Schrödinger 作用素の Green 函数

中　井　三　留

数学教室

(1988年 8 月25日　受理)

Green Functions for Schrödinger Operators

Mitsuru NAKAI

Department of Mathematics

(Received August 25, 1988)

Green fuctions for Schrödinger operators with measure potentials of Stummel-Schechter-Kato type are constructed and applied to resolve the continuity question for solutions of time independent Schrödinger equations corresponding to the above operators. Samples of various applications of the above Green functions are also appended.

Schrödinger 作用素$-\Delta+\mu$のポテンシャルμは函数ばかりでなく更に一般に Radon 測度とするものを考える。最近はこの様な一般化 Schrödinger 作用素のポテンシャル論を展開すると言う計画を研究種目に加えて考察している。特に大局理論，例えば Martin 境界の理論等，に興味があるが，先ず局所理論の整備から始めなければならぬので基本的な事柄を種々調べている。その内でも一番基礎的な作業は Green 函数の構成である。或意味で最も緩い制約と考えられる Stummel-Schechter-Kato 型の条件をμに課して$-\Delta+\mu$の Green 函数を構成し，特にその対角線挙動を明らかにする。その一応用として定状 Schrödinger 方程式$(-\Delta+\mu)u=0$の超函数解 u が$|\mu|$の Lebesgue 特異部分測度零を除いて連続なら全体で連続である事を示す。これは Aizenman-Simon の有名な定理の一般化であって，$-\Delta+\mu$に関する局所理論展開の中で大変有用な働きをする。紙数の制限で得て居る又は得られる筈の全ての結果をここに述べる事は出来ないので，本稿は別の形で発表する前段階の途中経過記録の積もりである。

1．基本調和核と Radon 測度．

我々の基礎空間は d 次元 Euclid 空間$\boldsymbol{R}^d$(d≧2)である．その上の Newton 核$N(x,y)$はd＝2 なら$\log|x-y|^{-1}$, d≧3 なら$|x-y|^{2-d}$で与えられる．定数κ_dをd＝2 なら2π, d≧3 なら$\sigma_d(d-2)$とする．但しσ_d(d≧3)は$\boldsymbol{R}^d$の単位球面の(d－1)次元面積である．その時$\boldsymbol{R}^d$の基本調和核$g(x,y)$を次式で与える：

$$g(x,y)=\frac{1}{\kappa_d}N(x,y).$$

$\boldsymbol{R}^d$の開集合Ωを固定しΩ上の Radon 測度μを考える。μはΩ上の Borel 測度の差として表わされるものである。μの Jordan 分解を$\mu=\mu^+-\mu^-$とする時$|\mu|=\mu^++\mu^-$はμの全変分測度である。$f\in L^1_{loc}(\Omega,\mu)$に対して$f\mu$は次の Radon 測度を表わす：

$$(f\mu)(X)=\int_X f(\xi)d\mu(\xi)$$

がΩの全てのBorel 集合 X で成り立つ。換言するとd$(f\mu)=fd\mu$と定める訳である。Hahn の分解は極分解$\mu=\phi|\mu|$の形にかける。ここに$|\phi|=\chi_E$(E の特性函数)で E はμの棲息域，即ち$\mu(X)=\mu(X\cap E)$がすべての X で成り立つ様な Borel 集合である。$m=m_d$を$\boldsymbol{R}^d$上の Lebesgue 測度とする。$\mu=\mu_a+\mu_s$を Radon 測度μの Lebesgue 分解とする。ここに$\mu_a=(d\mu/dm)m$はμの m 絶対連続部分，μ_sはμの m 特異部分である。$|\mu_a|=|\mu|_a$, $|\mu_s|=|\mu|_s$等が成り立つ。又 E をμ_sの棲息域とすると$\mu_s=\chi_E\mu$で$m(E)=0$である。

2．許容核と測度族$\mathscr{K}(\Omega)$．

Ωの部分領域 W がΩの**正則領域**であるとは、先ず W がΩ内相対コムパクト，即ち$\overline{W}$がコムパクトで$\overline{W}\subset\Omega$，であり、かつ$\partial W$の各点が調和 Dirichlet 問題(即ち$-\Delta$の Dirichlet 問題)に関して正則となることである。Ωの点wを中心とし半径$r>0$の球$B(w,r)=\{x\in\boldsymbol{R}^d:|x-w|<r\}$は$\overline{B}(w,r)=\{x\in\boldsymbol{R}^d:|x-w|\leqq r\}$が$\Omega$に含まれる限り$\Omega$の正則領域である。正則領域 W に対して

$\overline{W}$ 上の**許容核** k とは $\overline{W}\times\overline{W}\setminus\triangle(\partial W\times\partial W)$ から $(-\infty, \infty]$ への写像であって，写像 $k: W\times W\to(-\infty, \infty)$ は連続，$k\in C(W\times W\setminus\triangle(W\times W))$，かつ非負定数 A, B があって W×W 上 $|k|\leqq Ag+B$ となる，と言う三条件をみたすものの事であるとする，但し記号 $\triangle(Y\times Y)$ は積集合 Y×Y の対角線集合 $\{(y, y): y\in Y\}$ とする。許容核の典型例は基本調和核 g や定数核 1 である。又 k が W 上の許容核である必要十分条件は $\hat{k}(x,y)=k(y,x)$ で定める k の共役核 $\hat{k}$（又は $|k|(x, y)=|k(x, y)|$ で定める絶対値核 $|k|$）が許容核となる事であることは言う迄ない。Ω上の Radon 測度 μ と $w\in\Omega$ に対して w を含む正則領域 W と $\overline{W}$ 上の許容核 k に対し μ の w に於ける一様 k 密度 $\gamma(\mu:k, w)$ を

$$\gamma(\mu:k, w)=\lim_{r\downarrow 0}\left[\sup_{x\in B(w,r)}\int_{B(w, r)}|k(x, \xi)|\,d|\mu|(\xi)\right]$$

で定める。右辺の極限を取る前のものを $\gamma_r(\mu:k, w)$ と記すと便利である。すべての $w\in\Omega$ に対して $\gamma(\mu:g, w)=0$ となる様なΩ上の Radon 測度 μ の全体を

$$\mathscr{K}(\Omega)$$

と記す。$m\in\mathscr{K}(\Omega)$ である。$\boldsymbol{R}^{d-1}$ を $\boldsymbol{R}^d$ に埋め込み supp $m_{d-1}=\boldsymbol{R}^{d-1}$ として m_{d-1} を $\boldsymbol{R}^d$ で考えると $m_{d-1}\in\mathscr{K}(\Omega)$ である。勿論これは m 特異なものの例である。$fm\in\mathscr{K}(\Omega)$ となる様な可測函数 f の全体を K(Ω) と記すとき，K(Ω) は Stummel [10], Schechter [8], Kato [6] 等により考えられた族と密接に関連することが解かる（Simon [9]）ので，以降 $\mathscr{K}(\Omega)$ を Stummel-Scheter-kato 型の測度の空間と呼ぶと良いと思う。$\mu\in\mathscr{K}(\Omega)$ の時 $\gamma_r(\mu:1, w)=o(\gamma_r(\mu:g, w))\ (r\downarrow 0)$ である事は直ちに分かる。よって $\mu\in\mathscr{K}(\Omega)$ なら全ての $w\in\Omega$ につき $\mu(\{w\})=0$ となる。$\mu\in\mathscr{K}(\Omega)$，$|\mu|\in\mathscr{K}(\Omega)$，$\mu^{\pm}\in\mathscr{K}(\Omega)$ は互いに同等である。

3．核ポテンシャルの連続性.

Ωの正則領域 W と W 上の許容核 k を固定する。W 上の Radon 測度 ν の k ポテンシャル $k\nu$ を $x\in W$ に対して意味のある限り次式で定義する:

$$k\nu(x)=\int_W k(x, \xi)\,d\nu(\xi).$$

補題1． $\nu\in\mathscr{K}(\Omega)$ で $f\in L^1(W, |\nu|)$ とする。$\overline{W}$ の 1 点 w の近傍 U をとるとき U∩W で f が $|\nu|$ に関して本質的に有界とすると $k(f\nu)$ は $U\cap\overline{W}$ の各点で定義されて，w で連続である。特に f が $w\in\overline{W}$ で連続なら $k(f\nu)$ は w で連続である。

証明. $K=|\nu|-\text{ess. }\sup_{U\cap W}|f|<\infty$ である。任意の $y\in U\cap\overline{W}$ に対し $r_0>0$ を $B(y, r_0)\subset U$ となる様にとり $0<r<r_0$ とする。$x\in B(y, r)\cap W$ に対して $|k|\leqq Ag+B$ なので

$$\begin{aligned}\int_{W\cap B(y, r)}|k(x, \xi)f(\xi)|\,d|\nu|(\xi) &\leqq K\int_{W\cap B(y, r)}|k(x, \xi)|\,d|\nu|(\xi)\\ &\leqq K\,[A\gamma_r(\nu:g, y)+B\gamma_r(\nu:1, y)]\\ &=O(\gamma_r(\nu:g, y))\ (r\downarrow 0)\end{aligned}$$

となる。よって任意の正数 ε に対して或 $r\in(0, r_0)$ が定まって，

(3．1) $\displaystyle\int_{W\cap B(y, r)}|k(x, \xi)f(\xi)|\,d|\nu|(\xi)<\varepsilon/2\quad(x\in W\cap B(y, r))$

となる。$k(f\nu)(y)$ を定める積分を $W\setminus B(y, r)$ 上の積分 I と $W\cap B(y, r)$ 上の積分 II に分けて考える。$k(y, \cdot)$ は $W\setminus B(y, r)$ 上有界で $f\in L^1(W, |\nu|)$ だから I の積分は有限である。II の積分は（3．1）により有限なので $k(f\nu)(y)$ が定義出来る。以下上の y として特に w にとる。$x\in W\cap B(w, r)$ のときに差 $|k(f\nu)(x)-k(f\nu)(w)|$ は

$$\int_{W\setminus B(w, r)}|k(x, \xi)-k(w, \xi)|\,|f(\xi)|\,d|\nu|(\xi),$$
$$\int_{W\cap B(w, r)}|k(w, \xi)f(\xi)|\,d|\nu|(\xi)$$
$$\int_{W\cap B(w, r)}|k(w, \xi)f(\xi)|\,d|\nu|(\xi)$$

の三項の和によりおさえられる。第1項は $x\to w$ のとき 0 に近づく事が Lebesgue の収束定理によりわかる。第2及び第3項は（3．1）により夫々 $\varepsilon/2$ でおさえられる。よって $x\in W\cap B(w, r)$ の時 $\limsup\{|k(f\nu)(x)-k(f\nu)(w)|: x\to w\}\leqq\varepsilon$ となり，これから $\varepsilon\downarrow 0$ として $k(f\nu)$ の w に於ける連続性が示される。 □

補題2． $\mu\in\mathscr{K}(\Omega)$ で $f\in L^1(w, |\mu|)$ ならば $k(f\nu)\in L^1(W, |\mu|+m)$ であって次の不等式が成り立つ：

(3．2) $\|k(f\mu)\|_{L^1(W, |\mu|+m)}\leqq\left[\max_W|\hat{k}|(|\mu|+m)\right]\cdot\|f\|_{L^1(W, |\mu|)}.$

証明. 簡単の為 $\nu=|\mu|+m$ と置くと $\nu\in\mathscr{K}(\Omega)$ である。補題1から $|k|\nu=|k|(|\mu|+m)\in C(W)$ である。Fubini の定理により

$$\begin{aligned}&\int_W\left|\int_W k(x, \xi)f(\xi)\,d\mu(\xi)\right|d\nu(\xi)\\ \leqq&\int_W\left[\int_W|k(x, \xi)f(\xi)|\,d|\mu|(\xi)\right]d\nu(\xi)\\ =&\int_W\left[\int_W|k(x, \xi)|\,d\nu(\xi)\right]|f(\xi)|\,d|\mu|(\xi)\\ =&\int_W|k|(\xi)\,|f(\xi)|\,d|\mu|(\xi)\\ \leqq&\left[\max_W|k|\nu\right]\cdot\int_W|f(\xi)|\,d|\mu|(\xi).\end{aligned}$$ □

補題3． [$\mathscr{K}(\Omega)$ の特徴付]．Ω上の Radon 測度 μ が $\mathscr{K}(\Omega)$ に属する為の必要十分条件はΩの各正則領域 W に対して $g|\mu|_W\in C(\boldsymbol{R}^d)$ となることである。但し $|\mu|_W$ は $|\mu|$ の W への制限とする。

証明. $\mu\in\mathscr{K}(\Omega)$ とすると g は $\overline{W}$ 上の許容核だから補題1により $g|\mu|_W\in C(\overline{W})$ である。よって Newton ポテンシャルに対する連続性原理（[5]，[4] 等参照）により $g|\mu|_W\in C(\boldsymbol{R}^d)$ となる。次に逆を示す為に $w\in\Omega$ を任意に取る。$w\in W$ となるΩの正則領域を一つ定め $\overline{B}(w, r_0)\subset W$ となる $r_0>0$ を固定する。各 $r\in(0, r_0)$ に対し $V_r=B(w, r)$ とおくとき

$$g|\mu|_W=g|\mu|_{V_r}+g|\mu|_{W\setminus V_r}$$

の右辺の各項は夫々 $\boldsymbol{R}^d$ 上下半連続でその和 $g|\mu|_W$ が

$\boldsymbol{R}^d$上連続だから，右辺の各項は連続となり，特に $g|\mu|_{V_r}\in C(\boldsymbol{R}^d)$である。所で$V_r$の特性函数 χ_{V_r}を使うと

$$g|\mu|_{V_r}(w)=\int_W g(w,\ \xi)\chi_{V_r}(\xi)d|\mu|(\xi)$$

と書け，$g(w,\ \cdot)\chi_{V_r}\downarrow g(w,\ \cdot)\chi_{\{w\}}$だから Lebesgue の収束定理により

$g|\mu|_{V_r}(w)\downarrow\int_W g(w,\ \xi)\chi_{\{w\}}(\xi)d|\mu|(\xi)=\infty\cdot|\mu|(\{w\})$ $(r\downarrow 0)$

となり，これから $|\mu|(\{w\})=0$ がわかる．よって任意の$x\in W$ に対しても上と同様にして $r\downarrow 0$ の時

$g|\mu|_{V_r}(x)=\int_W g(x,\ \xi)X_{V_r}(\xi)d|\mu|(\xi)\downarrow g(x,\ \xi)\cdot|\mu|(\{w\})=0$

となる。よって Dini の定理により W 上$\{g|\mu|_{V_r}\}_{r\downarrow 0}$は一様に零に収束するので特に

$$\sup_{V_r} g|\mu|_{V_r}\leqq\sup_W g|\mu|_{V_r}\downarrow 0\ (r\downarrow 0)$$

となり，これは$\gamma(\mu: g,\ w)=0$ を意味するから $w\in\Omega$ の任意性により$\mu\in\mathscr{K}(\Omega)$となる。　□

4．領域量 a(W)． これからは $\boldsymbol{R}^d$の開集合Ωと Radon 測度$\mu\in\mathscr{K}(\Omega)$を固定する。$\Omega$の正則領域 W を取る。各$y\in W$ に対し y 中心で W を含む最小の球を $V(W,\ y)$ と記す:

$$V(W,\ y)=B(y,\ \max\{|\eta-y|:\eta\in\partial W\}).$$

W に対して量 $a(W)=a(W:d,\Omega,\mu)$を定める。先ず $d=2$ の時はある $y\in W$ に対して $\overline{V(W,\ y)}$の半径が 1/2 より大であるか又はΩに含まれない様なものがあるとき $a(W)=\infty$とする。$d\geqq3$のときは単にある $y\in W$ に対して $\overline{V(W,\ y)}$がΩに含まれない様なものがある時 $a(W)=\infty$とする。それ以外の時は

$$a(W)=2c_d\sup_{y\in W}\left[\sup_{x\in V(w,y)}\int_{V(W,\ y)}g(x,\xi)d|\mu|(\xi)\right]$$

と定める。ここで c_dは次元 d に関係する定数で $d=2$ なら $c_d=2$，$d\geqq3$ なら $c_d=2^{d-2}$とする。例えば $w\in\Omega$を任意に固定するとき $W_\rho=B(w,\ \rho)$ $(0<\rho<\min(1/6,\ dis(w,\ \partial W)/3))$を考える。$W_\rho$は$\Omega$の正則領域であり各$y\in W_\rho$に対し $V(W_\rho,\ y)\subset B(w,\ 3\rho)$だから $a(W_\rho)\leqq 2c_d\gamma_{3\rho}(\mu: g,\ w)$により $a(W_\rho)\downarrow 0$ $(\rho\downarrow 0)$となる。よって各$w\in\Omega$に対して w を含む正則領域 W を十分小さくとれば，即ち $W\subset W_\rho$でρが十分小さくなっておれば，a(W)はいくらでも小さく出来る。

5．作用素 T. Ωの正則領域 W 上の $y\in W$ に極を持つ調和 Green 函数を$G(\cdot,y)=G^W(\cdot,y)$と記す。$G(\cdot,\cdot)$は $\overline{W}$ 上の許容核であって更に，$W\times W$ 上 $G(\cdot,\ \cdot)>0$，$G(\cdot,\ \cdot)$は $W\times W$ 上対称: $G(x,\ y)=G(y,\ x)$，各 $y\in W$ について $G(\cdot,\ y)|\partial W=0$，W の任意のコムパクト集合 K に対して $K\times K$ 上 $G(x,\ y)=g(x,\ y)+O(1)$，W 上の$|\omega|(W)<\infty$となる任意の Radon 測度ωに対して超函数の意味で$-\triangle G\omega=\omega$，の諸性質を持つ，積分作用素 $T=T^W=T_\mu^W$を各 $f\in L^1(W,|\mu|+m)$に対して

$$Tf=\int_W G(\cdot,\xi)f(\xi)d\mu(\xi)$$

によって定義すると，補題 1，2 と G の性質から直ちに次の事が言える:

補題 4． $T:L^1(W,|\mu|+m)\to L^1(W,|\mu|+m)$は有界線型作用素で，W 上 f の連続点に於いて Tf は連続となる。更に W 上超函数の意味で$-\triangle Tf=f\mu$となる。

6．μ－Green 函数の構成． 以下 $a(W)<1$となるものと仮定する。$y\in W$ を任意に固定する時 $G(\cdot,\ y)\in L^1(W,|\mu|+m)\cap C(W\setminus\{y\})$であるから補題 4 によれば $TG(\cdot,\ y)\in L^1(W,\ |\mu|+m)\cap C(W\setminus\{y\})$ で $TG(\cdot,\ y)|\partial W=0$ となる。以下帰納的に

$$(6.\ 1)\quad\begin{cases}T^nG(\cdot,y)\in L^1(W,|\mu|+m)\cap C(W\setminus\{y\})\\ \qquad\qquad\qquad\qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)\\ T^nG(\cdot,\ y)|\partial W=0\end{cases}$$

となることが分かる。但し $T^0=I$ は恒等作用素とする。そこで $y\in W$ を極とする W 上の **μ-Green 函数** $G_\mu(\cdot,\ y)=G_\mu^W(\cdot,\ y)$を $W\setminus\{y\}$ 上次の C. Neumann 型級数で定義する:

$$(6.\ 2)\qquad G_\mu^W(\cdot,\ y)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(T_\mu^W\right)^n G^W(\cdot,\ y).$$

補題 5． $G_\mu^W(\cdot,\ y)$を定める（6．2）の右辺の級数は $W\setminus\{y\}$ 上広義一様収束し

$$(6.\ 3)\quad\begin{cases}G_\mu^W(\cdot,y)\in L^1(W,|\mu|+m)\cap C(\overline{W}\setminus\{y\})\\ G_\mu^W(\cdot,\ y)|\partial W=0\end{cases}$$

となり，$W\setminus\{y\}$ 上次の基本評価式が成り立つ:

$$(6.\ 4)\qquad\left|G_\mu^W(\cdot,y)-G^W(\cdot,y)\right|\leqq\frac{a(W)}{1-a(W)}g(\cdot,y).$$

証明の計画. $y\in W$ に対して $V(W,y)=V$ と略記する。証明の手段としての補助積分作用素

$$\tau f=\int_V g(\cdot,\ \xi)f(\xi)d|\mu|(\xi)$$

を考える。$W\subset V$ でありかつ $d\geqq3$ なら自明に，又 $d=2$ なら V の半径が 1/2 以下であることにより，$W\times W$ 上 $G^W(\cdot,\ \cdot)\leqq g(\cdot,\ \cdot)$であるから,

$|(-1)^n(T_\mu^W)^nG^W(\cdot,\ y)|\leqq\tau^ng(\cdot,\ y)$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$

である。よって正函数項級数$\Sigma_{n=1}^{\infty}\tau^ng(\cdot,\ y)$は $G_\mu^W(\cdot,\ y)-G^W(\cdot,\ y)=\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n(T_\mu^W)^nG^W(\cdot,\ y)$ の優級数である。そこで次の主張が示されたら，（6．3）により（6．4）を使って補題 5 が従う:

主張： $\Sigma_{n=1}^{\infty}\tau^ng(\cdot,y)$は$\overline{W}\setminus\{y\}$ 上広義一様収束し，その和は(6,4)の右辺でおさえられる。

7．主張の証明. 先ず$x\in V$ を任意にとるとき

$$(7.\ 1)\quad\begin{aligned}g(x,\ \xi)&\leqq c_dg(x,\ y)\ (\xi\in B(y,|x-y|/2))\\ g(\xi,\ y)&\leqq c_dg(x,\ y)\ (\xi\in B(y,|x-y|/2))\end{aligned}$$

となる事を示す。$x=y$ なら右辺∞で自明なので $x\neq y$ として示す。先ず $d=2$ のとき$\xi\in B(y,|x-y|/2)$ならば

$$\kappa_2 g(x,\ \xi)=\log|x-\xi|^{-1}$$
$\leqq \log\ [|x-y|-|y-\xi|]^{-1} \leqq \log|x-y|^{-1}+\log 2$
であり，$\xi \notin B(y,\ |x-y|/2)$ ならば
$\kappa_2 g(\xi,\ y)=\log|\xi-y|^{-1} \leqq \log|x-y|^{-1}+\log 2$
であるから，V の半径が 1/2 以下であることにより
$$\kappa_2 g(x,\ y)=\log|x-y|^{-1} \geqq \log\ 2$$
により辺々割って(7．1)が $c_2=2$ に対して成り立つ事がわかる。$d \geqq 3$ の時 $\xi \in B(y,\ |x-y|/2)$ ならば
$$\kappa_d g(x,\ \xi)=|x-\xi|^{2-d}$$
$\leqq [\,|x-y|-|y-\xi|\,]^{2-d} \leqq 2^{d-2}\,|x-y|^{2-d}$
であり，$\xi \notin B(y,\ |x-y|/2)$ ならば
$$\kappa_d g(\xi,\ y)=|\xi-y|^{2-d} \leqq 2^{d-2}\,|x-y|^{2-d}$$
であり $\kappa_d g(x,\ y)=|x-y|^{2-d}$ であるからこれで辺々割ることにより(7．1)が $c_d=2^{d-2}$ に対して成立することがわかる。さて次の段階に進む．$(\tau g(\cdot,\ y))(x)$ を定める積分を $U=B(y,\ |x-y|/2)$ 上の積分 I と V＼U 上の積分 II に分けて計算し(7．1)を使うと a(W)の定め方から
$$\begin{cases} \mathrm{I} \leqq c_d g(x,y) \int_U g(\xi,y)\, d|\mu|(\xi) \leqq 2^{-1} a(W) g(x,y) \\ \mathrm{II} \leqq c_d g(x,\ y) \int_{V \setminus U} g(x,\xi)\, d|\mu|(\xi) \leqq 2^{-1} a(W) \\ \quad \times g(x,\ y) \end{cases}$$
となるので，$x \in \overline{V}$ のとき，$(\tau g(\cdot,\ y))(x) \leqq a(W) g(x,\ y)$ となる．帰納的に考えて
$$\tau^n g(\cdot,\ y) \leqq a(W)^n g(\cdot,\ y) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$
となり $V \setminus \{y\}$ のコムパクト集合上 $g(\cdot,\ y)$ は有界だから
$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau^n g(\cdot,\ y) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a(W)^n g(\cdot,\ y) \leqq \frac{a(W)}{1-a(W)}\, g(\cdot,\ y)$$
となり収束は $V \setminus \{y\}$ 上広義一様である。よって 6 節の主張が示され補題 5 の証明も完結である。 □

8．μ－Green 函数の対称性．(6．2)の両辺に I＋T を施してみると $G^W_\mu(\cdot,\ y)$ は積分方程式 $(I+T)G^W_\mu(\cdot,\ y)=G^W(\cdot,\ y)$ をみたすことが分かる。つまり

(8．1) $G^W_\mu(x,\ y)+\int_W G^W(x,\ \xi) G^W_\mu(\xi,\ y)\, d\mu(\xi)$
$$=G^W(x,\ y)$$
が $x \in W \setminus \{y\}$ に対して成り立つ。或いは上を書き換えて，$x \in W \setminus \{y\}$ に対して

(8．2) $G^W_\mu(x,\ y)=G^W(x,\ y)-$
$$\int_W G^W(x,\ \xi) G^W_\mu(\xi,\ y)\, d\mu(\xi)$$
これらの積分方程式表示から $G^W_\mu(x,\ y)$ の色々の性質が導かれる。その内の一つとして先づ

補題 6． $G^W_\mu(\cdot,\cdot)$ は対称である，即ち W×W 上 $G^W_\mu(x,\ y)=G^W_\mu(y,\ x)$ となり，$(x,\ y) \in W \times W$ に対して次の等式が成り立つ:

(8．3) $G^W_\mu(x,\ y)=G^W(x,\ y)-$
$$\int_W G^W(x,\ \xi) G^W_\mu(y,\ \xi)\, d\mu(\xi),$$
(8．4) $G^W_\mu(x,\ y)=G^W(x,\ y)-$
$$\int_W G^W_\mu(x,\ \xi) G^W(y,\ \xi)\, d\mu(\xi).$$

証明　(8．2)の積分部分を $F^W_\mu(x,\ y)$ とする。$G^W(x,\ y)$ の対称性から $F^W_\mu(x,\ y)$ の対称性を言えば(8．2)により $G^W_\mu(x,\ y)$ の対称性が出る(Boukricha [2] の方法)。すると(8．2)から(8．3)が言え，x と y を入れ換えて G^W_μ, G^W の対称性を使って(8．4)が出る。故に $F^W_\mu(x,\ y)$ の対称性を示せばよい。$F^W_\mu(x,\ y)$ の被積分函数 $G^W(x,\ \xi)$ を $G^W(\xi,\ x)$ とみて，更に(8．1)を使って
$G^W(\xi,x)=G^W_\mu(\xi,x)+$
$$\int_W G^W(\xi,\ \eta) G^W_\mu(\eta,x)\, d\mu(\eta)$$
$$=G^W_\mu(\xi,x)+\int_W G^W(\eta,\ \xi) G^W_\mu(\eta,x)\, d\mu(\eta)$$
で置き換えて Fubini の定理を使うと
$$F^W_\mu(x,y)=\int_W G^W_\mu(\xi,x) G^W_\mu(\xi,y)\, d\mu(\xi)+$$
$\int_{W \times W} G^W(\eta,\xi) G^W_\mu(\eta,\ x) G^W_\mu(\xi,\ y)\, d(\mu \times \mu)(\eta,\xi)$
が出る。上の右辺の形は明らかに x, y に関して対称となっている。 □

9．μ－Green 函数の連続性． 前節の記号 F^W_μ を使っての G^W_μ の積分方程式表示 $G^W_\mu(x,y)=G^W(x,y)+F^W_\mu(x,\ y)$ の今一つの応用として $G^W_\mu(\cdot,\ \cdot)$ の連続性を導く:

補題 7． $G^W_\mu(\cdot,\ \cdot) \in C(\overline{W} \times \overline{W} \setminus \triangle(\overline{W} \times \overline{W}))$ であって更に $a(W)<1/2$ ならば各 $w \in W$ に対し

(9．1) $\lim_{x,\ y \to w} G^W_\mu(x,\ y)=\infty$

となり，$G^W_\mu: W \times W \to (-\infty,\ \infty]$ は連続写像となる。

証明．上の事は G^W については正しいので，$F^W_\mu(\cdot,\ \cdot) \in C(\overline{W} \times \overline{W} \setminus \triangle(\overline{W} \times \overline{W}))$ を示すと同じ事が $G^W_\mu(\cdot,\ \cdot)$ に対しても言える。そこで $(x_0,\ y_0) \in W \times W \setminus \triangle(W \times W)$ を任意に取る。正数 ϵ を任意に与える。W×W 上(6．4)により $|G^W_\mu(\eta,\xi)| \leqq Ag(\eta,\xi)$ となる正定数 A がある事に注意する。正数 r を十分小にとって $\overline{B}(y_0,\ r) \cap \overline{B}(x_0,\ r)=\phi$ とすると
$\alpha=\sup\{|G^W_\mu(y,\xi)| : (y,\xi) \in (B(y_0,\ r) \times B(x_0,\ r)) \cap (W \times W)\}<\infty$
$\beta=\sup\{G^W(x,\xi) : (x,\xi) \in (B(x_0,\ r) \times B(y_0,\ r)) \cap (W \times W)\}<\infty$
となるが必要なら更に正数 r を十分小にとって
$\int_{B(x_0,r) \cap W} G^W(x,\xi)\, d|\mu|(\xi)<\epsilon/4\alpha \quad (x \in B(x_0,\ r) \cap W)$
$\int_{B(y_0,\ r) \cap W} |G^W_\mu(y,\xi)|\, d|\mu|(\xi)<\epsilon/4\beta \quad (y \in B(y_0,\ r) \cap W)$
にも出来る。そこで $Y=(B(x_0,\ r) \cup B(Y_0,\ r)) \cap W$ と置くならば
$(x,\ y) \in (B(x_0,\ r) \times B(y_0,\ r)) \cap (W \times W)$ に対し

(9．2) $\left|\int_Y G^W(x,\xi) G^W_\mu(y,\xi)\, d\mu(\xi)\right| \leqq$
$$\int_Y G^W(x,\ \xi)\, |G^W_\mu(y,\xi)|\, d|\mu|(\xi)<\epsilon/2$$

となる。$(x, y)\in(B(x_0, r/2)\times B(y_0, r/2))\cap(W\times W)$に対して$W\setminus Y$上では$G^W(x, \cdot)G^W_\mu(y, \cdot)$は有界であって各$\xi\in W\setminus Y$に対して$(x, y)\to(x_0, y_0)$の時$G^W(x, \xi)G^W_\mu(y, \xi)\to G^W(x_0, \xi)G^W_\mu(y_0, \xi)$となるからLebesgueの収束定理により$0<\rho<r/2$となる適当な$\rho$に対して$(x, y)\in(B(x_0, \rho)\times B(y_0, \rho))\cap(W\times W)$なら

(9. 3)　$|\int_{W\setminus Y}G^W(x, \xi)G^W_\mu(y, \xi)d\mu(\xi)-\int_{W\setminus Y}G^W(x_0, \xi)G^W_\mu(y_0, \xi)d\mu(\xi)|<\varepsilon/2$

となる。以上(9. 2), (9. 3)により$(x, y)\in(B(x_0, \rho)\times B(y_0, \rho))\cap(W\times W)$ならば$|F^W_\mu(x, y)-F^W_\mu(x_0, y_0)|<\varepsilon$となる。次に$a(W)<1/2$として$w\in W$を任意にとる。$x, y$が$w$の十分近くにあると$G^W(x, y)=g(x, y)+O(1)$であるから，(6. 4)により$x\neq y$として

$$\frac{1-2a(W)}{1-a(W)}g(x,y)+O(1)\leqq G^W_\mu(x,y)\leqq\frac{1}{1-a(W)}g(x,y)+O(1)$$

となる。これより(9. 1)が示される。よって$g^W_\mu: W\times W\to(-\infty, \infty]$は連続写像である。□

10. 作用素S. Wは$a(W)<1/2$となるΩの正則領域とする。補題7及び(6. 4)から$G^W_\mu(\cdot, \cdot)$はW上の許容核である。ωをW上の$|\omega|(W)<\infty$となるRadon測度とし，$(I+T)G^W_\mu(\cdot, y)=G^W(\cdot, y)$の両辺をW上$d\omega(y)$で積分してFubiniの定理を使うと$(I+T)G^W_\mu\omega=G^W\omega$が得られる。この両辺に$-\Delta$を施して補題4と$-\Delta G^W\omega=\omega$を使えば，超函数の意味でW上

(10. 1)　$(-\Delta+\mu)G^W_\mu\omega=\omega$

が得られる。これはG^W_μの重要な特徴の一つである。さて積分作用素$S=S^W=S^W_\mu$を$f\in L^1(W, |\mu|+m)$に対して

$$Sf=-\int_W G^W_\mu(\cdot, \xi)f(\xi)d\mu(\xi)$$

によって定義すると，補題1，2と(10. 1)から次のことが直ちに言える:

補題8. $S: L^1(W, |\mu|+m)\to L^1(W, |\mu|+m)$は有界線型作用素で，W上$f$の連続点に於いて$Sf$は連続となる。更に超函数の意味で$(-\Delta+\mu)Sf=-f\mu$となる。

11. 主要定理. $L^1(W, |\mu|+m)$からそれ自身への有界線方作用素TとSを考えた。この両者の間にある次の関係式は大変重要で本論文の主要結果とする：

定理1. $a(W)<1/2$となるΩの正則領域Wと$\mu\in\mathscr{K}(\Omega)$に対して$L^1(W, |\mu|+m)$からそれ自身への作用素代数の意味で次式が成り立つ:

(11. 1)　$(I+T)(I+S)=(I+S)(I+T)=I$

証明. $f\in L^1(W, |\mu|+m)$を任意にとる。(8. 3), (8. 4)の両辺に$f(y)$をかけてW上$d\mu(y)$で積分してFubiniの定理を使うと夫々$-Sf(x)=Tf(x)+T(Sf)(x)$及び$-Sf(x)=Tf(x)+S(Tf)(x)$となる。よって$S+T+TS=O$及び$S+T+ST=O$が成り立つ，Oは零作用素である。両辺にIを加えると(11. 1)が出る。□

式(11. 1)の重要性は$(I+T)^{-1}$の$L^1(W, |\mu|+m)$の上での存在の主張もさることながら，そのI+Sとしての具体的表現が得られて居る点にある。以上の議論での$a(W)<1$とか或いは$a(W)<1/2$とかの制限は技術的のもので本質的な条件ではない。無論何等かの制約は必要であるが，それ等を追求する問題は大局理論に属する。G^W_μに関しても実際$W\times W$上$G^W_\mu(\cdot, \cdot)>0$も示されるが，その為には更に色々と議論をせねばならない。

12. 解の連続性. (11. 1)の応用は数多い。その一つとして次の事を示す。Ωは従前通り$\boldsymbol{R}^d$ $(d\geqq2)$の開集合として$\mathscr{K}(\Omega)$に入るRadon測度μをポテンシャルとする定状Schrödinger方程式

(12. 1)　$(-\Delta+\mu)u=0$

のuがΩ上の超函数解であるとは，$u\in L^1_{loc}(\Omega, |\mu|+m)$であって，すべてのテスト函数$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$に対して

$$-\int_\Omega u(\xi)\Delta\varphi(\xi)dm(\xi)+\int_\Omega u(\xi)\varphi(\xi)d\mu(\xi)=0$$

が成り立つ事である。$|\mu|_s$を$|\mu|$のmに関する特異部分であるとする。すると次の結果が得られる：

定理2. Ω上(12. 1)の超函数解uがΩ上$|\mu|_s$測度零の集合を除いて連続ならばuは自動的にΩ全体で連続となっている。

証明に先立って一，二の注意をのべる。$\mathscr{K}(\Omega)$の測度による1点の測度は零であったことから1点の$|\mu|_s$測度は零である。よって上の定理の系として「Ω上(12. 1)の超函数解uがΩの有限個の点を除いて，或いは更に一般にΩ内に集積点を持たぬ点集合を除いて，連続なら実はuはΩ全体で例外なしに連続である」事が分かる。この形で使う事が多いと思われる。又uがΩ上連続とは，勿論$u\in L^1_{loc}(\Omega, |\mu|+m)$の意味により，或$\tilde{u}\in C(\Omega)$があって$\Omega$上$(|\mu|+m)$殆ど到る所$u=\tilde{u}$となることである。さて特に$\mu$がm絶対連続のとき，即ち$\mu=fm\in\mathscr{K}(\Omega)$のとき，$|\mu|_s=0$であるから定理の仮定は自動的に満たされる故，この時はΩ上の(12. 1)の超函数解はすべてΩ全体で連続となることが言える訳である。これはAizenman-Simon [1] が確率論的手法で証明したものである(Chiarenza-Fabes-Galfalo [3] は非確率論的別証を与えている). 我々の(11. 1)を使う証明は適用範囲が広がっているにもかかわらず感激的に簡明単純である。

証明. Ωの任意の点の近傍でuが連続な事を言えばよい。その為Ωの任意の点wをとり更に$w\in W$で$a(W)<1/2$となる様なΩの正則領域Wを一つとり固定する。$u\in C(W)$を示せば良い。勿論$u\in L^1(W, |\mu|+m)$であり超函数の意味でW上$(-\Delta+\mu)u=0$である. よって$(I+T)u=h$置くと補題4により$h\in L^1(W, |\mu|+m)$であって更に超函数の意味で$-\Delta h=0$である事が直ちに分かる。よってWeylの補題によりW上の調和函数$\tilde{h}$,

従って勿論連続函数，があってW上m殆ど到る所$h=\tilde{h}$である。uがW上$|\mu|_s$殆ど到る所連続なので補題4により同じ所で$(I+T)u=h$も連続である。uの連続点xの近傍でm殆ど到る所$h=\tilde{h}$で$\tilde{h}$はxで連続故$h(x)=\tilde{h}(x)$となる。よってW上$|\mu|_s$殆ど到る所$h=\tilde{h}$でもある。或Borel集合の$(|\mu|+m)$測度零であることと$(|\mu|_s+m)$測度零であることは一致する。よってW上$(|\mu|+m)$殆ど到る所$h=\tilde{h}$なので，$h\in L^1(W,|\mu|+m)\cap C(W)$と考えてよい。すると補題8により$(I+S)h\in L^1(W,|\mu|+m)\cap C(W)$であることと(11. 1)により$u=(I+S)(I+T)u=(I+S)h\in C(W)$となる。 □

13. 突然の注意. $R^d(d\geqq 2)$の開集合Ωと$\mathscr{K}(\Omega)$のRadon測度μを固定し，Ωの領域Wを取って色々と議論して来た。1－11節で常にWはΩの正則領域と仮定したが，これは簡明さの為で本質的ではない。Wを単にΩの相対コムパクト領域とのみするとと∂W内に調和Dirichlet問題に関する非正則点が一般には現れる。∂W内の非正則点の全体をEと記そう。Kellogの定理として良く知られている様にEは容量零を持つポテンシャル論的には小さな集合である。$y\in W$に極を持つWの調和Green函数$G^W(\cdot,\ y)$に対し，$(\xi,\ \eta)\in\overline{W}\times\overline{W}$での値$G^W(\xi,\ \eta)$を$(x,\ y)\in W\times W$を$(\xi,\ \eta)$に近づけた時の$G^W(x,\ y)$の下極限として定義する時各$y\in W$に対して

$$(13.\ 1)\begin{cases} G^W(\cdot,\ y)\in C((\overline{W}\setminus\{y\})\setminus E) \\ G^W(\cdot,\ y)\mid(\partial W\setminus E)=0 \\ \limsup\{G^W(x,\ y):x\in W,\ x\to\xi\}<\infty \quad (\xi\in\partial W)\end{cases}$$

と言う境界挙動を持つ。この除外集合Eが煩さいので，1－11節でWを正則領域と仮定したのであって，仮りにEがあっても，いずれも自明である適当な改変を施せば，1－11節の所論はすべて成立する。例えば$a(W)<1$の時

$$(13.\ 2)\begin{cases} G^W_\mu(\cdot,\ y)\in C((\overline{W}\setminus\{y\})\setminus E) \\ G^W_\mu(\cdot,\ y)\mid(\partial W\setminus E)=0 \\ \limsup\{G^W_\mu(x,\ y):x\in W,\ x\to\xi\}<\infty \quad (\xi\in\partial W)\end{cases}$$

が各$y\in W$に対して成立する。作用素T，Sに関する所もWの境界に無関係な性質はそのまま成り立ち，境界に関する所ではEを除外すれば良い。特に$a(W)<1/2$の時の重要な関係(11. 1)は変更なしに成り立つ訳である。次節で$f\in L^1(W,|\mu|+m)$でfがW上有界ならばTfは$\overline{W}\setminus E$上有界連続であって$Tf\mid(\partial W\setminus E)=0$となる事を使う。実は$G^W_\mu(\cdot,\ \cdot)\geqq 0$である事等無視して12節迄は進行出来たが，これからはこの事を使わないと出来ない話題に入るので，これを示す為の最小値原理を導く為止むを得ず突然の注意を挿入したが，非正則なWも考えに入れるのはさし当たり次節のみである。

14. 最小値原理. Ωを$R^d(d\geqq 2)$の開集合で$\mu\in\mathscr{K}(\Omega)$とする。$\Omega$の開部分集合に於ける(12. 1)の連続な超函数解を簡単の為そこでの(12. 1)の解と言う。(11. 1)の応用として

最小値の原理：Rを$a(R)<1/2$となるΩの相対コムパクト領域としμをR上(12. 1)の解であって境界条件

$$(14.\ 1)\quad \liminf_{x\in R,\ x\to\xi} u(x)>0 \quad (\xi\in\partial R)$$

を満たすならばuはR上$u\geqq 0$である。

証明. ある$w\in R$で$u(w)<0$であるとして矛盾を導く。$\{x\in R:u(x)<0\}$のwを含む成分をWとする。勿論$a(W)<1/2$である。uはR上連続だから(14. 1)により$u\mid\partial W=0$となる。そこで作用素$T=T^W$と$S=S^W$を考える。$h=(I+T)u$と置く。uは$\overline{W}$上有界連続だからhも$\overline{W}\setminus E$上有界連続であって$h\mid(\partial W\setminus E)=0$となる。Eは$\partial W$の非正則点集合である。$-\triangle Tu=u\mu$を使えば超函数の意味で$-\triangle h=0$となり，Weylの補題から，hはW上調和である。さてW上の有界調和函数hが容量0の集合Eを除いて∂W上境界値0をもつからW上$h\equiv 0$でなければならぬ。すると(11. 1)により順次$u=(I+S)(I+T)u=(I+S)h=(I+S)0=0$でW上$u\equiv 0$となってu(w)<0に反する。 □

μ－Green函数の非負性：Wを$a(W)<1/2$となるΩの正則領域とするとW×W上$G^W_\mu(\cdot,\ \cdot)\geqq 0$である。

証明. 任意の$y\in W$に対してW上$G^W_\mu(\cdot,\ y)\geqq 0$を言えばよい。領域$R=W\setminus\{y\}$上$u=G^W_\mu(\cdot,\ y)$は(12. 1)の解であることに注意する。(9.1)を$G^W_\mu(\cdot,y)\mid\partial W=0$を考慮すればR上uは(14. 1)をみたすのでR上$u\geqq 0$となる。 □

最小値の原理における$a(R)<1/2$も上の$a(W)<1/2$も単に技術的のものである。更に$G^W_\mu(\cdot,\ \cdot)>0$も言えるが，これには例えば(12. 1)の正解に対するHarnackの不等式を導いておく必要がある。(9. 1)を利用すればHarnackの不等式は手間はかかるけれど容易に導ける。

15. 定理2の最善性. $a(W)<1/2$となるΩの正則領域Wを一つ固定する。W上の(12. 1)の超函数解uがW上連続となる為に，定理2では，$(\mathrm{supp}\,|\mu|_s)\cap W\neq\phi$である限りは，そこでのuの連続性を仮定せねばならなかった。これが実は本質的な仮定であることが次の結果からわかる:

命題1. W上の(12. 1)の超函数解uで$(\mathrm{supp}\,|\mu|_s)\cap W$の各点の近傍で本質的に有界でないものが常に存在する。従って$(\mathrm{supp}\,|\mu|_s)\cap W\neq\phi$ならばW上連続でない(12. 1)の超函数解uが常に存在する。

証明. $|\mu|_s=|\mu_s|$のW上の実質的な棲息域をEとす

る。即ち E は W の Borel 集合で W のすべての Borel 集合 X に対して$|\mu_s|(X)=|\mu|(X\cap E)$となるものとする。次に$\mu_s=\phi|\mu_s|$を$\mu_s$の W 上の極分解とする。即ち$\phi$は W 上の Borel 函数であって$|\phi|=\chi_E$となるものである。よって$|\mu_s|=\bar{\phi}\mu_s$でもある。任意の$w\in(\mathrm{supp}\,|\mu_s|)\cap W$を取る。数列$r_k\downarrow 0$に対して

$$A_k=[B(w,\ r_k)\setminus B(w,\ r_{k+1})]\cap E$$

とおく。$\mu\in\mathscr{K}(\Omega)$だから$|\mu_s|(\{w\})=0$であることによれば$\{r_k\}_1^\infty$を適当に取る事により$|\mu_s|(A_k)>0(k=1,\ 2,\ \cdots)$であって更に

$$\inf_{A_k}G^W_\mu(w,\ \cdot)>k \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

となる様に出来る。そこで$c_k=(|\mu_s|(A_k))^{-1}k^{-2}(k=1,\ 2,\ \cdots)$と置き W 上の Borel 函数

$$f=\sum_{k=1}^\infty c_k\chi_{A_k}\phi$$

を考える。上の形から$f=|f|\chi_E\phi$となる事に注意すると

$$\int_W|f|d|\mu|=\int_W|f|d|\mu_s|=\sum_{k=1}^\infty c_k|\mu_s|(A_k)=\Sigma_{k=1}^\infty k^{-2}<\infty$$

であって$m(E)=0$である事から$f\in L^1(W,|\mu|+m)$が分かる。さて

$$v=\int_W G^W_\mu(\cdot,\ \xi)f(\xi)d\mu(\xi)$$

を考える。$f\mu=|f|\chi_E\phi\mu=|f||\mu_s|$だから

$$v=\int_W G^W_\mu(\cdot,\xi)|f(\xi)|d|\mu_s|(\xi)=\sum_{k=1}^\infty c_k\int_{A_k}G^W_\mu(\cdot,\xi)d|\mu_s|(\xi)$$

であるので，v は正則度のポテンシャルであって W 上下半連続である。しかも

$$v(w)\geqq\sum_{k=1}^\infty c_k k|\mu_s|(A_k)=\sum_{k=1}^\infty k^{-1}=\infty$$

であるから次の関係式が示される:

(15.　1)　$\lim_{x\to w}v(x)=\infty.$

以上の準備的考察を済ませて，$(\mathrm{supp}\,|\mu_s|)\cap W$内で稠密である様なそこの点列$\{w_\nu\}_1^\infty$を取る。各$w_\nu$に対して上の準備で作った$f$と v を$f_\nu$，$v_\nu$を記し更めて

$$f=\sum_{\nu=1}^\infty 2^{-\nu}f_\nu$$

と置く，$f=\sum_{\nu=1}^\infty 2^{-\nu}|f_\nu|\chi_E\phi$であるから

$$\int_W|f|d|\mu|=\sum_{\nu=1}^\infty 2^{-\nu}\int_W|f_\nu|d|\mu_s|=\sum_{\nu=1}^\infty\left(2^{-\nu}\sum_{\nu=1}^\infty k^{-2}\right)<\infty$$

なので$f\in L^1(W,|\mu|+m)$である。$v=G^W_\mu(f\mu)$とおけば

$$\begin{aligned}v&=\int_W G^W_\mu(\cdot,\ \xi)f(\xi)d\mu(\xi)\\&=\int_W G^W_\mu(\cdot,\ \xi)\left(\sum_{\nu=1}^\infty 2^{-\nu}|f_\nu(\xi)|\right)\chi_E(\xi)\phi(\xi)d\mu(\xi)\\&=\int_W G^W_\mu(\cdot,\ \xi)\left(\sum_{\nu=1}^\infty 2^{-\nu}|f_\nu(\xi)|\right)d|\mu_s|(\xi)\\&=\sum_{\nu=1}^\infty 2^{-\nu}\int_W G^W_\mu(\cdot,\ \xi)|f_\nu(\xi)|d|\mu_s|(\xi)\\&=\sum_{\nu=1}^\infty 2^{-\nu}v_\nu\end{aligned}$$

となる。そこで任意のw_νに対し$\{x_n\}_1^\infty$を$x_n\to w_\nu$かつ$x_n\notin E$となる様に取れる。何故なら$m(E)=0$だからである。さて$u=(I+S)f$とすると(15.　1)から

$$u(x_n)=f(x_n)+Sf(x_n)=0+v(x_n)\to\infty\ (n\to\infty)$$

であるからw_νの任意の近傍で u は$(|\mu|+m)$本質的に非有界である。任意の$w\in(\mathrm{supp}\,|\mu_s|)\cap W$の任意近傍内には或$w_\nu$があるからそこでも u は$(|\mu|+m)$本質的に非有界である。さて任意のテスト函数$\varphi\in C_0^\infty(W)$に対し$m(E)=0$により

$$-\int_W f(\xi)\Delta\varphi(\xi)dm(\xi)=-\int_E f(\xi)\Delta\varphi(\xi)dm(\xi)=0$$

だから超函数の意味で$-\Delta f=0$である。故に補題8から

$$(-\Delta+\mu)u=(-\Delta+\mu)f+(-\Delta+\mu)Sf=f\mu-f\mu=0$$

となり u は W 上(12.　1)の超函数解である。　□

16. μ－Dirichlet 問題とμ－正則領域. Ωの開集合の上での(12.　1)の解(連続超函数解)の事をそこでの**μ－解**と呼ぶことにする。Ωの部分領域 R 上のμ－解の全体を$\mathscr{H}_\mu(R)$と記そう。特に$\mathscr{H}_0(R)$，即ち R 上の調和函数全体，は通常 H(R) と記す。更に R はΩ内相対コムパクトとする。各$f\in C(\partial R)$に対して常に次の様な u があるとする: $u\in C(\bar{R})\cap\mathscr{H}_\mu(R)$であって$u|\partial R=f$となるものが唯一つ定まり，かつ$\partial R$上$f\geqq 0$ならば R 上$u\geqq 0$となるとする。この時 R は**$\mu$－正則領域**であると言い上の u を$\mu^R_f$と記して，R 上の境界値$f$の$\mu$－Dirichlet 問題の解であると言う。特に$0^R_f$は通常$H^R_f$とかかれる。この時各$x\in R$に対し$f\to\mu^R_f(x)$は$C(\partial R)$上の正値線型汎函数であるから

$$\mu^R_f(x)=\int_{\partial R}f(\xi)d\omega^R_\mu(\xi,\ x)\quad(f\in C(\partial R))$$

となる∂R上の正測度$\omega^R_\mu(\cdot,\ x)$が定まる。これを R 上xに関する**μ－解測度**と呼ぶ事にしよう。0－解測度は通常調和測度と呼ぶ。さて W をΩの正則領域で$a(W)<1/2$とする。作用素$T=T^W$及び$S=S^W$を考えよう。補題4と8によれば，T と S を$C(\bar{W})$に制限した時には$C(\bar{W})$から$C(\bar{W})$への線型作用素であり，各$p\in C(\bar{W})$に対し$Tp|\partial W=0$，$Sp|\partial W=0$である。更に(11.　1)によれば，$u,\ h\in C(\bar{W})$に対して$(I+T)u=h$と$(I+S)h=u$は同等であり，再び補題の4と8によれば，$u\in\mathscr{H}_\mu(\bar{W})$と$h\in H(\bar{W})$とは同等である。よって$f\in C(\partial W)$に対して$u=(I+S)H^W_f$と置けば，u は$\mu$－Dirichlet 問題の解$\mu^W_f$であって，更に$a(W)<1/2$だあるから最小値の原理が有効であって$\partial W$の上で$f\geqq 0$ならば W の上でも$\mu^W_f\geqq 0$となる事が言える。つまり$a(W)<1/2$となる正則領域 W は$\mu$－正則領域である事が分かる。

17. μ－Green 函数の特徴付. R をΩのμ－正則領域とする。もし R 上に与えられた$y\in R$に対して次の三条件を満たす様な函数$G^R_\mu(\cdot,\ y)$が存在すれば，これを R 上のyに極を持つ**μ－Green 函数**と言い，その時 R は**双曲的**であると言う事にする:

$$(17.\ 1)\qquad \begin{cases} G^R_\mu(\cdot,\ y)\in C(\overline{R}\setminus\{y\}) \\ (-\triangle+\mu)G^R_\mu(\cdot,\ y)=\delta_y \\ G^R_\mu(\cdot,\ y)\mid\partial R=0. \end{cases}$$

ここにδ_yはyに台を持つDirac測度とする。ここで上の二番目の式は無論超函数の意味で$G^R_\mu\in L^1_{loc}(R,|\mu|+m)$は勿論仮定されている。一番目と合わせると$G^R_\mu\in L^1(R,|\mu|+m)$が言える。最初にこの様な$\tilde{G}^R_\mu$は存在するとしても唯一つである事を示す。もし$\tilde{G}^R_\mu$も同じ性質を持つならば，$u=G^R_\mu(\cdot,\ y)-\tilde{G}^R_\mu(\cdot,\ y)$と置くと，$u\in L^1(R,|\mu|+m)$であって，W上$(-\triangle+\mu)u=0$, $u\in C(R\setminus\{y\})$，$u|\partial W=0$の諸条件が満たされる。所でuはR上$\{y\}$を除いて連続であり，$|\mu_s|(\{y\})=0$だから結局uはR上$|\mu_s|$測度零を除いて連続な$(-\triangle+\mu)u=0$の超函数であるから，定理2によって，R全体で連続となる。即ちuはR上のμ一解であり∂R上境界値0を持つから，Rがμ一正則なことから$u=\mu^R_0=0$が結論される。さてWを$a(W)<1/2$となるΩの正則領域とすると，これはμ一正則であり，更に我々はG^W_μを具体的に構成したが，補題の5と7や(10. 1)等によれば，これが上の三条件を満たす事が分かる。よってG^W_μは上の意味での唯一つのμ一Green函数でありWは双曲的となる。この一意性の応用として次の局所化は有用である。Rを双曲的なμ一正則領域とし，任意の$y\in R$をとる。$y\in W\subset R$, $a(W)<1/2$となる正則領域Wを任意に取る時，W上で

$$(17.\ 2)\qquad G^R_\mu(\cdot,\ y)=G^W_\mu(\cdot,\ y)+\mu^{W}_{G^R_\mu(\cdot,\ y)}$$

が成立する。つまり対角線挙動に関する限り$G^R_\mu(\cdot,y)$のそれは小さな部分Wに於る$G^W_\mu(\cdot,\ y)$のそれと一致する。証明は単に$G^R_\mu(\cdot,\ y)-\mu^{W}_{G^R_\mu(\cdot,\ y)}$が$G^W_\mu(\cdot,\ y)$の満たすべき三条件を持つ事を確かめたらよい。さて$T=T^R$の性質を使えば

$$(I+T)G^R_\mu(\cdot,\ y)=G^R(\cdot,\ y)$$

となる事が分かる。従って補題6の証明と全く同様にして$G^R_\mu(\cdot,\ \cdot)$の$R\times R$上の対称性が分かる。しかし$R\times R\setminus\triangle(R\times R)$上の連続性等は直ちには分からないので抽象的進行には限界がある。

18. μーGreen函数の対角線挙動. RをΩのμ一正則双曲的領域とする。$\lim_{x\to y}G^R_\mu(x,\ y)=\infty$は一般にポテンシャル核に要求したい便利な性質であって，Rが$a(W)<1/2$となる正則領域Wに等しい場合には正しい事を9節で見たがしかし$a(W)<1$の場合さえ直ちには分からなかった。しかし実際には(17. 2)から一般にG^R_μがある限り常に成立する訳である。しかし$R\times R\setminus\triangle(R\times R)$上の連続性の問題があるので$a(W)<1$となる正則領域Wの場合に限定して(6. 4)を積極的に使った更に詳しい次の形を与える：

命題2. WをΩの$a(W)<1$となる正則領域であるとし，任意の$w\in W$を取る時，基本調和核gに対して，

$$(18.\ 1)\qquad \lim_{x\neq y,\ x,\ y\to w} G^W_\mu(x,\ y)/\ g(x,\ y)=1.$$

証明. 球$V=B(w,r)$の半経$r>0$を$a(V)<1/2$となる様小さく取って暫次固定する. $B(w,r/2)=V'$とする. $\partial V\times V$の上で$G^W_\mu(x,y)$は連続であるから(x,y)が$\partial V\times V'$を動く時$G^W_\mu(x,y)$は必要ならrを更に小さく取って正値であり有限な最大値Mを持つので，(17. 2)により$(x,y)\in V'\times V'$の時$0\leqq\mu^{V}_{G^W_\mu(\cdot,y)}(x)\leqq M$であることにより

$$G^V_\mu(x,\ y)\leqq G^W_\mu(x,\ y)\leqq G^V_\mu(x,\ y)+M$$

が得られる。これから$g(x,\ y)\to\infty\ (x\neq y,\ x,\ y\to w)$により

$$(18.\ 2)\qquad \liminf G^V_\mu(x,\ y)/g(x,\ y)\leqq\liminf G^W_\mu(x,\ y)/g(x,\ y)$$
$$\leqq\limsup G^W_\mu(x,\ y)/g(x,\ y)\leqq\limsup G^V_\mu(x,\ y)/g(x,y)$$

が得られる。但し各極限は$x\neq y,\ x,\ y\to w$に関するものである。$(x,\ y)\in V'\times V'$の時$G^V(x,\ y)=g(x,\ y)+O(1)$であるから，再び(6. 4)により$x\neq y$として

$$\frac{1-2a(V)}{1-a(V)}g(x,\ y)+O(1)\leqq G^V_\mu(x,\ y)$$
$$\leqq\frac{1}{1+a(V)}g(x,\ y)+O(1)$$

となる。この両辺を$g(x,\ y)$で割って$x,\ y\to w$とすることにより(18. 2)を使えば，各極限は(18. 2)と同じとして

$$(1-2a(V))/(1-a(V)=\liminf G^W_\mu(x,\ y)/g(x,\ y)$$
$$\leqq\limsup G^W_\mu(x,\ y)/g(x,\ y)\leqq 1/(1-a(V))$$

となる。V従ってrは任意故$r\downarrow 0$とすると$a(V)\downarrow 0$となり上式から(18. 1)が導かれる。

19. 連続性原理. 以下では$a(W)<1/2$となるΩの正則領域Wを固定してW上の正測度νのμーGreenポテンシャル$G^W_\mu\nu$の最も基本的な性質と思われる次のEvans-Vasilescu型の定理を示す:

連続性原理：Wを$a(W)<1/2$となるΩの正則領域とする。νをW上のコムパクトな台$K=\mathrm{supp}\,\nu$を持つ正測度とし$v=G^W_\mu\nu$とする。もし$v|K$が或る$\xi\in K$で連続ならばvはξで連続である。

証明. vはW上で下半連続である事に注意する。もし$v(\xi)=\infty$ならばvの下半連続性により上の結果は自明に成立するから$v(\xi)<\infty$と仮定してよい。KはW内コムパクトだから$K\times K$上$G^W(\cdot,\ \cdot)=g(\cdot,\ \cdot)+O(1)$である。よって(6. 4)を使えば正定数$A_i$, B_i $(i=1,\ 2)$が存在して

$$(19.\ 1)\qquad A_1g(x,\ y)-B_1\leqq G^W_\mu(x,\ y)\leqq A_2g(x,\ y)+B_2\ ((x,\ y)\in W\times K)$$

が成り立つ。最初にWからKの上への写像を定義する。各$x\in W$に対して$z_x\in K$はxに最も近いものとす

る：

$$|z_x-x|=\inf_{z\in K}|z-x|.$$

点 z_x は x により唯一つ定まる訳ではないが選択公理により $x\to z_x$ を一意写像として定める。$\xi\in K$ だから

$$|z_x-\xi|\le|z_x-x|+|x-\xi|\le2|x-\xi|$$

が全ての $x\in W$ に対して成り立つ。従って $x\to\xi$ ならば $z_x\to\xi$ である。任意の $y\in K$ に対して $|x-z_x|\le|x-y|$ だから

$$|z_x-y|\le|z_x-x|+|x-y|\le2|x-y|$$

である。従って d を空間 $\boldsymbol{R}^d$ の次元として

$$\begin{cases}\log|x-y|^{-1}\le\log|z_x-y|+\log2 & (d=2)\\ |x-y|^{2-d}\le2^{d-2}|z_x-y|^{2-d} & (d\ge3)\end{cases}$$

となる。換言すれば適当な正定数C，Dがあって

$$g(x,\ y)\le Cg(z_x,\ y)+D$$

がdに無関係に成立する訳である。よって(19. 1)と合わせて

$$G^W_\mu(x,\ y)\le MG^W_\mu(z_x,\ y)+N$$

が正定数 $M=A_1^{-1}A_2C$ 及び $N=A_1^{-1}B_1+A_2D$ をもって成り立つ。よって K に台をもつどんな正測度 σ を取っても，上の不等式を $d\sigma(y)$ で K 上積分する事により

(19. 2)　$G^W_\mu\sigma(x)\le MG^W_\mu\sigma(z_x)+N\sigma(K)$

が得られる。さて任意の $\varepsilon>0$ を与える。$G^W_\mu\nu(\xi)=v(\xi)<\infty$ を想起する。ξ を中心にしてWに含まれる球Bを取る。

$$\int_B G^W_\mu(\xi,\ y)d\nu(y)=\int_W G^W_\mu(\xi,\ y)\chi_B(y)d\nu(y)<v(\xi)$$

に於て被積分函数 $\downarrow\infty\chi_{\{\xi\}}$ 故 Lebesgue の収束定理によって積分 $\downarrow\infty\nu(\{\xi\})<v(\xi)<\infty$ である。よって $\nu(\{\xi\})=0$ で積分 $\downarrow0$ である。よってBを小さく取れば

$$\nu(B)\le\int_B G^W_\mu(\xi,\ y)d\nu(y)<\varepsilon$$

と出来る。$\nu'=\nu|B$，$\nu''=\nu|W\setminus B$ と置く。$G^W_\mu\nu''$ はB上，従って ξ に於いて連続である。所で $G^W_\mu\nu=G^W_\mu\nu'+G^W_\mu\nu''$ 故(19. 2)より

$$\begin{aligned}|G^W_\mu\nu(x)-G^W_\mu\nu(\xi)|&\le|G^W_\mu\nu''(x)-G^W_\mu\nu''(\xi)|\\&\quad+G^W_\mu\nu'(x)+G^W_\mu\nu'(\xi)\\&\le|G^W_\mu\nu''(x)-G^W_\mu\nu''(\xi)|+MG^W_\mu\nu'(z_x)+N\nu(K)\\&\quad+\varepsilon\\&\le|G^W_\mu\nu''(x)-G^W_\mu\nu''(\xi)|+MG^W_\mu\nu'(z_x)+(N+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

所で $G^W_\mu\nu=G^W_\mu\nu'+G^W_\mu\nu''$ に於て $(G^W_\mu\nu)|K$ は ξ で連続であり $G^W_\mu\nu''$ は無論 K に制限しても ξ で連続だから $(G^W_\mu\nu)|K$ は ξ で連続となる．$x\to\xi$ の時 $z_x\in K$ で $z_x\to\xi$ であるから

$$\lim_{x\to\xi}G^W_\mu\nu'(z_x)=G^W_\mu\nu'(\xi)<\varepsilon$$

である。だから x が ξ に十分近ければ

$$|G^W_\mu\nu(x)-G^W_\mu\nu(\xi)|\le|G^W_\mu\nu''(x)-G^W_\mu\nu''(\xi)|+(M+N+1)\varepsilon$$

となる。右辺第一項は $G^W_\mu\nu''$ の ξ での連続性により x を十分 ξ の近くに取る事によりいくらでも小さく出来るので ε の任意性により $G^W_\mu\nu$ は ξ で連続となる。　□

連続性原理の満たされる抽象核については常に成立することが知られている次の結果は有用であり我々の核 G^W_μ に適用出来る訳である:

ポテンシャルの下方連続近似補題：ν はW上の正測度で $G^W_\mu\nu\not\equiv\infty$ とする。その時Wの閉集合の増加列 $\{F_n\}$ で次の性質を満たすものが存在する：$G^W_\mu(\nu|F_n)\in C(W)$，$G^W_\mu(\nu|F_n)\uparrow G^W_\mu\nu$，$\nu(W\setminus F_n)\downarrow0$.

20. μ－優解. Dを $a(D)<1/2$ の Ω の領域とする。∂D 内の調和 Dirichlet 問題の非正則点集合 $E=E(\partial D)$ は空でなくとも良いとする。f を ∂D 上の Borel 函数で有界或いは更に一般に $H^D_f\in L^1(D,|\mu|+m)$ となるものとする時 $\mu^D_f=(I+S^D)H^D_f$ として μ^D_f の領域Dと境界函数 f 共に16節のものより一般的に出来る。$\xi\in\partial D\setminus E$ に於いて f が連続なら $\mu^D_f(x)\to f(\xi)$ $(x\in D,\ x\to\xi)$ となる事が H^D_f と S^D の性質から分かる。$f\in C(\partial D)^+$ なら $\mu^D_f\ge0$ を言う為に14節を次の様に一般化しておく：**最小値の原理**：Dで下方有界な μ－解uに対して或容量零の集合 $F\subset\partial D$ があって $x\in D$ が $\xi\in\partial D\setminus F$ に近づく時常に $\liminf u(x)\ge0$ ならばD上 $u\ge0$ となる。T^D，S^D を使って14節と本質的に同じ証明で出せる。16節同様測度 $\omega^D_\mu(\cdot,x)$ が定義出来る。さて $\int_{\partial D}fd\omega^D_\mu(\cdot,x)$ が何を表すかは興味ある問題である。上の μ^D_f が定義出来る時はそれと一致する。$-\Delta+\mu$ に対し未だ Harnack 諸原理が得られていない点に注意がいる。さて $a(R)<1/2$ となる Ω の領域を固定する。

定義1. vがR上の μ－優解とは：(i) vはR上 $-\infty<v\le\infty$ かつ $v\not\equiv\infty$，(ii) vはRで下半連続，(iii) R内相対コンパクトなすべての正則領域Dに対して

(20. 1)　$v(x)\ge\int_{\partial D}v(\xi)d\omega^D_\mu(\xi,\ x)$　$(x\in D)$.

R上の μ－優解全体を $\overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$ と記すと，$\overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$ は線型空間，$\mathscr{H}_\mu(R)\subset\overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$，$\overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$ のu，vに対し $u\cap v$ (即ち min(u，v)) $\in\overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$ 等の性質は直ちに分かる。最も大切なものは，**最小値の原理**：$u\in\overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$ とし $x\in R$ が $\xi\in\partial R$ に近づく時常に $\liminf u(x)\ge0$ ならばR上 $u\ge0$ となる，である。事実各自然数nに対しR内相対コンパクトな ∂D_n 上 $u\ge-1/n$ となる正則領域 D_n をとる。$D_n\uparrow R$ としてよい。すると D_n 上

$$u\ge(-1/n)\int_{\partial D_n}d\omega^{D_n}_\mu(\xi,\ \cdot)=(-1/n)(I+S^D)1$$

で右辺は $n\uparrow\infty$ の時0に近づき $u\ge0$ が出る。次の二例は応用上重要である。最初のものは Fubini の定理を $d\nu$ と $d\omega^R_\mu$ に適用し，更に第二のもの共々境界値の比較で分かる:

例1. ν をR上の正測度で $G^R_\mu\nu\not\equiv\infty$ なら $G^R_\mu\nu\in\overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$.

例2. U，Vを $\overline{U}\subset V$ となるRの正則領域の時 $u\in\mathscr{H}_\mu(V)^+$ に対して $R^V_Uu\in C(\overline{V})\cap\mathscr{H}(V\setminus U)$，$R^V_Uu|U=u$,

$R_U^V u \mid \partial V = 0$ となる $R_U^V u \in \overline{\mathscr{H}}_\mu(V)$.

21. 未完ながらの結び. 最終的には Gauss-Frostman 型の定理を出し Riesz 型の分解を導いて，それらと G_μ^W の対角線挙動等から Harnack 不等式へ到る所で局所理論の第一段階が終わる。ここ迄はいずれも検討済の所だがすべてを述べる紙数は無いのでその中でも極く初等的部類の次の結果を見本として述べる。球面 $\partial B(y, r)$ の $(d-1)$ 次元面積要素を ds とする。
$s(\partial B(0, 1)) = \sigma_d$ を想起する。平均作用素

$$L(u : y, r) = 1/(\sigma_d r^{d-1}) \int_{\partial B(y, r)} u(x)\,ds(x)$$

は Gauss の定理 $H_u^{B(y, r)}(y) = L(u : y, r)$ の故重要である。L での測度 $(1/\sigma_d r^{d-1})\,ds(x) = d\omega_0^{B(y, r)}(\cdot, y)$ を $d\omega_\mu^{B(y,r)}(\cdot, y)$ で置き換えた L_μ を使うと $\mu_\mu^{B(y,r)}(y) = L_\mu(u : y, r)$ が出る。$u \in \overline{\mathscr{H}}_0(R)$ に対しては $u(y) = \lim_{r\downarrow 0} L(u : y, r)$ が周知だが対応するものとして $u \in \overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$ に対して $u(y) = \lim_{r\downarrow 0} L_\mu(u : y, r)$ なら当然の結果でこれは正しいがあまり役に立たぬ。その意味で次の幾分以外な結果は興味がある。

補題9. $u \in \overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$ で u が或 $y \in R$ の近傍で有界ならば，$u(y) = \lim_{r\downarrow 0} L(u : y, r)$.

証明. $B(y, r) = V$ とかき $\overline{V}$ 上 u は有界とする。(20.1) により $u(y) \geqq \int_{\partial V} u\,d\omega_\mu^V(\cdot, y)$ の右辺は u が ∂V 上有界故 $\mu_u^V(y)$ に等しい。$\mu_u^V(y) = (I + S^V) H_u^V(y)$ であるが，$\mu \in \mathscr{K}(\Omega)$ である事により $S^V H_u^V(y) \to 0\ (r \to 0)$ となる。更に $H_u^V(y) = L(u : y, r)$ であるから，結局 $r\downarrow 0$ の時

$$u(y) \geqq \limsup L(u : y, r)$$

となる。u の下半連続性から $r\downarrow 0$ の時 $\liminf L(u : y, r) \geqq u(y)$ は当然である。 □

命題3. u_1, $u_2 \in \overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$ とする。R 上 m 殆ど到る所 $u_1 \leqq u_2$ が成り立つと実は R 全体で例外無しに $u_1 \leqq u_2$.

証明. $e = \mu_1^R$ と置くと $a(R) < 1/2$ により $\inf_R e > 0$ に注意する。正数 M をとり $u_i \cap Me \in \overline{\mathscr{H}}_\mu(R)$ を考える $(i = 1, 2)$. R 上 m 殆ど到る所 $u_1 \cap Me \leqq u_2 \cap Me$ となるから，任意の $y \in R$ に対し $\{r_n\} \downarrow 0$ であって $\partial B(y, r_n)$ 上面積零を除いて同じ不等式が成り立つ様なものがとれる。よって積分して

$$L(u_1 \cap Me : y, r_n) \leqq L(u_2 \cap Me : y, r_n)$$

となり補題9より $n \uparrow \infty$ として $u_1(y) \cap Me(y) \leqq u_2(y) \cap Me(y)$ が出る。$e(y) > 0$ だから $M \uparrow \infty$ として $u_1(y) \leqq u_2(y)$ が出る。 □

参 照 文 献

[1] M. Aizenmann and B. Simon : *Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operator*, Comm. Pure Appl. Math., **35** (1982), 209-271.

[2] A. Boukricha : *Das Picard-Prinzip und verwandte Fragen bei Störung von harmonischen Räumen*, Math. Ann., **239** (1979), 247-270.

[3] F. Chiarenza, E. Fabes and N. Garofalo : *Harnack's inequality for Schrödinger operators and the continuity of solutions*, Proc. Amer. Math. Soc., **98** (1986), 415-425.

[4] C. Constantinescu and A. Cornea : *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer, 1972.

[5] L. L. Helms : *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.

[6] T. Kato : *Schrödinger operators with singular potentials*, Israel J. Math., **13** (1972), 135-148.

[7] F. -Y. Maeda : *Dirichlet Integrals on Harmonic Spaces*, Lecture Notes in Math. **803**, Springer, 1980.

[8] M. Schechter : *Spectre of Partial Differential Operators*, North-Holland, 1971.

[9] B. Simon : *Schrödinger semigroups*, Bull. Amer Math. Soc., **7** (1982), 447-526.

[10] F. Stummel : *Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen*, Math. Ann., **132** (1956), 150-176.