

リーマン面の弱点分離

中井三留, 成田淳一郎*, 瀬川重男**

数学教室

(1989年8月9日受理)

Weak Point Separations of Riemann Surfaces

Mitsuru NAKAI, Junichiro NARITA* and Shigeo SEGAWA**

Department of Mathematics

(Received August 9, 1989)

The points in an open Riemann surface R are said to be separated weakly by a ring $E(R)$ of holomorphic functions on R containing constants if the points in R are separated by the quotient field $F(R)$ of $E(R)$. It is shown in the present paper that the following three conditions are equivalent by pairs: 1) $E(R)$ separates the points in R weakly, 2) $E(R)$ separates the points in $R \setminus \Gamma$ for a countable subset Γ of R , and 3) $E(R)$ separates the points in $R \setminus \Gamma$ for a discrete subset Γ of R .

結 言

R を開リーマン面とし, $A(R)$ を R 上の正則函数環, 即ち, R 上の正則函数全体の作る環, $M(R)$ を R 上の有理型函数体, 即ち, R 上の有理型函数全体の作る体とする ([5]). すると $M(R)$ は $A(R)$ の商体である:

$$M(R) = \{f_1/f_2 : f_1 \in A(R), f_2 \in A(R) \setminus \{0\}\}.$$

$E(R)$ を $A(R)$ の部分環で複素数体 C を含むものとする:

$$C \subset E(R) \subset A(R).$$

以下 $E(R)$ は常にこの様なものであるとして, $E(R)$ の商体を $F(R)$ と記すことにする:

$$F(R) = \{f_1/f_2 : f_1 \in E(R), f_2 \in E(R) \setminus \{0\}\}.$$

すると $F(R)$ は $M(R)$ の部分体であって,

$$C \subset F(R) \subset M(R)$$

である。

R の異なる2点 p と q をどのようにとっても, 或 $E(R)$ の元 f を見つけて

$$f(p) \neq f(q)$$

と出来るとき, $E(R)$ は R の点を分離すると言う。Weierstrass の定理から分かるように $A(R)$ は R の点を分離する。 $A(R)$ の我々の考える範囲の最小の部分環 C は無論 R の点を分離しない。

1965年 Royden [4] は, 次のような $E(R)$ に依る R の点の分離を考えた。即ち, R の異なる2点 p と q をどの様にとっても, 或 $E(R)$ の元の組 f と g とがあつて,

$$(f/g)(p) \neq (f/g)(q)$$

となる。普通の意味の $E(R)$ に依る R の点の分離と区別して, この様な場合には, $E(R)$ は R の点を弱分離すると言うことにする。弱分離に対して, 本来の分離であることを強調して, 強分離と言うこともある。

定義からただちに分かるように, $E(R)$ が R の点を弱分離するということは, $E(R)$ の商体 $F(R)$ が R の点を分離する事に外ならない, つまり, R の異なる2点 p と q に対して, 或 $F(R)$ の元 f があって

$$f(p) \neq f(q)$$

となることである。後で見るように, 弱分離と強分離は異なる概念である。換言すれば, 強分離ならば弱分離であるが, 逆は必ずしも成り立たない。しかし明らかに $A(R)$ では両概念は一致する。もっとも興味深い $A(R)$ の部分環である有界正則函数環 $H^\infty(R)$, 即ち R 上の有界正則函数全体の作る環, においては両概念は一致するか否かは今の所不明である。更に種々の部分環について同様の問題があり大変に重要であるが, これについては本稿では考えない。

$E(R)$ が R を弱分離すると言う概念は Royden が導入した経緯を見ても分かるように純粋に技術的なものであるが, 幾多の局面で有用であり, 特に $E(R)$ が R の点を弱分離するとき $E(R)$ がどのくらい R を強分離するかが分かると, 一層利用し易くなる。つまり, R 内に除外集合 Γ を用意して, $E(R)$ が $R \setminus \Gamma$ を強分離することと, $E(R)$ が R を弱分離することが同等に成るようにするには, Γ はどんな集合とすれば良いかと言う問題設定をする。判定条件と見れば Γ は大きいほど良く, 帰

* 大同工業大学・数学教室

** 大同工業大学・数学教室, 本学非常勤講師 (数学教室)

結と見れば Γ は小さいほど望ましい。この様な見方は、1987年 Hayashi [2] が提唱したのが最初で、Gamelin-Hayashi 共著の論文 [1] に於ては、特に環 $H^\infty(R)$ の場合で Γ は離散集合に取り、Hayashi-Nakai 共著の論文 [3] では、同じく環 $H^\infty(R)$ の場合で Γ としては上より弱く可算集合が使われた。本稿ではこれらの事を正則函数環 $A(R)$ の一般の部分環 $E(R)$ に対して証明を与える事が主目標である：

主定理. $E(R)$ を開リーマン面 R 上の正則函数環 $A(R)$ の複素数体 C を含む部分環とし、 Γ を R の部分集合とするとき、次の3条件は互いに同値である：

- 1) $E(R)$ は R の点を弱分離する、
- 2) $E(R)$ は、或可算集合 Γ に対して、 $R \setminus \Gamma$ の点を強分離する、
- 3) $E(R)$ は、或離散集合 Γ に対して、 $R \setminus \Gamma$ の点を強分離する。

第1節から4節迄の準備の後に第5節で主定理の証明を与える。第6節では、 Γ を出来るだけ小さくしたいとしても、一般に Γ は空集合には出来ぬ事を例示する。逆に、 Γ を出来るだけ大きくしたいとしても、例えば Γ を縁集合、即ち内点を含まぬ集合、程に大きくすることが出来ぬ事も同じく第6節で例示する。

1. 座 標 円 板

1.1. 開リーマン面 R の点 a に対して、 a の開近傍 V から複素平面 C の開集合への位相写像 $z = z(p)$ があって

- 1) $z(V) = \Delta_r = \{z \in C : |z| < r\} \quad (0 < r < \infty)$,
- 2) $z(a) = 0$,
- 3) z は V から円板 Δ_r への等角写像

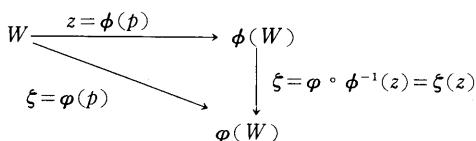
の3条件を満たすとき、 (V, z) を a に於ける座標円板、 V を局所円板、 z を局所座標と言う。 (U, ξ) を a に於ける別の座標円板とする。

$$\begin{cases} z = z(p) = \phi(p) \\ \xi = \xi(p) = \varphi(p) \end{cases}$$

とかき、 W を $V \cap U$ に含まれ a を含む単連結領域とするとき、

$$\xi = \varphi \circ \phi^{-1}(z) = \xi(z)$$

と置けば、これは $\phi(W)$ 中の単連結領域 $\phi(W)$ から



$\phi(U)$ 中の単連結領域 $\phi(W)$ 上への等角写像であって、 $\xi(0) = 0$ である。ゆえに十分小さな円板 $\{|z| < r_1\}$ 上で

$$(1.1) \quad \xi = \xi(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \dots \quad (A_1 \neq 0)$$

の形のべき級数表示を持つ。

1.2. f を R 上 a の近傍で定義された恒等的には0でない有理型函数とする。 a に於ける座標円板 (V, z) を適当に取れば、 V 上

$$(1.2) \quad f = \sum_{n=\mu}^{\infty} a_n z^n \quad (a_\mu \neq 0)$$

の形の Laurent 級数表示を持つ。 a に於ける別の座標円板 (U, ξ) に対して U 上

$$f = \sum_{n=\lambda}^{\infty} b_n \xi^n \quad (b_\lambda \neq 0)$$

の形の Laurent 級数表示を持つとき、(1.1) を代入すれば

$$f = \sum_{n=\lambda}^{\infty} c_n z^n \quad (c_\lambda = A_1^\lambda b_\lambda \neq 0)$$

となる。よって Laurent 級数の一意性に依り、(1.2) と比較して $\lambda = \mu$ となる。こうして (1.2) に於ける μ は f と a のみに依って定まり、座標円板 (V, z) の取り方には依存しない。この μ を記号

$$\partial_f(a)$$

で表して、 f の a に於ける位数と言う。

$$\partial_f(a) > 0$$

は f が a で $\partial_f(a)$ 位の零点を持つこと、

$$\partial_f(a) < 0$$

は f が a で $|\partial_f(a)|$ 位の極を持つこと、

$$\partial_f(a) = 0$$

は f が a で正則で $f(a) \neq 0$ となることと、各々同等である。 $f=0$ に対しても便宜上

$$\partial_0(a) = \infty$$

と規約する。 a の近傍での2つの有理型函数 f と g について

$$\begin{cases} \partial_{fg}(a) = \partial_f(a) + \partial_g(a) \\ \partial_{f+g}(a) \geq \min \{ \partial_f(a), \partial_g(a) \} \end{cases}$$

となる。

1.3. $f(a) = 0$ 又は ∞ の時座標円板 (V, z) をうまく取って (1.2) の表示を最も簡単な形 $f = z^\nu$ に出来ることを示す。 f が a に極を持つ場合は f^{-1} を考えたら良いから、次の形で述べる：

補題 1.1. h をリーマン面 R 上の点 a の近傍に於ける正則函数であって、 $\partial_h(a) = \nu \geq 1$ であるとすると、 a に於ける座標円板 (V, z) で次の性質を持つ様なものが

存在する： V 上

$$(1.3) \quad h = z^\nu.$$

証明 局所円板 U が h の定義域に含まれるような a に於ける座標円板 (U, ξ) を任意に取って固定する。よって $\xi = \xi(p)$ は $\xi(a) = 0$ を満たす U から C の或開円板

$$\Delta_r = \{\xi \in C : |\xi| < r\} \quad (0 < r < \infty)$$

への等角写像である。 $\partial_h(a) = \nu$ だから U 上

$$h = c_\nu \xi^\nu + c_{\nu+1} \xi^{\nu+1} + \dots \quad (c_\nu \neq 0)$$

の様な ξ に依るべき級数表示が得られる。そこで Δ_r 上の正則函数

$$\varphi(\xi) = c_\nu + c_{\nu+1} \xi + \dots$$

を考えると、 $\varphi(0) = c_\nu \neq 0$ だから、 $0 < s < r$ となる s を十分小さく取ると

$$\varphi(\xi) \neq 0 \quad (\xi \in \Delta_s)$$

となる。すると Δ_s 上の正則函数 $\psi(\xi)$ があって

$$\psi(\xi)^\nu = \varphi(\xi) \quad (\xi \in \Delta_s)$$

となるものが存在する。勿論 $\psi(0) \neq 0$ だから $\partial_\psi(0) = 0$ である。そこで

$$\phi(\xi) = \xi \psi(\xi) \quad (\xi \in \Delta_s)$$

と置くと、 $\partial_\xi(0) = 1$ 故

$$\partial_\phi(0) = \partial_\xi(0) + \partial_\psi(0) = 1$$

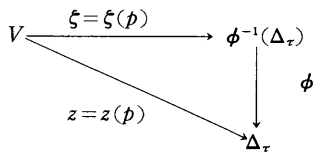
である。だから $0 < t < s$ となる t を十分小さく取れば、 ϕ は Δ_t 上の単葉函数となる。 $\Delta_r \subset \phi(\Delta_t)$ となる様な $r > 0$ をとって固定し、 $\xi = \xi(p)$ の逆写像 ξ^{-1} による $\phi^{-1}(\Delta_r)$ の像を V と置く：

$$V = \xi^{-1}(\phi^{-1}(\Delta_r)).$$

そこで V 上の函数

$$z = z(p) = \phi(\xi(p))$$

を考えると、 $\xi(a) = 0$ 、 $\phi(0) = 0$ 等により、 (V, z) は



a に於ける座標円板であることが分かり、 V 上順次

$$\begin{aligned} z(p)^\nu &= \phi(\xi(p))^\nu \\ &= \{\xi(p) \psi(\xi(p))\}^\nu \\ &= \xi(p)^\nu \psi(\xi(p))^\nu \\ &= \xi(p)^\nu \varphi(\xi(p)) \\ &= \xi(p)^\nu (c_\nu + c_{\nu+1} \xi(p) + \dots) \\ &= c_\nu \xi(p)^\nu + c_{\nu+1} \xi(p)^{\nu+1} + \dots \\ &= h(p) \end{aligned}$$

となる。即ち V 上 $z^\nu = h$ が得られる。 終

2. 局所構造

2.1. リーマン面 R 上の正則函数環 $A(R)$ の複素数体 C を含む部分環 $E(R)$ を考える：

$$A(R) \supset E(R) \supset C.$$

本稿では常にこの様な部分環 $E(R)$ を考え、更に $E(R)$ の商体を常に $F(R)$ と書くことにする。即ち

$$F(R) = \{f_1/f_2 : f_1 \in E(R), f_2 \in E(R) \setminus \{0\}\}.$$

すると $F(R)$ は有理型函数体 $M(R)$ の部分体である：

$$M(R) \supset F(R) \supset C.$$

R の任意の点 a にたいし $F(R)$ の次のような部分環 $F(R)_a$ を考える：

$$F(R)_a = \{f \in F(R) : f(a) = 0\}.$$

これを使って、 $E(R)$ の商体 $F(R)$ の a に於ける示数 $\nu(a)$ を

$$(2.1) \quad \nu(a) = \min \{\partial_f(a) : f \in F(R)_a\}$$

で定義する。 $E(R)$ 、従って $F(R)$ 、の a に於ける局所構造を調べるのに大事な役割を演ずる。

上の $\nu(a)$ の定め方により、

$$(2.2) \quad \nu(a) = \partial_h(a)$$

となる h が定まる。この様な h を一つの $F(R)$ の a に於ける底と言うことにする。この h に対して、補題 1.1 で定まる座標円板 (V, z) 、つまり V 上

$$(2.3) \quad h = z^{\nu(a)}$$

となる (V, z) を、 a に於ける $F(R)$ の底 h に関する座標円板、あるいは簡単に h -座標円板と呼ぶ。

2.2. 示数 $\nu(a)$ の最も基本的な性質は、全ての $f \in F(R)_a$ に対する位数 $\partial_f(a)$ の最小値であることにとどまらず、全ての $\partial_f(a)$ の最大公約数となっていることにある：

補題 2.1. $F(R)$ の a に於ける示数 $\nu(a)$ は任意の $f \in F(R)_a$ の位数 $\partial_f(a)$ を整除する：

$$(2.4) \quad \nu(a) | \partial_f(a) \quad (f \in F(R)_a).$$

証明 $F(R)$ の a に於ける底 h を一つ取って固定する。任意の f を $F(R)_a$ から取る。もし $\nu(a)$ が $\partial_f(a)$ を整除しないならば

$$\partial_f(a) = \nu(a) \cdot \alpha + \gamma$$

となる非負整数 α と、 $0 < \gamma < \nu(a)$ である正整数 γ が定まる。

$$g = f/h^\alpha$$

とおくと、 g は $F(R)$ の元であるが

$$\partial_g(a) = \partial_f(a) - \alpha \nu(a) = \gamma > 0$$

だから、 $g \in F(R)_a$ である。しかし

$$\partial_g(a) = \gamma < \nu(a)$$

は $\nu(a)$ の定義に反する。

終

2.3. $F(R)$ の a に於ける底 h を使うと、 $E(R)$ 、従って、 $F(R)$ の a に於ける局所構造は次の様に明瞭となる：

補題 2.2. h を a に於ける $F(R)$ の底とし (V, z) を h -座標円板とすると、任意の $E(R)$ の元 f は V 上

$$(2.5) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n$$

の様な h のべき級数表示を持つ。よって任意の $F(R)$ の元 f は V 上

$$(2.6) \quad f = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n \right] / \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n h^n \right]$$

の形の h のべき級数表示の商に表される。

証明 $F(R)$ の元は $E(R)$ の元の商として表されるから、(2.5) が示されさえすれば (2.6) は直ちに得られる。ゆえに (2.5) を示すために $E(R)$ の任意の元 f をとると、 V 上 f は

$$(2.7) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

と z のべき級数表示をもつ。もし $F(R)$ の a に於ける示数 $\nu = \nu(a) = 1$ であるならば、 V 上 $z = h$ だから、上式で z を h で置き換えて (2.5) の表示が得られる。

従って、 $F(R)$ の a に於ける示数 $\nu = \nu(a) > 1$ と仮定して、(2.5) の表示が得られることを示せば良い。そのとき (2.7) に於て

$$(2.8) \quad a_{m\nu+1} = \dots = a_{m\nu+(\nu-1)} = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

となることを示そう。 $f_0 = f - a_0$ とすると

$$f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

であって、 $f_0 \in F(R)_a$ だから、補題 2.1 により

$$\nu | \partial_{f_0}(a)$$

である。その為には

$$a_1 = \dots = a_{\nu-1} = 0$$

でなければならない。つまり (2.8) は $m=0$ に対して成立することが分かる。

次に k を任意の自然数とし、(2.8) が $m=0, 1, \dots, k-1$ で正しいものとする。すると (2.7) は、 V 上

$$f = \sum_{m=0}^k a_{m\nu} z^{m\nu} + \sum_{n=k\nu+1}^{\infty} a_n z^n$$

の形になる。 V 上 $z^\nu = h$ であることを使えば、

$$f_k = (f - \sum_{m=0}^k a_{m\nu} h^m) / h^k$$

と置くと、 $f_k \in F(R)$ であって、 V 上 f_k は

$$f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k\nu+n} z^n$$

とべき級数表示される。この形から $f_k \in F(R)_a$ であるから、再び補題 2.1 に依れば

$$\nu | \partial_{f_k}(a)$$

である。その為には

$$a_{k\nu+1} = \dots = a_{k\nu+(\nu-1)} = 0$$

でなければならない。つまり (2.8) は $m=k$ に対しても成立することが示された。こうして数学的帰納法が完成するから、(2.8) が全ての $m=0, 1, \dots$ で成立することが結論される。

ゆえに (2.7) と (2.8) から V 上

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m\nu} z^{m\nu}$$

の形の表示が得られるから、 $a_{m\nu} = c_m$ ($m=0, 1, \dots$) と置き、 z^ν を h で置き換えることにより (2.5) の表示が導かれる。

終

3. 局所分離

3.1. X をリーマン面 R の部分集合とし、 $\mathfrak{X}(R)$ を $M(R)$ の部分集合とする。 $\mathfrak{X}(R)$ が X の点を分離するとは、 X の相異なる任意の 2 点 p と q に対して常に $\mathfrak{X}(R)$ の或元 f が見つかる

$$f(p) \neq f(q)$$

となることであるとする。 $A(R)$ の部分環 $E(R) (\subset C)$ の商体 $F(R)$ を取るとき、 $F(R)$ が R の点を分離するとき、 $E(R)$ は R の点を弱分離すると言い、 $E(R)$ が R の点を分離するとき、 $E(R)$ は R の点を強分離 (或は単に分離) すると言う。

特に一点 a に於ける局所円板 V を $F(R)$ が分離する条件が a に於ける $F(R)$ の示数 $\nu(a)$ によって完全に定まる：

補題 3.1. $\nu(a)$ を $F(R)$ の a に於ける示数、 h を $F(R)$ の a に於ける底、 (V, z) を a に於ける h -座標円板とする。 $F(R)$ が V の点を分離する為の必要十分条件は $\nu(a) = 1$ である。

証明 $\nu(a) = 1$ とすると、 V 上 $h = z$ は単葉なので、 h 単独で V の点を分離する。 h は $F(R)$ の元なので、無論 $F(R)$ は V の点を分離する。よって $\nu(a) = 1$ の十分性が示された。

逆に $F(R)$ が V の点を分離するとして $\nu(a) = 1$ を示したい。背理法に依るために、 $\nu = \nu(a) > 1$ と仮定する。 (V, z) の局所座標を

$$z = z(p) = \phi(p)$$

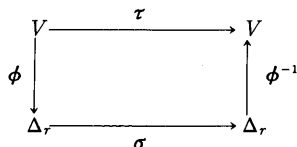
と置き、 $\phi(V) = \Delta_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ ($0 < r < \infty$) とする。

$$\sigma(z) = e^{\frac{2\pi}{\nu}i} z$$

と置くと、 σ は Δ_r の回転である。そこで

$$\tau(p) = \phi^{-1}[\sigma(\phi(p))]$$

と置くならば、 τ は V の自己等角写像を与える。 V 上



$h = z^\nu = \phi(\cdot)^\nu$ だから、 Δ_r 上 $\sigma(z)^\nu = z^\nu$ により、 V 上

$$\begin{aligned} h(\tau(p)) &= h(\phi^{-1}(\sigma(\phi(p)))) \\ &= \phi(\phi^{-1}(\sigma(\phi(p))))^\nu \\ &= \sigma(\phi(p))^\nu \\ &= \phi(p)^\nu \\ &= z(p)^\nu \\ &= h(p) \end{aligned}$$

である。従って $h \circ \tau = h$ となり、 V 上

$$(3.1) \quad h \circ \tau^m = h \quad (m=0, 1, \dots, \nu-1)$$

となることが分かる。

$F(R)$ の任意の恒等的に零でない元 f にたいして、補題 2.2 によれば、 f は V 上 (2.6) の形の表示を持つので、(2.6) の分母、分子ともに零でない V の点においては (3.1) により、

$$(3.2) \quad f \circ \tau^m = f \quad (m=0, 1, \dots, \nu-1)$$

となる。(2.6) の分母、分子の零点は V 内の離散点集合を作るので、 V 上 (3.2) が成り立つ。これは V のどの点 p をとって、互いに相異なる V の ν 個の点

$$p_0 = p, p_1 = \tau(p), \dots, p_{\nu-1} = \tau^{\nu-1}(p)$$

に於て f は同一の値を取ることを意味する。故に、これは $F(R)$ が V の点を分離することに反する。よって $\nu(a) = 1$ は必要条件である。

3.2. 一点 a の局所円板 V の点を $F(R)$ が分離する条件を、 $E(R)$ の言葉で表現したい。ここに除外集合が登場する：

補題 3.2. $\nu(a)$ を a に於ける $F(R)$ の示数とし、 h を $F(R)$ の a に於ける底で、 (V, z) を a に於ける h -座標円板とする。 V の或可算部分集合 (又は離散部分集合) Γ が存在して、 $E(R)$ が $V \setminus \Gamma$ の点を分離するための必要十分条件は $\nu(a) = 1$ である。

証明 $\nu(a) = 1$ とすると V 上 $h = z$ は単葉で V の点

を分離する。 $h \in F(R)$ だから

$$h = h_1/h_2 \quad (h_1 \in E(R), h_2 \in E(R) \setminus \{0\})$$

の様に表される。 h_1 と h_2 の V 内の零点の全体を Γ とすると、 Γ は V 内の離散点集合なので、勿論可算集合である。 p と q を $V \setminus \Gamma$ の異なる二点とすると

$$h_1(p)/h_2(p) \neq h_1(q)/h_2(q)$$

だから $h_i(p) \neq 0, h_i(q) \neq 0$ ($i=1, 2$) により

$$h_1(p) \neq h_1(q) \text{ 又は } h_2(p) \neq h_2(q)$$

となる。 $h_i \in E(R)$ ($i=1, 2$) なので、 $E(R)$ は $V \setminus \Gamma$ の点を分離することが分かる。

逆に V の可算部分集合 (又は離散部分集合) Γ があって、 $E(R)$ が $V \setminus \Gamma$ の点を分離するとする。 $E(R)$ の各函数 f は補題 2.2 により (2.5) のように h のべき級数表示されるので、 h 単独で既に $V \setminus \Gamma$ の点を分離することが分かる。 $\nu = \nu(a) = 1$ を示したいのであるが、もし $\nu > 1$ ならば

$$T_j = \{p \in V : \frac{2\pi}{\nu}(j-1) \leq \arg z(p) < \frac{2\pi}{\nu}j\} \quad (j=1, \dots, \nu)$$

とおくと、 T_1, \dots, T_ν は互いに素で、これらの合併が V である。

$$\Gamma_j = T_j \cap h^{-1}\{h(\Gamma)\} \quad (j=1, \dots, \nu)$$

と置くと、 V 上 $h = z^\nu$ だから Γ_j は又 V の可算部分集合 (又は離散部分集合) となり、補題 3.1 の証明中の τ を使うと

$$T_j \setminus \Gamma_j = \tau^{\nu-1}(T_j \setminus \Gamma_j) \quad (j=1, \dots, \nu)$$

である。そこで $w \in h(V) \setminus h(\Gamma)$ を任意の一つ取り

$$h^{-1}(w) = \{p_1, \dots, p_\nu\}$$

と置くと、以上の作り方から、

$$p_j \in T_j \setminus \Gamma_j \quad (j=1, \dots, \nu)$$

だから、 $\Gamma \subset \bigcup_{j=1}^{\nu} \Gamma_j$ により

$$\{p_1, \dots, p_\nu\} \subset V \setminus \Gamma$$

となり、更に

$$h(p_1) = \dots = h(p_\nu) (= w)$$

となって、 h が $V \setminus \Gamma$ の点を分離することに反する。よって $\nu = \nu(a) = 1$ でなければならぬ。つまり $\nu(a) = 1$ は必要条件である 終

4. 非分離部分集合

4.1. $E(R)$ のどんな函数によっても分離されぬような R の互いに異なる 2 点 p と q の組 (p, q) の全体 Λ を $R \times R$ の非分離部分集合と名づける。即ち

$$(4.1) \quad \Lambda = \{(p, q) \in R \times R \setminus \Delta(R \times R) : f(p) = f(q) \text{ (} f \in E(R)\text{)}\},$$

但し $\Delta(R \times R)$ は $R \times R$ の対角線集合

$$\Delta(R \times R) = \{(p, p) : p \in R\}$$

とする。この集合 Λ は $E(R)$ が R の点を分離すると一挙に空集合となる訳であるが、 $E(R)$ が R の点を弱分離するときには次のことが言える：

補題 4.1. $E(R)$ が R の点を弱分離するとき、即ち、 $F(R)$ が R の点を分離するとき、 $R \times R$ の非分離部分集合 Λ は $R \times R$ の離散部分集合である。

証明 任意の $R \times R$ の点 (p, q) をとるとき、 $R \times R$ 内で (p, q) の小近傍で Λ の点を高々一個のみ含むものがあることを言えば良い。

先ず $p \neq q$ の場合を考える。

$(p, q) \in \Lambda$ の時には、 $f \in E(R)$ 、 $g \in E(R) \setminus \{0\}$ であって

$$(4.1) \quad (f/g)(p) \neq (f/g)(q)$$

となるものがとれることが、 $F(R)$ が R の点を分離すると言う仮定の帰結である。 $E(R)$ は p と q を分離せぬから、 $f(p) = f(q)$ であり $g(p) = g(q)$ であるが、(4.1) により

$$f(p) = f(q) = g(p) = g(q) = 0$$

である。再び (4.1) により f も g も恒等的に 0 でないから、 p と q 各々の近傍 U と V で、 $U \setminus \{p\}$ 上 $f \neq 0$ 、 $V \setminus \{q\}$ 上 $g \neq 0$ であって、しかも

$$(4.2) \quad (f/g)(U) \cap (f/g)(V) = \emptyset$$

となるように取ることが出来る。 $a \in U$ 、 $b \in V$ 、かつ $(a, b) \in \Lambda$ となるものを任意にとると、(4.2) により

$$f(a)/g(a) \neq f(b)/g(b)$$

だから、 $f(a) \neq f(b)$ 又は $g(a) \neq g(b)$ でなければならない。とすると $(a, b) \in \Lambda$ に入らないから

$$[(U \times V) \setminus \{(p, q)\}] \cap \Lambda = \emptyset$$

となって $U \times V$ は Λ の点としては (p, q) を唯一つのみ含む (p, q) の $R \times R$ 内の近傍である。

次に (p, q) が Λ に含まれぬ時には、 $f \in E(R)$ で $f(p) \neq f(q)$ となるものが取れるから、 p の近傍 U と q の近傍 V で

$$f(U) \cap f(V) = \emptyset$$

となるものが取れる。すると

$$(U \times V) \cap \Lambda = \emptyset$$

となり、 (p, q) の $R \times R$ 内の近傍 $U \times V$ は Λ の点の一つも含まない。

今度は $p = q$ の場合を考える。

$F(R)$ が R の点を分離するから、補題 3.1 に依れば、 p に於ける $F(R)$ の示数 $\nu(p) = 1$ であり、 h を $F(R)$ の p に於ける底とすると、 (V, z) を p に於ける h -座標円板とすると、 V 上 $h = z$ は単葉となる。さらに

$$h = h_1/h_2 \quad (h_1 \in E(R), h_2 \in E(R) \setminus \{0\})$$

と言う表示を固定したとして、必要ならば V をあらか

じめ小さく取り直しておいたとして、 $V \setminus \{p\}$ 上 $h_i \neq 0$ ($i=1, 2$) となっているものとして良い。

このとき $(p, q) = (p, p)$ の $R \times R$ 内の近傍 $V \times V$ をとると

$$(V \times V) \cap \Lambda = \emptyset$$

である。もし $(a, b) \in (V \times V) \cap \Lambda$ があれば

$$h_1(a) = h_1(b) \quad \text{及び} \quad h_2(a) = h_2(b)$$

であり、更に $a \neq b$ に注意すれば、これらの何れかは 0 でないから、

$$h(a) = h(b)$$

となる。これは h の V 上の単葉性に反する。 終

4.2. $E(R)$ が R の点を弱分離すると、 Λ は $R \times R$ 内離散集合である。そこで Γ を Λ の R への射影とすると、 $E(R)$ は $R \setminus \Gamma$ の点を分離することになる。その時 Γ はどのくらい小さいか？ Λ は $R \times R$ 内離散故可算集合なので、とにかく Γ は可算集合なことは確かである。一般的に言えば、 $R \times R$ の離散集合の R への射影としてだけの Γ は R 内離散とは言えない。

例えば、 $R = \mathbb{C}$ にとる。 \mathbb{C} の実軸上にない有理点の全体を

$$\{z_n : n = 0, 1, \dots\}$$

とし、ここでは抽象的な集合としての Λ を

$$\Lambda = \{(z_n, n), (n, z_n) : n = 0, 1, \dots\}$$

と取ると、 Λ は離散集合である。実際、 (z_n, n) の $R \times R$ 内の近傍として、 \mathbb{C} 内の z_n の近傍 U と n の近傍 V を

$$\begin{cases} U \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 0\} = \emptyset \\ V \cap [\{m : m = 0, 1, \dots\} \setminus \{n\}] = \emptyset \end{cases}$$

と成るように取ると

$$(U \times V) \cap \Lambda = \{(z_n, n)\} \quad (1 \text{ 点})$$

となる。 (n, z_n) の近傍としては $V \times U$ をとると

$$(V \times U) \cap \Lambda = \{(n, z_n)\} \quad (1 \text{ 点})$$

となる。故に Λ は $R \times R$ の離散集合である。しかし Λ の R への射影を Γ と記すときに

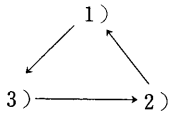
$$\Gamma = \{z_n : n = 1, 2, \dots\} \cup \{n : n = 0, 1, \dots\}$$

であるから、 Γ は R 内離散ではない。

抽象的にはこのような事情があるので、具体的には $E(R)$ の場合での Λ から求める Γ を作る時に単に射影をとるのではなくて、 Γ を何か小さめに取る一定の工夫が必要となる。

5. 主定理の証明

5.1. 主定理の証明の方針としては、下図に示すような順で実行することにする：



しかし 3) → 2) は自明であるので、2) → 1) 及び 1) → 3) の二つの証明が本質的である。2) → 1) の証明は補題 3.2 と補題 2.2 に立脚して行われる。1) → 3) の証明には補題 4.1 が利用される。

5.2. 2) → 1) を示す。つまり、 R の或可算集合 Γ があって、 $E(R)$ が $R \setminus \Gamma$ の点を分離するときは、 $F(R)$ が R の点を分離することを言う。

その為に、 R の相異なる二点 p と q をとり、それらに対して $F(R)$ の元 f があって $f(p) \neq f(q)$ となることを言う。背理法で示すため

$$(5.1) \quad f(p) = f(q) \quad (f \in F(R))$$

と仮定して矛盾を導く。

p 及び q に対する $F(R)$ の示数を各々 $\nu(p)$ 及び $\nu(q)$ とし、 $F(R)$ の p 及び q に於ける底を各々 h_p 及び h_q とし、 (V_p, z_p) 及び (V_q, z_q) を各々 h_p -座標円板及び h_q -座標円板とする。 $E(R)$ が $R \setminus \Gamma$ の点を分離するから、勿論 $E(R)$ は $V_p \setminus \Gamma$ 及び $V_q \setminus \Gamma$ の点を分離する。 Γ は可算集合であるから、補題 3.2 に依れば

$$\nu(p) = \nu(q) = 1$$

となる。

ここで (5.1) により $h_p(q) = h_p(p) = 0$ であるが、実は

$$(5.2) \quad \partial_{h_p}(q) = 1$$

となることを示す。もし $\partial_{h_p}(q) \geq 2$ とすると $\partial_{h_p}(q) = 1$ だから

$$(h_q/h_p)(q) = \infty$$

である。しかし (5.1) によると、 $h_q(p) = h_q(q) = 0$ だから $\partial_{h_q}(p) \geq 1$ であるから、 $\partial_{h_q}(p) = 1$ により、

$$(h_q/h_p)(p) \in \mathbb{C}$$

となる。すると $F(R)$ の元 $f = h_q/h_p$ に対して (5.1) が成り立たないと言う矛盾が出ることになる。故に (5.2) が成り立つ。

記号を簡単化して $h = h_p$, $V = V_p$ とかけば、 (V, h) は p に於ける h -座標円板となる。(5.2) に依り $\partial_h(q) = 1$ だから、 (U, h) が q に於ける h -座標円板となるような q に於ける局所円板 U を取ることが出来る。 V または U を小さく取り直して、元々

$$(5.3) \quad h(V) = h(U) = \Delta_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

となっているものとして良い。そこで、写像

$$h = h_V : V \rightarrow \Delta_r$$

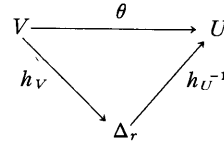
ともう一つの写像

$$h = h_U : U \rightarrow \Delta_r$$

の逆写像 h_U^{-1} を使って合成写像

$$\theta = h_U^{-1} \circ h_V$$

を考えると、 θ は V から U の上への等角写像である。



さて $E(R)$ の任意の元 f を取る。補題 2.2 に依れば V 上 f は

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

の様な h のべき級数表示を持ち、同様に U 上でも f は

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h^n$$

の様なべき級数表示を持つ。ここで実は

$$(5.4) \quad a_n = b_n \quad (n=0, 1, \dots)$$

となることを示す。(5.1) に依れば

$$a_0 = f(p) = f(q) = b_0$$

だから (5.4) は $n=0$ に対して成立する。そこで正整数 k に対して (5.4) が $n=0, 1, \dots, k-1$ で正しいとする。

$$f_k = (f - \sum_{n=0}^{k-1} a_n h^n) / h^k$$

と置くと、 $f_k \in F(R)$ となる。 V 上

$$f_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} h^n$$

となり、又 U 上

$$f_k = \sum_{n=0}^{\infty} b_{k+n} h^n$$

の様な h のべき級数表示を持つ。(5.1) によれば

$$a_k = f_k(p) = f_k(q) = b_k$$

となり、(5.4) は $n=k$ に対しても正しい。こうして (5.4) が全ての n に対して正しいことが数学的帰納法で結論される。

故に、 $U \cup V$ 上

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$$

となることが分かる。そこで V 上

$$\begin{aligned} f \circ \theta &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (h \circ \theta)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (h_U \circ h_U^{-1} \circ h_V)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_V^n \\ &= f \end{aligned}$$

となる。これは任意の $a \in V$ に対して $\theta(a) \in U$ で、全

ての $f \in E(R)$, 従って補題 2.2 により全ての $f \in F(R)$ に対して

$$f(a) = f(\theta(a))$$

となることを示す。これは、 $V_\Gamma = \{a \in V : \theta(a) \in \Gamma\}$ が可算集合で、

$$V \subset \Gamma \cup V_\Gamma$$

を意味するので、 $\Gamma \cup V_\Gamma$ が内点を含み可算であることに反する。 終

5.3. 1) \rightarrow 3) を示す。つまり $F(R)$ が R の点を分離すると、 R の或離散集合 Γ が存在して $E(R)$ が $R \setminus \Gamma$ の点を分離することを示す。

Λ を (4.1) で定めた $E(R)$ に対する $R \times R$ の非分離部分集合とする。更に R の相対コンパクト部分集合 R_n の包含関係による増加列 $\{R_n\}$ で

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

となるもの、いわゆる R の近似列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ を一つ固定する。 Λ と $\{R_n\}$ から次のような R の部分集合 Γ を作る。即ち、 Γ は次の二条件を満たすような R の点 $q = q(p)$ が見つかるような R の点 p の集合とする：

$$(5.5) \quad (p, q) \in \Lambda$$

及び

$$(5.6) \quad \min \{ \mu : p \in R_\mu \} \geq \min \{ \mu : q \in R_\mu \} .$$

先ず $E(R)$ は $R \setminus \Gamma$ の点を分離することを言う。 $R \setminus \Gamma$ の相異なる二点 p と q をとるとき、 $E(R)$ の或元 f があって $f(p) \neq f(q)$ となることを主張する。もしそうでないとすると、

$$f(p) = f(q) \quad (f \in E(R))$$

となるが、これは定義 (4.1) に依れば、 (p, q) 及び (q, p) が Λ に入ることとなる。すると (5.6) が (p, q) または (q, p) (即ち $p' = q, q' = p$) に対して成り立つから (5.5) と共に、 $p \in \Gamma$ あるいは $q \in \Gamma$ の何れかは成立せねばならない。これは矛盾である。

最後に Γ は離散な事を言う。そうでないと、 Γ の点列 $\{p_m\}$ で R の或点 p へ収束するものが取れる：

$$p_m \rightarrow p \quad (m \rightarrow \infty).$$

$\{p_m\}$ も p も或 R_n に含まれる。確定的を好むならこの様な最小の n を取っておくと良い。各 p_m に対して、 Γ の定義から、 $q_m \in R$ で

$$(p_m, q_m) \in \Lambda$$

であって、更に

$$\min \{ \mu : q_m \in R_\mu \} \leq \min \{ \mu : p_m \in R_\mu \} \leq n$$

である。だから $q_m \in R_n$ であり、 \bar{R}_n はコンパクトだから、必要なら部分列を取ることにより $\{q_m\}$ は \bar{R}_n 内の収束列としてよい。

$$q_m \rightarrow q \quad (m \rightarrow \infty)$$

とすると、 $q \in \bar{R}_n \subset R$ だから、 $(p_m, q_m) \in \Lambda$ で $R \times R$ 内

$$(p_m, q_m) \rightarrow (p, q) \quad (m \rightarrow \infty)$$

となって、 Λ は $R \times R$ 内で離散ではないこととなる。これは補題 4.1 に矛盾するから Γ は R 内離散でなければならない。 終

6. 除外集合

6.1. $E(R)$ が R の点を弱分離する事を、 R の或除外集合 Γ に対して、 $E(R)$ が $R \setminus \Gamma$ の点を分離すると言う形で特徴付けることを考えて来た。

弱分離すると言う仮定で種々議論を進めていくと言う立場からは Γ は出来るだけ小さい方が望ましい。離散集合まで小さくしたが、もっと進めて、 Γ が空集合には出来ないかと言う疑問が起こる。最大環 $A(R)$ では確かにそうであるが、もっと小さな環 $E(R)$ ではどうであろうか？

逆に弱分離するか否かを判定すると言う立場に立つと、 Γ は出来るだけ大きい方が判定が楽で良い。可算集合迄大きくしたが、もっと大きくできないか。例えば、 Γ が内点を含みぬ集合、いわゆる縁集合、位大きくできないであろうか？ Γ が離散又は可算とした場合のこれまでの議論においては、それらが内点を含みぬと言う性質が積極的に使われてきた様に思えることに基づいての設問である。

ここでは一般の環 $E(R)$ においては、 Γ は必ずしも空集合とは出来ないことを例示する。又 Γ を縁集合程大きくすることは許されないことも例示する。これらの問題を有界正則函数環 $H^\infty(R)$ で論ずることは非常に重要で又興味深いものであることを付言する。

6.2. 弱分離と強分離は一般には異なる概念であることを示す。無論、強分離ならば弱分離であるから、この逆が必ずしも従わないと言うことが主張である。即ち

例 6.1. $E(R)$ が R の点を弱分離するけれど、強分離しないことがある。換言すれば、 $E(R)$ が R の点を弱分離することを、 $E(R)$ が $R \setminus \Gamma$ の点を分離することで特徴付ける時、除外集合 Γ は必ずしも空集合にはできぬ。

証明 上の主張を裏づける様な具体例を与えたら良い。先ずリーマン面 R としては

$$R = \mathbb{C} \text{ (複素平面)}$$

にとる。更に、 R 上のふたつの正則函数

$$\begin{cases} \xi(z) = z(z-1) \\ \eta(z) = z^2(z-1) \end{cases}$$

を取り、 $E(R)$ としては、 ξ と η 及び C の生成する環を取る。よって $E(R)$ の函数 f は R 上

$$(6.1) \quad f = \sum_{\alpha, \beta=0}^{\infty} a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \eta^\beta$$

の形の表示を持つ。ただし、 f に依って定まる自然数 n があって $\alpha + \beta > n$ ならば $a_{\alpha\beta} = 0$ である。

1) $E(R)$ は R の点を分離しない。

事実、 $E(R)$ の元 f は (6.1) の表示を持つから

$$\xi(0) = \xi(1) = \eta(0) = \eta(1) = 0$$

により $f(0) = a_{00} = f(1)$ となり、 R の点 0 と 1 は $E(R)$ のどの函数に依っても分離されない。

2) $E(R)$ は $R \setminus \{0, 1\}$ の点を分離する。

事実、 $R \setminus \{0, 1\}$ の相異なる二点 z と w を取るとき、

$$\xi(z) \neq \xi(w) \text{ 又は } \eta(z) \neq \eta(w)$$

となることを示せば十分である。もし $\xi(z) = \xi(w)$ かつ $\eta(z) = \eta(w)$ となるとすると、 z と w に関する連立方程式

$$\begin{cases} z^2 - z = w^2 - w \\ z^3 - z^2 = w^3 - w^2 \end{cases}$$

が成立する。これを $z \neq w$ の仮定の元で解くと $(z, w) = (0, 1)$ 又は $(1, 0)$ が導かれるので、これは矛盾である。

3) $F(R)$ は R の点を分離する。

これは一般論 (主定理) によると 2) と同等なので、勿論成立するが、直接にも、 $F(R)$ の元 η/ξ を取れば

$$\eta(z)/\xi(z) = z$$

なので、 η/ξ 単独で R の点を分離することから直ちに分かる。

この例では、 $\Gamma = \{0, 1\}$ だから、 Γ は非常に小さいけれど、とにかく空ではない。 終

6.3. R の縁集合 Γ とは、 Γ が内点を含まぬ、或は同じ事であるが、

$$\Gamma \subset \partial\Gamma \text{ (}\Gamma\text{の境界),}$$

に依って特徴付けられる集合の事である、従って

$$\text{離散集合} \rightarrow \text{可算集合} \rightarrow \text{縁集合}$$

の関係にある。すると

例 6.2. R の或縁集合 Γ があって、 $E(R)$ は $R \setminus \Gamma$ の点を分離するが、 $E(R)$ が R の点を弱分離しないことがある。換言すれば、 $E(R)$ が R の点を弱分離することを、 $E(R)$ が $R \setminus \Gamma$ の点を分離することで特徴付ける時、 Γ を縁集合程大きくすることは一般には出来ない。

証明 上の主張を裏づける具体例を与えたら良い。先

ずリーマン面 R としては単位円板 $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ にとる:

$$R = \Delta_1.$$

R 上の函数 h を

$$h(z) = z^2$$

で定めたとき、 h と C の生成する環を $E(R)$ とする。その時 R の点 0 に於ける $F(R)$ の示数 $\nu(0)$ は 2 であって、 $F(R)$ の 0 に於ける底としては h に取ることが出来る、 (R, z) を 0 に於ける h -座標円板に取ることが出来る。故に

$$\nu(0) = 2 \neq 1$$

だから、補題 3.1 に依れば、 $F(R)$ は R の点を分離しない。勿論直接にもすぐ分かることである。

次に $t \in [0, 2\pi)$ に対して半径

$$L_t = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| < 1, \arg z = t\}$$

を考える。 X を $[0, \pi]$ 内の有理数全体の集合とし、 Y を $(\pi, 2\pi)$ 内の無理数全体の集合とする。その時

$$\Gamma = \bigcup_{t \in X \cup Y} L_t$$

と置くと、 Γ は R の縁集合であることは明白である。単独の h 自身 $R \setminus \Gamma$ の点を分離するから、勿論 $E(R)$ は $R \setminus \Gamma$ の点を分離する。しかし上に見たように $E(R)$ は R の点を弱分離しない。 終

文 献

- [1] T. W. GAMELIN AND M. HAYASHI : *The algebra of bounded analytic functions on a Riemann surface*, J. Reine Angew. Math., **382** (1987), 49-73.
- [2] M. HAYASHI : *The maximal ideal space of the bounded analytic functions on a Riemann surface*, J. Math. Soc. Japan, **39** (1987), 337-344.
- [3] M. HAYASHI AND M. NAKAI : *Point separation by bounded analytic functions of a covering Riemann surface*, Pacific J. Math., **134** (1988), 261-273.
- [4] H. L. ROYDEN : *Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces*, Acta Math., **144** (1965), 113-142.
- [5] L. SARIO AND M. NAKAI : *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer, 1970.

本研究は一部分文部省科研費 (一般 C, 課題番号 01540120) の援助に依る。