

Jacobi の多項式系を用いた 4 階テンソルの 平均値評価における展開係数

日比貞雄・前田松夫・勝野歳康*¹・横山明宏・鈴木基弘
高分子工学科
(1983年9月2日受理)

Expansion Coefficient in Averaging Fourth-rank Tensors in Terms of Jacobi's Polynomials

Sadao HIBI, Matsuo MAEDA, Toshiyasu KATSUNO,
Akihiro YOKOYAMA and Motohiro SUZUKI
Department of Polymer Engineering
(Received September 2, 1983)

It has been shown that such physical quantities as elastic constant (or compliance) and intensities of polarized fluorescent light and laser-Raman scattering light, passed through anisotropic polymer films, are governed by result of space averaging weighted with the molecular distribution function $w(\cos \theta, \phi, \gamma)$ of the fourth rank tensor T_{ijkl} defined by coordinate transformation of a second rank tensor.

Some of the expansion coefficients of T_{ijkl} are disappeared due to the nature of symmetry in the sample and as proposed by Morris it therefore concludes that the expansion coefficients remain in real number only for the samples with symmetry higher than or equal to orthogonal system.

In general case, which is represented by triclinic system, there can be imaginary parts in the remaining coefficients as shown in Table and these are classified into seven groups. These coefficients induced from generalization are of great value to evaluate molecular orientation distribution by means of fluorescence method and laser Raman method with oblique incidence of polarized light, practice of which are to be described in other papers.

1. 緒 言

結晶性高分子延伸フィルムの延伸にともなう光学的異方性(分子配向)と力学的異方性との関連を定量的に評価する方法が、これ迄、多結晶集合体モデルにもとづいて多く報告^{1)~3)}されている。この方法では、構造単位の力学定数(弾性コンプライアンスおよび弾性定数)とBulkな試料の力学定数との関係が4階テンソルの座標変換量の空間配位の平均値から評価されている。すなわち、この計算は結晶主軸又は分子鎖主軸の固定参照軸に対する方向余弦の4乗平均を計算することに帰し、この計算はレーザーラマン散乱強度⁴⁾、偏光蛍光強度⁵⁾から分子配向を評価する際に出現し、主要な役割を果す。

Morris⁶⁾は斜方晶系以上の対称性を有する構造単位の集合体について、その弾性定数、弾性コンプライアンスを構造単位固有定数の座標変換およびその空間平均から

求めるために必要な Jacobi の多項式の展開係数を報告した。我々は、この Morris の方法を上述の各光学的強度からの評価にも使用しうよう、対称性をまったく有しない三斜晶系に対応する場合のテンソル量と Bulk なテンソル量との対応関係を以上のように明らかにする。Morris の場合と異なる点は、斜方晶以上の対称性を有する場合は、実数部のみの展開係数があらわれるが、一般には虚数部の存在が認められる点を示す。この展開係数を用いて、斜め入射の反射法のレーザーラマン散乱強度、偏光蛍光強度と分子配向との関係を解析することが容易になる。Roe⁷⁾の方法に準じて、構造単位に属する固有4階テンソル量の81個の成分に対し、試料に属する同一4階テンソル量の81個の成分の組合せに対し、Jacobi の多項式にもとづく4階テンソル量の平均値評価に必要な展開係数を求めたので、ここに報告する。

*1 トヨタ自動車株式会社, 裾野市御宿1200

2. 異方性高分子固体内分子配向によりあらわれる
4 階テンソル量

2.1 弾性定数, 弾性コンプライアンス

構造単位固定座標系 (0-u₁u₂u₃系) の弾性定数 C_{stuv}, 弾性コンプライアンス S_{stuv} とし, 試料のそれらの値を \bar{C}_{opqr} , \bar{S}_{opqr} とすると, 試料固定座標系に関する値に座標変換後, 平均値をとってあらわすと, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{C}_{opqr} &= \langle T_{stuv}^{opqr} \rangle C_{stuv} \\ \bar{S}_{opqr} &= \langle T_{stuv}^{opqr} \rangle S_{stuv} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, (1)式の s, t, u, v の総和記号を略した。また, T_{stuv}^{opqr} は 0-u₁u₂u₃系から 0-x₁x₂x₃系への座標変換テンソル成分の 4 乗積, T_{os} · T_{pt} · T_{qu} · T_{rv} であって, 変換マトリックスは, Fig.1 のオイラー角を用いて次のようにあらわされる。

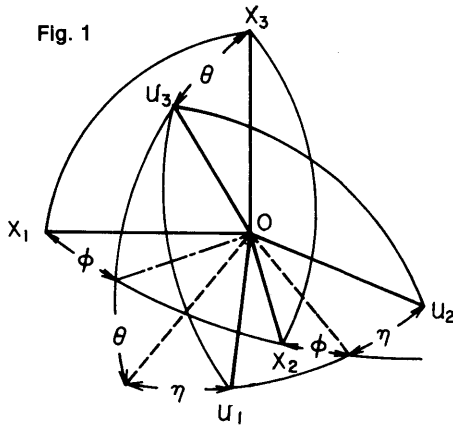


Fig. 1 Eulerian angles θ , ϕ and η specifying the relation between the principal axes 0-u₁u₂u₃ and the Cartesian coordinates 0-x₁x₂x₃.

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \cos \eta - \sin \phi \sin \eta, & -\cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \cos \eta + \cos \phi \sin \eta, & -\cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \eta, & \sin \theta \sin \eta, \\ \sin \eta - \sin \phi \cos \eta, & \sin \theta \cos \phi \\ \sin \eta + \cos \phi \cos \eta, & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta & \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで, $\langle T_{stuv}^{opqr} \rangle$ の平均値は結晶あるいは非結晶鎖の配向分布関数, $w(\cos \theta, \phi, \eta)$ により次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{C}_{opqr} &= C_{stuv} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{stuv}^{opqr} w(\cos \theta, \phi, \eta) \sin \theta d\theta d\phi d\eta \\ \bar{S}_{opqr} &= S_{stuv} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{stuv}^{opqr} w(\cos \theta, \phi, \eta) \sin \theta d\theta d\phi d\eta \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 偏光蛍光法にあらわれる 4 階テンソル

試料を光学的に 2 軸性の異方性フィルムとすると, 偏光蛍光法の場合⁸⁾ 直線偏光が試料に入射して, 2つの異常光線振動, E_{iβN} (i=1, 2) にわかれ, 蛍光基に吸収され発光する。次に再び 2つの異常光線振動, E_{kβN} (k=1, 2) にわかれ進行し, アナライザーに達することを考慮すると, 試料フィルムを通過した蛍光強度は, ポラライザーの振動方向, アナライザーの振動方向をそれぞれ単位ベクトル E₁, E₂ とすれば, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} I_{A\beta F} &= K \left\{ \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n (E_1 \cdot E_{h\beta N})(E_1 \cdot E_{i\beta N})^* (E_2 \cdot E_{j\beta N}) \right. \\ &\quad (E_2 \cdot E_{k\beta N})^* \times \langle (E_{h\beta N} \cdot A_b)(E_{i\beta N} \cdot A_b)^* \\ &\quad \left. (E_{j\beta N} \cdot F_f)(E_{k\beta N} \cdot F_f)^* \right\} \quad (4)^{*1} \end{aligned}$$

ここで, * は複素共役系であり, また蛍光分子内吸収軸および発光軸の単位ベクトルを A_b, F_f で示す。式(4)中の $\langle \rangle$ は蛍光分子の配向分布にもとづく平均値をあらわす。この(4)式を蛍光分子鎖と吸収軸および発光軸の関係 (Fig.2) を用いてあらわせば,

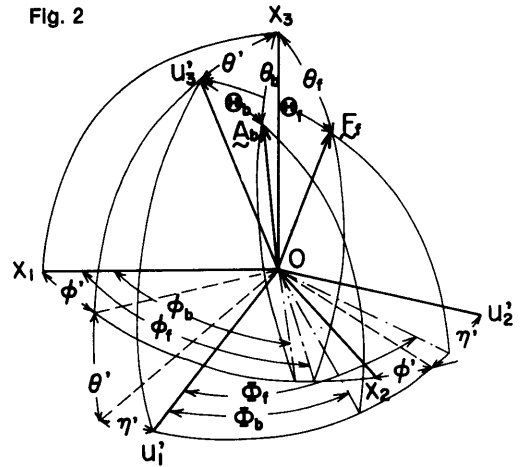


Fig. 2 Geometric relation lying among absorption axis, emission axis and the principal axes in a fluorescent molecule with respect to the Cartesian coordinates 0-x₁x₂x₃.

$$\begin{aligned} I_{A\beta F} &= K \left\{ \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s (E_1 \cdot E_{h\beta N})(E_1 \cdot E_{i\beta N})^* \right. \\ &\quad (E_2 \cdot E_{j\beta N})(E_2 \cdot E_{k\beta N})^* \times E_{ho} E_{ip} E_{jq} E_{kr} \\ &\quad \left. \langle A_{b,o} A_{b,p} F_{f,q} F_{f,r} \rangle \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

であらわされる。

ここで, E_{h_q}, A_{b_q}, F_{f_q} (q=1, 2, 3) などは, ベク

* 1 (4)式は複素共役量を用いて絶対値の 2 乗を示した。

トル $E_{h\beta N}$, A_b , E_f の $0-x_1x_2x_3$ 系に関する成分である。

また、蛍光分子に固定された座標系 $0-u_1'u_2'u_3'$ に関するベクトル成分を $0-x_1x_2x_3$ 座標系成分に変換するマトリックスを $[T_{pq}']$ とすると, $A_{b,q}$, $F_{f,q}$ の $0-u_1'u_2'u_3'$ 成分 $\{a_s\}$, $\{f_u'\}$ を用いて, $A_{b,q} = [T_{q't}'] |a_t\rangle$, $F_{f,q} = [T_{qs}'] |f_s'\rangle$ であるから

$$I_{AbFf} = K \left[\sum_k \sum_j \sum_i \sum_t \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s \sum_u \sum_v \sum_w \sum_x \sum_y \sum_z \sum_{t'} \sum_{s'} \sum_{u'} \sum_{v'} \sum_{w'} \sum_{x'} \sum_{y'} \sum_{z'} (E_1 \cdot E_{h\beta N})(E_1 \cdot E_{i\beta N})^* \right. \\ \left. (E_2 \cdot E_{j\beta N})(E_2 \cdot E_{k\beta N})^* \times E_{ho} E_{ip} E_{jq'} E_{kr'} \right. \\ \left. \langle \sum_s \sum_t \sum_u \sum_v \sum_w \sum_x \sum_y \sum_z (T_{os}' a_s)(T_{pt}' a_t)(T_{qu}' f_u')(T_{rv}' f_v') \rangle \right] \quad (6)$$

式中の $\langle \rangle$ は、分子配向に関する部分で、

$$\langle \sum_s \sum_t \sum_u \sum_v \sum_w \sum_x \sum_y \sum_z \rangle = \langle T_{os}' T_{pt}' T_{qu}' T_{rv}' \rangle a_s a_t f_u' f_v'$$

と置きかえられる。ここで、上式中の a_i, f_i' ($i = 1, 2, 3$) は定数とみなせるので、結局 $\langle T_{os}' T_{pt}' T_{qu}' T_{rv}' \rangle$ は

$$\langle T_{os}' T_{pt}' T_{qu}' T_{rv}' \rangle \equiv \langle T_{stuv}^{opqr} \rangle \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{stuv}^{opqr} w(\cos \theta', \phi', \eta') \sin \theta' d\theta' d\phi' d\eta' \quad (7)$$

であらわされる。

ここで、 $w(\cos \theta', \phi', \eta')$ は蛍光分子の配分布関数であり、高分子非結晶鎖軸の配向分布関数 $w(\cos \theta, \phi, \eta)$ との間には、Legendre の加法定理⁷⁾によって与えられる。

この(7)式も(3)式と同様、4階テンソルの座標変換の平均値である。また、(6)式の前項は機器補正に相当する部分であり、これらを用いた蛍光強度の評価法は、別に報告することにする⁸⁾。

2.3 ラマン散乱法の4階テンソル

レーザーラマン散乱強度と分子配向の関係をあらわす評価法は、Bower⁹⁾¹⁰⁾により行なわれ、Jacobi の多項式によってあらわされている。しかし、彼の方法は評価を容易にするため、かなりの単純化¹¹⁾¹²⁾が行なわれている。

今、試料固定座標系 ($0-x_1x_2x_3$) に関する散乱単位誘起分極率テンソルを $[\alpha_{ij}^0]$ とすれば⁴⁾、蛍光法の場合と同様、レーザーラマン散乱強度は入射光強度を I_0 とすれば、

$$I_s = I_0 \sum_k \sum_j \sum_i \sum_t \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s \sum_u \sum_v \sum_w \sum_x \sum_y \sum_z \sum_{t'} \sum_{s'} \sum_{u'} \sum_{v'} \sum_{w'} \sum_{x'} \sum_{y'} \sum_{z'} (E_2 \cdot E_{j\beta N})(E_{h\beta N} \cdot E_1)(E_2 \cdot E_{k\beta N})^* \\ (E_{i\beta N} \cdot E_1)^* \times \langle E_{j\beta N} | [C] [\alpha^0] [C] | E_{h\beta N} \rangle \\ \langle E_{k\beta N} | [C]^* [\alpha^0] [C]^* | E_{i\beta N} \rangle^* \rangle \quad (8)$$

* 2 式中の t は転置をあらわす。

であらわされる。

ここで、 $| \cdot \rangle$, $\langle \cdot |$ はそれぞれ行および列ベクトルをあらわし、マトリックス $[C]$ および $[C]^*$ は2つの異常光線による位相差を導入するオペレータであり、ベクトル $E_i, E_{i\beta N}, E_{i\beta N}'$ ($i = 1, 2$) であらわされる量は、蛍光法の場合とまったく同一の量をあらわす。

今、散乱単位 (例えば、結晶固定座標) 系 $0-u_1u_2u_3$ に関する散乱単位固有の誘起分極率テンソルを $[\alpha_{ij}]$ とすれば、 $0-x_1x_2x_3$ 座標系成分の間に、次の関係が与えられる。

$$[\alpha^0] = [\alpha_{ij}^0] = [T_{io}][\alpha_{op}][T_{pj}]^t \quad (9)^*2$$

ここで、 $[T_{io}]$ は $0-u_1u_2u_3$ 系と $0-x_1x_2x_3$ 系で与えられるオイラー角成分である。

上の(9)式を(8)式の各 $[\alpha^0]$ に代入すると、 $\langle \rangle$ でかこまれた部分は、最終的に

$$\langle E_{j\beta N} | [\alpha^0] | E_{h\beta N} \rangle \langle E_{k\beta N} | [\alpha^0] | E_{i\beta N} \rangle^* \\ = \langle T_{os} T_{pt} T_{qu} T_{rv} \rangle \alpha_{st} \alpha_{uv} E_{jo} E_{hp} E_{kq} E_{ir} \\ = \langle T_{stuv}^{opqr} \rangle \alpha_{st} \alpha_{uv} E_{jo} E_{hp} E_{kq} E_{ir} \quad (10)$$

となって、散乱強度からの配向評価は形式的に蛍光強度からの評価と同一になる。

2.4 Jacobi の多項式に基づく直交規格化関数を用いた配向分布関数の展開と4階テンソルの平均値評価

Jacobi の多項式を用いて、規格化直交関数 ψ_{lmn} を $\psi_{lmn} = (1/2\pi) Z_{lmn}(\cos \theta) \exp \{-i(m\phi + n\eta)\}$ (11)

で定義し、またこれらの複素共役関数を

$$\psi_{lmn}^* = (1/2\pi) Z_{lmn}(\cos \theta) \exp \{i(m\phi + n\eta)\} \quad (11')$$

で定義する。

配向分布関数 $w(\cos \theta, \phi, \eta)$ および4階テンソル T_{stuv}^{opqr} を ψ_{lmn}, ψ_{lmn}^* を用いて展開して

$$w(\cos \theta, \phi, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l W_{lmn} \psi_{lmn} \quad (12)$$

$$T_{stuv}^{opqr} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l X_{lmn}^{opqr, stuv} \psi_{lmn}^* \quad (12')$$

をうる。

ここで、展開係数 $W_{lmn}, X_{lmn}^{opqr, stuv}$ は

$$W_{lmn} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi_{lmn}^* w(\cos \theta, \phi, \eta) \sin \theta d\theta d\phi d\eta \\ = \langle \psi_{lmn}^* \rangle \quad (13)$$

および

$$X_{lmn}^{opqr, stuv} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{stuv}^{opqr} \psi_{lmn}^* \sin \theta d\theta d\phi d\eta \quad (13')$$

であらわされる。したがって、 T_{stuv}^{opqr} の空間平均値は、次のようにして(12)(12')式の展開係数であらわされる。

(12)式の両辺の平均値をとることによって、

$$\begin{aligned} \langle T_{stuv}^{opqr} \rangle &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l X_{lmn}^{opqr, stuv} \langle \psi_{lmn}^* \rangle \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=-l}^l X_{lmn}^{opqr, stuv} W_{lmn} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

ここで、係数 $X_{lmn}^{opqr, stuv}$ を実数部分 $E_{lmn}^{opqr, stuv}$ と虚数部分 $G_{lmn}^{opqr, stuv}$ に分けると、

$$E_{lmn}^{opqr, stuv} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} T_{stuv}^{opqr} Z_{lmn}(\cos \theta) \cos(m\phi + n\eta) \sin \theta d\theta d\phi d\eta \quad (15-a)$$

$$G_{lmn}^{opqr, stuv} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} T_{stuv}^{opqr} Z_{lmn}(\cos \theta) \sin(m\phi + n\eta) \sin \theta d\theta d\phi d\eta \quad (15-b)$$

で与えられる。(13)式から W_{lmn} の実数部 A_{lmn} と虚数部 B_{lmn} も同時に定義される。(14)式の左辺が実数であることを考慮すると、結局

$$\begin{aligned} \langle T_{stuv}^{opqr} \rangle &= \sum_{l=0}^{\infty} [A_{loo} E_{loo}^{opqr, stuv} + 2 \sum_{m=2}^l A_{lom} E_{lom}^{opqr, stuv} \\ &+ 2 \sum_{n=2}^l (A_{lon} E_{lon}^{opqr, stuv} + B_{lon} G_{lon}^{opqr, stuv}) \\ &+ 4 \sum_{m=2}^l \sum_{n=2}^l (A_{lmn} E_{lmn}^{opqr, stuv} + B_{lmn} G_{lmn}^{opqr, stuv})] \quad (16) \end{aligned}$$

となる。

この(16)式は $opqr$ の組81に対し、 $stuv$ の組81が存在するので、各 $\langle T^{opqr} \rangle$ に使用する展開係数 $E_{lmn}^{opqr, stuv}$ 、

$G_{lmn}^{opqr, stuv}$ をそれぞれ、国立共同機構、分子科学研究所電子計算機センター計算機 HITAC M-200H により計算し Table 1 に示す。この表は、係数が 0 になる T^{opqr} および T_{stuv} の成分は省略した。

この結果、(16)式に使用される実数部の展開係数 $E_{lmn}^{opqr, stuv}$ および虚数部の $G_{lmn}^{opqr, stuv}$ はそれぞれ 7 つのグループに大別され、0 とならない T^{opqr} および T_{stuv} の成分は Table 2 のようになる。

3. 結 論

高分子の分子配向に直接関係する物理量、例えば、弾性定数 (コンプライアンス) および異方性試料を通過した偏光蛍光強度、レーザーラマン散乱強度が (2 階テンソルの座標変換テンソルとしての) 4 階テンソルの分子配向分布関数 $w(\cos \theta, \phi, \eta)$ で重みづけされた空間平均で支配されることが示された。

この 4 階テンソルを Jacobi の多項式で展開したときの展開係数は $w(\cos \theta, \phi, \eta)$ を用いて平均することで一部が消失する。したがって orthogonal symmetric system 以上の対称性をもつ試料の場合の展開係数は、Morris の示めたように実数表示が可能となる。しかし、一般の場合 (triclinic system) では、Table 1 に示め

Table 1 (1)

T^{opqr}	E_{000}	E_{200}	E_{220}	E_{202}	E_{222}	E_{400}	E_{420}	E_{402}	E_{422}	E_{440}	E_{404}	E_{442}	E_{424}	E_{444}
T_{1111}														
T_{2222}	E_{000}	E_{200}	E_{220}	E_{202}	E_{222}	E_{400}	E_{420}	E_{402}	E_{422}	E_{440}	E_{404}	E_{442}	E_{424}	E_{444}
T_{stuv}	E_{000}	E_{200}	$-E_{220}$	E_{202}	$-E_{222}$	E_{400}	$-E_{420}$	E_{402}	$-E_{422}$	E_{440}	E_{404}	E_{442}	$-E_{424}$	E_{444}
1111	6	6	-6	-6	18	9	-3	-3	4	3	3	-2	-2	1
2222	6	6	-6	6	-18	9	-3	3	-4	3	3	2	-2	1
3333	6	-12	12	0	0	24	-8	0	0	8	0	0	0	0
2233	2	-1	1	1	-3	-12	4	-3	4	-4	0	-2	0	0
3322	2	-1	1	1	-3	-12	4	-3	4	-4	0	-2	0	0
1133	2	-1	1	-1	3	-12	4	3	-4	-4	0	2	0	0
3311	2	-1	1	-1	3	-12	4	3	-4	-4	0	2	0	0
1122	2	2	-2	0	0	3	-1	0	0	1	-3	0	2	-1
2211	2	2	-2	0	0	3	-1	0	0	1	-3	0	2	-1
2323	2	-1	1	1	-3	-12	4	-3	4	-4	0	-2	0	0
3232	2	-1	1	1	-3	-12	4	-3	4	-4	0	-2	0	0
2332	2	-1	1	1	-3	-12	4	-3	4	-4	0	-2	0	0
3223	2	-1	1	1	-3	-12	4	-3	4	-4	0	-2	0	0
1313	2	-1	1	-1	3	-12	4	3	-4	-4	0	2	0	0
3131	2	-1	1	-1	3	-12	4	3	-4	-4	0	2	0	0
1331	2	-1	1	-1	3	-12	4	3	-4	-4	0	2	0	0
3113	2	-1	1	-1	3	-12	4	3	-4	-4	0	2	0	0
1212	2	2	-2	0	0	3	-1	0	0	1	-3	0	2	-1
2121	2	2	-2	0	0	3	-1	0	0	1	-3	0	2	-1
1221	2	2	-2	0	0	3	-1	0	0	1	-3	0	2	-1
2112	2	2	-2	0	0	3	-1	0	0	1	-3	0	2	-1

Table 1 (2)

T ^{opqr} T ³³³³	E ₀₀₀	E ₂₀₀	E ₂₂₀	E ₂₀₂	E ₂₂₂	E ₄₀₀	E ₄₂₀	E ₄₀₂	E ₄₂₂	E ₄₄₀	E ₄₀₄	E ₄₄₂	E ₄₂₄	E ₄₄₄
T ^{stuv}														
1111	6	-12	0	12	0	24	0	-8	0	0	8	0	0	0
2222	6	-12	0	-12	0	24	0	8	0	0	8	0	0	0
3333	6	24	0	0	0	64	0	0	0	0	0	0	0	0
2233	2	2	0	-2	0	-32	0	-8	0	0	0	0	0	0
3322	2	2	0	-2	0	-32	0	-8	0	0	0	0	0	0
1133	2	2	0	2	0	-32	0	8	0	0	0	0	0	0
3311	2	2	0	2	0	-32	0	8	0	0	0	0	0	0
1122	2	-4	0	0	0	8	0	0	0	0	-8	0	0	0
2211	2	-4	0	0	0	8	0	0	0	0	-8	0	0	0
2323	2	2	0	-2	0	-32	0	-8	0	0	0	0	0	0
3232	2	2	0	-2	0	-32	0	-8	0	0	0	0	0	0
2332	2	2	0	-2	0	-32	0	-8	0	0	0	0	0	0
3223	2	2	0	-2	0	-32	0	-8	0	0	0	0	0	0
1313	2	2	0	2	0	-32	0	8	0	0	0	0	0	0
3131	2	2	0	2	0	-32	0	8	0	0	0	0	0	0
1331	2	2	0	2	0	-32	0	8	0	0	0	0	0	0
3113	2	2	0	2	0	-32	0	8	0	0	0	0	0	0
1212	2	-4	0	0	0	8	0	0	0	0	-8	0	0	0
2121	2	-4	0	0	0	8	0	0	0	0	-8	0	0	0
1221	2	-4	0	0	0	8	0	0	0	0	-8	0	0	0
2112	2	-4	0	0	0	8	0	0	0	0	-8	0	0	0

Table 1 (3)

T ^{opqr} T ¹¹¹² T ²²²¹	T ^{opqr} T ¹¹²¹ T ²²¹²	T ^{opqr} T ¹²¹¹ T ²¹²²	T ^{opqr} T ²¹¹¹ T ¹²²²	E ₀₀₀	E ₂₀₀	E ₂₂₀	E ₂₀₂	E ₂₂₂	E ₄₀₀	E ₄₂₀	E ₄₀₂	E ₄₂₂	E ₄₄₀	E ₄₀₄	E ₄₄₂	E ₄₂₄	E ₄₄₄
				E ₀₀₀	E ₂₀₀	E ₂₂₀	E ₂₀₂	E ₂₂₂	E ₄₀₀	E ₄₂₀	E ₄₀₂	E ₄₂₂	E ₄₄₀	E ₄₀₄	E ₄₄₂	E ₄₂₄	E ₄₄₄
T ^{stuv}	T ^{stuv}	T ^{stuv}	T ^{stuv}														
1112	1121	1211	2111	0	0	0	0	15	0	0	0	1	0	0	-1	-1	1
1121	1112	2111	1211	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	-1	1
1211	1211	1112	1112	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	-1	1
2111	2111	1121	1121	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	-1	1
2212	2221	1222	2122	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	1	-1
2221	2212	2122	1222	0	0	0	0	15	0	0	0	1	0	0	-1	1	-1
1222	1222	2212	2212	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	1	-1
2122	2122	2221	2221	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1	1	-1
3312	3321	1233	2133	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
3321	3312	2133	1233	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
1233	1233	3312	3312	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
2133	2133	3321	3321	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
2331	2313	3123	1323	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
2313	2331	1323	3123	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
3231	3213	3132	1332	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
3213	3231	1332	3132	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
3123	3132	2331	3231	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
3132	3123	3231	2331	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
1323	1332	2313	3213	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	2	0	0
1332	1323	3213	2313	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	2	0	0

Table 1 (4)

T ^{opqr} _{T3312}	T ^{opqr} _{T3321}	T ^{opqr} _{T1233}	T ^{opqr} _{T2133}	E ₀₀₀	E ₂₀₀	E ₂₂₀	E ₂₀₂	E ₂₂₂	E ₄₀₀	E ₄₂₀	E ₄₀₂	E ₄₂₂	E ₄₄₀	E ₄₀₄	E ₄₄₂	E ₄₂₄	E ₄₄₄
T ^{stuv} ₁₁₁₂	T ^{stuv} ₁₁₂₁	T ^{stuv} ₁₂₁₁	T ^{stuv} ₂₁₁₁	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	0	2	0
1121	1112	2111	1211	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	0	2	0
1211	1211	1112	1112	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	2	0
2111	2111	1121	1121	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	2	0
2212	2221	1222	2122	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0
2221	2212	2122	1222	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0
1222	1222	2212	2212	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0
2122	2122	2221	2221	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0
3312	3321	1233	2133	0	0	0	0	11	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3321	3312	2133	1233	0	0	0	0	11	0	0	0	4	0	0	0	0	0
1233	1233	3312	3312	0	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0	0	0	0
2133	2133	3321	3321	0	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0	0	0	0
2331	2313	3123	1323	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
2313	2331	1323	3123	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3231	3213	3132	1332	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3213	3231	1332	3132	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3123	3132	2331	3231	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3132	3123	3231	2331	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
1323	1332	2313	3213	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
1332	1323	3213	2313	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0

Table 1 (5)

T ^{opqr} _{T2313}	T ^{opqr} _{T2331}	T ^{opqr} _{T3213}	T ^{opqr} _{T3231}	E ₀₀₀	E ₂₀₀	E ₂₂₀	E ₂₀₂	E ₂₂₂	E ₄₀₀	E ₄₂₀	E ₄₀₂	E ₄₂₂	E ₄₄₀	E ₄₀₄	E ₄₄₂	E ₄₂₄	E ₄₄₄
T ^{stuv} ₁₁₁₂	T ^{stuv} ₁₁₂₁	T ^{stuv} ₁₁₁₂	T ^{stuv} ₁₁₂₁	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	2	0
1121	1112	1121	1112	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	0	2	0
1211	1211	2111	2111	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	2	0
2111	2111	1211	1211	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	0	2	0
2212	2221	2212	2221	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0
2221	2212	2221	2212	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0
1222	1222	2122	2122	0	0	0	0	5	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0
2122	2122	1222	1222	0	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	-2	0
3312	3321	3312	3321	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3321	3312	3321	3312	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
1233	1233	2133	2133	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
2133	2133	1233	1233	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
2331	2313	3231	3213	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
2313	2331	3213	3231	0	0	0	0	11	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3231	3213	2331	2313	0	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3213	3231	2313	2331	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3123	3132	1323	1332	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
3132	3123	1332	1323	0	0	0	0	4	0	0	0	4	0	0	0	0	0
1323	1332	3123	3132	0	0	0	0	11	0	0	0	4	0	0	0	0	0
1332	1323	3132	3123	0	0	0	0	-3	0	0	0	4	0	0	0	0	0

Table 1 (6)

T_{1133}	T_{3311}	T_{1313}	T_{3131}	T_{1331}	T_{3113}	E_{000}	E_{200}	E_{220}	E_{202}	E_{222}	E_{400}	E_{420}	E_{402}	E_{422}	E_{440}	E_{404}	E_{442}	E_{424}	E_{444}
T_{2233}	T_{3322}	T_{2323}	T_{3232}	T_{2332}	T_{3223}	E_{000}	E_{200}	E_{220}	E_{202}	E_{222}	E_{400}	E_{420}	E_{402}	E_{422}	E_{440}	E_{404}	E_{442}	E_{424}	E_{444}
T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}														
1111	1111	1111	1111	1111	1111	2	-1	-1	1	3	-12	3	4	-4	0	-4	0	2	0
2222	2222	2222	2222	2222	2222	2	-1	-1	-1	-3	-12	3	-4	4	0	-4	0	2	0
3333	3333	3333	3333	3333	3333	2	2	2	0	0	-32	8	0	0	0	0	0	0	0
2233	3322	2323	3232	2332	3223	4	13	-1	1	-11	16	-4	4	-4	0	0	0	0	0
3322	2233	3232	2323	3223	2332	4	-8	6	-6	-4	16	-4	4	-4	0	0	0	0	0
1133	3311	1313	3131	1331	3113	4	13	-1	-1	11	16	-4	-4	4	0	0	0	0	0
3311	1133	3131	1313	3113	1331	4	-8	6	6	4	16	-4	-4	4	0	0	0	0	0
1122	2211	1212	2121	1221	2112	4	-5	-5	-7	7	-4	1	0	0	0	4	0	-2	0
2211	1122	2121	1212	2112	1221	4	-5	-5	7	-7	-4	1	0	0	0	4	0	-2	0
2323	2323	2233	2233	2233	2233	-1	-1	-1	1	3	16	-4	4	-4	0	0	0	0	0
3232	3232	3322	3322	3322	3322	-1	-1	-1	1	3	16	-4	4	-4	0	0	0	0	0
2332	3223	2332	3223	2323	3232	-1	-1	-1	1	3	16	-4	4	-4	0	0	0	0	0
3223	2332	3223	2332	3232	2323	-1	-1	-1	1	3	16	-4	4	-4	0	0	0	0	0
1313	1313	1133	1133	1133	1133	-1	-1	-1	-1	-3	16	-4	-4	4	0	0	0	0	0
3131	3131	3311	3311	3311	3311	-1	-1	-1	-1	-3	16	-4	-4	4	0	0	0	0	0
1331	3113	1331	3113	1313	3131	-1	-1	-1	-1	-3	16	-4	-4	4	0	0	0	0	0
3113	1331	3113	1331	3131	1313	-1	-1	-1	-1	-3	16	-4	-4	4	0	0	0	0	0
1212	1212	1122	1122	1122	1122	-1	2	2	0	0	-4	1	0	0	0	4	0	-2	0
2121	2121	2211	2211	2211	2211	-1	2	2	0	0	-4	1	0	0	0	4	0	-2	0
1221	2112	1221	2112	1212	2121	-1	2	2	0	0	-4	1	0	0	0	4	0	-2	0
2112	1221	2112	1221	2121	1212	-1	2	2	0	0	-4	1	0	0	0	4	0	-2	0

Table 1 (7)

T_{1122}	T_{2211}	T_{1212}	T_{2121}	T_{1221}	T_{2112}	E_{000}	E_{200}	E_{220}	E_{202}	E_{222}	E_{400}	E_{420}	E_{402}	E_{422}	E_{440}	E_{404}	E_{442}	E_{424}	E_{444}
T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}														
1111	1111	1111	1111	1111	1111	2	2	0	-7	0	3	0	-1	0	-3	1	2	0	-1
2222	2222	2222	2222	2222	2222	2	2	0	2	0	3	0	1	0	-3	1	-2	0	-1
3333	3333	3333	3333	3333	3333	2	-4	0	0	0	8	0	0	0	-8	0	0	0	0
2233	3322	2323	3232	2332	3223	4	-5	-7	5	-7	-4	0	-1	0	4	0	2	0	0
3322	2233	3232	2323	3223	2332	4	-5	7	5	7	-4	0	-1	0	4	0	2	0	0
1133	3311	1313	3131	1331	3113	4	-5	-7	-5	7	-4	0	1	0	4	0	-2	0	0
3311	1133	3131	1313	3113	1331	4	-5	7	-5	-7	-4	0	1	0	4	0	-2	0	0
1122	2211	1212	2121	1221	2112	4	10	0	14	1	0	0	0	-1	-1	0	0	1	
2211	1122	2121	1212	2112	1221	4	10	0	0	-14	1	0	0	0	-1	-1	0	0	1
2323	2323	2233	2233	2233	2233	-1	2	0	-2	0	-4	0	-1	0	4	0	2	0	0
3232	3232	3322	3322	3322	3322	-1	2	0	-2	0	-4	0	-1	0	4	0	2	0	0
2332	3223	2332	3223	2323	3232	-1	2	0	-2	0	-4	0	-1	0	4	0	2	0	0
3223	2332	3223	2332	3232	2323	-1	2	0	-2	0	-4	0	-1	0	4	0	2	0	0
1313	1313	1133	1133	1133	1133	-1	2	0	2	0	-4	0	1	0	4	0	-2	0	0
3131	3131	3311	3311	3311	3311	-1	2	0	2	0	-4	0	1	0	4	0	-2	0	0
1331	3113	1331	3113	1313	3131	-1	2	0	2	0	-4	0	1	0	4	0	-2	0	0
3113	1331	3113	1331	3131	1313	-1	2	0	2	0	-4	0	1	0	4	0	-2	0	0
1212	1212	1122	1122	1122	1122	-1	-4	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	1
2121	2121	2211	2211	2211	2211	-1	-4	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	1
1221	2112	1221	2112	1212	2121	-1	-4	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	1
2112	1221	2112	1221	2121	1212	-1	-4	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	0	0	1

$$R_{1mn} \times \begin{matrix} \sqrt{2} & \sqrt{10} & \sqrt{15} & \sqrt{15} & \sqrt{10} & \sqrt{2} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} & \sqrt{35} & \sqrt{35} & \sqrt{14} & \sqrt{14} & \sqrt{2} \\ 30 & 210 & 210 & 210 & 420 & 840 & 420 & 420 & 336 & 840 & 840 & 336 & 336 & 48 \end{matrix}$$

Table 1 (8)

T_{opqr} T_{1111} T_{2222}	G_{220}	G_{202}	G_{222}	G_{420}	G_{402}	G_{422}	G_{440}	G_{404}	G_{442}	G_{424}	G_{444}
	G_{220}	G_{202}	$-G_{222}$	G_{420}	G_{402}	$-G_{422}$	G_{440}	G_{404}	G_{442}	$-G_{424}$	G_{444}
T_{stuv}											
1112	0	-3	9	0	-3	1	0	3	-1	-2	1
1121	0	-3	9	0	-3	1	0	3	-1	-2	1
1211	0	-3	9	0	-3	1	0	3	-1	-2	1
2111	0	-3	9	0	-3	1	0	3	-1	-2	1
2212	0	-3	9	0	-3	1	0	-3	-1	2	-1
2221	0	-3	9	0	-3	1	0	-3	-1	2	-1
1222	0	-3	9	0	-3	1	0	-3	-1	2	-1
2122	0	-3	9	0	-3	1	0	-3	-1	2	-1
3312	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
3321	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
1233	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
2133	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
2331	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
2313	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
3231	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
3213	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
3123	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
3132	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
1323	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0
1332	0	-1	3	0	6	-2	0	0	2	0	0

Table 1 (9)

T_{opqr} T_{3333}	G_{220}	G_{202}	G_{222}	G_{420}	G_{402}	G_{422}	G_{440}	G_{404}	G_{442}	G_{424}	G_{444}
T_{stuv}											
1112	0	6	0	0	-8	0	0	8	0	0	0
1121	0	6	0	0	-8	0	0	8	0	0	0
1211	0	6	0	0	-8	0	0	8	0	0	0
2111	0	6	0	0	-8	0	0	8	0	0	0
2212	0	6	0	0	-8	0	0	-8	0	0	0
2221	0	6	0	0	-8	0	0	-8	0	0	0
1222	0	6	0	0	-8	0	0	-8	0	0	0
2122	0	6	0	0	-8	0	0	-8	0	0	0
3312	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
3321	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
1233	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
2133	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
2331	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
2313	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
3231	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
3213	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
3123	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
3132	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
1323	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0
1332	0	2	0	0	16	0	0	0	0	0	0

Table 1 (10)

T^{opqrr}	T^{opqrr}	T^{opqrr}	T^{opqrr}	G_{220}	G_{202}	G_{222}	G_{420}	G_{402}	G_{422}	G_{440}	G_{404}	G_{442}	G_{424}	G_{444}
T_{1112}	T_{1121}	T_{1211}	T_{2111}	G_{220}	G_{202}	G_{222}	G_{420}	G_{402}	G_{422}	G_{440}	G_{404}	G_{442}	G_{424}	G_{444}
T_{2221}	T_{2212}	T_{2122}	T_{1222}	G_{220}	G_{202}	G_{222}	G_{420}	G_{402}	G_{422}	G_{440}	G_{404}	G_{442}	G_{424}	G_{444}
T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}											
1111	1111	1111	1111	3	0	-9	3	0	-1	-3	0	2	1	-1
2222	2222	2222	2222	3	0	9	3	0	1	-3	0	-2	1	-1
3333	3333	3333	3333	-6	0	0	8	0	0	-8	0	0	0	0
2233	2233	3322	3322	-4	0	-2	-4	0	-1	4	0	2	0	0
3322	3322	2233	2233	3	0	5	-4	0	-1	4	0	2	0	0
1133	1133	3311	3311	-4	0	2	-4	0	1	4	0	-2	0	0
3311	3311	1133	1133	3	0	-5	-4	0	1	4	0	-2	0	0
1122	1122	2211	2211	1	0	7	1	0	0	-1	0	0	-1	1
2211	2211	1122	1122	1	0	-7	1	0	0	-1	0	0	-1	1
2323	2332	2323	3223	-4	0	-2	-4	0	-1	4	0	2	0	0
3232	3223	3232	2332	3	0	5	-4	0	-1	4	0	2	0	0
2332	2323	3223	2323	3	0	5	-4	0	-1	4	0	2	0	0
3223	3232	2332	3232	-4	0	-2	-4	0	-1	4	0	2	0	0
1313	1331	1313	3113	-4	0	2	-4	0	1	4	0	-2	0	0
3131	3113	3131	1331	3	0	-5	-4	0	1	4	0	-2	0	0
1331	1313	3113	1313	3	0	-5	-4	0	1	4	0	-2	0	0
3113	3131	1331	3131	-4	0	2	-4	0	1	4	0	-2	0	0
1212	1221	1212	2112	1	0	7	1	0	0	-1	0	0	-1	1
2121	2112	2121	1221	1	0	-7	1	0	0	-1	0	0	-1	1
1221	1212	2112	1212	1	0	-7	1	0	0	-1	0	0	-1	1
2112	2121	1221	2121	1	0	7	1	0	0	-1	0	0	-1	1

Table 1 (11)

T^{opqrr}	T^{opqrr}	T^{opqrr}	T^{opqrr}	G_{220}	G_{202}	G_{222}	G_{420}	G_{402}	G_{422}	G_{440}	G_{404}	G_{442}	G_{424}	G_{444}
T_{3312}	T_{3321}	T_{1233}	T_{2133}											
T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}											
1111	1111	1111	1111	1	0	-3	-6	0	2	0	0	0	-2	0
2222	2222	2222	2222	1	0	3	-6	0	-2	0	0	0	-2	0
3333	3333	3333	3333	-2	0	0	-16	0	0	0	0	0	0	0
2233	2233	3322	3322	-6	0	4	8	0	2	0	0	0	0	0
3322	3322	2233	2233	1	0	11	8	0	2	0	0	0	0	0
1133	1133	3311	3311	-6	0	-4	8	0	-2	0	0	0	0	0
3311	3311	1133	1133	1	0	-11	8	0	-2	0	0	0	0	0
1122	1122	2211	2211	5	0	7	-2	0	0	0	0	0	2	0
2211	2211	1122	1122	5	0	-7	-2	0	0	0	0	0	2	0
2323	2332	2323	3223	1	0	-3	8	0	2	0	0	0	0	0
3232	3223	3232	2332	1	0	-3	8	0	2	0	0	0	0	0
2332	2323	3223	2323	1	0	-3	8	0	2	0	0	0	0	0
3223	3232	2332	3232	1	0	-3	8	0	2	0	0	0	0	0
1313	1331	1313	3113	1	0	3	8	0	-2	0	0	0	0	0
3131	3113	3131	1331	1	0	3	8	0	-2	0	0	0	0	0
1331	1313	3113	1313	1	0	3	8	0	-2	0	0	0	0	0
3113	3131	1331	3131	1	0	3	8	0	-2	0	0	0	0	0
1212	1221	1212	2112	-2	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	0
2121	2112	2121	1221	-2	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	0
1221	1212	2112	1212	-2	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	0
2112	2121	1221	2121	-2	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	0

Table 1 (12)

T ^{opqr} ₂₃₁₃ T ₁₃₂₃	T ^{opqr} ₂₃₃₁ T ₁₃₃₂	T ^{opqr} ₃₂₁₃ T ₃₁₂₃	T ^{opqr} ₃₂₃₁ T ₃₁₃₂	G ₂₂₀ G ₂₂₀	G ₂₀₂ G ₂₀₂	G ₂₂₂ G ₂₂₂	G ₄₂₀ G ₄₂₀	G ₄₀₂ G ₄₀₂	G ₄₂₂ G ₄₂₂	G ₄₄₀ G ₄₄₀	G ₄₀₄ G ₄₀₄	G ₄₄₂ G ₄₄₂	G ₄₂₄ G ₄₂₄	G ₄₄₄ G ₄₄₄
T ^{stuv} ₁₁₁₁	T ^{stuv} ₁₁₁₁	T ^{stuv} ₁₁₁₁	T ^{stuv} ₁₁₁₁	1	0	-3	-6	0	2	0	0	0	-2	0
T ^{stuv} ₂₂₂₂	T ^{stuv} ₂₂₂₂	T ^{stuv} ₂₂₂₂	T ^{stuv} ₂₂₂₂	1	0	3	-6	0	-2	0	0	0	-2	0
T ^{stuv} ₃₃₃₃	T ^{stuv} ₃₃₃₃	T ^{stuv} ₃₃₃₃	T ^{stuv} ₃₃₃₃	-2	0	0	-16	0	0	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₂₂₃₃	T ^{stuv} ₂₂₃₃	T ^{stuv} ₂₂₃₃	T ^{stuv} ₂₂₃₃	1	0	-3	8	0	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₃₂₂	T ^{stuv} ₃₃₂₂	T ^{stuv} ₃₃₂₂	T ^{stuv} ₃₃₂₂	1	0	-3	8	0	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₁₁₃₃	T ^{stuv} ₁₁₃₃	T ^{stuv} ₁₁₃₃	T ^{stuv} ₁₁₃₃	1	0	3	8	0	-2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₃₁₁	T ^{stuv} ₃₃₁₁	T ^{stuv} ₃₃₁₁	T ^{stuv} ₃₃₁₁	1	0	3	8	0	-2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₁₁₂₂	T ^{stuv} ₁₁₂₂	T ^{stuv} ₁₁₂₂	T ^{stuv} ₁₁₂₂	-2	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	0
T ^{stuv} ₂₂₁₁	T ^{stuv} ₂₂₁₁	T ^{stuv} ₂₂₁₁	T ^{stuv} ₂₂₁₁	-2	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	0
T ^{stuv} ₂₃₂₃	T ^{stuv} ₂₃₂₃	T ^{stuv} ₂₃₂₃	T ^{stuv} ₂₃₂₃	1	0	11	8	0	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₂₃₂	T ^{stuv} ₃₂₃₂	T ^{stuv} ₃₂₃₂	T ^{stuv} ₃₂₃₂	-6	0	4	8	0	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₂₃₃₂	T ^{stuv} ₂₃₃₂	T ^{stuv} ₂₃₃₂	T ^{stuv} ₂₃₃₂	1	0	-3	8	0	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₂₂₃	T ^{stuv} ₃₂₂₃	T ^{stuv} ₃₂₂₃	T ^{stuv} ₃₂₂₃	1	0	-3	8	0	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₁₃₁₃	T ^{stuv} ₁₃₃₁	T ^{stuv} ₃₁₁₃	T ^{stuv} ₃₁₃₁	1	0	-11	8	0	-2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₁₃₁	T ^{stuv} ₃₁₁₃	T ^{stuv} ₁₃₃₁	T ^{stuv} ₁₃₁₃	-6	0	-4	8	0	-2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₁₃₃₁	T ^{stuv} ₁₃₁₃	T ^{stuv} ₃₁₃₁	T ^{stuv} ₃₁₁₃	1	0	3	8	0	-2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₁₁₃	T ^{stuv} ₃₁₃₁	T ^{stuv} ₁₃₁₃	T ^{stuv} ₁₃₃₁	1	0	3	8	0	-2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₁₂₁₂	T ^{stuv} ₁₂₂₁	T ^{stuv} ₂₁₁₂	T ^{stuv} ₂₁₂₁	5	0	-7	-2	0	0	0	0	0	2	0
T ^{stuv} ₂₁₂₁	T ^{stuv} ₂₁₁₂	T ^{stuv} ₁₂₂₁	T ^{stuv} ₁₂₁₂	5	0	7	-2	0	0	0	0	0	2	0
T ^{stuv} ₁₂₂₁	T ^{stuv} ₁₂₁₂	T ^{stuv} ₂₁₂₁	T ^{stuv} ₂₁₁₂	-2	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	0
T ^{stuv} ₂₁₁₂	T ^{stuv} ₂₁₂₁	T ^{stuv} ₁₂₁₂	T ^{stuv} ₁₂₂₁	-2	0	0	-2	0	0	0	0	0	2	0

Table 1 (13)

T ^{opqr} ₁₁₃₃ T ₂₂₃₃	T ^{opqr} ₁₃₁₁ T ₃₃₂₂	T ^{opqr} ₁₃₁₃ T ₂₃₂₃	T ^{opqr} ₁₃₁₃ T ₃₂₃₂	T ^{opqr} ₁₃₃₁ T ₂₃₃₂	T ^{opqr} ₁₃₁₃ T ₃₂₂₃	G ₂₂₀ G ₂₂₀	G ₂₀₂ G ₂₀₂	G ₂₂₂ G ₂₂₂	G ₄₂₀ G ₄₂₀	G ₄₀₂ G ₄₀₂	G ₄₂₂ G ₄₂₂	G ₄₄₀ G ₄₄₀	G ₄₀₄ G ₄₀₄	G ₄₄₂ G ₄₄₂	G ₄₂₄ G ₄₂₄	G ₄₄₄ G ₄₄₄
T ^{stuv} ₁₁₁₂	T ^{stuv} ₁₂₁₁	T ^{stuv} ₁₁₁₂	T ^{stuv} ₁₁₂₁	T ^{stuv} ₁₁₂₁	T ^{stuv} ₁₁₁₂	0	4	-2	0	4	-1	0	-4	0	2	0
T ^{stuv} ₁₁₂₁	T ^{stuv} ₂₁₁₁	T ^{stuv} ₁₂₁₁	T ^{stuv} ₂₁₁₁	T ^{stuv} ₁₂₁₁	T ^{stuv} ₁₁₁₁	0	4	-2	0	4	-1	0	-4	0	2	0
T ^{stuv} ₁₂₁₁	T ^{stuv} ₁₁₁₂	T ^{stuv} ₁₁₂₁	T ^{stuv} ₁₁₁₂	T ^{stuv} ₁₁₁₂	T ^{stuv} ₁₁₂₁	0	-3	5	0	4	-1	0	-4	0	2	0
T ^{stuv} ₂₁₁₁	T ^{stuv} ₁₁₂₁	T ^{stuv} ₂₁₁₁	T ^{stuv} ₁₂₁₁	T ^{stuv} ₂₁₁₁	T ^{stuv} ₁₂₁₁	0	-3	5	0	4	-1	0	-4	0	2	0
T ^{stuv} ₂₂₁₂	T ^{stuv} ₁₂₂₂	T ^{stuv} ₂₁₂₂	T ^{stuv} ₁₂₂₂	T ^{stuv} ₁₂₂₂	T ^{stuv} ₂₂₂₂	0	4	-2	0	4	-1	0	4	0	-2	0
T ^{stuv} ₂₂₂₁	T ^{stuv} ₂₁₂₂	T ^{stuv} ₂₂₂₁	T ^{stuv} ₂₂₁₂	T ^{stuv} ₂₂₁₂	T ^{stuv} ₂₂₂₁	0	4	-2	0	4	-1	0	4	0	-2	0
T ^{stuv} ₁₂₂₂	T ^{stuv} ₂₂₁₂	T ^{stuv} ₁₂₂₂	T ^{stuv} ₂₁₂₂	T ^{stuv} ₁₂₂₂	T ^{stuv} ₂₁₂₂	0	-3	5	0	4	-1	0	4	0	-2	0
T ^{stuv} ₂₁₂₂	T ^{stuv} ₂₂₂₁	T ^{stuv} ₂₂₁₂	T ^{stuv} ₂₂₂₁	T ^{stuv} ₂₂₂₁	T ^{stuv} ₂₂₁₂	0	-3	5	0	4	-1	0	4	0	-2	0
T ^{stuv} ₃₃₁₂	T ^{stuv} ₁₂₃₃	T ^{stuv} ₃₁₃₂	T ^{stuv} ₁₃₂₃	T ^{stuv} ₃₁₂₃	T ^{stuv} ₁₃₃₂	0	6	4	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₃₂₁	T ^{stuv} ₂₁₃₃	T ^{stuv} ₃₂₃₁	T ^{stuv} ₂₃₁₃	T ^{stuv} ₃₂₁₃	T ^{stuv} ₂₃₃₁	0	6	4	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₁₂₃₃	T ^{stuv} ₃₃₁₂	T ^{stuv} ₁₃₂₃	T ^{stuv} ₃₁₃₂	T ^{stuv} ₁₃₃₂	T ^{stuv} ₃₁₂₃	0	-1	11	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₂₁₃₃	T ^{stuv} ₃₃₂₁	T ^{stuv} ₂₃₁₃	T ^{stuv} ₃₂₃₁	T ^{stuv} ₂₃₃₁	T ^{stuv} ₃₂₁₃	0	-1	11	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₂₃₃₁	T ^{stuv} ₃₁₂₃	T ^{stuv} ₂₃₃₁	T ^{stuv} ₃₂₁₃	T ^{stuv} ₂₃₁₃	T ^{stuv} ₃₂₃₁	0	-1	-3	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₂₃₁₃	T ^{stuv} ₁₃₂₃	T ^{stuv} ₂₁₃₃	T ^{stuv} ₁₂₃₃	T ^{stuv} ₂₁₃₃	T ^{stuv} ₁₂₃₃	0	-1	-3	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₂₃₁	T ^{stuv} ₃₁₃₂	T ^{stuv} ₃₃₂₁	T ^{stuv} ₃₃₁₂	T ^{stuv} ₃₃₁₂	T ^{stuv} ₃₃₂₁	0	-1	-3	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₂₁₃	T ^{stuv} ₁₃₃₂	T ^{stuv} ₃₁₂₃	T ^{stuv} ₁₃₃₂	T ^{stuv} ₁₃₃₂	T ^{stuv} ₃₁₂₃	0	-1	-3	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₁₂₃	T ^{stuv} ₂₃₃₁	T ^{stuv} ₃₂₁₃	T ^{stuv} ₂₃₃₁	T ^{stuv} ₃₂₃₁	T ^{stuv} ₂₃₁₃	0	-1	-3	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₃₁₃₂	T ^{stuv} ₃₂₃₁	T ^{stuv} ₃₃₁₂	T ^{stuv} ₃₃₂₁	T ^{stuv} ₃₃₂₁	T ^{stuv} ₃₃₁₂	0	-1	-3	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₁₃₂₃	T ^{stuv} ₂₃₁₃	T ^{stuv} ₁₂₃₃	T ^{stuv} ₂₁₃₃	T ^{stuv} ₁₂₃₃	T ^{stuv} ₂₁₃₃	0	-1	-3	0	-8	2	0	0	0	0	0
T ^{stuv} ₁₃₃₂	T ^{stuv} ₃₂₁₃	T ^{stuv} ₁₃₃₂	T ^{stuv} ₃₁₂₃	T ^{stuv} ₁₃₂₃	T ^{stuv} ₃₁₃₂	0	-1	-3	0	-8	2	0	0	0	0	0

Table 1 (14)

T_{1122}	T_{2211}	T_{1212}	T_{2121}	T_{1221}	T_{2112}	G_{220}	G_{202}	G_{222}	G_{420}	G_{402}	G_{422}	G_{440}	G_{404}	G_{442}	G_{424}	G_{444}
T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}	T_{stuv}											
1112	1211	1112	1121	1121	1112	0	-1	-7	0	-1	0	0	1	1	0	-1
1121	2111	1211	2111	1211	2111	0	-1	-7	0	-1	0	0	1	1	0	-1
1211	1112	1121	1112	1112	1121	0	-1	7	0	-1	0	0	1	1	0	-1
2111	1121	2111	1211	2111	1211	0	-1	7	0	-1	0	0	1	1	0	-1
2212	1222	2122	1222	2122	1222	0	-1	-7	0	-1	0	0	-1	1	0	1
2221	2122	2221	2212	2212	2221	0	-1	-7	0	-1	0	0	-1	1	0	1
1222	2212	1222	2122	1222	2122	0	-1	7	0	-1	0	0	-1	1	0	1
2122	2221	2212	2221	2221	2212	0	-1	-7	0	-1	0	0	-1	1	0	1
3312	1233	3132	1323	3123	3132	0	-5	-7	0	2	0	0	0	-2	0	0
3321	2133	3231	2313	3213	3231	0	-5	-7	0	2	0	0	0	-2	0	0
1233	3312	1323	3132	1332	3123	0	-5	7	0	2	0	0	0	-2	0	0
2133	3321	2313	3231	2331	3213	0	-5	7	0	2	0	0	0	-2	0	0
2331	3123	2331	3213	2313	3231	0	2	0	0	2	0	0	0	-2	0	0
2313	1323	2133	1233	2133	1233	0	2	0	0	2	0	0	0	-2	0	0
3231	3132	3321	3312	3312	3321	0	2	0	0	2	0	0	0	-2	0	0
3213	1332	3123	1332	3132	1323	0	2	0	0	2	0	0	0	-2	0	0
3123	2331	3213	2331	3231	2313	0	2	0	0	2	0	0	0	-2	0	0
3132	2331	3312	3321	3321	3132	0	2	0	0	2	0	0	0	-2	0	0
1323	2313	1233	2133	1323	2133	0	2	0	0	2	0	0	0	-2	0	0
1332	3213	1332	3123	1323	3132	0	2	0	0	2	0	0	0	-2	0	0

$$R_{lmn} \times \begin{matrix} \sqrt{15} & \sqrt{15} & \sqrt{10} & \sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{2} & \sqrt{35} & \sqrt{35} & \sqrt{14} & \sqrt{14} & \sqrt{2} \\ 210 & 210 & 420 & 840 & 840 & 168 & 840 & 840 & 336 & 336 & 48 \end{matrix}$$

Table 1 Values of the coefficients, $E_{lmn}^{opqr, stuv}$ and $G_{lmn}^{opqr, stuv}$ appearing in eq. (16); where factors R_{lmn} multiplied by each values in the table are $E_{lmn}^{opqr, stuv}$ and $G_{lmn}^{opqr, stuv}$ in the equation.

Table 2

T_{1111}	T_{1122}	T_{1133}	0	0	0	0	T_{1112}	T_{1121}
T_{2211}	T_{2222}	T_{2233}	0	0	0	0	T_{2212}	T_{2221}
T_{3311}	T_{3322}	T_{3333}	0	0	0	0	T_{3312}	T_{3321}
0	0	0	T_{2323}	T_{2332}	T_{2313}	T_{2331}	0	0
0	0	0	T_{3223}	T_{3232}	T_{3213}	T_{3231}	0	0
0	0	0	T_{1323}	T_{1332}	T_{1313}	T_{1331}	0	0
0	0	0	T_{3123}	T_{3132}	T_{3113}	T_{3131}	0	0
T_{1211}	T_{1222}	T_{1233}	0	0	0	0	T_{1212}	T_{1221}
T_{2111}	T_{2122}	T_{2133}	0	0	0	0	T_{2112}	T_{2121}

T_{1111}	T_{1122}	T_{1133}	0	0	0	0	T_{1112}	T_{1121}
T_{2211}	T_{2222}	T_{2233}	0	0	0	0	T_{2212}	T_{2221}
T_{3311}	T_{3322}	T_{3333}	0	0	0	0	T_{3312}	T_{3321}
0	0	0	T_{2323}	T_{2332}	T_{2313}	T_{2331}	0	0
0	0	0	T_{3223}	T_{3232}	T_{3213}	T_{3231}	0	0
0	0	0	T_{1323}	T_{1332}	T_{1313}	T_{1331}	0	0
0	0	0	T_{3123}	T_{3132}	T_{3113}	T_{3131}	0	0
T_{1211}	T_{1222}	T_{1233}	0	0	0	0	T_{1212}	T_{1221}
T_{2111}	T_{2122}	T_{2133}	0	0	0	0	T_{2112}	T_{2121}

T_{opqr}	T_{stuv}	
	E_{lmn}	G_{lmn}
1) T_{1111} T_{2222}	T_{1111} T_{2222} T_{3333}	T_{1112} T_{1121} T_{1211} T_{2111}
2) T_{3333}	T_{2233} T_{3322} T_{2323} T_{2332} T_{3223} T_{3232}	T_{2212} T_{2221} T_{1222} T_{2122}
3) T_{2233} T_{3322} T_{2323} T_{2332} T_{3223} T_{3232}	T_{1133} T_{3311} T_{1313} T_{1331} T_{3113} T_{3131}	T_{3312} T_{3321} T_{1233} T_{2133}
4) T_{1122} T_{2211} T_{1212} T_{1221} T_{2112} T_{2121}	T_{2313} T_{2331} T_{3213} T_{3231}	T_{1323} T_{1332} T_{3123} T_{3132}
5) T_{1112} T_{1121} T_{1211} T_{2111}	T_{1112} T_{1121} T_{1211} T_{2111}	T_{1111} T_{2222} T_{3333}
6) T_{2212} T_{2221} T_{1222} T_{2122}	T_{2212} T_{2221} T_{1222} T_{2122}	T_{2233} T_{3322} T_{2323} T_{2332} T_{3223} T_{3232}
7) T_{3312} T_{3321} T_{1233} T_{2133}	T_{3312} T_{3321} T_{1233} T_{2133}	T_{1133} T_{3311} T_{1313} T_{1331} T_{3113} T_{3131}
T_{2313} T_{2331} T_{3213} T_{3231}	T_{2313} T_{2331} T_{3213} T_{3231}	T_{1122} T_{2211} T_{1212} T_{1221} T_{2112} T_{2121}
T_{1323} T_{1332} T_{3123} T_{3132}	T_{1323} T_{1332} T_{3123} T_{3132}	

Table 2 Specification of each group of the 4th-rank tensors T_{opqr} and T_{stuv} appearing in the transformation of Cartesian coordinate systems, and the corresponding coefficients $E_{lmn}^{opqr, stuv}$ and $G_{lmn}^{opqr, stuv}$ to T_{stuv}

すような虚数部分を含む非 zero の項が存在し、これらは7つのグループに分類される。

これらの一般化された展開係数は、反射法および傾斜透過法蛍光強度ならびに反射法レーザーラマン散乱強度から分子配向を評価するために必要であり、具体的実例は別に報告の予定である。

付 記 本研究は昭和57, 58年度文部省特定研究経費によることを報告し、謝意を表わす。

文 献

- 1) S.R.Kao, C.C.Hsiao, J.Appl. Phys., **35**, 3127 (1964)
- 2) S.Nomura, S.Kawabata, H.Kawai, Y.Yamaguchi, A.Fukushima, H.Takahara, J.Polym. Sci., Part A-2, **7**, 325 (1969)
- 3) 日比貞雄, 前田松夫, 牧野正三, 野村春治, 河合弘迪, 織学誌, **29**, T-79 (1973)
- 4) 日比貞雄, 前田松夫, 勝野歳康, 片山裕之, 西山淳, 名工大学報, **34**, 185 (1982)
- 5) 日比貞雄, 前田松夫, 河村昌寛, 伊藤恵子, 横山明宏, 高分子論文集, **39**, 379 (1982)
- 6) P.R.Morris, J.Appl. Phys., **40**, 447 (1969)
- 7) R.J.Roe, J.Appl. Phys., **36**, 2024 (1965)
- 8) S.Hibi, M.Maeda, A.Yokoyama, K.Itoh, M.Kawamura, to be submitted to J.Polym. Sci.,
- 9) D.I.Bower, J.Polym. Sci., Polym. Phys. Ed., **10**, 2135 (1972)
- 10) D.I.Bower, J.Phys. B: Atom Molec. Phys., **9**, 3275 (1976)
- 11) M.E.R.Robinson, D.I.Bower, W.F.Maddajs, J.Polym. Sci., Phys. Ed., **16**, 2115 (1978)
- 12) J.Purvis, D.I.Bower, **15**, 645 (1974)