

# 非線形要素を含む系の構造の同定

石井直宏・陳海文

情報工学科

(1984年9月8日受理)

## Structural Testing of Linear and Nonlinear Connected Systems

Naohiro ISHII and Haiwen CHEN

Department of Information Engineering

(Received September 8, 1984)

We can find many nonlinear characteristics in biological systems and systems in natural environments. The characteristics often play dominant roles in the system functions. To make clear the behaviors or the function of the nonlinear systems, it is better to know the structure and the function of the nonlinear systems. The nonlinear theories are developed in the Volterra and the Wiener analysis in some fields. These theories are useful for fighting to general nonlinear problems.

In general, we are given only input and output observed information from the nonlinear systems. To make clear the inner structure of the nonlinear systems, we applied here the Volterra and the Wiener kernel analysis in the systems. The nonlinear systems are decomposed into several models. Each model have linear or nonlinear characteristics. Then we classified the nonlinear systems into four models. The necessary conditions of each model were derived. The conditions derived here are discussed by the simulation of simple systems. It was clarified that the conditions classify the nonlinear systems into each model.

### 1. ま え が き

生物システムを含む自然界のシステムでは非線形の特異性をもつシステムが多く存在する。また通信システム、情報処理の分野においても非線形の役割が大きい場合がある。近年、白色雑音を系の入力として与え、その出力を観測することによって非線形系の構造のパラメータを推定する研究が見られるようになって来た。これらの研究はボルテラおよびウィーナの級数展開による核理論にその基礎としている。しかし系の構造のパラメータを推定する。すなわち同定の問題は系の構造が前もって与えられる、あるいは仮定されていなければならぬ。我々が直面する具体的問題では系の構造が前もってわかるという場合は必ずしも多くない。生体および生物系の非線形情報処理機構などはその系の内部構造である線形および非線形要素の構造は前もってわからない。

本研究では非線形要素を含む系の構造を系の入力と出力とから推定することを目的とする。このため、まず系の一般的記述が望まれるが、ここでは非線形のボルテラ級数展開、およびウィーナ級数展開をその基礎とする。また非線形の範囲はきわめて広いため、ここでは線形と対比して巾乗あるいは多項式近似による記述の出来るものに限ることにした。さらに一つの系は線形要素部分、

非線形要素部分から構成される系と考え、この条件のもとにいくつかの系の分類のための条件を導き出した。系の構成としては、はじめに線形要素それに結合する非線形要素のウィーナ・モデル、ウィーナ・モデルにさらに線形要素を結合したゼネルモデル、さらに非線形要素に結合する線形要素からなるハマーstein・モデルとなる構造の条件式を導き出した。最後に、これらの条件式の有効性について計算シミュレーションを行い検討した。

### 2. 非線形系の表現

線形系は重ね合せの原理の上に成立する系であるが非線形系はそれらが成立しない系である。入力  $x_a(t)$ ,  $x_b(t)$  に対する出力をそれぞれ  $y_a(t)$ ,  $y_b(t)$  とするとき、入力

$$x_c(t) = x_a(t) + x_b(t) \quad (1)$$

に対する出力  $y_c(t)$  は

$$y_c(t) \neq y_a(t) + y_b(t) \quad (2)$$

である。そこで今、 $x_a(t) = \delta(t-t_1)$ ,  $x_b(t) = \delta(t-t_2)$  とすれば各々のインパルス応答を  $h_a(t)$ ,  $h_b(t)$  の時、

$$y_a(t) = h_a(t), \quad y_b(t) = h_b(t)$$

であって

$$y_c(t) = h_a(t) + h_b(t) + \theta_{h_c}(t) \quad (3)$$

と書くことができる。ただし、

$$\theta_{t_1 t_2}(t) = 0, \quad t < \max\{t_1, t_2\}$$

である。 $\theta_{t_1 t_2}(t)$ は、 $t \geq t_1$ かつ $t \geq t_2$ に対してのみ定義される。これを、

$$\theta_{t_1 t_2}(t) = h(t-t_1, t-t_2) \tag{4}$$

と書き表わすことができる。この関数は $y_a(t)$ と $y_b(t)$ の重ね合せからのずれを表わしている。

ボルテラは一般の非線形時不変の系に対して入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ の間の関係を次のように表現した。

$$y(t) = k_0 + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau)x(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) \times d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t-\tau_1) x(t-\tau_2)x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \tag{5}$$

ここで $k_0, k_1(\tau), k_2(\tau_1, \tau_2), k_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \dots$ は系のボルテラ核である。(1)式は、 $k_0 = k_2 = k_3 = \dots = 0$ に対しては

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

と表わされ、インパルス応答、 $h(\tau) = k_1(\tau)$ をもつ線形系となる。いま(1)式にインパルス、 $x(t) = \delta(t)$ を入力すれば

$$y(t) = k_0 + k_1(t) + k_2(t, t) + k_3(t, t, t) + \dots$$

となる。すなわち非線形系のインパルス応答はすべて、kernels (核関数) の対角線の情報を含む。刺激としてのインパルスを使ってボルテラ核を推定することは、一般の場合、困難である。インパルスの集合によりボルテラ核を算出することは、各核に多くの雑音が混入して来る。従って、各々の核が独立に求められることが望ましい。このため入力刺激として、ある種の仮定をおき、それぞれの展開された項を直交することにより可能となる。

ウィーナは入力をガウス白色雑音と仮定したとき、ボルテラ級数を直交汎関数展開した。このときの直交汎関数を Gauss の頭文字をとり、G-汎関数と呼ぶ。

ウィーナの方法はまずはじめに0次汎関数として $h_0$ とおく。次に1次汎関数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

とおく。最初の4個のウィーナ汎関数を示すと次の様になる。

$$G_0(h_0; x(t)) = h_0$$

$$G_1(h_1; x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

$$G_2(h_2; x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$-P \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_1) d\tau_1$$

$$G_3(h_3; x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)$$

$$\times x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 - 3P \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \tag{6}$$

ここで、白色雑音 $x(t)$ のパワー・スペクトル密度は $\Phi_{xx}(f) = P$ である。G-汎関数の直交性の意味は、それらの任意の2つの積の期待値、すなわち時間平均が零となることである。たとえば

$$\begin{aligned} &G_1(h_1; x(t))G_2(h_2; x(t)) \\ &= \frac{\int h_1(\tau)x(t-\tau) d\tau \int \int h_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{\int h_1(\tau)x(t-\tau) d\tau \cdot P \int h_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1} \\ &= \frac{\int \int \int h_1(\tau) h_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x(t-\tau)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)} d\tau d\tau_1 d\tau_2}{-P \int \int h_1(\tau) h_2(\tau_1, \tau_1) \overline{x(t-\tau)} d\tau d\tau_1} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

このようにウィーナ級数の項はガウス白色雑音刺激に対しては直交している。これは核の集合 $\{h_0, h_1, \dots, h_n\}$ から得られた近似値と真の値との平均二乗誤差を最小にするという意味を有している。すなわち $\{h_0, h_1\}$ は線形に対する最良の表現であり、 $\{h_0, h_1, h_2\}$ は2次の非線形に対する最良の表現である。これに対しボルテラ級数はガウス白色雑音に関して直交していないので、平均二乗誤差を最小にするという点で系の最良の表現とはなっていない。

次に系を線形部分および非線形部分に分離した時のモデルの分類を行う。

(A) Wiener Model (Wモデル)

系のはじめの部分が生線形要素であり、次に無記憶非線形要素の結合した系は Wiener Model と呼ばれる。

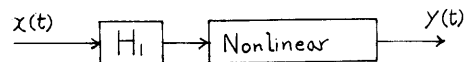


Fig. 1 Wiener model

たとえば、非線形要素を  $y = ax + bx^2$  とすれば、系の出力

$$y(t) = a \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t-\tau) d\tau + b \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t-\tau) d\tau \right]^2 \tag{8}$$

となり  $a = 1, b = 1$  とおくと、

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \tag{9}$$

となる。

ここでウィーナ1次核  $K_1(\tau)$ 、および2次核  $K_2(\tau_1, \tau_2)$  は各々

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= h_1(\tau) \\ K_2(\tau_1, \tau_2) &= h_1(\tau_1)h_1(\tau_2) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。

(B) Hammerstein Model (Hモデル)

系のはじめの部分が無記憶非線形要素で、その後線形要素が結合した系を Hammerstein Model と呼ぶ。

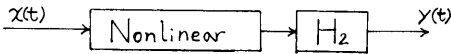


Fig. 2 Hammerstein model

たとえば非線形の2次形  $y = ax + bx^2$  とすれば

$$y(t) = a \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)x(t-\tau)d\tau + b \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)x^2(t-\tau)d\tau \quad (11)$$

ここで  $a=b=1$  とおくと、

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_1 - \tau_2)h_2(\tau_1)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned} \quad (12)$$

となり1次核  $K_1(\tau)$ 、及び2次核  $K_2(\tau_1, \tau_2)$  は各々

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= h_2(\tau) \\ K_2(\tau_1, \tau_2) &= h_2(\tau)\delta(\tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \quad (13)$$

のように表わされる。

(C) General Model (Gモデル)

数記憶非線形要素の前後に線形要素が結合した系を General Model と呼ぶ。

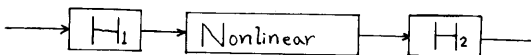


Fig. 3 General model

上述の条件での1次核  $K_1(\tau)$ 、及び2次核  $K_2(\tau_1, \tau_2)$  は各々

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(t-\tau_1)h_2(\tau)d\tau_1 \\ K_2(\tau_1, \tau_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1-\tau_2)h_1(\tau_2-\tau_3)h_2(\tau_3)d\tau_3 \end{aligned} \quad (14)$$

となる。このGモデルはWモデル、Hモデルの一般化したものであり、次にGモデルの特徴を述べる。

3. 各モデルの特徴

はじめにGモデルの特徴と非線形要素部分を

$$Z(t) = \gamma_1 w(t) + \gamma w^2(t) + \dots + \gamma_n w^n(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i w^i(t) \quad (15)$$

ここで任意の有限区間内の連続関数は(15)式の多項式によ

って、任意の必要な精度で近似することができる。 $h_1(t)$ を線形要素  $H_1$ のインパルス応答、 $h_2(t)$ を  $H_2$ のインパルス応答とすると、たたみこみ積分によって次の式が得られる。

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (16)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau)z(t-\tau)d\tau \quad (17)$$

(15)、(16)、(17)式によって、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) \dots h_1(\tau_i) x \\ &\quad (t-\sigma-\tau_1) \dots x(t-\sigma-\tau_i) \\ &\quad \times d\tau_1 \dots d\tau_i d\sigma \end{aligned} \quad (18)$$

(18)式と(5)式を比較して、Gモデルの第*i*次ボルテラ核は次の式によって表わされる。

$$K_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) = \gamma_i \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\sigma) \sum_{m=1}^i h_1(\tau_m - \sigma) d\sigma \quad (19)$$

ここで入力  $x(t)$  が零平均のガウス白色雑音とし、さらにエルゴード性を仮定すると、

$$\begin{aligned} E[X(t-\tau_1)x(t-\tau_2) \dots x(t-\tau_n)] &= \overline{x(t-\tau_1)x(t-\tau_2) \dots x(t-\tau)} \\ &= \begin{cases} 0 & n: \text{奇数} \\ P^m \sum_{i \neq j} \delta(\tau_i - \tau_j) & n: \text{偶数} (m=n/2) \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

ここで  $P$  は入力のパワー・スペクトルで  $\delta(\tau_i - \tau_j)$  は単位インパルス関数で、 $\sum \pi \delta(\tau_i - \tau_j)$  の項は  $(2m)!/m!2^m$  である。

(20)式を用いてGモデルの入力  $x(t)$  と出力  $y(t)$  の一次相互相関関数を計算すると、以下の式が得られる。

$$\phi_{yx}(\tau) = \overline{y(t)x(t-\tau)} = \beta \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\sigma)h_1(\tau-\sigma)d\sigma \quad (21)$$

$\beta$  は素数  $\tau$  に対して、定数である。

$$\beta = \sum_{m=1}^{[n/2]} \frac{(2m)!}{m!2^m} \gamma_{2m-1} P^m \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_1^2(v)dv \right]^{m-1} \quad (22)$$

$[n/2]$ の意味は、この多項式の項の数が  $n/2$ より小さいあるいは等しい最大の整数である。

同様に二次相互相関関数を計算すると

$$\begin{aligned} \phi_{yx^2}(\tau_1, \tau_2) &= \overline{y(t)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)} \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\sigma)h_1(\tau_1-\sigma)h_1(\tau_2-\sigma)d\sigma \\ &\quad + \eta \sigma(\tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \quad (23)$$

ここで  $\alpha, \eta$  は変数  $\tau_1, \tau_2$  に対して定数である。

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{m=1}^{[n/2]} \frac{(2m)!}{m!2^m} P^m \gamma_{2m} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_2(v)dv \right]^{m-1} \\ \eta &= \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(2m)!}{m!2^2} P^m \gamma_{2m} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_2(v)dv \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_1^2(v)dv \right]^m \end{aligned} \quad (24)$$

ここで  $\eta$  は出力  $y(t)$  の直流分  $\eta = \overline{y(t)}$  を引くと(23)式の  $\eta\delta(\tau_1 - \tau_2)$  項が消される。すなわち

$$\phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\sigma) h_1(\tau - \sigma) h_1(\tau_2 - \sigma) d\sigma \quad (25)$$

Lee と Schetzen の研究によると一次および二次ウィーナ核は

$$K_1(\tau) = \phi_{yx}/P$$

$$K_2(\tau_1, \tau_2) = \phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2)/2P^2 \quad (26)$$

(19)式と(21)式より  $G$ -モデルの一次ボルテラ核は

$$k_1(\tau) = \gamma_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\sigma) h_1(\tau - \sigma) d\gamma = \frac{\gamma_1}{\beta} \phi_{yx}(\tau) \quad (27)$$

(19)式と(23)式より二次ボルテラ核は

$$k_2(\tau_1, \tau_2) = \gamma_2 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\sigma) h_1(\tau_1 - \sigma) h_1(\tau_2 - \sigma) d\sigma$$

$$= (\gamma_2/\alpha) \phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2) \quad (28)$$

(27)式を(28)式に代入し、さらに(28)式を(26)式に代入すると、

$$K_1(\tau)/k_1(\tau) = \beta/\gamma_1 P,$$

$$K_2(\tau_1, \tau_2)/k_2(\tau_1, \tau_2) = \alpha/2\gamma_2 P^2 \quad (29)$$

となる。これは  $G$ -モデルの場合一次ウィーナ核と一次ボルテラ核は比例していることを示す。同様に二次ウィーナ核と二次ボルテラ核は比例していることを示している。

次に  $G$ -モデルの一次相互相関関数  $\mu_{yx}(\tau)$  と二次相互相関関数  $\phi_{yxx}$  のフーリエ変換を行なう。すなわち(21)式と(25)式のフーリエ変換は各々

$$\Phi_{yx}(W) = \beta H_1(W) H_2(W) \quad (30)$$

$$\Phi_{yxx}(\omega_1, \omega_2) = \alpha H_2(\omega_1 + \omega_2) H_1(\omega) H_2(\omega) \quad (31)$$

ここで

$$\frac{\Phi_{yxx}(\omega_1, \omega_2)}{\Phi_{yx}(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{\alpha H_1(\omega_1) H_1(\omega_2)}{\beta H_1(\omega_1 + \omega_2)} \quad (32)$$

の比をとる。

いまここで、 $\omega_1 = \omega$ 、 $\omega_2 = 0$  をおくと、

$$\frac{\Phi_{yxx}(\omega, 0)}{\Phi_{yx}(\omega)} = \frac{\alpha}{\beta} H_1(0) \quad (33)$$

$H_1(0)$  は  $H_1$  での角周波数  $\omega = 0$  での値であり、これは定数となる。 $\Phi_{yxx}(\omega, 0)$  の時間領域との関係を調べると、フーリエ逆変換により

$$\xi(\tau_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{yxx}(\omega_1, 0) e^{+j\omega_1 \tau_1} d\omega_1 \quad (34)$$

9 時間関数  $\xi(\tau_1)$  が存在する。ここで(34)式は

$$\xi(\tau_1) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2) e^{-j\omega_1 \tau_1} d\tau_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \quad (35)$$

で表わされる。

(35)式は連続変数であり、これを離散変数に書き換えると次式で与えられる。 $\phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2)$  は  $\tau_1$  と  $\tau_2$  の有限の

離散値であるから、ここで  $\phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2)$  の大きさを  $N \times N$  次の正方行列とし、 $\Delta t$  をサンプリング間隔とすると、

$$\xi(\tau_1) = \sum_{i=0}^{N-1} \phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2) \quad (36)$$

となる。

さらに、 $\Phi_{yx}(\omega)$  と  $\phi_{yx}(\tau)$  の関係はフーリエ変換により

$$\Phi_{yx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{yx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (37)$$

で与えられる。

(33)式の右辺は定数 (const) であるから、これを  $C$  とおくと

$$\Phi_{yxx}(\omega, 0) = C \cdot \Phi_{yx}(\omega), \quad C = \frac{\alpha}{\beta} H_1(0) \quad (38)$$

となる。(38)式の両辺のフーリエ逆変換を行うと、(34)式と(37)式、(36)式により

$$\frac{\sum_{i=0}^{N-1} \phi_{yxx}(\tau, i)}{\phi_{yx}(\tau)} = \frac{\xi(\tau)}{\phi_{yx}(\tau)} = \frac{\alpha}{\beta} H_1(0) \quad (39)$$

(39)式は  $\tau$  に関しては定数となる。

さて(32)式で、 $\omega_1 = 0$ 、 $\omega_2 = 0$ 、 $\omega_2 = \omega$  とおいた場合も同様な展開が可能となり、

$$\frac{\Phi_{yxx}(0, \omega)}{\Phi_{yx}(\omega)} = \frac{\alpha}{\beta} H_1(0) \quad (40)$$

となる。(40)式から上述と同様な展開により、

$$\frac{\sum_{i=0}^{N-1} \phi_{yxx}(i, \tau)}{\phi_{yx}(\tau)} = \frac{\alpha}{\beta} H_1(0) \quad (41)$$

が得られる。(41)式についても右辺は定数となることを示す。

(26)式を(39)式に代入すると、

$$\frac{\sum_{i=0}^{N-1} K_2(\tau, i)}{K_1(\tau)} = \frac{\alpha}{2PB} \cdot H_1(0) \quad (42)$$

同様に(27)、(28)式を(39)式に代入すると

$$\frac{\sum_{i=0}^{N-1} K_2(\tau, i)}{k_1(\tau)} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} H_1(0) \quad (43)$$

となる。(42)式、(43)式の右辺はいずれも定数である。

ボルテラおよびウィーナ核は変数  $\tau_i$  に対して、対称である。すなわち、

$$K_2(\tau_1, \tau_2) = K_2(\tau_2, \tau_1) \quad (44)$$

$$k_2(\tau_1, \tau_2) = k_2(\tau_2, \tau_1) \quad (45)$$

従って、次の式が成立つ。

$$\frac{\sum_{i=0}^{N-1} K_2(\tau, i)}{K_1(\tau)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} K_2(i, \tau)}{K_2(\tau)} \quad (46)$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{N-1} k_2(\tau, i)}{k_1(\tau)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} k_2(i, \tau)}{k_1(\tau)} \quad (47)$$

(46)式の意味は、 $G$ -モデルの構造をもつ必要条件が二次ウィーナ核の行列の行 (或は列) の和と一次ウィーナ核の比が定数であるということである。同様に、(47)式は、ボルテラ核でも成立することを示す。

$G$ -モデルにおいて、 $H_1(\omega) = 1$  の場合、 $H$ -モデルになる。また、 $H_2(\omega) = 1$  の場合、 $W$ -モデルになる。故に  $W$ -モデル、あるいは  $H$ -モデルの構造をもつシステムも式(46)、(47)を満す。この三つの構造を区別するために、 $H$ -モデルと、 $W$ -モデル構造の特性によって得られる判別式を示す。

次に  $W$  モデルの性質を示す。

$G$  モデルにおいて、 $H_2(\omega) = 1$  とおく。(30)、(31)式によって、

$$\Phi_{yxx}(\omega_1, \omega_2) = \alpha H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) \quad (48)$$

$$\Phi_{yx}(\omega) = \beta H_1(\omega) \quad (49)$$

式(49)を(48)に代入すると、

$$\frac{\Phi_{yxx}(\omega_1, \omega_2)}{\Phi_{yx}(\omega_1) \Phi_{yx}(\omega_2)} = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (50)$$

フーリエ逆変換をすると、時間領域での結果が得られる。

$$\frac{\phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2)}{\phi_{yx}(\tau_1) \phi_{yx}(\tau_2)} = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (51)$$

$$\frac{K_2(\tau_1, \tau_2)}{K_1(\tau_1) \cdot K_1(\tau_2)} = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (52)$$

$$\frac{k_2(\tau_1, \tau_2)}{k_1(\tau_1) \cdot k_1(\tau_2)} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} \quad (53)$$

これはシステムが、 $W$ -モデルの構造をもつ必要条件である。実用上に判別行列の一部分、例えば行列の対角線を使って、構造決定もできる。すなわち、 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  とすると、

$$K_2(\tau, \tau) / K_1^2(\tau) = \text{const} \quad (54)$$

$$k_2(\tau, \tau) / k_1^2(\tau) = \text{const} \quad (55)$$

(54)、(55)式の意味を直観的に説明すれば、システムが、 $W$ -モデルの構造をもつ必要条件は、二次の核の対角線の値と一次の核の値の平方の比が定数であるということである。

次に  $H$  モデルの性質を述べる。

$G$  モデルにおいて、 $H_1(\omega) = 1$  とおく。(30)、(31)式によって

$$\Phi_{yxx}(\omega_1, \omega_2) = \alpha H_2(\omega_1 + \omega_2) \quad (56)$$

$$\Phi_{yx}(\omega) = \beta H_2(\omega) \quad (57)$$

あるいは、

$$\Phi_{yxx}(\omega_1 + \omega_2) = \beta H_2(\omega_1 + \omega_2) \quad (58)$$

従って、

$$\frac{\Phi_{yxx}(\omega_1, \omega_2)}{\Phi_{yx}(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (59)$$

フーリエ逆変換をすると、時間領域の結果が得られる。

$$\phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2) = (\alpha/\beta) \phi_{yx}(\tau_1) \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (60)$$

理論的には、 $\tau_1 = \tau_2$  の時、 $\delta(\tau_1 - \tau_2)$  が無限大であるが、この  $\delta$  関数を発生するものとは、式(20)によって、入力白色雑音の自己相関である。実際に、実験する入力  $x(t)$  は、擬似正規分布白色雑音であるから、次の式が成立<sup>2)</sup>。

$$\phi_{xx}(0) = 2PB = \sigma^2 \quad (61)$$

$B$  は擬似雑音の周波数帯域で、 $\delta^2$  は雑音記号の分散である。ここで式(20)によって、

$$\phi_{xy}(0) = P\delta(0) \quad (62)$$

故に

$$\delta(0) = 2B = \sigma^2/P \quad (63)$$

すなわち、 $\tau_1 = \tau_2$  の時、 $\delta(\tau_1 - \tau_2)$  無限大ではなくて、有限値をもっている。式(60)、(63)によると、 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  の場合、

$$\frac{\phi_{yxx}(\tau, \tau)}{\phi_{yx}(\tau)} = \frac{2B\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\sigma^2}{\beta P} \quad (64)$$

$$\frac{K_2(\tau, \tau)}{K_1(\tau)} = \frac{\alpha\beta}{\beta P} = \frac{\alpha\sigma^2}{2\beta P^2} \quad (65)$$

$$\frac{k_2(\tau, \tau)}{k_1(\tau)} = \frac{2B\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\sigma^2\gamma_2}{\gamma_1 P} \quad (66)$$

(65)、(66)の意味を、本質的に解釈すれば、システムが  $H$ -モデルの構造をもつ必要條件は、二次の核の対角線の値と一次の核の値との比が定数であるということである。

次に線形モデルの構造の性質について述べる。

線形モデルの場合、 $\gamma_n = 0$  ( $n = 2, 3, \dots$ )

すなわち、(15)式が  $Z(t) = \gamma_1 w(t)$  になる。(24)式により、 $\alpha = 0$ 、従って、

$$\phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2) = 0 \quad (67)$$

$$\Phi_{yxx}(\omega_1, \omega_2) = 0 \quad (68)$$

$$K_2(\tau_1, \tau_2) = k_2(\tau_1, \tau_2) = 0 \quad (69)$$

すなわち、システムが線形である必要條件は、二次の核がゼロになるということである。

次に記憶のない非線形要素のモデルについて述べる。

非線形要素が1個、 $N$ -モデルの場合は、 $H_1(\omega) = H_2(\omega) = 1$ 、(30)式により

$$\Phi_{yx}(\omega) = \beta \quad (70)$$

フーリエ変換をすると、

$$\phi_{yx}(\tau) = 2\pi\beta\delta(\tau) \quad (71)$$

$$K_1(\tau) = 2\pi\beta\delta(\tau)/P \quad (72)$$

$$k_1(\tau) = 2\pi\gamma_1\delta(\tau) \quad (73)$$

同様に、二次の相関関数および二次の核も  $\delta$  関数になる。故に、システムが  $N$ -モデル構造をもつ必要條件は、

一次の核が  $\delta$  関数になる。故に、システムが、 $N$ -モデルの構造をもつ必要条件是、一次の核および二次の核が  $\delta$  関数であるということである。

さて  $G$  モデルの繰り返しとしたモデルを  $S$  モデルと呼ぶことにする。すなわち、 $S$ -モデルは  $n$  個 ( $1 < n < \infty$ ) の記憶のない非線形素子と  $n = 1$  個の線形素子を交替で直列に接続している。はじめに図 4 (A) によって、二つの非線形を直列接続のシステム  $S_R$  の総合ボルテラ核を求める。 $S_A$  と  $S_B$  は任意の時不変非線形システムである。(G-モデルなどにかぎらない。)

(5) 式のボルテラ展開式によると

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{A1}(\tau_1') x(t - \tau_1') d\tau_1' + \iint_{-\infty}^{\infty} k_{A2}(\tau_1', \tau_2') x(t - \tau_1') x(t - \tau_2') d\tau_1' d\tau_2' + \dots \int_{-\infty}^{\infty} k_{An}(\tau_1' \dots \tau_n') x(t - \tau_1') \dots x(t - \tau_n') d\tau_1' \dots d\tau_n' + \dots \quad (74)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{B1}(\tau_1'') Z(t - \tau_1'') d\tau_1'' + \iint_{-\infty}^{\infty} k_{B2}(\tau_1'', \tau_2'') Z(t - \tau_1'') Z(t - \tau_2'') d\tau_1'' d\tau_2'' + \dots \int_{-\infty}^{\infty} k_{Bn}(\tau_1'', \dots, \tau_n'') Z(t - \tau_1'') \dots Z(t - \tau_n'') d\tau_1'' \dots d\tau_n'' + \dots \quad (75)$$

(74) 式を(75)式に代入すると、

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{B1}(\tau_1'') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} k_{A1}(\tau_1') x(t - \tau_1' - \tau_1'') d\tau_1' + \int_{-\infty}^{\infty} k_{A2}(\tau_1', \tau_2') x(t - \tau_1' - \tau_1'') x(t - \tau_2' - \tau_1'') d\tau_1' d\tau_2' + \dots \right\} d\tau_1'' + \iint_{-\infty}^{\infty} k_{B2}(\tau_1'', \tau_2'') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} k_{A1}(\tau_1') x(t - \tau_1' - \tau_1'') d\tau_1' + \dots \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} k_{A1}(\tau_1') x(t - \tau_1' - \tau_2'') d\tau_1' + \dots \right\} d\tau_1'' d\tau_2'' + \dots = \int_{-\infty}^{\infty} k_{B1}(\tau_1'') k_{A1}(\tau_1') x(t - \tau_1' - \tau_1'') d\tau_1' d\tau_1'' + \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} k_{B1}(\tau_1'') k_{A2}(\tau_1', \tau_2'') x(t - \tau_1' - \tau_1'') x(t - \tau_2' - \tau_1'') d\tau_1' d\tau_2' d\tau_1'' \right. \\ \left. + \iint_{-\infty}^{\infty} k_{B2}(\tau_1'', \tau_2'') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} k_{A1}(\tau_1') x(t - \tau_1' - \tau_1'') d\tau_1' \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} k_{A1}(\tau_1') x(t - \tau_1' - \tau_2'') d\tau_1' \right\} d\tau_1'' d\tau_2'' \right\} + \dots \quad (76)$$

(76) 式を(5)式と比較すると総合ボルテラ核が得られる。ここでの  $k_{A1}(\tau)$ ,  $k_{A2}(\tau_1, \tau_2)$ ,  $k_{B1}(\tau)$ ,  $k_{B2}(\tau_1, \tau_2)$  が各々  $S_A$  と  $S_B$  の一次および二次のボルテラ核である。

$$k_{R1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{B1}(\sigma) k_{A1}(\tau - \sigma) d\sigma \quad (77)$$

$$k_{R2}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{B1}(\sigma) k_{A2}(\tau_1 - \sigma_1, \tau_2 - \sigma) d\sigma + k_{B2}(\tau_1 - \sigma, \tau_2 - \sigma) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} k_{A1}(\sigma) d\sigma \right\}^2 \quad (78)$$

$$\begin{aligned} (77) \text{式, } (78) \text{の一次元, 二次元フーリエ変換をすると,} \\ k_{R1}(\omega) = k_{B1}(\omega) k_{A1}(\omega) \quad (79) \\ k_{R2}(\omega_1, \omega_2) = k_{B1}(\omega_1, +\omega_2) k_{A2}(\omega_1, \omega_2) \\ + k_{B2}(\omega_1, \omega_2) k_{A1}(\omega_1) k_{A1}(\omega_2) \quad (80) \end{aligned}$$

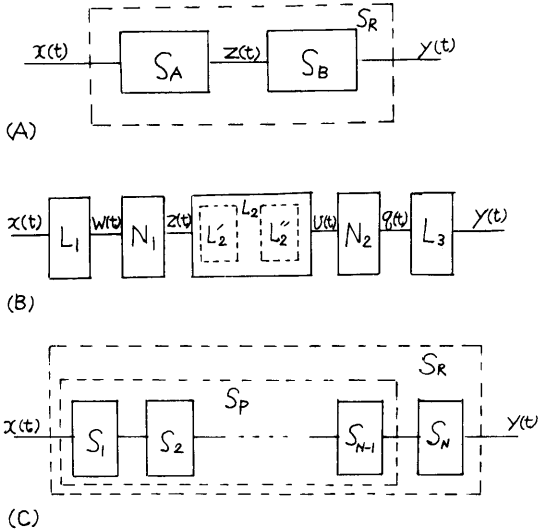


Fig. 4. Nonlinear model in cascade

もし、 $S_A$  と  $S_B$  が  $G$ -モデルなら、図 4 (A) のモデルは図 4 (B) のような  $S$ -モデル ( $n = 2$ ) になる。検討の便宜のために、線形の  $L_2$  が二つのサブシステム  $L_2'$  と  $L_2''$  と見なす。すなわち

$$H_2(\omega) = H_2'(\omega) H_2''(\omega)$$

同様に、 $S$ -モデルも  $n$  個の  $G$ -モデルの直列と見なすことが出来る。 $N_1$  と  $N_2$  が記憶のない非線形である。

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_{1i} w^i(t); \quad q(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_{2i} u^i(t) \quad (81)$$

故に、(77), (78) 式によって、フーリエ変換をすると、

$$k_{A1}(\omega) = \gamma_{11} H_1(\omega) H_2'(\omega); \quad k_{B1}(\omega) = \gamma_{21} H_2''(\omega) H_3(\omega) \quad (82)$$

$$k_{A2}(\omega_1, \omega_2) = \gamma_{12} H_2(\omega_1 + \omega_2) H_1(\omega_1) H_1(\omega_2)$$

$$k_{B2}(\omega_1, \omega_2) = \gamma_{22} H_3(\omega_1 + \omega_2) H_2''(\omega_1) H_2''(\omega_2)$$

これらの式を式(79), (80)に代入すると、

$$k_{R1}(\omega) = \gamma_{11} \gamma_{21} H_1(\omega) H_2(\omega) H_3(\omega) \quad (83)$$

$$k_{R2}(\omega_1, \omega_2) = \gamma_{12} \gamma_{21} H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) H_2(\omega_1 + \omega_2)$$

$$+ \gamma_{11}^2 \gamma_{22} H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) H_2(\omega_1) H_2(\omega_2)$$

$$+ H_3(\omega_1 + \omega_2) \quad (84)$$

$\omega_1 = \omega, \omega_2 = 0$  とおくと、

$$k_{R2}(\omega, 0) / k_{R1}(\omega) = (\gamma_{21} \gamma_{12} H_1(0) + \gamma_{11}^2 \gamma_{22} H_1(0) H_2(0)) / \gamma_{11} \gamma_{21} = const \quad (84)$$

(84) 式は、図 4 (B) のような非線形の個数  $n = 2$  の  $S$ -モデルの構造をもつ必要条件である。同様に、 $2 < n < \infty$  の場合も成立することを示す。ここでは数学帰納法によって、

図 4 (C) のような  $n$  個の  $G$ -モデルを直列に接続している  $S$ -モデルの構造をもつ必要条件が次の式で表わせる。

$$k_{R2}(\omega, 0)/k_{P1}(\omega) = const \quad (85)$$

(証明) (84) 式により,  $n = 2$  の場合, (85) 式が正しいことがわかる。次に, 非線形素子が  $n - 1$  個をもつ場合も (85) 式を満たすことは仮定する。すなわち, 図 4 (C) のように, 前の  $n - 1$  個  $G$ -モデルを 1 つの  $S_p$  モデルとして, 次の関係式を仮定する。

$$k_{P2}(\omega, 0)/k_{P1}(\omega) = const = A \quad (86)$$

(79), (80) 式によると, システム  $S_R$  の総合ボルテラ核が次式によって表わされる。

$$k_{R1}(\omega) = k_{P1}(\omega) k_{N1}(\omega) \quad (87)$$

$$k_{R2}(\omega_1, \omega_2) = k_{N1}(\omega_1 + \omega_2) k_{P1}(\omega_1, \omega_2) + k_{N2}(\omega_1, \omega_2) k_{P1}(\omega_1) k_{P1}(\omega_2) \quad (88)$$

$\omega_1 = \omega, \omega_2 = 0$  とおくと,

$$k_{R2}(\omega, 0)/k_{R1}(\omega) = [k_{N1}(\omega) k_{P2}(\omega, 0) + k_{N2}(\omega, 0) k_{P1}(\omega) k_{P1}(0)]/k_{P1}(\omega) k_{N1}(\omega) \quad (89)$$

$S_N$  モデルが  $G$ -モデルであるから, 式(27), (28), (33)によって, 次の式が得られる。

$$k_{N2}(\omega, 0)/k_{N1}(\omega) = const = C \quad (90)$$

(86), (90) を (89) に代入すると,

$$k_{R2}(\omega, 0)/k_{R1}(\omega) = A + C k_{P1}(0) \quad (91)$$

よって, (85) 式が  $1 < n < \infty$  の場合に成立することが示された。 (証明終)

式(89)の証明方法と同様に, 次の式が得られる。

$$\frac{\sum_{i=0}^{N-1} k_{R2}(\tau, i)}{k_{R1}(\tau)} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} k_{R2}(i, \tau)}{k_{R1}(\tau)} = const \quad (92)$$

すなわち, システムが,  $S$ -モデルの構造をもつ必要条件はこのシステムの二次ボルテラ行列の列(あるいは行)の和と一次のボルテラ核との比が定数であるということである。

ウィーナ核の場合はどうであろうか。(26) 式によってウィーナ核の計算ができる。図 4 (B) の  $S$ -モデルの  $y(t)$  はたたみこみ積分によって, 表わされる。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\sigma) q(t-\sigma) d\sigma \\ = \sum_{i=1}^n \gamma_{21} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\sigma) u^i(t-\sigma) d\sigma \quad (93)$$

$$\phi_{yx}(\tau) = \overline{y(t) x(t-\tau)} \\ = \sum_{i=1}^n \gamma_{21} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\delta) \overline{u^i(t-\sigma) x(t-\tau) d\sigma} \quad (94)$$

$$\phi_{yxx}(\tau_1, \tau_2) = \overline{y(t) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2)} \\ = \sum_{i=1}^n \gamma_{2i} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\sigma) \overline{u^i(t-\sigma) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\sigma} \quad (95)$$

(94), (95) 式を展開して,  $S$ -モデルの場合は  $G$ -モデルの (29) 式のような関係式が成立たないことがわかる。すなわ

ち,  $S$ -モデルのウィーナ核がボルテラ核と比例していない。  $S$ -モデルの一次および二次ウィーナ核の関係がシステムの構造をどのように表現しているか。これが今後の課題であろう。

#### 4. シミュレーションによる検討

ここでは,  $G, W, H$  および  $S$  の各モデルについてコンピュータシミュレーションを行なう。

##### 4.1 $G$ -モデルのシミュレーション

線形素子  $H_1$  と  $H_2$  の伝達関数を各々,

$$H_1(Z) = Z^{-1}/(1-1.58Z^{-1}+0.63Z^{-2})$$

$$H_2(Z) = Z^{-1}/(1-1.69Z^{-1}+0.77Z^{-2})$$

とする。また, 非線形素子  $N$  のパラメータ:  $\gamma_1 = 1; \gamma_2 = 2; \gamma_3 = 2$ ; すなわち,

$$Z(t) = w(t) + 2w^2(t) + 2w^3(t)$$

とおく。このとき, (89), (84) 式および(51)式の行列の第一行の判別式を結果を図 5 (A) に示す。この三つの曲線を見ると, (a) の曲線が大体定数であることがわかる。

##### 4.2 $H$ -モデルのシミュレーション

線形素子  $L_2$  の伝達関数として,

$$H_2(Z) = Z^{-1}/(1-1.69Z^{-1}+0.77Z^{-2})$$

とおく。非線形素子  $N$  のパラメータ:  $\gamma_1; \gamma_2 = 2; \gamma_3 = 2$  とおく。

図 5 (B) で三つの曲線を比較すると, (a) の曲線と(c)の曲線が大体定数であることがわかる。すなわち,  $H$ -モデルは  $G$ -モデルの判別式も満して,  $G$ -モデルの特例である

##### 4.3 $W$ -モデルのシミュレーション

線形素子  $H_1$  の伝達関数として,

$$H_1(Z) = 1/(1-0.75Z^{-1})$$

とおく。非線形素子  $N$  のパラメータ:  $\gamma_1 = 1; \gamma_2 = 1$  とおく。

図 5 (C) での三つの曲線を見ると, (a) の曲線と(b)の曲線が大体定数であるから, さきの  $H$ -モデルの判別式も適用することがわかる。

##### 4.4 図 5 (B) の $S$ -モデルのシミュレーション

図 5 (D) のように, (d) の曲線は(92)式によって助られる。

線形素子  $L_1, L_2$  と  $L_3$  の伝達関数を

$$H_1(Z) = H_2(Z) = H_3(Z) = 1/(1-0.75Z^{-1})$$

とする。また, 非線形素子  $N_1$  と  $N_2$  のパラメータ:  $\gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{22} = 1$ , すなわち,

$$Z(t) = w(t) + w^2(t); q(t) = u(t) + u^2(t)$$

ボルテラ核の測定は, ウィーナ核より, かなり難しくなる。われわれは, Korenberg の方法によって<sup>4)</sup>シミュレーションを遂行した。

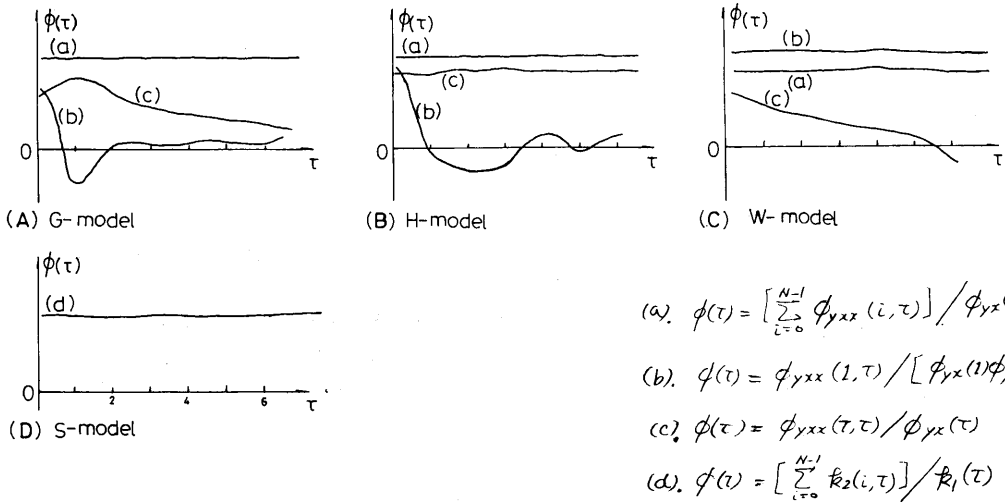


Fig. 5. Plots of simulated results

5. む す び

本論文では、いくつかの直列の非線形モデルの性質を導き出した。これらは非線形要素を含むモデルの必要条件となる。この条件としてシステムの固有属性を表している核と結びつけ論じた。シミュレーションの結果もこの判別方法が正しいことを示した。構造が決定した後直列しているモデルの場合、G-モデルなら、参考文献(3)、(4)によって、S-モデルなら、参考文献(4)によってこのシステムの線形素子のインパルス応答と非線形素子のパラメータの各々の推定ができる。

さて、構造決定のための条件の十分性および有効性、さらにはもっと複雑なフィード・バック非線形システムおよび並列する非線形システムの構造決定と機能同定、ボルテラ核の測定方法などの問題については残された問題である。

文 献

(1) Lee, Y. W and Schetzen, M. : "Measurement

of the Wiener Kernels of a nonlinear system by crosscorrelation", Int. J. Control, vol. 2 pp237~254 (1965)

(2) Marmarelis, P. Z., and Marmarelis, V. Z. : "Analysis of Physiological System-The White Noise Approach", Plenum Press, New York. (1978)

(3) Billings, S. A. and Fakhouri, S. Y. : "Identification of a class of nonlinear systems using correlation analysis". Proc. Inst. Electr. Eng., vol. 125, pp691-695 (1978)

(4) Korenberg, M. : "Cross-correlation analysis of neural cascades", Proc, 10th Ann. Rocky Mountain Bioeng. Symp., pp47-52 (1973)

(5) 中 研一 ; "ウィーナ非線形解析: 神経情報処理研究における応用", 生物物理, vol. 20, pp22-32 (昭和55)