

相関母数を中心とした二変数ガンマ分布の理論と特性

長尾正志

社会開発工学科

(1986年8月20日受理)

Theory of Bi-variate Gamma Distribution on the Subject of Correlation Parameter

Masashi NAGAO

Department of Architecture, Urban Engineering, and Civil Engineering

(Received August 20, 1986)

Gamma type distribution is considered as a useful continuous distribution in civil engineering, especially in the field of stochastic hydrology. This study aims to summarize the fundamental or applied statistical theory on bi-variate gamma distribution in compact and practical tables and figures.

This theory of bi-variate gamma distribution was originated by W. F. Kibble (1941) and is expressed by the following three forms; that is, asymmetrical bi-variate gamma, symmetrical gamma and bi-variate exponential distribution. These statistical characters of bi-variate gamma distribution are analyzed on the subject of the correlation parameter which plays an essential role in a bi-variate distribution theory. Especially, the joint probability density function, the conditional density distribution, and the method of parameter estimation are described in detail. Moreover, in order to understand the relationship between the correlation parameter and the probability density function, a drawing of the density function is made using three dimensional computer graphics with various correlation parameters.

1. は し が き

1.1 水工学における二変数ガンマ分布の役割

合理的な治水計画の策定のためには、水理構造物の防災機能に関連する多くの水文要因を同時に勘案していかなければならない。これには、多変数統計理論、とくにその中心として二変数統計理論、が根底となる。このために、従来から対称分布としては二変数正規分布が多用されてきた。しかし、水文量はそのまま正規分布に従うことはむしろまれであるから、その非対称性を直接導入しうる理論分布の採用が要求される。

ガンマ分布は、その母数の選択に応じて、対称分布である正規分布に近い形から、指数分布あるいはもっと極端に歪んで単調減少する形に至る広範囲な形状を表現できることから、水文統計ばかりでなく、多くの分野で汎用性の高い分布と目されている。また、ガンマ分布はその分布形の導出において、 χ^2 分布などとの関連から理論的根拠の明確であることも好ましい特色である。

1.2 二変数ガンマ分布理論の歴史

相関を勘案した一般的な二変数ガンマ分布の理論の歴

史は、正規分布理論に比べてかなり浅いものである^{1),2)}。1930年代の Wicksell³⁾による特性関数の誘導に始まり、Kibble による直交多項式や特殊関数による表示⁴⁾、Kishnamoorthy らによる多変数への拡張⁵⁾、わが国では Kibble の理論に基づいた井沢の気象統計学として研究⁶⁾がある。他方、これとは異なった理論展開から出発した Cherian⁷⁾や McKay⁸⁾の研究もあるが、これら後者の理論では、回帰特性が非線形性を示すことから、あまり実用に適したモデルとはいえないようである。

なお、指数分布はガンマ分布の特殊な形であり、極値分布などの誘導においても重要である。もちろん、解折上の簡便さも看過できない。したがって、二変数指数分布の研究はかなり古くからみられるが、その表示にはかなり相違したものが提案されている。もちろん、前述のガンマ分布から誘導されるものもあるが、それ以外として、代表的なものに、極値分布で著名な Gumbel らの研究がある。彼らはその解折結果から、正規分布に偏した従来の相関性の吟味、回帰分析の手法を批判している⁹⁾。さらに、Marshall & Olkin¹⁰⁾や Freund¹¹⁾の研究もあるが、いずれも回帰特性の非線形性が回避できない。したがって、やはり前述の Kibble の理論モデルが合理的で使いやすいためといえよう。なお、最近、端野¹²⁾によって

Freund の理論を計画降雨波形の定式化に利用しようとする試みも提案されている。

1.3 本論文の概要

ここでは、Kibble, 井沢の研究を継承・発展させてきた著者らの研究成果をできるだけ簡潔な形で体系化して表示することにした。すなわち、二変数ガンマ分布の基礎特性を、理論式として表現し、実用上の便宜を計っている。その際、記述の重点を多変数分布の基本である相関母数におき、密度分布の特性および母数推定法の成果を詳細に記述している。さらに、相関母数と密度分布曲面との関連を、コンピュータ・グラフィックスによる3次元体視によって表現し、直観的理解に役立てようとしている。

2. 二変数ガンマ分布の密度分布特性

2.1 基礎理論

以後、ガンマ分布としては、原点母数を0とした2母数型に限定して記述を進める。

まず、分布形の分類には、変量 x_1, x_2 の周辺分布 $f_1(x_1), f_2(x_2)$ の形状母数 ν_1, ν_2 のあい異なる一般の場合、形状母数の等しい同型 ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$) の場合、さらにそれぞれの形状母数を1 ($\nu_1 = \nu_2 = 1$) とした指数分布に分けて、表記する^{13),14),15)}。

Table 1 は、変量 x_1, x_2 の二変数ガンマ分布の密度分布、周辺分布、および条件分布の諸特性を示す。なお、表中の記号は、 $\Gamma(\nu)$: ガンマ関数、 $I_\nu(\chi)$: 引数 ν の第1種変形ベッセル関数である。

2.2 密度分布の相関母数による多項式展開

相関母数 ρ による密度分布の影響をみるために、密度分布を相関母数によって直交多項式の形で展開して表現したのが、Table 2 の上側である。記号は、表中にも記したが、 ${}_pF_q$: 一般化された超幾何関数、 $B(x, y)$: ベータ関数、 $L_n^\alpha(x)$: Laguerre の陪多項式、 $L_n(x)$: Laguerre の多項式で、その定義は表中に記されている。

ここで、相関母数 ρ を含まない表中の第1行目右辺が独立変量の場合の周辺密度分布の積という形になっていることに注意されたい。したがって、その以後の項(第2行目)が相関の影響を含んだ部分である。

2.3 条件付分布の最頻値

このように、二変数ガンマ分布の場合、分布特性は複雑である。そこで、これを $\eta = x_2/\lambda_2$ (x_2 の規準化意量) を固定した場合の $\xi = x_1/\lambda_1$ (x_1 の規準化変量) の条件付分布 ($\xi | \eta$) の最頻値の位置 ξ 、および最頻値の存在条件

をTable 2 の下方に示す。

2.4 和の分布

規準化変量の組合せによって作られる統計量の一例として、和 $s = \xi + \eta$ の分布を Table 2 の一番下の欄に示す。ただし、先述の最頻値の場合と同様に、一般の $\nu_1 \neq \nu_2$ の場合では、和の分布も現在のところ求められていない。

3. 二変数ガンマ分布の基礎的特性と母数推定

3.1 基礎的特性

1) 特性関数

以下の定義式

$$Q(z_1, z_2) \equiv E[\exp(iz_1x_1 + iz_2x_2)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (iz_1x_1 + iz_2x_2) \cdot f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

に密度分布の式を代入して、特性関数が求められる。

2) 積率と基礎統計量

まず、 x_1, x_2 の原点のまわりの p, q 次の積率は、以下の定義式

$$\nu_{pq} \equiv \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x_1)^p (x_2)^q \cdot f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

で求められ、その結果を Table 3 に示す。

また、この積率を利用して、平均、分散などの基礎統計量が導出される。なお、歪度、尖度の定義はつぎのとおりである。

$$\text{歪度 } \gamma_{10} \equiv \mu_{30}/(\mu_{20})^{3/2}, \text{ 尖度 } \gamma_{20} \equiv \mu_{40}/(\mu_{20})^2 - 3$$

3) 回帰特性と条件分散

条件付平均値(回帰曲線)と条件付分散

条件付平均値(回帰曲線)と条件付分散を Table 3 の下欄に示す。このように、この理論分布では、条件付平均値は、正規分布と同様に線形回帰となるが、条件付分散についてはもはや等分散性は成立しないので、指定変数の増加に伴って線形的に増大する。

3.2 二変数ガンマ分布の母数推定法

二変数ガンマ分布の母数も、若干の不明確な点は残されてはいるが、かなり理論的推定が可能となっている。部分標本についての研究もあるが、ここでは全標本に対する最尤解と積率解を Table 4 に示す^{14),15)}。

ところで、この場合留意すべき点は相関母数に関してである。すなわち、最尤解では、母数は陰に含まれるために取り扱いが容易でない。そこで、概略値を知るためには、積率解の方が簡便である。もちろん、最尤解が不偏性その他で積率解より優れていることは数値実験などで確認されている¹⁶⁾。

Table 1. Some characters of probability density function on bi-variate Gamma distribution.

区分 特性	一般の分布 ($\nu_1 = n + m, \nu_2 = n$)	同型の分布 ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$)	指数の分布 ($\nu_1 = \nu_2 = 1$)
密度分布 $f(x_1, x_2)$	$\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(m)(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{n+1}{2}}\lambda_1^m(1-\rho)^{\frac{n-1}{2}}}$ $\times \exp\left\{-\frac{x_1}{\lambda_1(1-\rho)} - \frac{x_2}{\lambda_2(1-\rho)}\right\} (x_1x_2)^{\frac{n-1}{2}} x_1^m$ $\times \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{m-1} \exp\left\{\frac{\rho x_1 t}{\lambda_1(1-\rho)}\right\}$ $\times I_{n-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_1x_2}{\lambda_1\lambda_2}}(1-t)\right) dt$	$\frac{1}{\Gamma(\nu)(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{\nu+1}{2}}(1-\rho)\rho^{\frac{\nu-1}{2}}}$ $\times \exp\left\{-\frac{x_1}{\lambda_1(1-\rho)} - \frac{x_2}{\lambda_2(1-\rho)}\right\}$ $\times (x_1x_2)^{\frac{\nu-1}{2}} I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_1x_2}{\lambda_1\lambda_2}}\right)$	$\frac{1}{\lambda_1\lambda_2(1-\rho)}$ $\times \exp\left\{-\frac{x_1}{\lambda_1(1-\rho)} - \frac{x_2}{\lambda_2(1-\rho)}\right\}$ $\times I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_1x_2}{\lambda_1\lambda_2}}\right)$
周辺分布 $f_1(x_1)$ $f_2(x_2)$	$\frac{1}{\Gamma(n+m)\lambda_1^{n+m}} x_1^{n+m-1} \exp\left(-\frac{x_1}{\lambda_1}\right)$ $\frac{1}{\Gamma(n)\lambda_1^n} x_2^{n-1} \exp\left(-\frac{x_2}{\lambda_2}\right)$	$\frac{1}{\Gamma(\nu)\lambda_1^\nu} x_1^{\nu-1} \exp\left(-\frac{x_1}{\lambda_1}\right)$ $\frac{1}{\Gamma(\nu)\lambda_2^\nu} x_2^{\nu-1} \exp\left(-\frac{x_2}{\lambda_2}\right)$	$\frac{1}{\lambda_1} \exp\left(-\frac{x_1}{\lambda_1}\right)$ $\frac{1}{\lambda_2} \exp\left(-\frac{x_2}{\lambda_2}\right)$
条件付分布 $f(x_1 x_2)$	$\frac{1}{\Gamma(m)\lambda_1^{\frac{n+1}{2}+m}\lambda_2^{\frac{n-1}{2}}(1-\rho)\rho^{\frac{n-1}{2}}} \times$ $\exp\left\{-\frac{x_1}{\lambda_1(1-\rho)} - \frac{\rho x_2}{\lambda_2(1-\rho)}\right\} x_1^{\frac{n-1}{2}+m} x_2^{\frac{n-1}{2}}$ $\times \int_0^1 (1-t)^{\frac{n-1}{2}} t^{m-1} \exp\left\{\frac{\rho x_1 t}{\lambda_1(1-\rho)}\right\}$ $\times I_{n-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_1x_2}{\lambda_1\lambda_2}}(1-t)\right) dt$	$\frac{\lambda_2^\nu}{(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{\nu+1}{2}}(1-\rho)\rho^{\frac{\nu-1}{2}}} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}$ $\times \exp\left\{-\frac{x_1}{\lambda_1(1-\rho)} - \frac{\rho x_2}{\lambda_2(1-\rho)}\right\}$ $\times I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_1x_2}{\lambda_1\lambda_2}}\right)$	$\frac{1}{\lambda_1(1-\rho)}$ $\times \exp\left\{-\frac{x_1}{\lambda_1(1-\rho)} - \frac{\rho x_2}{\lambda_2(1-\rho)}\right\}$ $\times I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\frac{x_1x_2}{\lambda_1\lambda_2}}\right)$

記号 $\Gamma(\nu)$: ガンマ関数, $I_\nu(x)$: 第1種変形ベッセル関数

Table 2. Related characters on bi-variate Gamma distribution ($\xi = x_1/\lambda_1, \eta = x_2/\lambda_2$)

区分 項目	一般の分布 ($\nu_1 = n + m, \nu_2 = n$)	同型の分布 ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$)	指数分布 ($\nu_1 = \nu_2 = 1$)
密度分布の 相関母数に よる多項式 展開	$f(\xi, \eta) = \frac{e^{-\xi-\eta}}{\Gamma(n)\Gamma(n+m)} (\xi\eta)^{n-1} \xi^m$ $\times \sum_{r=0}^{\infty} L_n^{r-1}(\eta) \Gamma(n+1) {}_2F_2(-r, m; n, n+m; \xi) \rho^r$ <p>記号 ${}_pF_q$: 一般化された超幾何関数</p> ${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z)$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n z^n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_q)_n n!}$ $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)$ $= \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$ $(\alpha)_0 = 1$	$f(\xi, \eta) = \frac{e^{-\xi-\eta}}{\{\Gamma(\nu)\}^2} (\xi\eta)^{\nu-1}$ $\times \sum_{n=0}^{\infty} nB(n, \nu) L_n^{\nu-1}(\xi) L_n^{\nu-1}(\eta) \rho^n$ <p>記号</p> $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} : \text{Beta 関数}$ $L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha})$ $= \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{x^m}{m!}$ <p>: Laguerre の陪多項式</p>	$f(\xi, \eta) = e^{-\xi-\eta}$ $\times \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\xi) L_n(\eta) \rho^n$ <p>記号</p> $L_n(x) = L_n^0(x)$ $= \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$ $= \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{n-m} \frac{x^m}{m!}$ <p>: Laguerre の多項式</p>
条件付分布 の最頻値の 位置	現在の段階で求められていない。	$\frac{1-\rho}{2\rho\eta} = \frac{2(\nu-1)}{z^2} + \frac{I_\nu(z)}{zI_{\nu-1}(z)}, [\eta: \text{指定}]$ $z \equiv 2\sqrt{\rho\xi\eta} / (1-\rho)$	$\frac{1-\rho}{2\rho\eta} = \frac{I_1(z)}{zI_0(z)}, [\eta: \text{指定}]$ $z \equiv 2\sqrt{\rho\xi\eta} / (1-\rho)$
最頻値発生 の条件	同上	$\eta \geq \eta_c = \nu \frac{(1-\rho)}{\rho} - \nu(\nu-1) \frac{1-\rho}{\rho} \frac{1}{\xi}$ <p>(等号は $z=0$ で成立)</p>	$\eta \geq \eta_c = \frac{1-\rho}{\rho}$ <p>(等号は $z=0$ で成立)</p>
和の分布 $f(s)$	同上	$\frac{\sqrt{\pi}(s/2)^{\nu-1/2} e^{-s/(1-\rho)}}{\Gamma(\nu)(1-\rho)^{1/2} \rho^{(2\nu-1)/4}} I_{\nu-1}\left(\frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho} s\right)$ $s = \xi + \eta$	$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(e^{-\frac{s}{1+\sqrt{\rho}}} - e^{-\frac{s}{1-\sqrt{\rho}}} \right)$ $s = \xi + \eta$

Table 3. Fundamental characters of bi-variate Gamma distribution.

区分 特性		一般の分布 ($v_1 = n + m, v_2 = n$)	同型の分布 ($v_1 = v_2 = v$)	指数分布 ($v_1 = v_2 = 1$)
特性関数 $Q(z_1, z_2)$		$\frac{(1-\rho)^n}{\{[1-\lambda_1(1-\rho)z_1i]\{1-\lambda_2(1-\rho)z_2i\}-\rho\}^n(1-i\lambda_1z_1)^m}$	$\left(\frac{1-\rho}{\{1-\lambda_1(1-\rho)z_1i\}\{1-\lambda_2(1-\rho)z_2i\}-\rho} \right)^v$	$\frac{1-\rho}{\{1-\lambda_1(1-\rho)z_1i\}\{1-\lambda_1(1-\rho)z_1i\}-\rho}$
原点のまわりの積率 v_{pq}		$\frac{\Gamma(n+m+p)\Gamma(n+q)(1-\rho)^{n+q}\lambda_1^p\lambda_2^q}{\{\Gamma(n)\}^2\Gamma(m)}$ $\times \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}(1-\rho x)^{-n-m-q}$ $\times F(-m-p, -q; n; \rho x) dx$	$\frac{\Gamma(v+p)\Gamma(v+q)}{\{\Gamma(v)\}^2}(1-\rho)^{p+q+v}\lambda_1^p\lambda_2^q$ $\times F(v+p, v+q; v; \rho)$	$p! q! (1-\rho)^{p+q+1}\lambda_1^p\lambda_2^q$ $\times F(p+1, q+1; 1; \rho)$
基礎統計量	平均	$\bar{x}_1 = (n+m)\lambda_1, \quad \bar{x}_2 = n\lambda_2$	$\bar{x}_1 = v\lambda_1, \quad \bar{x}_2 = v\lambda_2$	$\bar{x}_1 = \lambda_1, \quad \bar{x}_2 = \lambda_2$
	分散	$d_1^2 = (n+m)\lambda_1^2, \quad d_2^2 = n\lambda_2^2$	$d_1^2 = v\lambda_1^2, \quad d_2^2 = v\lambda_2^2$	$d_1^2 = \lambda_1^2, \quad d_2^2 = \lambda_2^2$
	相関係数	$r = \sqrt{n/(n+m)\rho}$	$r = \rho$	$r = \rho$
	歪度	$\gamma_{10} = 2/\sqrt{n+m}, \quad \gamma_{01} = 2/\sqrt{n}$	$\gamma_{01} = \gamma_{10} = 2/\sqrt{v}$	$\gamma_{10} = \gamma_{01} = 2$
	尖度	$\gamma_{20} = 6/(n+m), \quad \gamma_{02} = 6/n$	$\gamma_{20} = \gamma_{02} = 6/\sqrt{v}$	$\gamma_{20} = \gamma_{02} = 6$
回帰曲線 $E\{(x_1 x_2)\}$		$(n+m)\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\rho(x_2 - n\lambda_2)$	$v\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\rho(x_2 - v\lambda_2)$	$\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\rho(x_2 - \lambda_2)$
条件付分散 $d^2(x_1 x_2)$		$\{m+n(1-\rho)^2\}\lambda_1^2 + 2\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}\rho(1-\rho)x_2$	$v\lambda_1^2(1-\rho)^2 + 2\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}\rho(1-\rho)x_2$	$\lambda_1^2(1-\rho)^2 + 2\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}\rho(1-\rho)x_2$
$\overline{d^2(x_1 x_2)}$		$\lambda_1^2\{m+n(1-\rho^2)\}$	$v\lambda_1^2(1-\rho^2)$	$\lambda_1^2(1-\rho^2)$

記号 $F(a, b, c; z)$: 超幾何関数 $\bar{x}_i = \sum_{k=1}^n x_{ik}/n$ x_{ik} : 変数 x_i の k 番目の標本 ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots, n$)

Table 4. Parameter estimation of bi-variate Gamma distribution.

条件	区分方法	一般の分布 ($\nu_1 = n + m, \nu_2 = n$)	同型の分布 ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$)	指数分布 ($\nu_1 = \nu_2 = 1$)
最 尤 解	形状母数が既知の解	現在の段階では解は求められていない。	標本 $(x_{1i}, x_{2i}) (i = 1, 2, \dots, n), \xi_i = x_{1i}/\lambda_1, \eta_i = x_{2i}/\lambda_2$	
			$\hat{\lambda}_j = \frac{1}{n\nu} \sum_{i=1}^n x_{ji}, \quad (j = 1, 2)$ $\nu \sqrt{\hat{\rho}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{I_\nu \left(\frac{2\sqrt{\hat{\rho}}}{1-\hat{\rho}} \sqrt{\xi_i \eta_i} \right)}{I_{\nu-1} \left(\frac{2\sqrt{\hat{\rho}}}{1-\hat{\rho}} \sqrt{\xi_i \eta_i} \right)} \sqrt{\xi_i \eta_i}$	$\hat{\lambda}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji}, \quad (j = 1, 2)$ $\sqrt{\hat{\rho}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{I_1 \left(\frac{2\sqrt{\hat{\rho}}}{1-\hat{\rho}} \sqrt{\xi_i \eta_i} \right)}{I_0 \left(\frac{2\sqrt{\hat{\rho}}}{1-\hat{\rho}} \sqrt{\xi_i \eta_i} \right)} \sqrt{\xi_i \eta_i}$
積 率 解	形状母数が未知の解	$\hat{\nu}_j = \frac{(\bar{x}_j)^2}{\bar{x}_j^2 - (\bar{x}_j)^2}, \quad \hat{\lambda}_j = \frac{\bar{x}_j^2 - (\bar{x}_j)^2}{\bar{x}_j}$ $(j = 1, 2)$ $\hat{\rho} = \frac{\bar{x}_1 \{ \bar{x}_1 \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 \}}{\bar{x}_2 \{ \bar{x}_1^2 - (\bar{x}_1)^2 \}} = \sqrt{\frac{\hat{\nu}_1}{\hat{\nu}_2}} r$	$\hat{\lambda} = \frac{(\bar{x}_j)^2}{\bar{x}_j^2 - (\bar{x}_j)^2}, \quad \hat{\lambda}_j = \frac{\bar{x}_j^2 - (\bar{x}_j)^2}{\bar{x}_j}$ $(j = 1, 2)$ $\hat{\rho} = \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2}{\sqrt{\bar{x}_1^2 - (\bar{x}_1)^2} \sqrt{\bar{x}_2^2 - (\bar{x}_2)^2}} \equiv r$	
		$\hat{\lambda}_j = \frac{\bar{x}_j}{\nu_j}, \quad \hat{\lambda}_j^2 = \frac{\bar{x}_j^2}{\nu_1 \nu_2}$ $(j = 1, 2)$ $\hat{\rho} = \nu_1 \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2}{\bar{x}_1 \bar{x}_2} - \nu_1$	$\hat{\lambda}_j = \frac{\bar{x}_j}{\nu}, \quad \hat{\lambda}_j^2 = \frac{\bar{x}_j^2}{\nu(\nu+1)}$ $(j = 1, 2)$ $\hat{\rho} = \nu \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2}{\bar{x}_1 \bar{x}_2} - \nu$	$\hat{\lambda}_j = \bar{x}_j, \quad \hat{\lambda}_j^2 = \frac{1}{2} \bar{x}_j^2$ $(j = 1, 2)$ $\hat{\rho} = \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2}{\bar{x}_1 \bar{x}_2} - 1$

記号 $I_\nu(x)$: 第1種変形ベッセル関数 $\hat{\lambda}$: λ の推定値

4. 相関母数と密度分布曲面の関連性の3次元表示

ここでは、密度分布と相関母数の関連を理解するために、相関母数の相関が密度分布曲面にどのように影響するかを3次元のコンピュータ・グラフィックス(陰線処理済み)として以下に示そう。3次元座標の水平面には、規準化変量 $\xi = x_1/\lambda_1$, $\eta = x_2/\lambda_2$ を、鉛直上向きには密度分布の大きさ $Z = f(\xi, \eta)$ を採用する。

以下、二変指数分布の場合と二変数ガンマ分布の場合に分けて、図化結果を示す。

4.1 二変数指数分布の場合

規準化変量 ξ, η で表示した密度分布は、Table 1 より、つぎのとおりとなる。

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{1-\rho} \exp\left(-\frac{\xi+\eta}{1-\rho}\right) \cdot I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\xi\eta}\right)$$

ここで、変域 $0 \leq \xi, \eta \leq 3$ において、相関母数 ρ を 0 および 0.1 (0.2) 0.9, ξ 軸の分割数 60 (ただし $\rho = 0$ のみ 40) の場合の密度分布曲面を Fig. 1 に示す。ただし縦軸はみやすいように2倍に拡大してある。また、図では、Z軸を中心とした回転角は 30° , ξ, η 平面上の直線とした回転角は 40° を採用している。

図より、相関母数 ρ が1に近づくほど、分布曲面が対称軸 $\xi = \eta$ の近傍に集中してくる様子が明瞭になる。また当然 $\rho = 0$ なら $f_1(\xi)$ と $f_2(\eta)$ は互いに独立で、条件付分布は指数分布である。

4.2 二変数ガンマ分布の場合

以下では、形状母数の等しい場合、すなわち x_1, x_2 に関して対称な分布について記述する。この場合の密度分布は、つぎのように表わされる。

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\Gamma(\nu)(1-\rho)^{(\nu-1)/2}} \exp\left(-\frac{\xi+\eta}{1-\rho}\right) \times (\xi\eta)^{(\nu-1)/2} \cdot I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\xi\eta}\right)$$

また、例として $\nu = 2$ (単一ピークの分布形) の場合を示す。したがって、その密度分布は

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{(1-\rho)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\xi+\eta}{1-\rho}\right) \times (\xi\eta)^{1/2} \cdot I_1\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\xi\eta}\right)$$

であり、この相関母数の相違に伴う変化を Fig. 2 に示す。ただし ξ, η の変域は前と同様で、 ξ 軸の分割数は 50, 回転角は、Z軸を中心とした回転角に 30° , ξ, η 平面上の直線とした回転角に 50° を採用し、Z軸方向に20倍に拡大している。

二変数正規分布の密度分布曲線にみられるように、相関母数 ρ が1に近づくにつれて、対称軸 $\xi = \eta$ に集中し、 ρ が0に近くなるにつれて、相互に独立な分布 $f(\xi) = \xi e^{-\xi}$, $f(\eta) = \eta e^{-\eta}$ の積 $f(\xi, \eta) = \xi \eta e^{-\xi-\eta}$ に移っていく様子が、図から読みとれる。

なお、このグラフィック計算には、Ampère社のAPL WS-1と、図化ソフトAGM・WS-1を使用した。

5. あとがき

理論的解析の面で遅れていた非対称二変数分布を代表する二変数ガンマ分布についても、上述のようになり研究が進展してきた。また、その現実問題への適用に際しても、従来変形ベッセル関数などの特殊関数が要求されることから、流用が敬遠されがちであったが、近年の驚異的な電算機の進歩により、かなり簡便になりつつあるが、今後さらにこの方面での研究を進展させたいと考えてている。

参考文献

- 1) Mardia, K. V.: Families of bivariate distribution, Griffin, 1970.
- 2) Johnson, N. L. and kotz, S.: Distribution in statistics, continuous multivariate distributions, Wiley, 1972.
- 3) Wicksell, S. D.: On correlation functions of type III, Biometrika, Vol. 25, pp 121~133, 1933.
- 4) Kibble, W. F.: A two-variate Gamma-type distribution, SANKHA, Vol, pp. 137~150, 1941.
- 5) Krishnamoorthy, A. S. and Parthasarathy, M.: A multivariate Gamma-type distribution, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 22, pp. 549~557, 1951.
- 6) 井沢滝夫: 二変数の Γ -分布について(降水量の分布第2報), 気象と統計, 4巻1号, pp. 9~15, 1953.
- 7) Cherian, K. C.: A bivariate correlated gamma-type distribution function, Journal of Indian Mathematical Soc., Vol. 5, pp. 133~144, 1960.
- 8) McKay, A. T.: Sampling from batches, Journal of Royal Statistics Soc., Vol. B. 1, pp. 207~216, 1934.
- 9) Gumbel, E. J.: Bivariate exponential distribution, Journal of American Statistics Ass., Vol. 55, pp. 698~707, 1960.
- 10) Marshall, A. W. and Olkin, I.: A multivariate exponential distribution, Journal of American Statistics Ass., Vol. 62, pp. 30~44, 1967.

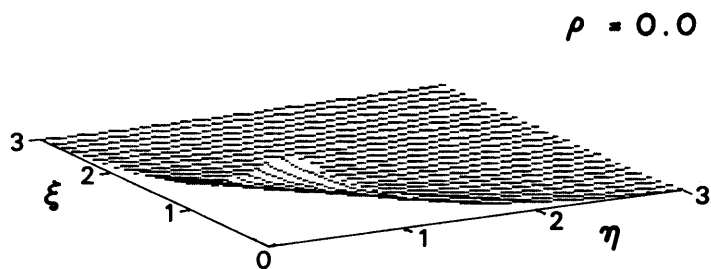
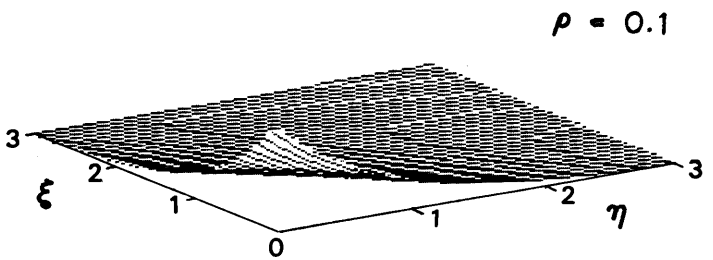
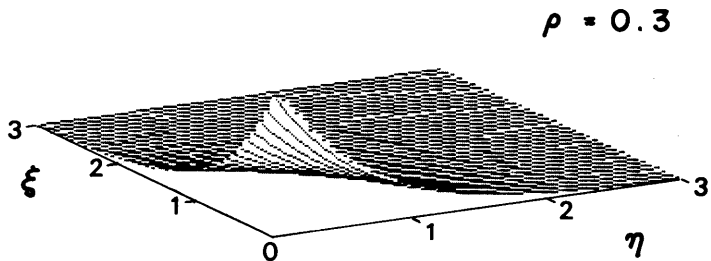
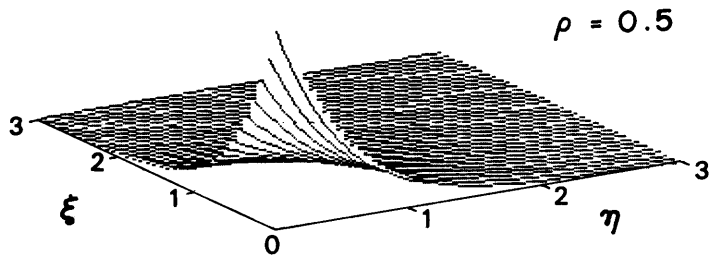
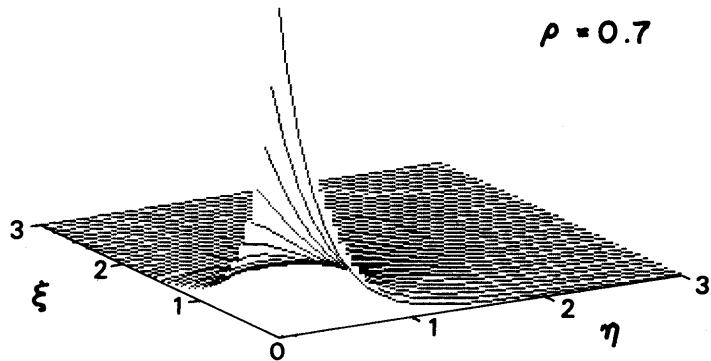
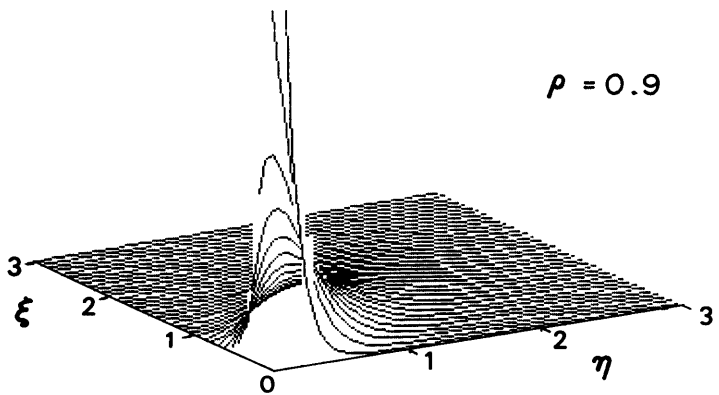


Fig. 1 Perspective drawings of standardized bi-variate exponential density function

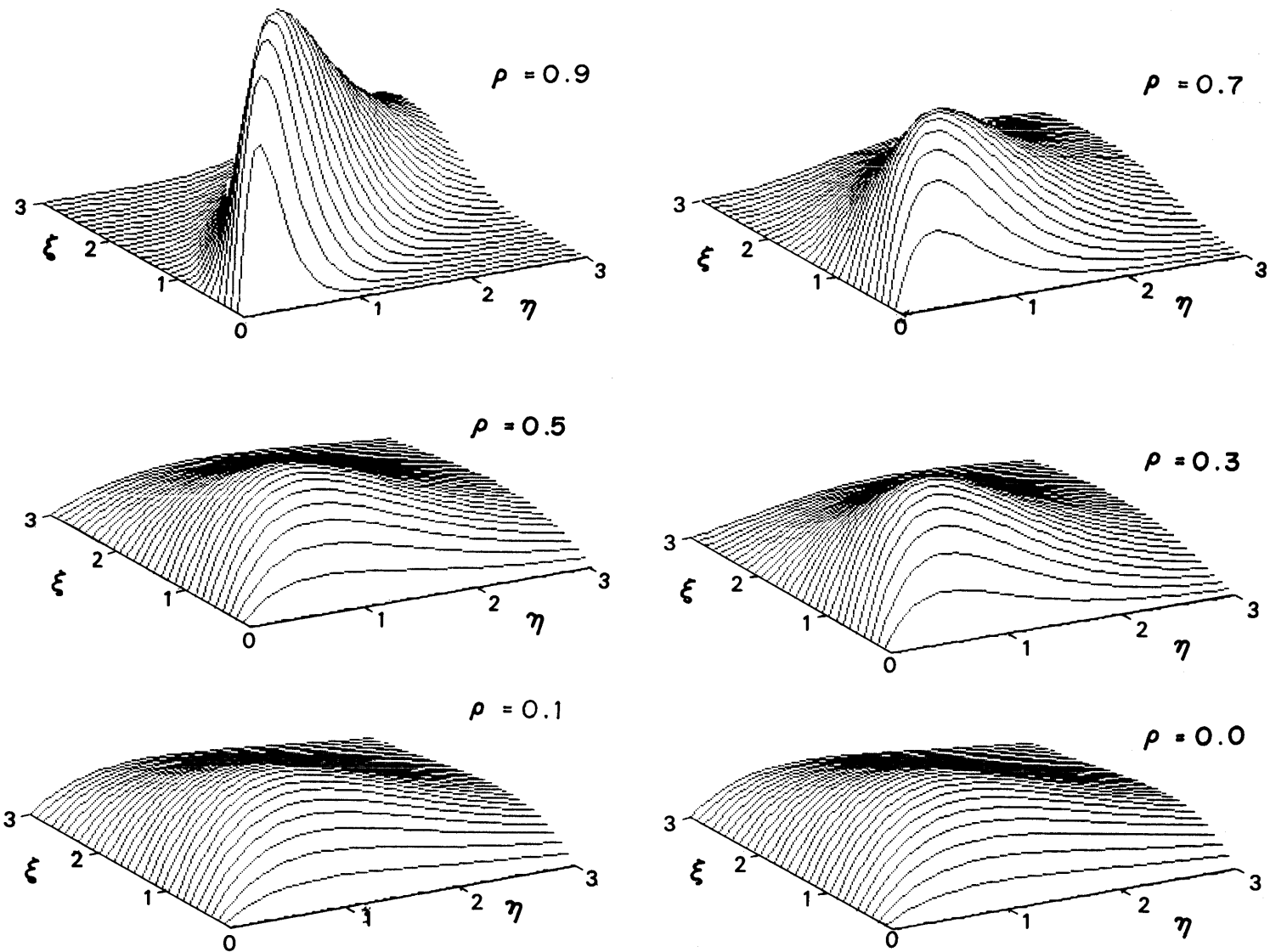


Fig. 2 Perspective drawings of standardized bi-variate symmetrical Gamma density function ($\nu_1 = \nu_2 = 2$)

- 11) Freund, J. E. : A bivariate extension of the exponential distribution, *Journal of American Statistics Ass.*, Vol. 56, pp. 971~977, 1961.
- 12) 端野道夫 : 計画降雨波形の確率論的定式化と条件付確率降雨強度式の提案, *土木学会論文集*, 第369号/II-5, pp. 139~153, 1986.
- 13) 長尾正志・角屋睦 : 二変数ガンマ分布とその適用に関する研究(1)—二変指数分布の基礎理論—京大防災研年報, 第13号B, pp. 105~133, 1970.
- 14) 長尾正志・角屋睦 : 二変数ガンマ分布とその適用に関する研究(2)—二変数ガンマ分布の母数推定法—, *京大防災研年報*, 第14号B, pp. 43~56, 1971.
- 15) 長尾正志 : 河川工学百年の歩みと淀川, 2. 1 水文統計解析, *建設省近畿地方建設局*, pp. 88~91, 1978.
- 16) 長尾正志・角屋睦・白波瀬正道 : 二変数ガンマ分布とその適用に関する研究(5)—二変数指数分布の母数推定に関する数値実験的検討—, *京大防災研年報*, 第15号B, pp. 333~347, 1972.