

多品目在庫管理について

大野勝久, 石垣智徳, 沢木勝茂*

生産システム工学科

(1990年9月1日受理)

Multi-item Inventory Control : A Survey

Katsuhisa OHNO, Tomonori ISHIGAKI, Katsushige SAWAKI*

Department of Systems Engineering

During the last four decades many articles and books have been written about inventory theory. The purpose of this paper is to summarize results that have been reported for dynamic, stochastic multi-item and/or multi-echelon inventory control systems with known demand distributions. We survey the current status of the inventory control theory-focused on multi-item and/or multi-echelon.

1. はじめに

在庫問題はオペレーションズ・リサーチの中で、長年にわたり、重要な分野として研究が進められてきた。単一品種1期間問題に始まった研究も、今日、多品種、多階層、多期間を想定したダイナミックな在庫問題を対象とし、その最適化をはかることが切望されている。これは、在庫問題を含む現在の物流システムが、企業の重要な経営戦略手段となりつつあるからにほかならない。

本論文の目的は、現在の物流システムからの要請に対応した多品目あるいは多階層の多期間在庫問題の文献を概説することである。単一品種を含む在庫問題に対する過去のサーベイ文献としては、Aggarwal¹⁾, Clark¹⁹⁾, Hadley et al.⁴⁶⁾, Heyman et al.⁴⁸⁾, Nahmias⁷⁴⁾, Prastacos⁸⁰⁾, Scarf⁸⁷⁾, Silver⁹⁷⁾, Tinarelli¹⁰⁴⁾, Veinott¹⁰⁶⁾がある。特にSilver⁹⁷⁾は1984年までの多品目あるいは多階層の在庫問題についてまとめているが、1985年以降についてまとめたものはない。したがって、本論文では1985年以降を中心に概説する。また、我々の考察の対象となる文献は、Aggarwal¹⁾の分類に従えば、Dynamic, Stochastic, Known Demand Distributionに属するものであるが、重要と思われるものはこの範囲外のものも含まれている。

2節において、まず、従来議論されてきた在庫管理政策として (σ, S) および (S, c, s) 政策について述べる。そして、3節において1品目多階層在庫問題を考察し、

4節において多品目在庫問題を論ずる。

2. (σ, S) 政策と (S, c, s) 政策

多品目在庫問題の中心的課題は、その最適あるいは最適に近い管理政策の発見と導出である。本節では (σ, S) 政策と (S, c, s) 政策について述べる。

Johnson⁵⁶⁾は、多品目、周期的観測の無限期間在庫問題を取り扱い、確率的な需要変動のもとで (σ, S) 政策を提案し、その最適値の計算法を導いている。その後、Kalin⁵⁸⁾, Ling et al.⁶²⁾とSivazlian⁹⁹⁾により、その最適性等が研究されている。 M 品目在庫問題において、ある M 次元領域 σ と M 次元ベクトル $S = (S_1, \dots, S_M)$ が与えられたとき、 (σ, S) 政策は、「期首在庫レベル $x = (x_1, \dots, x_M)$ が $x \in \sigma$ ならば、 S まで発注し、さもなければ、発注しない」政策である。この政策の特別な場合として、単一品目($M = 1$)を考えると、「 $x \leq s$ ならば S まで発注する」 (s, S) 政策が導かれる。

一方、Balintfy¹⁰⁾は、連続観測の在庫問題を考察し、 (S, c, s) 政策を提案している。すなわち、 $S = (S_1, \dots, S_M)$, $c = (c_1, \dots, c_M)$, $s = (s_1, \dots, s_M)$ とし、任意の i 品目に着目したとき、在庫レベル x_i が s_i 以下になれば、 S_i まで発注し、 j ($\neq i$)品目に対しては、 x_j が c_j 以下であれば S_j まで発注する政策である。

(σ, S) 政策と (S, c, s) 政策を比較するために、2品目在庫問題を考える。まず始めに (S, c, s) 政策の c を S に近づけたときを考える。このとき、図1に示すよ

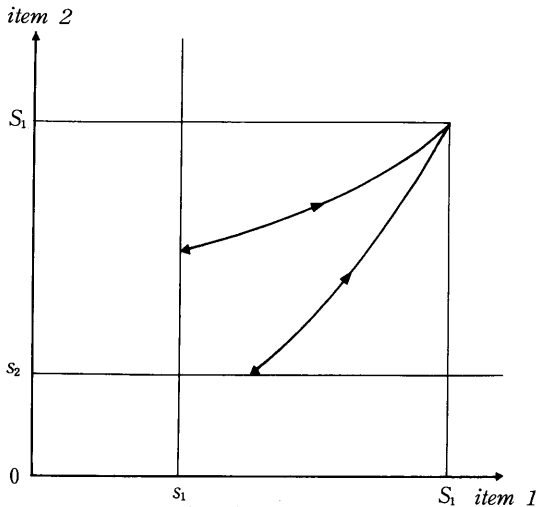


図 1

うに, $\sigma = \{(x_1, x_2) ; x_1 \leq s_1 \text{ あるいは } x_2 \leq s_2\}$ とした (σ, S) 政策と一致する。次に, c を s に近づけたときを考える。この場合, 図 2 に示すように, (S, c, s) 政策は品目 i ($i = 1, 2$) に対して独立に (s_i, S_i) 政策をとる政策となる。

3. 1品目多階層在庫問題

多くの製品では, メーカー, 問屋, 小売店などの階層構造をした流通経路で消費者へ販売されている。このような状況をモデル化したものが多階層在庫問題であり, Clark et al.¹⁸⁾ に始まり, Bessler et al.¹³⁾, Gross⁴⁴⁾, Hadley et al.⁴⁶⁾, Hochstaedter⁵⁰⁾, Love⁶³⁾ によって研究が進められてきた。一方, Sherbrooke⁹²⁾ は修繕可能な品目に対する多階層在庫問題の近似モデルとして METRIC (A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control) を提案している。METRIC は, はじめ空軍に関わる 2 階層在庫問題の在庫レベルを決定する手法として, RAND Corporation によって開発された。ここで取り扱う修繕可能な品目とは, 重要が少なく, 非常に高価な航空部品などである。Simon⁹⁸⁾ は, 修繕時間が確定的な場合に対して厳密な解析を行い, その後, METRIC は修繕可能な品目を取り扱う多階層在庫モデルとして有用性が評価され, 種々の形に拡張されて今日に至っている (Ding and Hodgson³⁰⁾, Ehrhardt et al.³¹⁾, Gallego et al.⁴⁰⁾, Jackson et al.⁵³⁾, Karmarkar⁵⁹⁾, Mitchell⁶⁴⁾, Pyke⁶¹⁾, Sherbrooke⁹⁴⁾, Stulman¹⁰¹⁾, Svoronos et al.¹⁰²⁾。

Sherbrooke⁹³⁾ が METRIC に Multi-indenture の概念を導入したことは業績として大きい。この概念は, 従来の METRIC が無視してきた完成品とその部品間に存

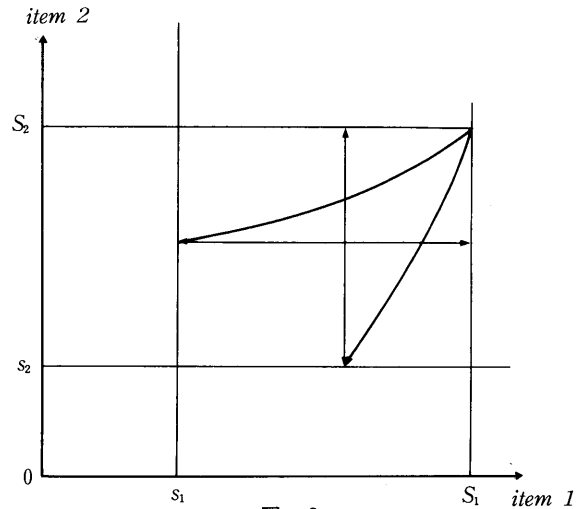


図 2

在する修繕可能な品目の線延べを考慮し, そこに生ずる費用の最小化を図るものである (Lambrecht et al.⁶⁰⁾, Nahmias⁷³⁾。

Eppen et al.³²⁾ は, 在庫の再分配のない場合を取り扱い, 多期間発注周期での在庫保持費用と線延べによる費用を最小化している。

Graves⁴²⁾, Sherbrooke⁹⁴⁾ は, 新たな近似モデルを提案しているが, どちらのモデルも, 緊急水平移送 (同一レベルでの相互補充) が許されていない。緊急移送という点で, 在庫の保管場所間での移送を考慮した初期のモデルに Gross⁴⁴⁾ があるが, 基本的に複数の在庫保管場所をもつ単一階層モデルであった。また, Hoadley et al.⁴⁹⁾ も, 同じ階層間に水平移送を許した単一期間多階層在庫問題を論じているが, METRIC や他の修繕可能な在庫モデルで想定されている連続観測ではなく, 周期観測を仮定している。この研究における最も大きな制約は, 在庫補充のための納期が 0 であることであり, この制約が緩められればより現実的にはなるが, 解析的には複雑になりすぎる。

Cohen et al.²³⁾ は, 同じ階層間に貯蔵機能がある多階層在庫問題を考察し, その後この問題は, Clark²¹⁾, Cohen et al.²²⁾, Debodt²⁶⁾, Dekok and Graves²⁷⁾, Demmy et al.²⁸⁾, Deuermeyer et al.²⁹⁾, Muckstadt et al.⁷⁰⁾⁷¹⁾, Page et al.⁷⁷⁾, Rosenbaum⁸²⁾⁸³⁾, Schaefer⁸⁸⁾, Schwarz⁸⁹⁾⁹¹⁾, Williams¹⁰⁷⁾¹⁰⁸⁾¹⁰⁹⁾, Zipkin¹¹¹⁾ によって研究されている。

Lee⁶¹⁾ は, Sherbrooke⁹⁴⁾ と Graves⁴²⁾ の METRIC モデル同様に, 連続観測の下で修繕可能な品目の多階層在庫問題を取り扱っている。需要発生間隔が長いときに 1 単位ずつの補充政策が採用され, 同じ階層の在庫場所間の緊急水平移送が許されている。ここでは 70% というかなり高いサービス基準を考えている。

Jonsson et al.⁵⁷⁾ は、周期観測の下で、需要が正規分布に従う在庫問題を考察している。中央倉庫（在庫管理本部）は、予め決められた H 期間の発注サイクルで補充を行い、再分配が、発注サイクルの最後の 1 期間でなされる問題である。

Erkip et al.³³⁾ は、Eppen et al.³²⁾ に端を発するモデルであり、Federgruen et al.³⁶⁾³⁷⁾³⁸⁾ においても研究されている。これらの研究では発注費に固定費を考慮した場合とそうでない場合の双方を考えているが、Erkip et al.³³⁾ は固定費を考えない場合のみを扱っている。しかし、各期間の需要が、その期間における違った場所で発生した需要に関して独立でなくてもよいところが Eppen et al.³²⁾ Federgruen et al.³⁶⁾³⁷⁾³⁸⁾ よりも拡張されている。そして、彼らは最適な安全在庫が需要に関する共分散の関数として表現できることを導いている。これらの結果は、1) 中央倉庫は供給所から十分な供給を受けている 2) 任意の品目に対し、各在庫保管場所における需要率が一定であるという 2 つの仮定の下で導かれている (Altiok⁴⁾, Anily et al.⁵⁾, Axsater⁹⁾, Chen and Lin¹⁷⁾, Jackson and Muckstadt⁵⁵⁾, Moinzadeh and Lee⁶⁷⁾, Pyke⁸¹⁾, Roy⁸⁵⁾。血液など、時間経過と共に陳腐化が発生する品目の在庫問題は Cohen et al.²⁰⁾, Federgruen et al.³⁹⁾, Gregor⁴³⁾, Iglehart et al.⁵¹⁾, Moinzadeh et al.⁶⁶⁾, Nakagami⁷⁵⁾ により研究されている。

4. 多品目在庫問題

Johnson⁵⁶⁾ に始まる多品目在庫問題の (σ, S) 政策は、固定費を考慮した線形の発注費用と在庫・品切れ費用の費用構造の下で導かれている。Sivazlian⁹⁹⁾ は需要分布が指数分布であるとき、問題の費用関数を解析し、発注量が大きいときに、その最適値の解析解を求めている。また、品目数が増加すれば、各々の品目を独立に取り扱うことができることを示している。さらに、Kalin⁵⁸⁾ は、最適政策が存在するための一般条件をあたえ、 (σ, S) 政策が最適となる条件を示している。

Balintfy¹⁰⁾ にはじまる (S, c, s) 政策は多品目在庫問題においては“Can-order” Policy の代表的政策として Silver⁹⁵⁾⁹⁶⁾, Federgruen et al.³⁵⁾ を中心に研究が進められてきた (Cohen et al.²⁴⁾, Curry et al.²⁵⁾, Evans³⁴⁾, Geoffrion et al.⁴¹⁾, Mitchell⁶⁵⁾, Morey et al.⁶⁸⁾, Oral⁷⁶⁾, Popplewell et al.⁷⁹⁾, Sivazlian¹⁰⁰⁾, Veinott¹⁰⁵⁾。しかし、Ignall⁵²⁾ によって (S, c, s) 政策が最適でない例が示されていることも注意すべきである。

Thompstone et al.¹⁰³⁾ は需要が複合ポアソン過程に従い、納期 0 の多品目在庫問題を考察し、複合ポアソン過程を同値なポアソン過程へ変換する方法を用いて解析し

ている (Noddor⁷²⁾)。

Federgruen et al.³⁵⁾ は多品目在庫問題を考え、いくつかのサービス地点が散在し、その需要が独立である単一品目在庫問題に適用できることを示している。モデルとしてはセミ・マルコフモデルであるが、非常に複雑であるので、Balintfy¹⁰⁾ と Silver⁹⁵⁾ の制御規則を採用している。Silver⁹⁵⁾ は需要がポアソン到着に従い、納期が 0 の多品目在庫問題を取り扱い準最適制御規則を導く逐次近似法を提案しているが、この方法は、多品目在庫問題を個々の単一品目在庫問題に分解して行う方法である。さらに、Silver⁹⁵⁾ は納期が正の場合の解法も与えている。

Atkins et al.⁷⁸⁾ は、 (S, c, s) 政策におけるパラメータ S, c, s を変化させて得られる最小費用の新しい下限を導いている。この最小費用を与えるパラメータの値を S^*, c^*, s^* と表したとき、彼らは、 (S^*, c^*, s^*) 政策より単純な周期的政策 (P 型, MP 型) を提案し、数値例により (S^*, c^*, s^*) 政策より優れていることを示している。ここで、周期的政策とは、 (R, T) 政策とも呼ばれ、 T_i ごとに品目 i の在庫レベルを R_i まで増加させる政策である。Atkins et al.⁷⁾ では (R, T) 政策の P (periodic) 型と MP (modified periodic) 型の双方で計算した結果が与えられ、共通の固定費が 0 である時をのぞいて (s^*, c^*, S^*) 政策よりもよい結果を与えている。

Federgruen et al.³⁵⁾ は需要が複合ポアソン過程に従い、需要に対するサービスにある種の制約があるモデルを考察している。一方、Atkins et al.⁸⁾ は、需要がポアソン過程に従い、サービスに対する制約がないかわりに、品切れ費用に固定費を考慮したモデルを論じている。Silver⁹⁶⁾ と Federgruen et al.³⁵⁾ は、 (S, c, s) 政策のほうが各品目に対して独立に発注する政策よりも 20% 程よいという結果を示している。Chacravasky¹⁶⁾ は在庫費用、需要率、固定費で各品目をグループ分けし、そのグループごと一括補充する政策を提唱している。さらに、在庫費用、需要率、固定費という 3 つのパラメータによる品目のグループ分けが理論的に最適であることを証明している。その証明は Barany et al.¹¹⁾, Jackson⁵⁴⁾, Zangwill¹¹⁰⁾ の結果を援用している。また、従来は示されていなかった収束を証明している。この研究は Aggarwal²³⁾, Bastian¹²⁾, Chakravarty¹⁴⁾, Chakravarty et al.¹⁵⁾ によって進められている。

5. おわりに

今後、実際問題として、多品目多階層在庫問題は、さらに複雑化、一般化し、意思決定に要する時間の短縮が切望されるであろう。そのためには、より効率的な在庫管理システムの構築が必要となり、コンピュータに多く

を委ねざるを得なくなるであろう。すなわち、在庫費用最小化のための在庫管理システムの構築に費用がかかり過ぎるという皮肉な結果をもたらす恐れがある。しかし、コンピュータの能力向上と低価格化およびデータベースの充実在庫管理システムの効率を飛躍的に向上させるものと期待される。今後、コンピュータシステムと直結した大規模な経営戦略システムとしての在庫管理の研究が重要になるものと考えられる。

文 献

- 1) Aggarwal, S. C., "A Review of Current Inventory Theory and Its Applications," *International Journal of Production Research* 12, pp. 443-482 (1974).
- 2) Aggarwal, V., "A Closed-form Approach to Multi-item Inventory Grouping," *Naval Research Logistics Quarterly* 30, pp. 471-485 (1983).
- 3) Aggarwal, V., "Grouping Multi-Item Inventory Using Common Cycle Periods," *European Journal of Operational Research* 17, pp. 369-372 (1984).
- 4) Altiock, T., "(R, r) Production/Inventory Systems," *Operations Research* 37, pp. 266-276, (1989).
- 5) Anily, S., and A. Federgruen, "One Warehouse Multiple Retailer Systems with Vehicle Routing Costs," *Management Science* 36, pp. 92-114 (1990).
- 6) Arrow, K. J., S. Karlin, and H. Scarf, *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford University Press, 1958.
- 7) Atkins, D., and P. Iyogum, "A Lower Bound on a Class of Coordinated Inventory/Production Problems," *Operations Research Letters* 6, pp. 63-67 (1987).
- 8) Atkins, D., and P. Iyogum, "Periodic versus 'Can-Order' Policies for Coordinated Multi-item Inventory Systems," *Management Science* 34, pp. 791-796 (1988).
- 9) Axsater, S., "Simple Solution Procedures for a Class of Two-Echelon Inventory Problems," *Operations Research* 38, pp. 64-69, (1990).
- 10) Balintfy, J. L., "On Basic Class of Multi-Item Inventory Problems," *Management Science* 10, pp. 287-297 (1964).
- 11) Barany, I., T. J. V. Roy, and L. A. Wolsey, "Strong Formulations for Multi-Item Capacitated Lot Sizing," *Management Science* 30, pp. 1255-1261 (1984).
- 12) Bastian, M., "Joint Replenishment in Multi-item Inventory Systems," *Journal of Operational Research Society* 37, pp. 1113-1120 (1986).
- 13) Bessler, S. A., A. F. Veinott, Jr. and Decision Studies Group and Stanford University, "Optimal Policy for a Dynamic Multi-echelon Inventory Model," *Naval Research Logistics Quarterly* 13, pp. 355-389 (1966).
- 14) Chakravarty, A. K., "Multi-Item Inventory Aggregation into Groups," *Journal of Operational Research Society* 32, pp. 19-26 (1981).
- 15) Chakravarty, A. K., J. B. Orlin and U. G. Rothblum, "Consecutive Optimizers for a Partitioning Problem With Applications to Optimal Inventory Groupings for Joint Replenishment," *Operations Research* 33, pp. 820-834, (1985).
- 16) Chakravarty, A. K., "An Optimal Heuristic for Coordinated Multi-Item Inventory Replenishments," *Journal of Operational Research Society* 36, pp. 1027-1039 (1985).
- 17) Chen, M.-S., and C.-T. Lin, "An Example of Disbenefits of Centralized Stocking," *J. Opl. Res. Soc.* 41, pp. 259-262 (1990).
- 18) Clark, A. J., and H. Scarf, "Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem," *Management Science* 6, pp. 475-490 (1960).
- 19) Clark, A. J., "An Informal Survey of Multi-Echelon Inventory Theory," *Naval Research Logistics* 19, pp. 621-650 (1972).
- 20) Cohen, M. A., W. P. Pierskalla, and S. Nahmias, "A Dynamic Inventory System with Recycling," *Naval Research Logistics Quarterly* 27, pp. 289-296 (1980).
- 21) Clark, A. J., "Experiences with a Multi-Indented, Multi-Echelon Inventory Model," in *Multi-level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 299-330.
- 22) Cohen, M. A., W. P. Pierskalla and H.-C. Ven, "Analysis of Ordering and Allocation Policies for Multi-Echelon, Age-Differentiated Inventory Systems," in *Multi-level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.),

- North-Holland, 1981, pp. 353-378.
- 23) Cohen, M. A., P. R. Kleindorfer, and H. L. Lee, "Optimal Stocking Policies for Low Usage Items in Multi-Echelon Inventory Systems," *Naval Research Logistics Quarterly* 33, pp. 17-38 (1986).
 - 24) Cohen, M. A., P. R. Kleindorfer, and H. L. Lee, "Near-Optimal Service Constrained Stocking Policies for Spare Parts," *Operations Research* 37, pp. 104-117 (1989).
 - 25) Curry, G. L., R. W. Skeith, and R. G. Harper, "A Multiproduct Dependent Inventory Model," *AIIE Transactions* 2, pp. 263-267 (1970).
 - 26) Debodt, M. A., and S. C. Graves, "Continuous-Review Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem with Stochastic Demand," *Management Science* 31, pp. 1286-1299 (1985).
 - 27) Dekok, A. G., "Approximation for a Lost-Sales Production/Inventory Control Model with Service Level Constraints," *Management Science* 31, pp. 729-737 (1985).
 - 28) Demmy, W. S., and V. J. Pressuti, "Multi-Echelon Inventory Theory in the Air Force Logistic Command," in *Multi-level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 279-297.
 - 29) Deuermeyer, B. L., and L. B. Schwarz, "A Model for the Analysis of System Service Level in Warehouse--Retailer Distribution Systems : The Identical Retailer Case," in *Multi-level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 163-193.
 - 30) Ding, F.-Y., and T. J. Hodgson, "On Optimal and Approximate Policies for a Multistage Production/Inventory Problem," *International Journal of Production Research* 26, pp. 1937-1942, (1988).
 - 31) Ehrhardt, R. A., C. R. Schultz, and H. M. Wagner, "(s, S) Policies for a Wholesale Inventory System," in *Multi-level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 145-161.
 - 32) Eppen, G., and L. Schrage, "Centralized Ordering Policies in a Multi-Warehouse System with Lead Times and Random Demand," in *Multi-level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 51-67.
 - 33) Erkip, N., W. H. Hausman and S. Nahmias, "Optimal Centralized Ordering Policies in Multi-echelon Inventory Systems with Correlated Demands," *Management Science* 36, pp. 381-392 (1990).
 - 34) Evans, R. V., "Inventory Control of a Multi-product System with a Limited Production Resource," *Naval Research Logistics Quarterly* 14, pp. 173-184 (1967).
 - 35) Federgruen, A., H. Groenevelt, and H. C. Tijms, "Coordinated Replenishments in a Multi-item Inventory System with Compound Poisson Demands," *Management Science* 30, pp. 344-357 (1984).
 - 36) Federgruen, A. and P. Zipkin, "Approximations of Dynamic, Multilocation Production and Inventory Problems," *Management Science* 30, pp. 69-84 (1984).
 - 37) Federgruen, A., and P. Zipkin, "Computational Issues in an Infinite-Horizon, Multiechelon Inventory Model," *Operations Research* 32, pp. 818-836, (1984).
 - 38) Federgruen, A., and P. Zipkin, "Allocation Policies and Cost Approximations for Multiechelon Inventory Systems," *Naval Research Logistics Quarterly* 31, pp. 97-129, (1984).
 - 39) Federgruen, A., G. Prastacos and P. H. Zipkin, "An Allocation and Distribution Model for Perishable Products," *Operations Research* 36, pp. 75-82, (1984).
 - 40) Gallego, G., and D. Simchi-Levi, "On the Effectiveness of Direct Shipping Strategy for the One-warehouse Multi-retailer R-systems," *Management Science* 36, pp. 240-243 (1990).
 - 41) Geoffrion, A. M., and G. W. Graves, "Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition," *Management Science* 20, pp. 822-844 (1974).
 - 42) Graves, S. C., "A Multi-Echelon Inventory Model for a Repairable Item with One-for-One Replenishment," *Management Science* 31, pp. 1247-1256 (1985).
 - 43) Gregor, P. J., "An Evaluation of Inventory and

- Transportation Policies of a Regional Blood Distribution System," *European Journal of Operational Research* 10, pp. 106-113 (1982).
- 44) Gross, D., "Centralized Inventory Control in Multilocation Supply Systems," in *Multistage Inventory Models and Techniques*, Scarf, H. E., et al (Eds.), Stanford University Press, 1963, pp. 47-84.
 - 45) Gross, D., C. E. Pinkus and R. M. Soland, "Designing a Multi-Product, Multi-Echelon Inventory System," in *Multi-level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice, Studies in Management Sciences* 16, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 11-49.
 - 46) Hadley, G., and T. M. Whitin, *Analysis of Inventory Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., pp. 235-260 (1963).
 - 47) Hadley, G., and T. M. Whitin, "An Inventory-Transportation Model with N Locations," in *Multistage Inventory Models and Techniques*, Scarf, H. E., et al (Eds.), Stanford University Press, 1963, pp. 116-142.
 - 48) Heyman, D. P., and M. J. Sobel, *Stochastic Models in Operations Research Volume II : Stochastic Optimization*, McGraw-Hill Book Company, 1984.
 - 49) Hoadley, B., and D. P. Heyman, "A Two-Echelon Inventory Model with Purchases, Dispositions, Shipments, Returns and Transshipments," *Naval Research Logistics Quarterly* 31, pp. 1-19, (1977).
 - 50) D. Hochstaedter, "An Approximation of the Cost Function for Multi-Echelon Inventory Model," *Management Science* 16, pp. 716-727 (1970).
 - 51) Iglehart, D. L., and S. C. Jaquette, "Multi-Class Inventory Models with Demand a Function of Inventory Level," *Naval Research Logistics Quarterly* 16, pp. 495-502, (1969).
 - 52) Ignall, E., "Optimal Continuous Review Policies for Two Product Inventory Systems with Joint Setup Costs," *Management Science* 21, pp. 277-279, (1969).
 - 53) Jackson, P. L., W. L. Maxwell and J. A. Muckstadt, "Determining Optimal Reorder Intervals in Capacitated Production-Distribution System," *Management Science* 34, pp. 938-958 (1988).
 - 54) Jackson, P. L., "Stock Allocation in a Two-Echelon Distribution System or "What to do until your ship comes in"," *Management Science* 34, pp. 880-895 (1988).
 - 55) Jackson, P. L., and J. A. Muckstadt, "Risk Pooling in a Two-Period, Two-Echelon Inventory Stocking and Allocation Problem," *Naval Research Logistics* 36, pp. 1-26, (1989).
 - 56) Johnson, E. L., "Optimality and Computation of (σ, S) Policies in the Multi-item Infinite Horizon Inventory Problem," *Management Science* 13, pp. 475-491 (1967).
 - 57) Jonsson, H., and E. A. Silver, "Analysis of a Two-Echelon Inventory Control System with Complete Redistribution," *Management Science* 33, pp. 215-227 (1987).
 - 58) Kalin, D., "On the Optimality of (σ, S) Policies," *Math. Oper. Res.* 5, pp. 293-307 (1980).
 - 59) Karmarkar, U. S., "The Multilocation Multiperiod Inventory Problems : Bounds and Approximations," *Management Science* 33, pp. 86-94 (1987).
 - 60) Lambrecht, M. R., J. V. Eecken and H. Vanderveken, "Review of Optimal and Heuristic Methods for a Class of Facilities in Series Dynamic Lot-Size Problems," in *Multi-level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice, Studies in Management Sciences* 16, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 69-94.
 - 61) Lee, H. L., "A Multi-Echelon Inventory Model for Repairable Items with Emergency Lateral Transshipments," *Management Science* 33, pp. 1302-1316 (1987).
 - 62) Ling, D., and M. L. Puterman, "A Diffusion Process Model For a Two Product Inventory System," *Working Paper, Faculty of Commerce and Business Administration, University of British Columbia, Canada.*, (1979).
 - 63) Love, R. F., "A Two-station Stochastic Inventory Model with Exact Methods of Computing Optimal Policies," *Naval Research Logistics Quarterly* 14, pp. 185-217 (1967).
 - 64) Mitchell, J. S. B., "98 %-Effective Lot-Sizing for One-Warehouse, Multi-Retailer Inventory Systems with Backlogging," *Operations Research* 35, pp. 399-404, (1987).
 - 65) Mitchell, J. C., "Multi-Item Inventory Systems with a Service Objective," *Operations Research* 36, pp. 747-755, (1988).
 - 66) Moinszadeh, K. and H. L. Lee, "Batch Size and

- Stocking Levels in Multi-Echelon Repairable System," *Management Science* 32, pp. 1567-1581 (1986).
- 67) Moïnzadeh, K., and H. L. Lee, "Approximate Order Quantities and Reorder Points for Inventory Systems where Orders Arrive in Two Shipments," *Operations Research* 37, pp. 277-287, (1989).
- 68) Morey, R. C. and D. J. Sweeney, "A Budget Holdback Policy for Multi-Item Procurement Processes," *Management Science* 30, pp. 604-617 (1984).
- 69) Muckstadt, J. A., "A Model for a Multi-item, Multi-echelon, Multi-indenture Inventory System," *Management Science* 20, pp. 472-481 (1973).
- 70) Muckstadt, J. A. and L. J. Thomas, "Are Multi-Echelon Inventory Methods Worth Implementing in Systems with Low-Demand-Rate Items?," *Management Science* 26, pp. 483-494 (1980).
- 71) Muckstadt, J. A. and R. O. Roundy, "Multi-Echelon, One-Warehouse, Multi-Retailer Distribution Systems," *Management Science* 33, pp. 1613-1621 (1987).
- 72) Naddor, E., "Optimal and Heuristic Decisions in Single-and Multi-Item Inventory Systems," *Management Science* 21, pp. 1234-1249 (1975).
- 73) Nahmias, S., "Managing Repairable Item Inventory Systems: A Review," in *Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 253-277.
- 74) Nahmias, S., "Perishable Inventory Theory: A Review," *Operations Research* 30, pp. 680-708, (1982).
- 75) Nakagami, J., "Perishable Inventory Problem with Two Types of Warehouses," *Journal of the Operational Research Society of Japan* 22, pp. 29-39 (1979).
- 76) Oral, M., "Multi-Item Inventory Management with Monetary Objective Function," *AIIE Transactions* 13, pp. 41-46 (1981).
- 77) Page, E., and R. J. Paul, "Multi-product Inventory Situations with One Restriction," *Opl. Res. Q.* 27, pp. 815-834 (1976).
- 78) Park, K. S., and D. H. Kim, "Congruential Inventory Model for Two-Echelon Distribution Systems," *Operations Research* 38, pp. 643-650 (1987).
- 79) Popplewell, K., and M. C. Bonny, "The Application of Discrete Linear Control Theory to the analysis and Simulation of Multi-product, Multi-level Production Control Systems," *International Journal of Production Research* 25, pp. 45-56, (1987).
- 80) Prastacos, G. P., "Blood Inventory Management: An Overview of Theory and Practice," *Management Science* 30, pp. 777-800 (1984).
- 81) Pyke, F. D., "Priority Repair and Dispatch Policies for Repairable-Item Logistics Systems," *International Journal of Production Research* 37, pp. 1-30, (1990).
- 82) Rosenbaum, B. A., "Service Level Relationship in a Multi-Echelon Inventory System," *Management Science* 27, pp. 926-945 (1981).
- 83) Rosenbaum, B. A., "Inventory Placement in a Two-Echelon Inventory System: An Application," in *Multi-level Production/Inventory Control Systems: Theory and Practice, Studies in Management Sciences 16*, Schwarz, L. B., (Eds.), North-Holland, 1981, pp. 195-207.
- 84) Roundy, R., "98 %-Effective Integer-Ratio Lot-Sizing for One-Warehouse Multi-Retailer Systems," *Management Science* 31, pp. 1416-1430 (1985).
- 85) Roy, T. J. V., "Multi-level Production and Distribution Planning with Transportation Fleet Optimization," *Management Science* 35, pp. 1443-1453 (1989).
- 86) Scarf, H. E., D. M. Gilford, and M. W. Shelly, *Multistage Inventory Models and Techniques*, Stanford University Press, 1963.
- 87) Scarf, H. E., "A Survey of Analysis of Techniques in Inventory Theory," in *Multistage Inventory Models and Techniques*, Scarf, H. E., et al (Eds.), Stanford University Press, 1963, pp. 185-225.
- 88) Schaefer, M. K., "A Multi-Item Maintenance Center Inventory Model for Low-Demand Repairable Items," *Management Science* 29, pp. 1062-1068 (1983).
- 89) Schwarz, L. B., "A Simple Continuous Review Deterministic One-Warehouse N-Retailer Inventory Problem," *Management Science* 19, pp. 555

- 566 (1973).
- 90) Schwarz, L. B., *Multi-level Production/Inventory Control Systems : Theory and Practice*, North-Holland, 1981.
 - 91) Schwarz, L. B., Deuermeyer, B. L. and Badinelli, R. D., "Full-Rate Optimization in a One-Warehouse N-Identical Retailer Distribution Systems," *Management Science* 31, pp. 488-498 (1985).
 - 92) Sherbrooke, C. C., "METRIC : A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control," *Operations Research* 14, pp. 122-141 (1968).
 - 93) Sherbrooke, C. C., "An Evaluator for the Number of Operationally Ready Aircraft in a Multi-level Supply System," *Operations Research* 19, pp. 618-635 (1971).
 - 94) Sherbrooke, C. C., "VARI-METRIC : Improved Approximations for Multi-Indenture, Multi-Echelon Availability Models," *Operations Research* 34, pp. 311-319, (1986).
 - 95) Silver, E. A., "A Control System for Coordinated Inventory replenishment," *International Journal of Production Research* 12, pp. 647-670, (1974).
 - 96) Silver, E. A., "Establish Reorder Point in the (s, c, S) Coordinated Control System Under Compounded Poisson Demand," *International Journal of Production Research* 9, pp. 743-750 (1981).
 - 97) Silver, E. A., *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*, Second Ed. John Wiley & Sons, Inc., 1985.
 - 98) Simon, R. M., "Stationary Properties of a Two-Echelon Inventory Model for Low Demand Items," *Operations Research* 19, pp. 761-773, (1971).
 - 99) Sivazlian, B. D., "Asymptotic Approximations to Ordering Policies in a Stationary (σ , S) Inventory problem," *SIAM J. Appl. Math.* 19, pp. 155-166 (1970).
 - 100) Sivazlian, B. D., "Stationary Analysis of a Multicommodity Inventory System with Interacting Set-up Costs," *SIAM J. Appl. Math.* 20, pp. 264-278 (1971).
 - 101) Stulman, A., "Benefits of Centralized Stocking for the Multi-Centre Newsboy Problem with First Come, First Served Allocation," *Operations Research* 38, pp. 827-832 (1987).
 - 102) Svoronos, A., and P. Zipkin, "Estimating the Performance of Multi-Level Inventory System," *Operations Research* 36, pp. 57-72, (1988).
 - 103) Thompstone, R. M., and E. A. Silver, "A Coordinated Inventory Control System for Compound Poisson Demand and Zero Lead Time," *Int. J. Prod. Res.* 13, pp. 581-602 (1975).
 - 104) Tinarelli, G. U., "Inventory Control : Models and Problems," *European Journal of Operational Research* 14, pp. 1-12 (1983).
 - 105) Veinott, A. F., Jr., "Optimal Policy for a Multi-product Dynamic, Non-stationary Inventory Problems," *Management Science* 12, pp. 206-222 (1965).
 - 106) Veinott, A. F., Jr., "The Status of Mathematical Inventory Theory," *Management Science* 12, pp. 745-777 (1966).
 - 107) Williams, J. F., "Multi-echelon Production Scheduling when Demand is Stochastic," *Management Science* 20, pp. 1253-1263 (1974).
 - 108) Williams, J. F., "Heuristic Techniques for Simultaneous Scheduling of Production and Distribution in Multi-Echelon Structures : Theory and Empirical Comparisons," *Management Science* 27, pp. 336-352 (1981).
 - 109) Williams, J. F., "A Hybrid Algorithm for Simultaneous Scheduling of Production and Distribution in Multi-Echelon Structures," *Management Science* 29, pp. 77-92 (1983).
 - 110) Zangwill, W. I., "A Backlogging Model and a Multi-Echelon Model of a Dynamic Economic Lot Size Production System--A Network Approach," *Management Science* 15, pp. 506-527 (1969).
 - 111) Zipkin, P., "On the Imbalance of Inventories in Multi-echelon Systems," *Mathematics of Operations Research* 9, pp. 402-423 (1984).