C^1 級では不充分

中井三留
数学教室
（1987年8月24日受理）

Being of Class C^1 Is Not Enough

Mitsuru NAKAI
Department of Mathematics
(Received August 24, 1987)

There are various assertions in Mathematical Analysis valid under certain smoothness assumptions of functions involved. Three kinds of examples of such are given in this paper which seem to be true at the first sight but are in fact invalid under the mere assumption of being of class C^1. These superficially appear to be independent of each other but in reality these are interrelated implicitly by a common single principle.

関係する函数のある種の滑らかさの仮定の下に成立する様な主張は数学解析学に於て数多い。その内で滑めらかさを C^1級とすれば如何にも充分である様に見えて実は C^1級としただけでは不充分である様な三種の例について考える。境界値問題の境界位相条件，リーマンの写像函数，及びポアソン積分の各々に関連する所から一例づつ取ったものである。これらは表面上は無関係に見えるが実質では境界正則性と言う同一思想圏に属し底面では等角写像を介して互に関連している。ついでながら最後の例の所で述べられるポアソン積分の微分公式は独立の興味と応用があると思う。

初めに函数又は曲線の滑めらかさについての一般的用語の意味を定め関連基礎事項を述べる。n 実変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$の実数値函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を考える（本文では $n=1$ 又は 2）。偏導函数を考える時，点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の変化する範囲は n 次元空間 $\boldsymbol{R}^n$（$\boldsymbol{R}^1$は実数直線，$\boldsymbol{R}^2$ は複素平面 $\boldsymbol{C}$ と考える）の開集合 U に取る。変数 x_iでの偏微分を D_if と記す時

$$D_{i_1}D_{i_2}\cdots D_{i_k}f$$

を f の k 次偏導函数と言う。ここに $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ から k 個取った一つの重複順列であるので k 次偏導函数は n^k個ある。特に f 自身は0次の偏導函数と考える。f が C^k級であるとは f の k 次偏導函数が存在して連続なことである。k 次偏導函数が存在すると言う以上その前提として k 次迄のすべての偏導函数の存在は暗々裡に仮定されており，それらはすべて k 次偏導函数の連続性から自動的に連続となる。この様な事情にあるので初めから f の k 次迄のすべての偏導函数が存在してそれらがすべて連続な時 f は C^k級であると定義しても同じことになる。すべての整数 $k\geqq 0$ に対して f が C^k級である時 f を C^∞級と言う。U で C^n級の函数の全体を $C^n(U)$ と記す（$n=0, 1, \cdots, \infty$）。E を $\boldsymbol{R}^n$の任意集合とする時 E 上の函数 f がC^n級であるとは，$U_f \supset E$ となる開集合 U_f と U_f 上の C^n級の函数 F_fがあって E 上 $F_f=f$ となることであるとする。E 上の C^n級函数全体を $C^n(E)$ と記す。

複素平面 $\boldsymbol{C}$ 内の曲線 Λ が媒変数 t により二つの t の連続な実函数 $x(t)$ と $y(t)$により

$$z=z(t)=x(t)+iy(t) \quad (a\leqq t\leqq b)$$

と表される時これを曲線弧 Λ の媒変数表示と呼ぶ。$x(t)$，$y(t)$が共に C^n級のとき媒変数表示 $z(t)$は C^n級であると言いこの曲線弧 Λ は C^n級であると言う。又 Λ が少なく共 C^1級であって

$$z'(t)=x'(t)+iy'(t)\neq 0 \quad (a\leqq t\leqq b)$$

であるとき Λ は正則曲線弧であると言う。さて Λ が C^n級($n\geqq 1$)の正則曲線弧であるとその表示 $z=z(t)$から t を消去して局所的には Λ は C^n級陽函数 $y=y(x)$又は $x=x(y)$により表される。逆に C^n級陽函数 $y=y(x)$又は $x=x(y)$により表される曲線弧 Λ は C^n級正則である。特に $\boldsymbol{C}$ 内のジョルダン曲線 Γ はそのどの点 ς に対しても ς を内点に含む Γ の部分弧 Λ_ς で C^n級正則なものが取れる時 Γ 自身 C^n級正則であると言う。又ジョルダン曲線 Γ が，C^n級($n\geqq 1$)正則となる必要充分条件は，或る円環 $\{1-\varepsilon<|z|<1+\varepsilon\}$ $(0<\varepsilon<1)$から $\boldsymbol{C}$ 内への位相写像 $\mathrm{T}(z)$で Tが C^n級であり更に T のジャコビアンが零とならぬものがあって Γ は円周 $\{|z|=1\}$ の T による像となることである。

D を平面 C 内のジョルダン曲線 ∂D により囲まれたジョルダン領域であるとする。$f\in C^n(\bar{D})$又は $g\in C^n(\partial D)$は ∂D の滑めらかさとは無関係に定義出来るのであったけれど，∂D が充分滑めらかな時には次に述べる様な状況にある。∂D が C^k級($1\leqq k<\infty$)正則であるとする時，$f\in C^k(\bar{D})$となる為の必要充分条件は，$f\in C^k(D)$で f の k 次偏導函数が $\bar{D}$ 迄連続に拡張出来ることである。これを言い換えると，∂D が C^n級($1\leqq n\leqq\infty$)正則である時 $f\in C^n(\bar{D})$となる為の必要充分条件は，$f\in C^n(D)$で f の k 次($0\leqq k<n+1$)迄の偏導函数がすべて $\bar{D}$ 迄連続に拡張出来ることである。次に ∂D が C^n級($1\leqq n\leqq\infty$)正則で $\mathrm{T}(z)$を上に述べた様な ∂D の $\{|z|=1\}$ 上の表示であるとする時，$g\in C^n(\partial D)$である為の必要充分条件は $g\circ\mathrm{T}(e^{i\theta})$が θ の C^n級函数となることである。

1．調和峯点

1.1．境界等角性 平面 C 上のジョルダン領域 D に対してその閉包 $\bar{D}=D\cup\partial D$ (∂D は D の境界) の或る近傍で調和である様な函数 u (即ち $\bar{D}$ の或る近傍で C^2級でラプラス方程式 $\Delta u=0$ をみたす函数) の全体を $H(\bar{D})$と記す。D の境界の一点 ς が D に対する**調和峯点**であるとは，ς が $H(\bar{D})$に対する峯点となること，即ち次の様な $u\in H(\bar{D})$が存在することである：$u(\varsigma)=1$ かつ $\bar{D}\diagdown\{\varsigma\}$ 上 $u<1$。この様な u を $\bar{D}$ 上 ς における峯点函数と言う。数学の色々の分野に於て，特に函数環論に於て，各種の峯点が考えられているが，調和峯点なる概念は他で考えられては居ないと思う。最初に調和峯点の等角写像で果たす一つの役割について述べる。

等角写像論での一つの基本定理は，**リーマンの写像定理**：C と一致しない任意の単連結領域 D は単位円板 $\Delta=\{|z|<1\}$ に等角写像される (例えば [2] 参照)，である。単連結領域の典型例はジョルダン領域 D，即ちジョルダン曲線 (単純閉曲線) ∂D で囲まれた領域 D である。等角写像の境界対応についての一つの基本定理として (特殊化された) **カラテオドリーの定理**：ジョルダン領域 D から単位円板 Δ への等角写像は $\bar{D}$ から $\bar{\Delta}$ への位相写像に拡張される (例えば [2] 参照)，を述べておく。

さて単位円板 Δ からジョルダン領域 D への等角写像 f を考える。カラテオドリーの定理から f は $\bar{\Delta}$ から $\bar{D}$ への位相写像である。この事は f が $\bar{\Delta}$ へ f^{-1}が $\bar{D}$ へ連続的に拡張出来る事と同じである。$1\in\partial\Delta$ が $\varsigma=f(1)\in\partial D$ へ写されたとする。$f(z)$の複素導函数 $f'(z)$は Δ で定義されているが $\partial\Delta$ 迄は拡張出来るとはかぎらない。もし$f'(z)$が $z=1$ で境界値，$f'(1)$と記そう，を持つならば

$$f'(1)=\lim_{z\in\Delta,\ z\to 1} f'(z)=\lim_{z\in\Delta,\ z\to 1}\frac{f(z)-f(1)}{z-1}$$

となることがわかるので，$f'(1)\neq 0$ ならば f の $z=1$ に於ける等角性が出ることになる。次の結果は，いわゆる角微係数の基本定理であるワルシャワスキーの定理 ([3] 参照) からも導びかれるが，以下に述べる証明の初等的である点を強調したい。

定理1.1 f を単位円板Δからジョルダン領域 D への等角写像で $f(1)=\varsigma$ とし f' が境界値 $f'(1)$を持つとする。もし ς が D に対する調和峯点ならば$f'(1)\neq 0$ である，すなわち f は1でも等角である。

［証明］ $\bar{D}$ 上の ς に於ける峯点函数 u を使って函数 $v=1-u$ を作ると $v(\varsigma)=0$ かつ $\bar{D}\diagdown\{\varsigma\}$ 上 $v>0$ である。合成函数 $w=v\circ f$ は $\bar{\Delta}$ で連続で Δ で調和であって $w(1)=0$ かつ $\bar{\Delta}\diagdown\{1\}$ 上 $w>0$ である。特に $w(x)=v(f(x))$を区間 $[0,\ 1)$ 上の函数と考えて

$$w'(x)=\nabla v(f(x))\cdot(Re\, f'(x),\ Im\, f'(x))$$

となる。ここで∇v は v の勾配ベクトルである。v が $\bar{D}$ 上調和でかつ $f'(1)$が存在することにより，$w(x)$の左側微分係数 $w'(1)$が存在して

$$w'(1)=[\nabla v(f(x))]_{x=1}\cdot(Re\, f'(1),\ Im\, f'(1))$$

となることがわかる。従って $w'(1)\neq 0$ を示せば $f'(1)\neq 0$ が結論出来る事になる。

w をポアソン積分で表すと $x\in[0,\ 1)$ に対して

$$w(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-x^2}{1-2x\cos t+x^2}w(e^{it})\,dt$$

となる。$w(1)=0$ に注意して，更に $0<t<2\pi$ に対しては $w(e^{it})>0$ となる事を使うと

$$-\frac{w(x)-w(1)}{x-1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+x}{1-2x\cos t+x^2}\times w(e^{it})\,dt$$

$$\geqq\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}w(e^{it})\,dt>0$$

より$-w'(1)>0$ となって $w'(1)\neq 0$ が出る。［証明終り］

1.2．リャプノフ条件 Γをジョルダン弧 (単純弧) とし ς を Γ の点で Γ の端点でないとする。ς の所で Γ は両側 (例えばΓの進行方向からみて右側と左側) をもつ。円板 V は Γ の右側 (又は左側) にあって$\Gamma\cap\bar{V}=\{\varsigma\}$ となる時 Γ は右側 (又は左側) に於て ς で円板 V を**支持する**と言う事にする。

D をジョルダン領域とする。∂D が D の外側に於て ∂D の或る点 ς で或る円板 V を支持するとする。この

時には V を更に小さく取ることにより $\bar{D}\cap\bar{V}=\{\varsigma\}$ となる様に出来る。この時 D は ς で**リャプノフ条件**を満足すると言い，$\bar{D}\cap\bar{V}=\{\varsigma\}$ となる円板 V を D の ς に於ける一つのリャプノフ円板と呼ぶ。

D の外側に $\varsigma\in\partial D$ を頂点とする錐が取れる時 D は ς でポアンカレー条件をみたすと言うのは有名であるが，リャプノフ条件はそれより強い条件である。ポアンカレーがディリクレ問題の境界値の研究にポアンカレー条件を考えたと同じ様にリャプノフはディリクレ問題の境界値の正則性（微分可能性）の研究にリャプノフ条件を考えた。この簡単な幾何学的条件が次に述べる様に調和峯点を完全に特徴づける：

定理1.2　ジョルダン領域 D の境界点 ς が調和峯点である為の必要充分条件は D が ς でリャプノフ条件を満足することである。

［証明］　充分性　$V=\{|z-a|<r\}(r>0)$ を D の ς に於ける一つのリャプノフ円板とすると

$$u(z)=Re\frac{\varsigma-a}{z-a}$$

が $\bar{D}$ 上 ς に於ける峯点函数となる事が験しかめられる。

必要性　u を $\bar{D}$ 上 ς に於ける峯点函数とする。u を使って函数 $v=1-u$ を作ると $v(\varsigma)=0$ かつ $\bar{D}\setminus\{\varsigma\}$ 上 $v>0$ となる。ς を中心として充分小さな半径 $\rho>0$ の円板 X を描けば，円周 ∂X の部分弧 γ_1 が D の横断線となり，γ_1 により切取られる ∂D の ς を内点に含む部分弧を γ_2 とする時，$\gamma_1\cup\gamma_2$ はジョルダン曲線となりその内部 Y は $D\cap X$ に含まれる様に出来る。X に於て v の共軛調和函数 v^* を $v^*(\varsigma)=0$ となる様にとる時正則函数 $g(z)=v(z)+iv^*(z)$ を考えると，自然数 n と ς で零とならない X 上の正則函数 h があって

$$g(z)=(z-\varsigma)^n h(z)$$

と表される。必要ならば X を更に小さくとれば，等高線 $\{v=Re\,g=0\}$ により X は ς を頂点とする $2n$ 個の扇状領域 $X_1,\cdots,X_{2n}$ に分割される。X_j と $X_{j+1}(j=1,\cdots,2n-1)$ および X_{2n} と X_1 は一辺を共有するものとする。各 X_j で $v=Re\,g$ は定符号で，X_1 で $v=Re\,g>0$ とすると $\cup_{k=1}^{n}X_{2k-1}$ 上 $v=Re\,g>0$，$\cup_{k=1}^{n}X_{2k}$ 上 $v=Re\,g<0$ となる。Y 上 $v=Re\,g>0$ でかつ Y は連結であるから，どれか唯一つの X_{2k-1}，例えば X_1，に Y は含まれる。$X_1,\cdots,X_{2n}$ は ς で同じ頂角 π/n を持つから，ς に於て，D の外側に頂角 $(2n-1)\pi/n\geqq\pi$ の扇状領域

$$Z=\left(\bigcup_{k=2}^{2n}X_k\right)\cap\{|z-\varsigma|<r\}\ (0<r<\rho)$$

が取れて，r が十分小ならば $\bar{D}\cap\bar{Z}=\{\varsigma\}$ となる。ς での頂角が π 以上だから円板 V で $V\subset Z$ かつ $\bar{V}\cap\partial Z=\{\varsigma\}$ となるものが取れる事は明白である。この V が ς に於ける一つのリャプノフ円板となる。［証明終り］

1.3．準放物線　上半平面にあって原点で x 軸に接する半径 $c>0$ の円周 C の方程式は

$$x^2+(y-c)^2=c^2$$

である。この $|x|\leqq c$ に於ける下半円周を $y=\gamma(x)$ とするとき，上記陳列の式を $0\leqq y\leqq c$ の範囲で y について解いて更に分子の有理化を行うことにより

$$y=\gamma(x)=c-\sqrt{c^2-x^2}=\frac{1}{c+\sqrt{c^2-x^2}}\cdot x^2$$

の形に書き表せる。よって任意の正数 $\varepsilon\in(0,2c)$ をとるとき，評価式

$$(1.3.1)\quad \frac{1}{2c}x^2\leqq\gamma(x)\leqq\frac{1}{2c-\varepsilon}x^2 \qquad (|x|\leqq\sqrt{(2c-\varepsilon)\varepsilon}\leqq c)$$

が成り立つ。これは円周 C がその最下端に於ては大体において放物線 $y=(1/2c)x^2$ に一致すると言うことである。この観察は簡単ながら以下の議論，一つの定理と一つの反例の証明，に於て本質的役割を果たす。

リャプノフ条件と境界の滑めらかさは元来本質的なかかわりがあるとは思われない。上の定理1.2の証明にも現れた様に境界点の外側に π 以上の開きの角がとれるならば境界の滑めらかさにかかわらずリャプノフ条件が満たされるからである。しかしジョルダン領域 D の境界 ∂D が充分に滑めらかなら ∂D の各点でリャプノフ条件がみたされることが期待出来る。どの位滑めらかであれば良いかを知ることは応用上は特に大切であると思われる。先づ最初に次の肯定的結果から始める：

定理1.3　C^2 級の正則ジョルダン曲線 ∂D で囲まれたジョルダン領域 D に於ては，∂D の各点がリャプノフ条件を満足する。

［証明］　∂D の任意の点 ς でリャプノフ条件がみたされる事を言う。D に回転と平行移動を施こして，$\varsigma=0$ であり ∂D は0で x 軸に接し0の近くで ∂D の上側に D の外部がある様に出来る。0を内点に含む ∂D の小部分弧 Λ は $y=F(x)(|x|\leqq a)$ の形の C^2 函数で与えられる。このとき $F(0)=F'(0)=0$ だからテーラーの定理により $\theta\in(0,1)$ を使って

$$F(x)=\frac{F''(\theta x)}{2}x^2 \quad (|x|\leqq a)$$

と表され F''は連続だから $|x|\leqq a$ で正定数 $2A$ 以下であって $F(x)\leqq Ax^2(|x|\leqq a)$となる。正数 c_0を a よりも$1/2A$よりも小にとると $A<1/2c_0$であって

$$\gamma_0(x)=c_0-\sqrt{c_0^2-x^2}$$

とすると（1．3．1）により

$$F(x)<\gamma_0(x) \quad (0<|x|\leqq c_0<a)$$

となる。中心$(0,\ c)$半径 c の円板を $V(c)$と記すとき $V(c_0)$は D の外点を含み $\overline{V(c_0)}\cap\Lambda=\{0\}$である。よって $c\in(0,\ c_0)$を充分小にとると $V(c)$は D の 0 に於けるリャプノフ円板となる。［証明終り］

事実上うえで示された事は「Λ が C^2級の正則弧であるときには，Λ のどの内点も Λ の両側のいずれに於ても或る円板を支持する」と言う主張である。以上の事柄のいずれも，関係する曲線を **C^1級正則とするだけでは不充分**であることを示す例（瀬川重男，多田俊政両君の注意に負う）をあげる：

反例1．4 C^1級正則ジョルダン曲線 ∂D で囲まれたジョルダン領域 D であって，∂D がリャプノフ条件をみたさない点を含む様なものが存在する。例えば D の境界 ∂D の部分弧 Λ が

$$y=F(x)=\begin{cases} x^\alpha & (0\leqq x\leqq 1)\\ -|x|^\alpha & (-1\leqq x\leqq 0)\end{cases}$$

で与えられると$(1<\alpha<2)$，Λ は 0 で上側に於ても下側に於てもいかなる円板も支持しない。

［証明］ $\alpha>1$ であるから

$$F'(x)=\begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & (0<x\leqq 1)\\ 0 & (x=0)\\ -\alpha|x|^{\alpha-1} & (-1\leqq x<0)\end{cases}$$

であり $|x|\leqq 1$ で連続であるので曲線弧 Λ は C^1級の正則曲線弧であることがわかる。

0 に於て Λ の上側と下側は対称だから一方の側で円板を支持しないと他方でもそうである。もし Λ が 0 で上側に於て或る円板 V を支持すると仮定したら矛盾が出ることを示す。Λ は 0 に関して対称で 0 で x 軸に接するから ∂D も 0 で x 軸に接しなければならず ∂V は $x^2+(y-c)^2=c^2(c>0)$の形に与えられることになり ∂V の下半円周を $y=\gamma(x)(|x|\leqq c)$とすると $\gamma(x)>F(x)(0<|x|\leqq c)$であるから，（1．3．1）を $\varepsilon=c$ で使って

$$x^\alpha=F(x)<\gamma(x)<\frac{1}{c}x^2 \quad (0<x<c)$$

又は $c<x^{2-\alpha}(0<x\leqq c)$となるが，$\alpha<2$だから $x\to 0$ として矛盾が出る。［証明終り］

2．境界対応

2．1．境界正則性 D をジョルダン領域，Δ を単位円板$\{|z|<1\}$とするとき，1．1で述べた様に，リーマンの写像定理により，Δ から D への等角写像 f が存在する。f の逆写像 f^{-1}は D から Δ への等角写像でる。f を Δ から D への一つのリーマン写像函数，f^{-1}をリーマン逆写像函数と呼ぶ（f^{-1}を D から Δ へのリーマン写像函数，f をその逆写像函数と呼んだり，又 f，f^{-1}いずれも単にリーマン写像と呼ぶことがある事に注意。いずれにしても本質的なことではない）。1．1で述べたカラテオドリーの定理により f は $\bar{\Delta}$ から $\bar{D}$ への（f^{-1}は $\bar{D}$ から $\bar{\Delta}$ への）位相写像に拡張出来る。これは f が $\bar{\Delta}$ 上，f^{-1}が $\bar{D}$ 上連続となること（正確には連続に拡張出来ること）と同じである。ここで f や f^{-1}は Δ から Δ への一次変換を右又は左から合成することを無視すれば本質的には一意的であることを注意しておく。さて一般には ∂D は単に連続ジョルダン曲線であるとして f 又は f^{-1}の境界挙動に言及したのがカラテオドリーの定理であったが，更に ∂D に何等かの滑めらかさを仮定したとき，そのことが f 又は f^{-1}の境界での正則性（滑めらかさ，つまり可微分性等）にどの様に影響するかと言うことについて考える。上にも注意した様に f や f^{-1}は一次変換（境界でも解析的である）を無視して一意的だから，f や f^{-1}の境界での滑めらかさはそれらの選び方に依存しない。

さて注目するのは，**パンルベの定理**：∂D が C^{n+1}級の正則ジョルダン曲線であると Δ から D へのリーマン写像 f について $f\in C^n(\bar{\Delta})$かつ $f^{-1}\in C^n(\bar{D})$となる$(n=0,\ 1,\ \cdots,\ \infty)$，である。古典的事実でありながら定理の命名も全く一般的ではないし（実はここだけかも知れぬ），その上この事実自体も周知と言う訳ではないかも知れない（数学，或いは更に函数論に限定して，の専門家又は専門学徒なら誰でも知っていると言う程ではないと言う意味である）。1887年のパンルベの学位論文で本質的には上の陳述の $n=\infty$の場合に相当する事実の証明が与えられているのであるが，上に述べた形で現代的な意味での完璧な証明を載せている成書又は論文の存在を知らない。今ならどうしてでも証明出来ると言う訳であろうが（［1］参照），可能なら初等的な教科書レベルの証明を与えることは教育的見地だけからしても意義深い事であろう。知っている証明を述べる機会を他日持つ積りでいるが，ここではこれ以上深入りしない。

さて上にのべたパンルベの定理をカラテオドリーの定理「∂D が C^0級ならば $f\in C^0(\bar{D})$かつ $f^{-1}\in C^0(\bar{D})$」と較らべるとき $n=0$ に対してはパンルベの定理はカラ

テオドリーの定理より弱い主張なので，実は「∂D が C^n 級正則ならば $f\in C^n(\bar{\Delta})$ かつ $f^{-1}\in C^n(\bar{D})$」が言えないだろうかと言う疑問が自然にうかんで来る。以下に於て，この期待は空しくて，$f\in C^1(\bar{\Delta})$ 又は $f^{-1}\in C^1(\bar{D})$ を結論する為には ∂D を **C^1 級正則とするだけでは不充分**である事を例示する。第一の反例ではリーマン逆写像函数 f^{-1} の方が C^1 級でないもの，第二の反例ではリーマン写像函数 f そのものが C^1 級ではないものを与える。

2．2．第一反例（リーマン逆写像）　次の簡単な函数

(2．2．1)　　$$f(z)=\frac{z-1}{log(z-1)}$$

を単位円板 $\Delta=\{\,|z|<1\}$ 上で考える（[1] 参照）。$log\,\varsigma$ は $\{Re\,\varsigma<0\}$ で $log(-1)=\pi i$ となる分枝をとるものとする。$f(z)$ は $\{Re\,z<1\}$ で一価正則で $\{Re\,z\leqq 1\}$ で連続である。ただし $f(1)=0$ と定めておく。特に $f(z)$ は Δ で正則，$\bar{\Delta}$ で連続である。$D=f(\Delta)$ とおくと領域保存性定理により，D は C 内の領域となるのであるが，更に詳しく次のことが成立する：

i）f は Δ から D への等角写像である。
ii）D は C^1 級の正則ジョルダン曲線 ∂D によって囲まれたジョルダン領域である。
iii）$f\in C^1(\bar{\Delta})$ かつ $f^{-1}\notin C^1(\bar{D})$ である。

ついでながら ∂D は0を通るが D に関して0でリャプノフ条件はみたされぬので ∂D は C^2 級ではない。これらのことを以下三段階に分けて証明する。

第一段　f の単葉性証明（原優君の注意に負う）。先ず $\delta=\{Re\,z<-1/2\}$，$\alpha(z)=1/(z-1)$ とおくと α は Δ から δ への等角写像である。次に

$$F(z)=z(2\pi i-log\,z)$$

とおき F による δ の像を d とする。最後に $\beta(z)=1/z$ とおくと，容易に $f=\beta\circ F\circ\alpha$ の分解が示され，これから又 β は d から D への等角写像であることがわかる。

$$\begin{array}{ccc}\Delta & \xrightarrow{f} & D\\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle\beta}\\ \delta & \xrightarrow[F]{} & d\end{array}$$

よって δ から d への写像 F の単葉性を示せばよい。所が

$$F'(z)=2\pi i-log\,z-1$$

だから $\delta=\{Re\,z<-1/2\}$ に於ては $|z|>1/2$ であって

$$Re\,F'(z)=-log\,|z|-1$$
$$=log(e^{-1}/|z|)<log(2^{-1}/|z|)<0$$

となる。よって周知の単葉性条件により（例えば [2] 参照）F は δ で単葉であることがわかる。[第一段終り]

第二段　∂D の C^1 級正則性。閉曲線 $\Gamma=\partial D$ の一つの曲線弧としての媒変数表示は

$$z=f(e^{i\theta})\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

である。そこで

$$f'(z)=\begin{cases}(log(z-1)-1)/(log(z-1))^2 & \\ \qquad\qquad (z\in\{Re\,z\leqq 1\}\setminus\{1\}) & \\ 0 \qquad\qquad (z=1) & \end{cases}$$

に注意すれば，$\Gamma\setminus\{0\}$ のどんな部分弧も C^1 級正則（実は解析的正則）である。

$$z=f(e^{i\theta})\quad(-\varepsilon\leqq\theta\leqq\varepsilon)$$

を一つの媒変数表示とする Γ の部分弧（$0<\varepsilon<\pi$）は0を内点に含む。$(dz/d\theta)_{\theta=0}=0$ だから C^1 級はともかく正則性は駄目である。そこで媒変数を取換えて C^1 級正則に直す。

(2．2．2)　$$\theta(t)=\begin{cases}t\ log\,|1/t| & \\ \qquad\qquad (0<|t|\leqq 1/4) & \\ 0 \qquad\qquad (t=0) & \end{cases}$$

により $[-1/4,\ 1/4]$ 上の媒変数 t の函数を考える。それによって0を内点に含む Γ の或る部分弧 Λ を媒変数表示

$$z=\gamma(t)=f(e^{i\theta(t)})\quad(-1/4\leqq t\leqq 1/4)$$

により定めてこれが $|t|\leqq 1/4$ で C^1 級正則となることを言いたい。等式

$$\begin{cases}\theta'(t)=-log\,|t|-1 \qquad (t\neq 0)\\ t\theta'(t)=\theta(t)-t=\theta(t)(1+1/log\,|t|)\\ \qquad\qquad (t\neq 0)\end{cases}$$

に注意する。これにより

$$\gamma'(t)=f'(e^{i\theta(t)})ie^{i\theta(t)}\theta'(t)\neq 0$$
$$(0<|t|<1/4)$$

及び $\gamma'(t)$ の $\{0<|t|\leqq 1/4\}$ 上の連続性がわかる。$t\to 0$ のときの $\gamma'(t)$ の極限の存在と

$$\lim_{t\to 0}\gamma'(t)\neq 0$$

となることが示されたならば Λ も又 C^1 級正則となって結局ジョルダン曲線 ∂D の C^1 級正則性がわかる。以下において極限の存在とそれが零でないことを同時に示す。

$$\gamma'(t)=-ie^{i\theta(t)}\cdot\frac{log\,|t|+1}{log(e^{i\theta(t)}-1)}$$
$$\cdot\left(1-\frac{1}{log(e^{i\theta(t)}-1)}\right)$$

に注意する。$t\to 0$ の時右辺の第一因子は $-i$ に第三因子は1に近づく。第二因子の $t\to 0$ の極限を調べる：

$$\frac{log\,|t|+1}{log(e^{i\theta(t)}-1)}$$

$$=2\left[\frac{\log(1-\cos\theta(t))}{\log|t|+1}+\frac{\log 2+2i\arg(e^{i\theta(t)}-1)}{\log|t|+1}\right]^{-1}$$

$\pi/2\leqq\arg(e^{i\theta(t)}-1)\leqq 3\pi/2$ であるから［ ］内の第二項は $t\to 0$ の時0に収束するので，［ ］内の第一項について $t\to 0$ の時の極限を調べたら良い：

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1-\cos\theta(t))}{\log|t|+1}$$

これは$(-\infty)/(-\infty)$型不定形だからロピタルの法則を使う：

$$\frac{(\log(1-\cos\theta(t)))'}{(\log|t|+1)'}$$
$$=\frac{((\sin\theta(t))/(1-\cos\theta(t)))\theta'(t)}{1/t}$$
$$=\frac{\sin\theta(t)}{1-\cos\theta(t)}t\theta'(t)=\frac{\sin\theta(t)}{1-\cos\theta(t)}(\theta(t)-t)$$
$$=\frac{2\cos(\theta(t)/2)}{(\sin(\theta(t)/2))/(\theta(t)/2)}(1+1/\log|t|)$$
$$\to 2\quad(t\to 0)$$

が $\theta(t)\to 0\ (t\to 0)$によって結論される。以上綜合して

$$\lim_{t\to 0}\gamma'(t)=-i\cdot 1\cdot 1=-i\neq 0$$

が導かれる。［第二段終り］

第三段 $f^{-1}\notin C^1(\bar{D})$等。$f\in C^1(\bar{\Delta})$は明白であるが，$f'(1)=0$ だから f^{-1}の導函数の0における境界値は $1/f'(1)=\infty$となり f^{-1}は $\bar{D}$ 全体では C^1級でない。ただし $\bar{D}\setminus\{0\}$ では C^1級であることが逆函数定理（陰函数定理）によりわかる。定理1.1によれば0は D に対する調和峯点でなく，定理1.2により0でリャプノフ条件がみたされないことがわかる。よって定理1.3によれば ∂D は C^1級だけれど C^2級ではない正則曲線であることが確認出来る。勿論パンルベの定理からすればこの事は明白である。［第三段終り］

2.3．第二反例（リーマン写像） （2.2.1）より更に簡単な次の函数を単位円板 $\Delta=\{|z|<1\}$ で考える：

$$f(z)=(z-1)(\log(z-1)-2)$$

$\log\varsigma$ は2.2に於けると同じとする。$f(z)$は$\{Re\, z<1\}$で一価正則で$\{Re\, z\leqq 1\}$で連続である。ただし$f(1)=0$とする。特にf はΔで正則 $\bar{\Delta}$ で連続である。$D=f(\Delta)$とおく。すると次のことが成立する：

- i）f はΔから D への等角写像である。
- ii）D は C^1級正則ジョルダン曲線 ∂D によって囲まれたジョルダン領域である。
- iii）$f\notin C^1(\bar{\Delta})$かつ $f^{-1}\in C^1(\bar{D})$である。

事実 $f'(z)=\log(z-1)-1$だから Δ で $Re\, f'(z)<0$となることは今度は全く自明であり i）がわかる。f が $\bar{\Delta}\setminus\{1\}$ で C^1級（実は正則）で $f'(z)\neq 0$であるから逆函数定理により f^{-1}も $\bar{D}\setminus\{0\}$ で C^1級である。所が

$$f'(1)=\lim_{z\in\Delta,\ z\to 1}f'(z)=\infty$$

だから先づ $f\notin C^1(\bar{\Delta})$である。$(f^{-1})'(0)=1/f'(1)=0$であって$(f^{-1})'$の $\bar{D}$ 上の連続性がわかり $f^{-1}\in C^1(\bar{D})$がわかる。

他方 ii）の証明は簡単にゆかず，2.2の第二段に於けると同じだけの手間がかかる。証明の方法は全く同様であるが肝心の変更点は（2.2.2）の媒変数の置き換えを次の式で行うことである：

$$\theta(t)=\begin{cases}t/\log|t| & (0<|t|\leqq 1/4)\\ 0 & (t=0)\end{cases}$$

いずれにしても単位円板 Δ から C^1級正則ジョルダン曲線で囲まれたジョルダン領域 D への等角写像 f で，第一例では「$f\in C^1(\bar{\Delta}), f^{-1}\notin C^1(\bar{D})$」となるもの，ついで第二例では「$f\notin C^1(\bar{\Delta}), f^{-1}\in C^1(\bar{D})$」となるものを与えた。実は「$f\notin C^1(\bar{\Delta}), f^{-1}\notin C^1(\bar{D})$」となる例が欲しいが未だ得ていない。第一例の$(f^{-1})'$も第二例の f'も値域を $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$，いわゆるリーマン球面，にとっておけば夫々 $\bar{D}$ 又は $\bar{\Delta}$ で広い意味で連続となるので，あまり本質的な反例でないと言う見方も出来る。この意味でもっと本質的な例も欲しい。

3．境界微分

3.1．ポアソン積分の導函数 単位円板 Δ の単位円周 $\partial\Delta$ 上の実数値境界函数 $g(t)=g(e^{it})$のポアソン積分 $u(re^{i\theta})$を考える：

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2}g(t)\,dt$$

さて**シュワルツの定理**によれば $g\in C(\partial D)$ならば

$$(3.1.1)\qquad \lim_{r<1,\ re^{i\theta}\to e^{i\varphi}}u(re^{i\theta})=g(\varphi)$$

となる。これを一歩進めて

$$\lim_{r<1,\ re^{i\theta}\to e^{i\varphi}}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{\nu}u(re^{i\theta})\qquad(\mu,\nu=0,1,\cdots)$$

について考える。シュワルツ定理の一般化として次の結果が得られる：

定理3.1 $g\in C^{2m+n}(\partial\Delta)\ (m, n=0, 1,\cdots)$ならば

$$(3.1.2)\qquad \lim_{r<1,\ re^{i\theta}\to e^{i\varphi}}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2m}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{n}u(re^{i\theta})$$

$$=(-1)^m g^{(2m+n)}(\varphi)$$

となり，$g\in C^{2m+n+2}(\partial\Delta)(m,\ n=0,\ 1,\cdots)$ならば

（３．１．３）
$$\lim_{r<1,\ re^{i\theta}\to e^{i\varphi}}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2m+1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^n u(re^{i\theta})$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{\pi}\int_0^\pi\Big(g^{(2m+n+1)}(\varphi+t)-g^{(2m+n+1)}(\varphi-t)\Big)\cot\frac{t}{2}dt$$

［証明］ポアソン核と共軛ポアソン核

$$\begin{cases}P(re^{it})=P(r,\ t)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\\[2ex] Q(re^{it})=Q(r,\ t)=\dfrac{2r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}\end{cases}$$

の間には次のコーシー・リーマンの関係式が成り立つ：

（３．１．４）
$$\begin{cases}(r\dfrac{\partial}{\partial r})P(r,\ t)=\dfrac{\partial}{\partial t}Q(r,\ t)\\[2ex] (r\dfrac{\partial}{\partial r})Q(r,\ t)=-\dfrac{\partial}{\partial t}P(r,\ t)\end{cases}$$

最初にポアソン積分 $u(re^{i\theta})$を書き換えると

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi P(r,\ t)g(t+\theta)dt$$

となる。$g\in C^n(\partial\Delta)$とすると積分記号下での微分法が許されて

（３．１．５）
$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^n u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi P(r,\ t)g^{(n)}(t+\theta)dt$$

となる。これは $g\in C^{2m+n}(\partial\Delta)(m,\ n=0,\ 1,\cdots)$に対して成立する公式

（３．１．６）
$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2m}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^n u(re^{i\theta})=\frac{(-1)^m}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi P(r,\ t)g^{(2m+n)}(t+\theta)dt$$

の特別の場合（即ち $m=0$）である。（３．１．６）はしばらく後で示す。（３．１．５）の両辺に $r\partial/\partial r$ を施して（３．１．４）に注意しながら部分積分を行うと

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^n u(re^{i\theta})$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)P(r,\ t)g^{(n)}(t+\theta)dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi\frac{\partial}{\partial t}Q(r,\ t)g^{(n)}(t+\theta)dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\Big\{[Q(r,\ t)g^{(n)}(t+\theta)]_{-\pi}^\pi-\int_{-\pi}^\pi Q(r,\ t)g^{(n+1)}(t+\theta)dt\Big\}$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi Q(r,\ t)g^{(n+1)}(t+\theta)dt$$

となり，これは $g\in C^{2m+n+1}(\partial\Delta)(m,\ n=0,\ 1,\cdots)$に対して成立する公式

（３．１．７）
$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2m+1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^n u(re^{i\theta})=\frac{(-1)^{m+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi Q(r,\ t)g^{(2m+n+1)}(t+\theta)dt$$

の特別の場合（即ち $m=0$）である。（３．１．７）も又以下に於て示す。

すでに（３．１．６）と（３．１．７）は $m=0$ 及び任意の $n=0,1,\cdots$に対して成り立つことをみた。さて数学的帰納法を使う為に（３．１．６）と（３．１．７）が或る m と任意の n に対して成り立つものと仮定する。すると

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^n u(re^{i\theta})$$
$$=\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2m+1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^n u(re^{i\theta})$$
$$=\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{(-1)^{m+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi Q(r,\ t)g^{(2m+n+1)}(t+\theta)dt$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)Q(r,\ t)g^{(2m+n+1)}(t+\theta)dt$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi\Big(-\frac{\partial}{\partial t}P(r,\ t)\Big)g^{(2m+n+1)}(t+\theta)dt$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{2\pi}\Big\{[-P(r,\ t)g^{(2m+n+1)}(t+\theta)]_{-\pi}^\pi+\int_{-\pi}^\pi P(r,\ t)g^{(2m+n+2)}(t+\theta)dt\Big\}$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi P(r,\ t)g^{(2(m+1)+n)}(t+\theta)dt$$

となり，これは（３．１．６）がすべての n につき m の代りに $m+1$ でおきかえても成り立つ事を意味する。次に今導びいたばかりの等式を用いて

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2(m+1)+1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^n u(re^{i\theta})$$
$$=\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^n u(re^{i\theta})$$
$$=\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{(-1)^{m+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi P(r,\ t)g^{(2(m+1)+n+1)}(t+\theta)dt$$

をうる。（３．１．５）から $m=0$ の時の（３．１．７）を導びいたと同様にして上式の最右辺は

$$=\frac{(-1)^{(m+1)+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi Q(r,\ t)g^{(2(m+1)+n+1)}(t+\theta)dt$$

となり，（３．１．７）が m の代りに $m+1$ で成り立つ事が分る。

さて（3.1.1）を（3.1.6）へ適用することにより（3.1.2）が導ちびかれる。（3.1.3）を示す為に

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q(r,\ t)g^{(2m+n+1)}(\theta+t)dt$$

$$=\left(\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\right)Q(r,\ t)g^{(2m+n+1)}(\theta+t)dt$$

と考える。右辺の第一の積分で積分変数を t から $-t$ へ変換し $Q(r,\ -t)=-Q(r,\ t)$ に注意すれば

(3.1.8) $$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^{2m+1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{n}u(re^{i\theta})=\frac{(-1)^{m+1}}{\pi}\int_{0}^{\pi}(g^{(2m+n+1)}(\theta+t)-g^{(2m+n+1)}(\theta-t))Q(r,\ t)dt$$

が得られる。

さて $g\in C^{2m+n+2}(\partial\Delta)$ と仮定する。すると

$$K=\max_{\partial\Delta}|f^{(2m+n+2)}|<\infty$$

であるから平均値の定理により

$$|g^{(2m+n+1)}(\theta+t)-g^{(2m+n+1)}(\theta-t)|\leqq 2Kt$$

がすべての $t\in[0,\pi]$ およびすべての $\theta\in(-\infty,\infty)$ に対して成り立つ。すると（3.1.8）の右辺の積分の被積分函数の絶対値は次の量で $[0,\pi]$ 上おさえられる：

$$2Kt\cdot\frac{2r\sin t}{1-2r\cos t+r^2}$$

$$=4Kr\cdot\frac{t\sin t}{(1-r)^2+4r\sin^2(t/2)}$$

$$\leqq 2Kt\cot\frac{t}{2}\leqq 2K\pi$$

更に（3.1.8）の右辺の積分の被積分函数は $re^{i\theta}\to e^{i\varphi}$ の時

$$(g^{(2m+n+1)}(\varphi+t)-g^{(2m+n+1)}(\varphi-t))\cot\frac{t}{2}$$

へ近づく。従ってルベッグの収束定理により（3.1.8）の両辺で $re^{i\theta}\to e^{i\varphi}$ とした時の極限をとることにより（3.1.3）が導びかれる。

3.2．解の境界正則性　単位円周 $\partial\Delta$ 上の境界値函数 g のポアソン積分 u については，定理3.1から直ちに次の結果が従う：

定理3.2　$g\in C^{k+1}(\partial\Delta)$ を境界函数とするポアソン積分 $u\in C^{k}(\bar{\Delta})$ である（$k=0,\ 1,\cdots,\infty$）。

境界函数の正則性よりもポアソン積分の境界正則性の方が一階落ちていることに注目するのである。この点を以下追求するのであるが，その前についでながら上の定理を一般ジョルダン領域へ拡張することについて述べる。

ジョルダン領域 D の境界 ∂D に連続函数 h を与えたとき，$\bar{D}$ で連続，D で調和で，∂D で h と一致する様な函数 v を求める問題がディリクレ問題であった。その解 v は存在したとしても唯一つであることが最大値の原理からわかる。事実存在することを見る一つの方法が Δ から D へのリーマン写像函数 f を利用するものである。カラテオドリーの定理により f は $\bar{\Delta}$ から $\bar{D}$ への位相写像であるから $h\circ f$ は $\partial\Delta$ 上の連続函数となる。そこで $h\circ f$ を境界函数とするポアソン積分 u をとると，u が Δ での境界函数 $h\circ f$ のディリクレ問題の解であると言うのがシュワルツの定理の意味であった。そこで D から Δ へのリーマン逆写像函数 f^{-1} を考え，$v=u\circ f^{-1}$ とすると，再びカラテオドリーの定理で f^{-1} が $\bar{D}$ から $\bar{\Delta}$ への位相写像となることから，v は $\bar{D}$ 上連続で ∂D 上 $v=u\circ f^{-1}=(h\circ f)\circ f^{-1}=h$ となる。D 上 $v=u\circ f^{-1}$ で u が調和で f^{-1} が等角なことから調和性の等角不変性により v は D 上調和であることがわかるので v が求めるディリクレ問題の解となる。

ジョルダン領域 D 上境界函数 h のディリクレ問題の解を H_h^D と記すのが一般的記法である。境界函数 g のポアソン積分は H_g^Δ と記される訳であるし，更に f を Δ から D へのリーマン写像函数とすると，上で示した所は実は

(3.2.1) $H_h^D=H_{h\circ f}^{\Delta}\circ f^{-1}$

と簡潔に表現出来ることになる。この表示を利用すると定理3.2は次の様に一般化出来る：

定理3.3　C^{k+2}級正則ジョルダン曲線 ∂D で囲まれたジョルダン領域 D に於て $h\in C^{k+1}(\partial D)$ を境界函数とするディリクレ問題の解　$H_h^D\in C^k(\bar{D})$ である（$k=0,$ $1,\cdots,\infty$）。

［証明］　パンルベの定理により $f\in C^{k+1}(\bar{\Delta})$ であるから $h\circ f\in C^{k+1}(\partial D)$ であり，定理3.2により $H_{h\circ f}^{\Delta}\in C^k(\bar{\Delta})$ である。再びパンルベの定理によると $f^{-1}\in C^{k+1}(\bar{D})$ だから $f^{-1}\in C^k(\bar{D})$ でもあり，（3.2.1）から $H_h^D\in C^k(\bar{D})$ が結論出来る。［証明終り］

さて上の定理3.2をシュワルツの定理「$g\in C^0(\partial\Delta)$ ならば $u\in C^0(\bar{\Delta})$」と較べるとき $k=0$ に対しては定理3.2の方がシュワルツの定理より弱い主張となるので，「$g\in C^k(\partial\Delta)$ ならば $u\in C^k(\bar{\Delta})$」となることが実は言えないだろうかと言う疑問が生ずる。以下に於て $u\in C^1(\bar{\Delta})$ を結論するのに g を **C^1級とするだけでは不充分**であることを示す反例を与える。

3.3．境界函数の反例　$X(t)=X(e^{it})$ を単位円周 $\partial\Delta$ 上の補助 C^∞ 函数で $[-\pi,\ \pi]$ 上次の様に与える：

$$X(t)=\begin{cases}1 & (|t|\leqq 1/4)\\ 0 & (|t|\geqq 1/2)\end{cases}$$

更に $X(t)=X(-t)$ で $0\leqq X(t)\leqq 1$ としておく。そこで $\partial\Delta$ 上の函数 $g(t)=g(e^{it})$ を次式で定める：

$$(3.3.1)\quad g(t)=X(t)\cdot\int_0^{|t|}\frac{1}{\log s}ds$$

すると $[-\pi,\pi]$ 上 $g(t)=g(-t)$ だから $g'(t)=-g'(-t)$ であり特に

$$g'(t)=-g'(-t)=1/\log|t|\quad(|t|<1/4)$$

となる。勿論 $g(0)=g'(0)=0$ と解する。

上の（3.3.1）で定めた g を境界函数とするポアソン積分を u とすると，$g\in C^1(\partial\Delta)$ であるが $u\notin C^1(\bar{\Delta})$ となる。

まず $g\in C^1(\partial D)$ であることは明白である。$u\notin C^1(\bar{\Delta})$ である事を言う為には $\partial u(re^{i\theta})/\partial r$ が $1\in\partial\Delta$ で連続とならぬ事を示せば充分であるが，実は

$$(3.3.2)\quad \lim_{r<1,\,r\to 1}\frac{\partial}{\partial r}u(r)=\infty$$

であることを以下証明する。（3.1.8）を $m=n=0$ 及び $\theta=0$ で使うと

$$r\frac{\partial}{\partial r}u(r)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(g'(t)-g'(-t))Q(r,t)dt$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g'(t)Q(r,t)dt$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{1/4}+\int_{1/4}^{\pi}\right)g'(t)Q(r,t)dt$$

と変形出来る。上の最右辺の第二の積分を $y(r)$ と記すと，$y(r)$ は $[0,1]$ 上特に $r=1$ で連続である：

$$y(r)\to y(1)=\int_{1/4}^{\pi}g'(t)\cot\frac{t}{2}dt\quad(r<1,\ r\to 1)$$

さて $g'(t)=1/\log t\,(0\leqq t\leqq 1/4)$ に注意すると

$$r\frac{\partial}{\partial r}u(r)+y(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{1/4}\frac{1}{\log(1/t)}Q(r,t)dt$$

上式の両辺の $r<1$，$r\to 1$ の時の下極限をとり，右辺の積分の被積分函数が正であることに注意して，ファトゥの補題を適用すると

$$\liminf_{r<1,r\to 1}\frac{\partial}{\partial r}u(r)+y(1)$$

$$=\liminf_{r<1,r\to 1}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u(r)+y(r)\right)$$

$$=\liminf_{r<1,r\to 1}\frac{2}{\pi}\int_0^{1/4}\frac{1}{\log(1/t)}Q(r,t)dt$$

$$\geqq\frac{2}{\pi}\int_0^{1/4}\left(\liminf_{r<1,r\to 1}\frac{1}{\log(1/t)}Q(r,t)\right)dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{1/4}\frac{-1}{\log t}\cdot\frac{2\sin t}{1-\cos t}dt=\infty$$

となって（3.3.2）が導びかれる。

参照文献

[1] S. R. Bell and S. G. Krantz : *Smoothness to the boundary of conformal maps*, Rocky Mountain J. Math., **17** (1987), 23-40.

[2] 小松勇作：等角写像論(上，下巻)，共立出版，1943年.

[3] M. Tsuji : *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, 1959.