathbf{C})$ となる。故に Liouville の定理により $\mathbf{C}$ 上 $h\equiv c$（定数）となる。これから R 上 $f\equiv c$ が出る。

次に $R\notin O_{A^\circ B}$ を示したい。その為には，S が R の１つの許容部分領域であることに注意して，$(S, \partial S)\in$

SO_{AB} を言えば良い。しかし S の ∂S に関する対称化 $\hat{S}_{\partial S}$ は円環$\{1<|z|<4\}$となるから，明らかに $\hat{S}_{\partial S}\notin O_{AB}$ である。よって補題2.1（Kuroda の定理）により，主張が従う。

4.2. 平面領域の例. 複素平面 C 内の完全非連結完閉集合 K で

$$R=\hat{\mathbb{C}}\backslash K\in O_{AB}\backslash O_{A^\circ B}$$

となるものを求める。この様な K は補題3.2（Lavrent'ev の定理）から得られる。f を単位円板 $\Delta=\Delta(0,1)$ から Jordann 領域 G への等角写像とする時，$\gamma=\partial\Delta$ 内の1次元測度 2π の集合 P があって $f(P)$ が $f(\gamma)=\partial G$ 内の1次元測度0と成る様な G と f の組が存在すると言うのが Lavrent'ev の定理であった。そこで P の完閉部分集合 E でその1次元測度 $\ell(E)>0$ と成るものを取り，$K=f(E)$ と置くとこの K が求めるものであることを以下示す。

先ず $R\in O_{AB}$ については，$K=f(E)\subset f(P)$ だから $\ell(K)\leqq\ell(f(P))=0$ に依り $\ell(K)=0$ である。すると補題1.2に依り $c(K)=0$ となり，補題1.1に依って $R\in O_{AB}$ がわかる。

本質的な部分は $R\notin O_{A^\circ B}$ を示すことにある。この為には，補題2.2（Noshiro の定理）により，R の許容部分領域 S で $(S,\partial S)\notin\mathscr{L}$ と成るものを構成すれば良い。

$\gamma\backslash E$ は可算個の開弧からなる。その各々の開弧をその両端を結ぶ弦で置き換えて得られる Jordan 曲線を σ とすると，明らかに σ の長さ

$$|\sigma|<|\gamma|=2\pi$$

であり，又 $\sigma\backslash E\subset\Delta$ であり，これは可算個の開線分からなる。σ で囲まれた領域を δ とするとき，

$$f(\sigma)=\Sigma,\ f(\delta)=S$$

と置くと $E\subset\sigma$ から $K\subset\Sigma$ であり，$\Sigma\backslash K$ は Δ 内の開線分の f による像である開解析弧からなる。故に S を R の部分領域と見ると，その相対境界 $\partial S=\Sigma\backslash K$ で，S の理想境界は K である。依って S は R の許容部分領域である。これが求める S の構成である。

次に $(S,\partial S)=(S,\Sigma\backslash K)\notin\mathscr{L}$ を言う。等角同値性に依り $(\delta,\sigma\backslash E)\notin\mathscr{L}$ を言っても同じ事である。更に δ を再び Δ へ等角写像しその時 E の像を F とする。δ の境界 σ の長さは有限 $|\sigma|<2\pi$ だから補題3.1（Riesz 兄弟定理）によれば，此の写像は境界上絶対連続で，従って $\ell(F)>0$ となる。勿論明らかに $\ell(\gamma\backslash F)>0$ である。そこで $(\Delta,\gamma\backslash F)\notin\mathscr{L}$ を言えば良い。その為には $\Delta\cup(\gamma\backslash F)$ 上有界正則な g であって，$\gamma\backslash F$ 上 $|g|=1$ でしかも $\sup_\Delta|g|>1$ と成る様な g を作れば良い。

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_F\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)|d\zeta|$$

と置くと，$0<\ell(F)<2\pi$ により Δ 上 $0<u<1$ であり，$\sup_\Delta u=1$ で，u は $\gamma\backslash F$ 上境界値0を持ち，Δ から $\gamma\backslash F$ を越えて調和接続可能である。u の共役調和関数を v とすると $u+iv$ は $\Delta\cup(\gamma\backslash F)$ 上正則である。依って

$$g(z)=e^{u(z)+iv(z)}$$

と置けば g は $\Delta\cup(\gamma\backslash F)$ 上有界正則，$\gamma\backslash F$ 上 $|g|=1$，Δ 上 $1<|g|<e$ であって $\sup_\Delta|g|=e>1$ がわかる。

注意. 此の例の K は $\ell(K)=0$ なので必然的に $R\in O_{AB}$ となった（補題1.2の Painlevé の定理）。一般的には $\ell(K)>0$ でも $R\in O_{AB}$ となることがある（[7] 参照）。上の例の K の様に $\ell(K)=0$ 位では，まだ大き過ぎて必ずしも，そして上の例ではそうである様に，$R\in O_{A^\circ B}$ とはならない。上の Painlevé の定理に対応するものは1次元測度 $\ell(K)$ の代わりに，対数容量 cap(K) と呼ぶものを考えて（[8] 参照），cap$(K)=0$ ならば $R\in O_{A^\circ B}$ となる，と言う形のものであるが，やはり cap$(K)>0$ でも $R\in O_{A^\circ B}$ となることがある（[5]，[7] 参照）。一般に，cap$(K)=0$ なら $\ell(K)=0$ であるが，上の例の K は cap$(K)>0$，$\ell(K)=0$ となっている訳である。

付録：等角写像の Darboux の定理

本文で使った Lavrent'ev の定理（補題3.2）の証明の中で使うと便利な一つの初等的な知識について此の機会に述べておく。次回 Lavrent'ev の定理を証明するときに説明すれば一番時宜に叶うかとも思うが，機会を逸する可能性も有るのであえてここに記す。

W を有限複素平面 C 内の Jordan 曲線 ω により囲まれた Jordan 領域とする。又同じく G もある Jordan 曲線 γ によって囲まれた Jordan 領域とする。これらに関して次の事実に注目する（例えば [1]，[9] 参照）：

Darboux の定理. ω の長さを有限とし，f を $\overline{W}=W\cup\partial W$ 上の正則関数とする。f が ω から γ への全単射を与えるならば，f は W から G の上への等角写像である。

此の定理は等角写像論でしばしば利用される有用なものであるが，幾分仮定がきつくて，直接の適用に不便を感ずることがある。それは，ω が有限の長さを持たねばならぬと言う要求と，f が $\overline{W}$ 上，従って特に ω 上，正則であることが満たされねばならない点である。通常

此の定理は偏角の原理の応用として与えられ，それ故に証明技術上の観点から上の２つの仮定は本質的に見える。しかし実はこれらは不用であって，ω の長さは有限であってもなくてもよく，又 f の ω 上の正則性は連続性に弱めることが出来て，次のように拡張出来る：

改訂版 Darboux の定理．f は W 上正則 $\overline{W}$ 上連続とする。f が ω から γ への全単射を与えるならば，f は W から G への等角写像である。

この定理に証明を与えることが此の付録の目的である。此の証明では写像の偏角の変化などは考察するけれど通常言うところの偏角の原理そのものは一応使わない。しかしもっと大がかりな道具立てである Riemann の写像定理を使う。先ず，次の一般的な事実を示すことから出発する：

補題１．f を W 上正則で $\overline{W}$ 上連続な関数とする。もし $f(\omega)=\gamma$ ならば $f(W)=G$ である。

証明． 領域保存性定理により，$f(W)$ が領域，特に開集合であることが，この補題を成立させる鍵である。

$\mathbf{C}\backslash\gamma$ は２つの領域からなり，１つは γ の内部である G で，今１つの外部を F と表す：$\mathbf{C}=G\cup\gamma\cup F$。さて R を G 又は F の何れでも良いがその内の１つを表すものとするとき，次の事が言える：

主張：$R\subset f(W)$ 又は $R\cap f(W)=\phi$。

これが示されたとすれば，f の $\overline{W}$ 上の連続性により $\overline{f(W)}=f(\overline{W})$ は完閉なので，特に $f(W)$ は有界であり，F は非有界だから，主張を $R=F$ として使うとすぐに分かる様に，$F\subset f(W)$ とはなり得ないから $F\cap f(W)=\phi$ である。それ故に $f(W)\subset G\cup\gamma$ と成るが，$f(W)$ は開集合だから，もし $f(W)\cap\gamma\neq\phi$ ならば $F\cap f(W)\neq\phi$ でもなければならない。これは既に見た $F\cap f(W)=\phi$ に反するから $f(W)\cap\gamma=\phi$ となり，従って $f(W)\subset G$ となる。だから特に $G\cap f(W)=\phi$ ではないので，再び主張を $R=G$ として使って，$G\subset f(W)$ となり，以上総合して $f(W)=G$ が結論される。

故に上の主張を示しさえすれば証明は完結する。その為には

$$a\in R\cap f(W),\ b\in R\backslash f(W)$$

となる２点 a,b が存在したとして矛盾を導けば良い。そこで

$$C: w=w(t)\quad (0\leqq t\leqq 1)$$

を $w(0)=a,\ w(1)=b,\ C\subset R$ となる曲線とする。又 $s\in(0,\ 1)$ に対して

$$C_s: w=w(t)\quad (0\leqq t\leqq s)$$

と置く。$f(W)$ は開集合で $a\in f(W)$ 故十分小さな $s>0$ に対しては $C_s\subset f(W)$ となるから

$$\sigma=\sup\{s: C_s\subset f(W)\}\in(0,1]$$

が定まる。$c=w(\sigma)$ とおくとき，σ の定義から

$$C_\sigma\backslash\{c\}\subset f(W)$$

であるが，$f(W)$ が開集合なことと σ の定義を再び使うと

$$c\notin f(W)$$

となることが分かる。そこで

$$\{w_n\}\subset C_\sigma\backslash\{c\},\ w_n\to c\ (n\uparrow\infty)$$

となる点列 $\{w_n\}$ をとる。$w_n\in f(W)$ だから，$\overline{W}$ の完閉性により，必要なら $\{w_n\}$ をその適当な部分列で置き換えて

$$\{z_n\}\subset W,\ f(z_n)=w_n\ (n=1,2,\cdots),$$
$$z_n\to\zeta\in\overline{W}\ (n\uparrow\infty)$$

となる W 内の点列 $\{z_n\}$ と $\overline{W}$ の点 ζ を選ぶことが出来る。f の連続性により $f(z_n)=w_n$ で $n\uparrow\infty$ として $f(\zeta)=c$ となる。$c\notin f(W)$ により $\zeta\notin W$ だから

$$\zeta\in\overline{W}\backslash W=\omega$$

となり，$c=f(\zeta)\in f(\omega)=\gamma$ となって $c\in R\subset\mathbf{C}\backslash\gamma$ に矛盾する。　終

補題　２．f を単位円板 Δ 上正則で $\bar{\Delta}$ 上連続とする。f が単位円周 $\delta=\partial\Delta$ からそれ自身への全単射であれば，f は Δ から Δ の上への等角写像を与える１次変換である。

証明． $f(\delta)=\delta$ なので補題１により $f(\Delta)=\Delta$ となる。再び $f(\delta)=\delta$ により，$f^{-1}(0)$ は Δ 内の有限集合となる。$f^{-1}(0)$ が空集合だと $1/f$ も f と同じ性質を持ち δ 上 $|f|=1$，$|1/f|=1$ だから，最大絶対値の原理によって Δ 上 $|f|\leqq 1$，$|1/f|\leqq 1$ となり，結局 Δ 上 $|f|\equiv 1$ となる。これより f が定数となり $f(\delta)=\delta$ に反する。故に

$$f^{-1}(0)=\{z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n\}$$

とすると $n\geqq 1$ である。但し m 位の零点は m 個の零点として陳列してある。これにより

$$B(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}$$

を作ると，δ 上 $|B|=1$ となる。零点が打ち消しあって $f/B,\ B/f$ 共に Δ で正則で $\bar{\Delta}$ で連続で，更に，δ 上 $|f/B|=1$，$|B/f|=1$ となるので，再び最大絶対値の原理により，Δ 上 $|f/B|\leqq 1$，$|B/f|\leqq 1$ となる。これから Δ 上 $|f/B|\equiv 1$ となる。これより Δ 上，$|\alpha|=1$ となる定数 α によって，

$$f(z)\equiv\alpha B(z)$$

となる。そこで

$$\arg f(z)=\arg\alpha+\sum_{j=1}^{n}\arg\left(\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}\right)$$

に於て，z が $\delta=\partial\Delta$ を正方向に1周すると，それぞれ

$$\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

は δ を正方向に1周するので，それぞれ

$$\arg\left(\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}\right)\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

は 2π だけ増加する。よって z が δ を正方向に1周すると $\arg f(z)$ は $2\pi n$ だけ増加し，$f(z)$ は δ を正方向に正味 n 周することになる。$f:\delta\to\delta$ は全単射と言う仮定があるから $n=1$ でなければならず，Δ 上

$$f(z)=\alpha\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}$$

となるから，f は Δ から Δ の上への等角写像となる。

終

改訂版 Darboux の定理の証明. Δ をそれぞれ W 及び G へ等角写像する Riemann の写像関数を，それぞれ φ 及び ψ とする。Carathéodory の定理で各々 φ 及び

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "g=\psi^{-1}\circ f\circ\varphi"] & \Delta \\
W \arrow[r, "f"'] & G \arrow[u, "\psi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "f=\psi\circ g\circ\varphi^{-1}"] & \Delta \arrow[d, "\psi"] \\
W \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "\varphi^{-1}"] & G
\end{tikzcd}$$

ψ は $\bar{\Delta}$ より各々 $\overline{W}$ 及び $\overline{G}$ の上への位相写像である。補題1により $f(W)=G$ で無論 $f(\overline{W})=\overline{G}$ である。故に合成写像

$$g=\psi^{-1}\circ f\circ\varphi$$

を考えると，g は Δ 上正則，$\bar{\Delta}$ 上連続で，更に g は δ から δ への全単射である。故に補題2により g は Δ から Δ への等角写像である。よって

$$f=\psi\circ g\circ\varphi^{-1}$$

の表示から f は W から G への等角写像となることが分かる。

終

参照文献

[1] 小松勇作：等角写像論(上, 下巻), 共立出版, 1943年。

[2] M. A. LAVRENT'EV : *Boundary problems in the theory of univalent functions*, Mat. Sb., **43**(1936), 815-846（ロシア語）; Amer. Math. Soc. Transl., **32**(1963), 1-35.

[3] A. J. LOHWATER AND G. PIRANIAN : *Linear accessibility of boundary points of a Jordn region*, Comment. Math. Helv., **25**(1951), 173-180.

[4] J. E. MCMILLAN AND G. PIRANIAN : *Campression and expansion of boundary sets*, Duke Math. J., **40**(1973), 599-605.

[5] K. NOSHIRO : *Cluster Sets*, Springer, 1960.

[6] 長田彰夫：Lavrent'ev の定理の別証，セミナー・ノート，1975年。

[7] L. SARIO AND M. NAKAI : *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer, 1970.

[8] M. TSUJI : *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, 1959.

[9] 辻正次：複素函数論，槇書店，1968年。

本研究は一部分文部省科研費（一般C，課題番号02640043）の援助に依る。