

一対の渦輪の相互干渉 (基本的諸問題についての考察)

山田日出夫・中嶋康志*

生産システム

(1987年8月25日受理)

Mutual Interaction of a Pair of Vortex Rings (Study on Some Fundamental Flow Problems)

Hideo YAMADA and Yasushi NAKAJIMA

(Received August 25, 1987)

Some fundamental problems on mutual slip-through of a pair of vortex rings have been studied by both numerical simulations and flow visualizations. The main results obtained are summarized as follows. (1) Flow patterns based on potential flow theory were found to show good agreement with those of flow visualizations. (2) Numerical analysis were carried out on dynamical aspects of vortex system such as velocity, acceleration, impulse, and kinetic energy. (3) Viscous effects of vortex cores during the interaction were discussed, and it was conjectured that water has greater advantage than air in achieving good consecutive mutual slip-through motions experimentally.

1. 緒 言

本研究は、同軸上を並進する2個の渦輪が相互干渉する場合のいくつかの基本的問題について考察したものである。

渦輪の干渉に関する研究は、流体力学的にも工学的にも重要である。同じ渦軸上を進む渦輪による流れは、渦の合体や追い抜き、渦の伸張や収縮、そして渦度の集中・拡散・散逸などの渦干渉における重要な諸現象が含まれる上に、流れ場が軸対称であるため実験的にも解析的にも研究しやすい利点がある。又、円形乱流噴流は大規模な組織的渦構造を持つことが認識されるにつれて、渦輪列でその構造をモデル化する試みがなされている^{1), 2), 3)}。従って、最も基本的な場合である一対の渦輪の干渉で流れ場の持つ特性、又、問題点を色々な角度から検討しておくことは重要であると思われる。

そこで今回、一対の渦輪の干渉について、特に(1)フロー・パタンの考察、(2)力学的保存量による考察、そして(3)近似モデルによる粘性効果の考察を行った。

2. 流れのパタン

これまでの研究において、“追い抜き”を行う条件下で

の渦輪の干渉では、渦輪の軌跡と渦軸上の流速変化については、完全流体の理論で実験結果とよく近似される結果が得られている^{4), 5), 6)}。

この章では、さらに流れのパタンにおいても完全流体の理論によるシミュレーション結果が可視化実験によって得られるものをよく表し得ることを示す。

本章では、一対の渦輪の干渉、流れ場における流跡線、流速ベクトル、並びに統合流脈による三種類の流れのパタンについて述べることにする。以後、可視化による流れパタンと数値シミュレーションによるそれとを対応させて説明する。実験結果と計算条件は、近似的には一致しているものの、厳密に言えばいくらか異なるものも含まれている。しかしながら、ここでの筆者らの主眼点とする所は、細部にこだわることなく、大局的な流れのパタンの類似性に着目していることを断わっておく。

なお、数値シミュレーションに用いた計算式は付録に示す。

2.1 流跡線

まず、流れの可視化によって得られた結果を Fig. 1(a)に示す。これは、文献(7)に示されるようなタイプの渦輪列発生実験装置を使って得られたものである。ここに示す渦輪列は追い抜きモードであり、左端の渦発生箱の正面に設けられた直径4 cmの円形オリフィスから毎秒12

* 松下電器産業

個の渦輪が発生し、オリフィス直径の約2倍前後下流位置で追い抜きが行われる。あらかじめ渦発生箱内で微細な白い粉（竜角散）を浮遊させておく。それらを含んだ空気流を渦干渉場で1/2秒のシャッタースピードで撮影すると、図のような流跡線図が得られる。この写真は、スリット光によって渦輪の中心を通る断面を光切断したものであり、1/2秒間に3回の追い抜きが行われ、それらの運動結果を多重露光したものである。ところで、これらの渦輪が、もし1個だけオリフィスで作られたと仮定した場合、その渦輪が持つ自己誘導速度は、上述の文献で示した推定法によれば、約30cm/sである。

さて、一对の渦輪の運動の軌跡は、完全流体の理論式によれば、渦輪の直径 D と初期時における渦と渦との並進方向の間隔 H との比 D/H によって干渉に関する相似条件は近似的に決まる。厳密には、渦核の大きさも効いてくるが、その影響は余り大きくはなく、近似的に無視できる程度である。上の実験例では、 $D \approx 5\text{ cm}$ 、 $H = 2.5\text{ cm}$ であり、 $D/H = 2$ 。本論文の数値シミュレーションでは、以後一貫して渦の直径8cm、初速24cm/s、渦と渦との発生時間間隔を1/6sに取っている。この条件での $D/H = 2$ 。従って、この場合、実験とシミュレーション

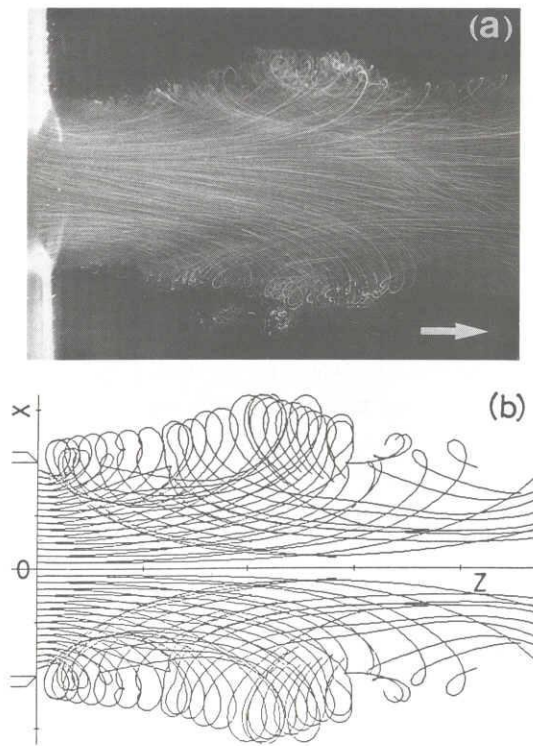


Fig. 1 Pathlines of the flowfield due to the interaction of vortex rings, (a) flow visualization due to white powders, (b) numerical simulation.

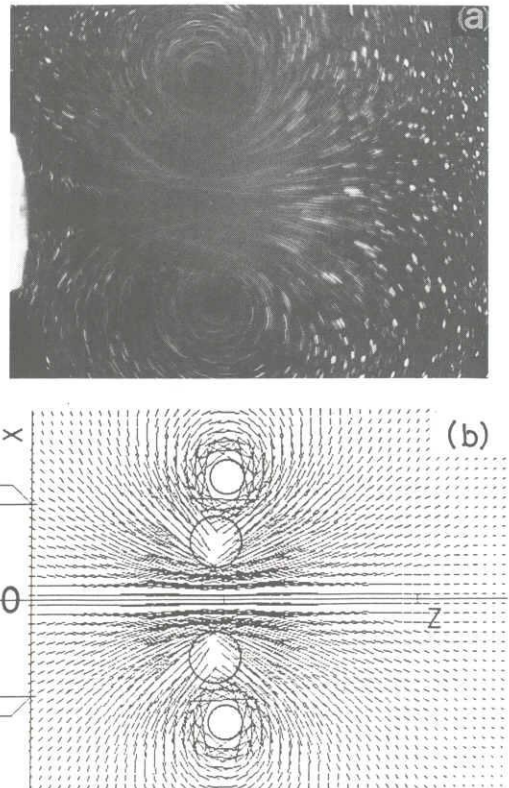


Fig. 2 Velocity vectors of the flowfield due to the interaction of a pair of vortex rings, (a) flow visualization due to white powders, (b) numerical simulation.

とでは干渉に関する相似条件が得られている。可視化と数値シミュレーション、Fig. 1(b)、とにおける渦の軌跡を比較するとき、全体のなふくらみや、中心部分の流線の様子は類似しており、特にループを描く様子については、その特徴がよく現れている。

2.2 流速ベクトル

流速ベクトルの分布の様子を可視化するために、今度は渦発生箱の中ではなく、オリフィスの外側にあらかじめ前述した竜角散を浮遊させておき、そこへ一对の渦輪を0.16s 間隔で発生させ、二つの渦輪が丁度並んだあたりで1/15s のシャッタースピードで流れ場を撮影した、Fig. 2(a)。この実験は、前述の実験装置ではなく、文献(6)で示されるようなスピーカ駆動を用いて行った。オリフィスの内径は4cm(渦輪の直径は、この場合約5cm)、1個の渦のみが流れ場に存在すると仮定したときの渦の自己誘導速度は、約15cm/sである。従って、 $D/H = 2$ 。ゆえに、干渉の相似条件は前回のものと同じである。実験では、二つの渦輪がほぼ並んだ所(厳密に言えば、後

の時刻に発生した渦が僅かにオリフィス側)である。数値シミュレーションでは、実験に合わせて二つの渦輪の位置を定め、計算を行った。なお、流速ベクトル図は1/15s間の移動距離である、Fig. 2(b)。シミュレーションによる線図は、瞬間的な流れ場のベクトルであるが、可視化では渦が1/15s間動く間の流線を示すので厳密に言えば一致しないのが当然であるが、実験とシミュレーションの図を比較すると全体的なパタンの特徴は良く似ていると言える。

2.3 統合流脈

これまでのものは、基本的には個々の流体粒子の運動軌跡から得られるパタンに関する情報であった。しかし、今度は多数の流体粒子(厳密には流体中に浮遊する微粒子群)が形成する特徴的なパタンについての情報である。Fig. 3(a)は、スモークワイヤ法によって可視化された渦輪の追い抜きの一瞬间であり、この写真で前方に来ている渦輪が、実は後方に位置する渦輪の内側をくぐり抜けた後の状態である。ここで追い抜かれた渦輪には尾のようなもの(筆者らは、これをスカート⁸⁾と呼ぶ)が付いている。このスカート状のものが完全流体に基づく数値シミュレーションでも出現したのは興味深いことである。Fig. 3(b)。なお、シミュレーションでは、連続的ではなく、断続的にマーカー粒子を発生させ、それらを時間的に追跡してパタンを描かせた。ここでシミュレーションにおける計算条件は前述までのものと同じであるが、実

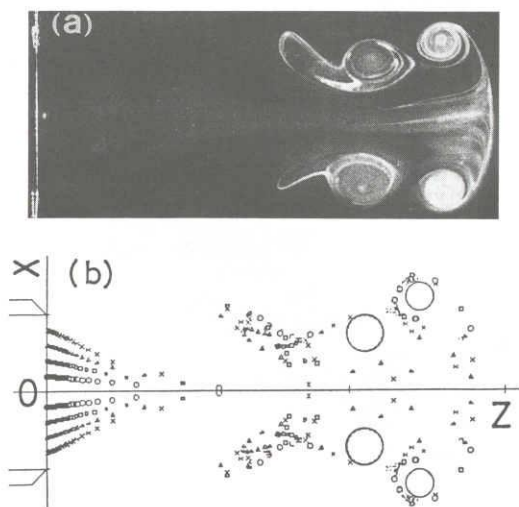


Fig. 3 Integrated streaklines of the flowfield due to the interaction of a pair of vortex rings, (a) flow visualization due to smoke wire method, (b) numerical simulation (pattern due to marker particles).

験では、オリフィス径が8cm(渦輪の直径は約9cm)、単独運動を仮定したときの渦輪の並進速度が約30cm/s、渦の発生時間間隔0.143sである。ゆえに、 $D/H \approx 2.1$ であり、干渉の相似条件は近似的に成り立つ。

3. 力学的保存量

前章において、一対の渦輪が追い抜きを行う流れ場では、実験と完全流体の理論による流れのパタンが近似的に良く一致し、理論が有効であることを具体的に示した。勿論、粘性効果の無視できない領域には注意する必要があるが、全体的な挙動は完全流体の理論で近似できることは明らかである。本章では、上述の理論をもとにして基本的な渦系の力学量の考察を行う。なお、計算条件は、前章において与えたものと同じである。

3.1 軌跡・速度・加速度

Fig. 4に、非粘性のもとで一対の渦輪の相互追い抜き時の軌跡の様子を示す。これは周知の結果ではあるが、後述する結果との比較のために示しておく。ここでは、初期時の渦核の直径は渦輪のその20%と仮定してシ

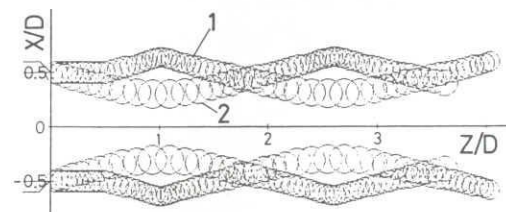


Fig. 4 Trajectories of the flowfield due to a pair of vortex rings, which is based on inviscid theory.

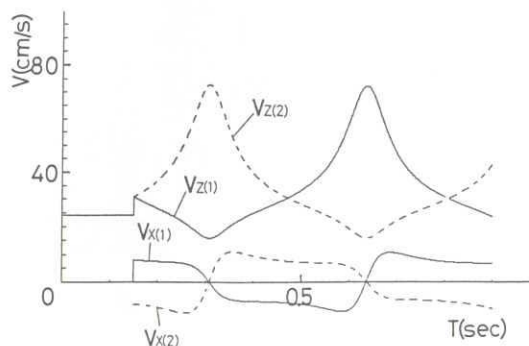


Fig. 5 Variation of velocity of the flowfield due to the interaction of a pair of vortex rings; traveling direction, z, and radial direction, x.

ミュレーションを行った。1/60s 間隔での渦位置とそこでの渦核の断面積を円面積で表示している。断面積の変化は、核を占める体積が不変であるというヘルムホルツの渦定理に従う。勿論、核が常に円形断面を保つというのは近似的な仮定にすぎず、核の断面積が大きくなる程、又、相互干渉する渦同士が接近する程妥当なものと言えなくなる。一対の渦輪の相互干渉では、計算による誤差がなければ、渦運動の軌跡は、正確に周期性を持ったものになる。以後、最初に発生した渦輪を渦1、2番目に発生した渦輪を渦2と呼ぶことにする。

Fig. 5に、渦1と渦2の進行方向(z)と半径方向(x)における速度変化を示す。渦1は単独時には、一定の速度で並進運動を行うが、渦2が発生した瞬間に速度が不連続的にジャンプする。その後は、図に示すように2つの渦が並ぶまでは渦1は z 方向に速度を減じ、逆に、渦2のそれは増大する。その後は、相互に立場を変えつつ運動をつづける。半径方向の運動をみると、2つの渦が並ぶ位置で速度が零になる。

渦が加速、または減速する様子を見るために加速度を求めてみた、Fig. 6(a), (b)。渦が並ぶ少し手前で渦1は最も減速し、渦2は最も加速するが、並ぶ位置では両者とも零になり、以後立場を変え、いわゆるグラフ的に言えば点対称的な変化をする。半径方向の加速度を見ると、

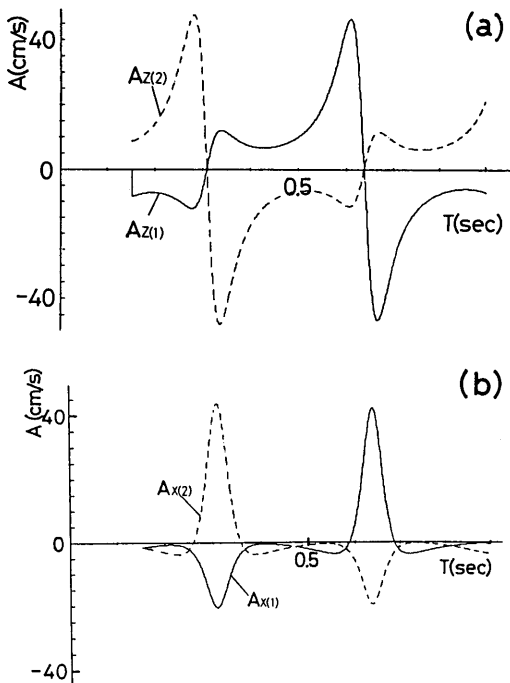


Fig. 6 Variation of acceleration of the flowfield due to a pair of vortex rings, (a) traveling direction, (b) radial direction.

追ひ抜きの瞬間に渦1は最小値、渦2は最大値をとる。

3.2 渦系のインパルス

Lamb⁹⁾によれば、同一軸上を並進する渦系のインパルス P は次式によって与えられる。

$$P = \pi \rho \sum_i \Gamma_i x_i^2 \quad (1)$$

ここで、 ρ は流体の密度、 Γ_i は i 番目の渦輪の循環、 x_i は i 番目の渦輪の半径である。この式に基づき、Fig. 4のように一対の渦輪が運動する場合に、渦1と渦2の個々のインパルス、並びに系全体のインパルスを計算してみれば、Fig. 7のようになり、渦系として見るとき、インパルスは厳密に保存されていることが判る。

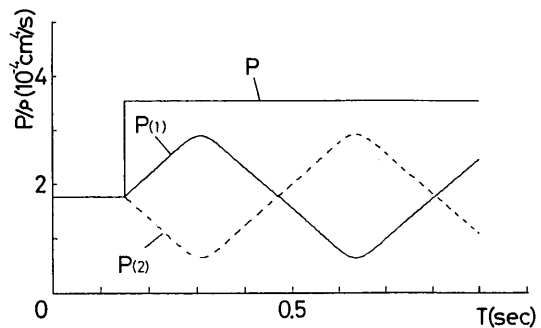


Fig. 7 Impulse of a pair of vortex rings.

さて、干渉時における個々の渦についてのインパルスは直観的に理解することにはやや困難があると思われる。しかし、各々の渦が x_i の半径を持つ瞬間において単独で存在するものと仮定し、その時に流れ場全体が持つ運動量を考えればよいであろう⁹⁾。

3.3 渦系のエネルギー

Lamb⁹⁾によれば、同一軸上を並進する渦輪の系の持つ運動エネルギー E は次式で与えられる。

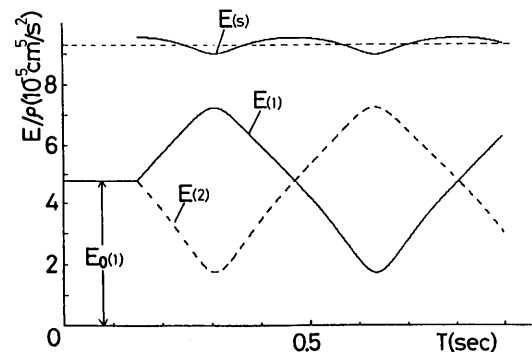


Fig. 8 Kinetic energy of a pair of vortex rings.

$$E = \frac{\rho}{2} \sum_i \Gamma_i x_i^2 \left\{ \log \left(\frac{8 x_i}{a_i} \right) - \frac{7}{4} \right\} \quad (2)$$

ここで、 a_i は i 番目の渦核の半径である。渦1と渦2とが干渉時を持つ運動エネルギー $E(1)$, $E(2)$ を計算すれば、Fig. 8の結果が得られる。また、それらの和である $E(S)$ は、いくらか波打っているものの、近似的に保存されている。図中の $E_0(1)$ は、渦1が単独で運動する時を持つ運動エネルギーを示す。

4. 粘性効果

ここでは、*Tung*¹⁰⁾によって求められた渦核の渦度の拡散式に基づいて軌跡を計算する。渦核の半径を a とすれば

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{4 \nu t} \\ \tau &= \int_0^t x(t') dt' / x(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 x は t なる時刻における渦核の半径である。また、渦輪の自己誘導速度 w_0 は粘性を考慮した場合には

$$w_0 = \frac{\Gamma}{4 \pi x_0} \left\{ \log \left(\frac{8 x}{a} \right) - 0.558 \right\} \quad (4)$$

ここで、 x_0 は初期時における渦輪の半径である。上述の式は、境界層近似によって得られたものであり、渦核の直径が渦輪の直径に比して十分小さいという条件のもとで成り立つが、ここではその条件を一応無視してシミュ

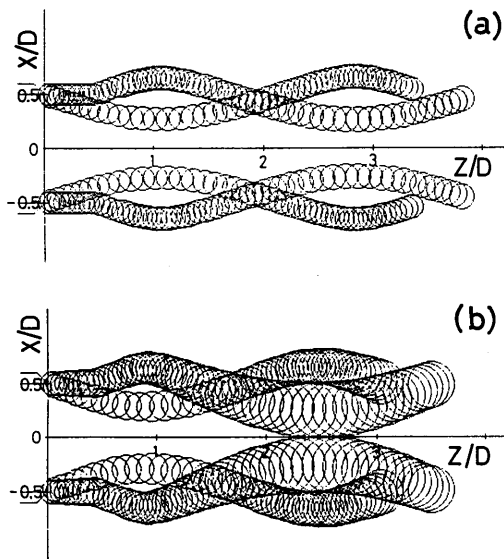


Fig. 9 Viscous effects on the core diameter and trajectory of a pair of vortex rings, (a) $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ (water), (b) $\nu = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$ (air).

レーションを続けた。

Fig. 4 に非粘性の場合の変化する様子を示したが、ここでは $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ の水に相当する場合、Fig. 9(a) について計算した。水の場合には、全体的な傾向として非粘性にくらべ丸みを帯びた軌跡になることと、同じ時間経過に対して渦の進む距離がいくらか短くなることが判る。しかし、渦核の大きさは非粘性の場合に比べあまり変わっていない。

しかしながら、空気の場合には、渦核の大きさは著しく増大してしまうことが判る。Fig. 9(b)では、2回目の追い抜きの際、内側に入って来た渦の核が接触するまでに広がってしまう。これは、すでに理論の前提である細い渦核の条件からはずれてしまっているが、粘性の影響の大きさを近似的に表していると考えてもよいであろう。従って、この場合、実験の場合のように乱れが大なり小なり入り込む場合には、2回目の追い抜きの実現は容易ではないことを示唆している。

水の場合、空気よりも非粘性に近いふるまいを示す実験例¹¹⁾がある、Fig. 10。第1回目の追い抜き後、さらに5回も渦1と渦2とが交互に前方に抜け出ることが判る。空気の場合、このように多数回も渦核が交互に前方に抜け出る実験例を著者らはこれまで知らない。

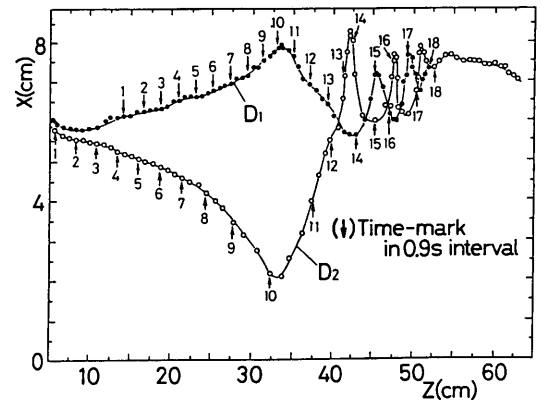


Fig. 10 An experimental trajectories due to a pair of vortex rings performed in water.

5. 結 言

同軸上を並進する一対の渦輪の相互追い抜き干渉における基本的諸問題について考察した。まず、流跡線、速度ベクトル、統合流脈による3種類の流れパターンについては、完全流体に基づく数値シミュレーションが可視化による流れの特徴をよく示していることが判った。

次に、渦系における軌跡、速度、加速度、インパルス、

運動エネルギーなどについて数値シミュレーションにより考察した。その結果、速度や加速度を示すグラフにより干渉時のダイナミックな様子が把握された。また、渦系の持つインパルスや運動エネルギーなどの力学的保存量について個々の渦が各瞬間に持つ量が計算された。

最後に、Ting らによる渦核成長モデルを用い、水と空気の場合について渦の軌跡をシミュレートしたところ、実験事実を説明出来る結果が得られた。

付録

静止流体中の点 (z_0, x_0) に置かれた渦輪が任意の点 (z, x) に誘起する速度は次式で与えられる⁶⁾。

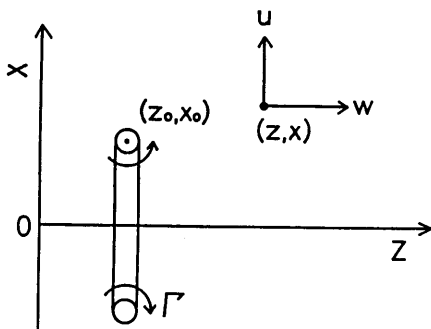


Fig.11 Cylindrical coordinates and its related notations.

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi x} \sqrt{\frac{x_0}{x}} \left\{ U + \frac{dU}{d\kappa} \kappa \frac{(z-z_0)^2 + x_0^2 - x^2}{(x_0+x)^2 + (z-z_0)^2} \right\}$$

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{\frac{x_0}{x}} \frac{dU}{d\kappa} \kappa \frac{z-z_0}{(x_0+x)^2 + (z-z_0)^2}$$

ここで

$$\kappa^2 = \frac{4x_0x}{(x_0+x)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$U = \frac{2}{\kappa} (F - E) - \kappa F$$

$$\frac{dU}{d\kappa} = \frac{2-\kappa^2}{\kappa^2(1-\kappa^2)} E - \frac{2}{\kappa^2} F$$

$$u_0 = -\frac{\Gamma}{4\pi x_0} \left\{ \log\left(\frac{8x_0}{a}\right) - 0.25 \right\}$$

ここで、 u_0 は渦輪の自己誘導速度。 F, E はそれぞれ偏角を κ とする第1種、第2種の完全楕円積分。

次に、円柱座標系において、点 (z_0, x_0) にある渦輪による流れ関数 $\psi(z, x)$ は、Lamb⁹⁾によれば次式で与えられる。

$$\psi(z, x) = -\frac{\Gamma}{2\pi} (r_1 + r_2) \left\{ F(\alpha) - E(\alpha) \right\}$$

ここで、 $r_1 = \{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2\}^{1/2}$

$$r_2 = \{(x+x_0)^2 + (z-z_0)^2\}^{1/2}$$

$$\alpha = (r_2 - r_1) / (r_2 + r_1)$$

文 献

- 1) Fung, Y. T., ほか2名, AIAA J., vol. 17 no. 6 (1979), 553.
- 2) Acton, E., J. F. M., vol. 98 part 1 (1980), 1.
- 3) 高曾・ほか2名, 第17回流体力学講演会講演集 (1985), 246.
- 4) Yamada, H., and Matui, T., Phys. of Flu., vol. 21 no. 2 (1978), 292.
- 5) Yamada, H., and Matsui, T., Phys. of Flu., vol. 22 no. 7 (1979), 1245.
- 6) 望月・ほか2名, なかれ, 第3巻第2号(昭59), 139.
- 7) 山田・ほか3名, なかれ, 第3巻第4号(昭59), 364.
- 8) 山田・中嶋, なかれ, 第5巻第1号(昭61), 64.
- 9) Lamb, H., hydrodynamics, (1945), 239, Dover Press.
- 10) Tung, C., and Ting, L., Phys. of Flu., vol. 10, no. 5 (1967), 901.
- 11) Claus, H. H., Bericht 26/1978, Max-Planck Institut Für Strömungs-Forschung (1978).