

繰返し引張荷重を受ける円孔を有する帯板の弾塑性変形

川嶋紘一郎・中山喜敬*

機 械 工 学 科

(1980年9月6日 受理)

Redistribution of Stresses around a Circular Hole in a Strip Subjected to Cyclic Tension

Koichiro KAWASHIMA and Yoshinori NAKAYAMA*

Department of Mechanical Engineering

(Received September 6, 1980)

The change in elasto-plastic stress distribution around a circular hole in a strip during cyclic loading is analyzed by finite element method. Hencky's deformation theory is combined with an analytical expression of plastic stress-strain curve for cyclic loading process in which the change in stress-strain characteristics during cycling are explicitly formulated as a function of deformation history.

The calculation was carried out successively for tensile half cycle and the following unloading half cycle up to 6-th half cycle. As a result of calculation the following facts are revealed; The elements near the hole are subjected to compression after unloading as well as tension in tensile half cycle, even if the load varies cyclically between a certain value in tension and zero. In addition, these elements exhibit the cyclic creep, that is, the increase in the average strain during cycling.

1. 結 言

本報告では、構造部材としてしばしば用いられる円孔を有する帯板が部分的塑性変形を受けた後に繰返し引張荷重を受ける場合について、円孔近傍の応力分布の繰返し数に伴う変化を明らかにすることを目的とする。

電子計算機を使用した構造解析・応力解析の最近の発展によって、負荷を受けた部材に生ずる応力をかなり正確に評価できるようになり、さらに材料自体の信頼性の向上とあいまって、構造の軽量化が進みつつある。そのような構造が偶発的に過大な負荷を受けたとき、その一部が塑性変形することも考えられる。また一方では、構造の一部に塑性変形が生じてその耐荷能力が減少しないならば、局部塑性変形を許容する設計もなされている。

いずれの場合においても、構造が安全に使用されるた

めには、時間とともに変動する負荷の下でそれが十分な耐荷能力を有し、またその変形量が一定限度内に留まることが必要である。

材料が変形履歴依存性のない剛塑性体として理想化され、負荷の変動速度が無視できる場合、上記の問題は順応性 (Shake-down) 理論⁽¹⁾によって扱われており、梁、板、殻等について耐荷能力を保証する荷重パラメータの変動範囲を定める解析が行われてきた。しかし、切欠き、穴等の応力集中部を有する部材では、局部応力の評価が困難なため、順応性解析はほとんどなされていない。

他方、材料の変形特性の面から考えると、工業的に用いられる構造用金属材料に許容される塑性ひずみは極めてわずかであり、弾性ひずみと同程度の大きさであるから、剛塑性体の概念を用いることはかなり粗い近似と言わざるを得ない。さらに、金属材料に繰返し負荷を加えたとき得られる応力-ひずみ曲線の形状は、多くの場合、繰返しの初期にて著しく変化するが、繰返し数の増大に

伴い次第に一定の形状に近づくことが知られている。それゆえ、不均一な応力・ひずみ場を伴う構造要素が繰返し負荷を受ければ、それによって応力・ひずみ場も複雑に変化すると予想される。しかるに従来の研究では、繰返しに伴う材料の変形特性の変化を無視した解析⁽²⁾あるいは実験による解析^{(3),(4)}しかなされていない。

本研究では、材料の受けたひずみ履歴を考慮できる応力-ひずみ曲線の表示式⁽⁵⁾とHenckyの全ひずみ理論を組み合せ、有限要素法を用いて、零と一定の引張荷重の間の繰返し負荷を受ける中心に円孔を有する帯板の変形を解析する。

2. 繰返し負荷の応力-ひずみ関係

2.1 全ひずみ理論

全ひずみ理論では、塑性状態においても応力とひずみが増加履歴に依存せず一対一に対応すると仮定する。この仮定は各応力成分が比例的に増大する比例負荷の場合には厳密に満たされるが、負荷経路が比較的直線に近い場合にも十分妥当であることが確かめられている⁽⁶⁾。繰返し負荷過程に対しても、Fig. 1に示すように、繰返しの各半サイクル毎に、除荷開始状態を原点にとり座標軸の向きを先行半サイクルのそれと逆向きに定めた座標系を導入すれば、自然状態を基準とした応力、ひずみ等はそれ以前の各半サイクルでのそれらの値の和として、次

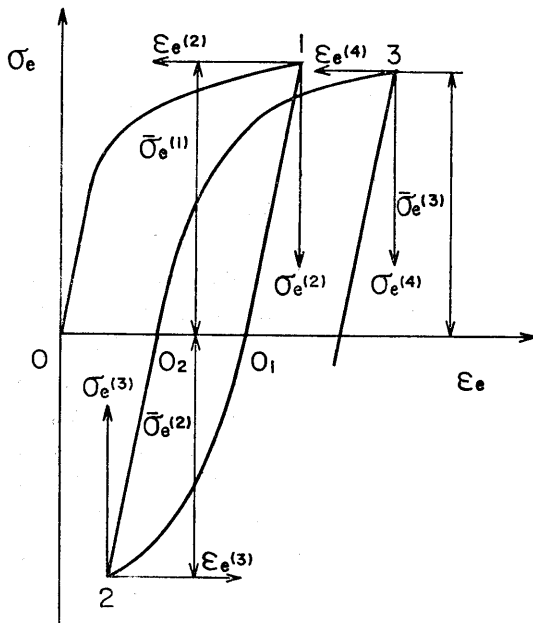


Fig. 1 Stress-strain curve for cyclic loading and coordinate system of each half cycle.

式のように表わすことができる⁽⁷⁾。

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \sigma_{ij}^{(n)}, \quad \epsilon_{ij} = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \epsilon_{ij}^{(n)} \quad (1)$$

ここで、 $\sigma_{ij}^{(n)}$ および $\epsilon_{ij}^{(n)}$ は n 番目の半サイクルの座標系で表わしたその半サイクルにて生じた応力とひずみを表わす。

本研究では各半サイクル毎に下記の Hencky の応力-ひずみ関係を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0 &= A (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^0) \\ A &= \frac{2\sigma_e}{3\epsilon_e} \\ \sigma &= 3K\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 σ と ϵ は平均応力と平均ひずみ、 K は体積弾性係数、 σ_e と ϵ_e は次式で与えられる相当応力と相当ひずみを表わす。

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{ij}\sigma_{ij} - 3\sigma^2)}, \quad \epsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3} (\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} - 3\epsilon^2)} \quad (3)$$

平面ひずみおよび平面応力の各場合に対し、式(2)は行列形式で以下のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K + \frac{2}{3}A & K - \frac{A}{3} & 0 \\ K - \frac{A}{3} & K + \frac{2}{3}A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{3A}{3K+2A} \begin{pmatrix} 2K + \frac{A}{3} & K - \frac{A}{3} & 0 \\ K - \frac{A}{3} & 2K + \frac{A}{3} & 0 \\ 0 & 0 & K + \frac{2}{3}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (5)$$

なお、弾性状態に対して、 $A=2G$ (G : 横弾性係数) と置けば、式(4)および(5)はそのまま適用できる。

上式(4)および(5)に含まれる A は変形状態の関数として表わされているが、単軸引張 (又は圧縮) 試験により材料の応力-ひずみ曲線が求まれば、その関数形が定まる。

なお、初期降伏条件として Mises の条件を用いる。

$$\sigma_e = \sigma_0 \quad (\sigma_0: \text{単軸引張降伏応力}) \quad (6)$$

2.2 応力-ひずみ曲線

単軸引張りの応力-ひずみ曲線を次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e &= 3G\epsilon_e & \epsilon_e \leq \epsilon_y \text{ に対し} \\ \sigma_e &= f(\epsilon_e) & \epsilon_e \geq \epsilon_y \text{ に対し} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに ϵ_y は降伏相当ひずみであり、 f の具体的な関数形は較正試験より定める。

予ひずみを受けた後の各半サイクルに対しては (Fig. 1 参照)、自然状態を基準とした (以下“基準系”と呼ぶ) 相当応力が減少する過程 (例えば Fig. 1 の 10_{12}

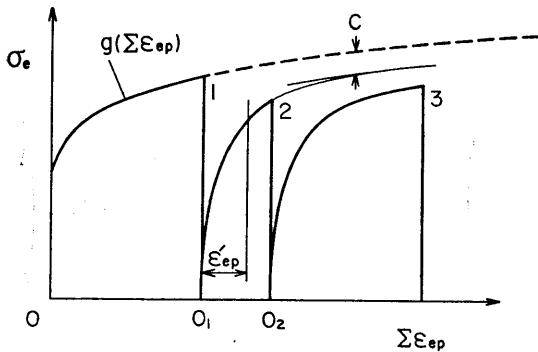


Fig. 2 Relation between equivalent stress and cumulative equivalent plastic strain for cyclic loading.

20₂) は弾性的であるとみなす。

$$\sigma_e^{(n)} = 3G\varepsilon_e^{(n)} \quad \varepsilon_e^{(n)} \leq \bar{\sigma}_e^{(n-1)}/3G \text{ に対し} \quad (8)$$

ここに、 $\bar{\sigma}_e^{(n)}$ は Fig. 1 に示すように基準系の n 半サイクル終了時の相当応力の値である。

基準系の相当応力が增大する過程、例えば Fig. 1 の O_1, O_2, O_3 に対し、前報⁽⁶⁾で得られた下記の応力と塑性ひずみの関係を用いる (Fig. 2 参照)

$$\sigma_e^{(N)} = \left[g \left(\sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_{ep}^{(n)} + \varepsilon'_{ep} \right) - C \right] [1 - \exp\{-\beta(\varepsilon'_{ep})^m\}] + \bar{\sigma}_e^{(N-1)} \quad (9)$$

ここに、 g は単軸引張りの応力-塑性ひずみ曲線を表わす関数、 C は先行半サイクルの塑性ひずみおよび繰返し数に依存する定量化量、 β および m は $g-C$ で表わされる曲線への漸近の程度を表わす材料特性値である。なお、 N 番目の半サイクルの途中で生じた相当塑性ひずみを ε'_{ep} で表わしている。

3. 解析方法

3.1. 計算モデル

本研究では、Fig. 3 に示す、中心に円孔を有する厚さ一定の帯板が両端にて一様応力 p_0 を受けて、繰返し引張られる場合の変形を有限要素法を用いて解析する。対称性より、Fig. 3 の斜線の部分について三角形有限要素を用いて要素分割を行った。例として、 $a=150\text{mm}$, $b=100\text{mm}$, $r=30\text{mm}$ の場合の要素分割を Fig. 4 に示す。

3.2. 材料特性値

計算には、工業用純アルミニウム1050について得られた下記の材料特性値を用いた。

$$\left. \begin{aligned} G &= 2631 \text{ kgf/mm}^2, \quad 3K = 20588 \text{ kgf/mm}^2 \\ \sigma_0 &= 4.104 \text{ kgf/mm}^2, \quad \varepsilon_r = 5.20 \times 10^{-4} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

塑性域の引張曲線 (式(7)の f) を次式で表わした。

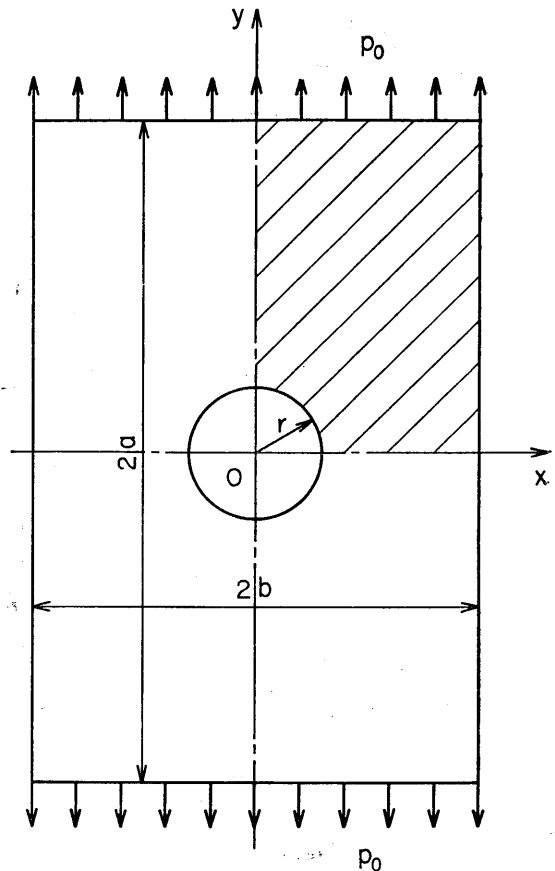


Fig. 3 Analytical model; a strip with a central hole subjected to cyclic tension.

$$\sigma_e = 16.5 \varepsilon_e^{0.184} \quad (11)$$

繰返し負荷の各半サイクルに対し、式(9)に現われる関数 g は式(11)で表わされる曲線を σ_e と ε_{ep} によって表示することによって得られるが、後述のように、実際の計算においては式(7)の関数 f を用いるので、 g を求める必要はない。式(9)に含まれる C と β に対し、校正試験より得られた下記の関数を用いる。

$$\left. \begin{aligned} C &= 1.29 \{1 - \exp(-541 \varepsilon_{ep}^{(N-1)})\} N^{-0.0645} \\ \beta &= 0.125 / \varepsilon_{ep}^{(N-1)} + 60.3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{引張半サイクル}) \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} C &= 1.29 \{1 - \exp(-541 \varepsilon_{ep}^{(N-1)})\} N^{0.190} \\ \beta &= 0.00691 / \varepsilon_{ep}^{(N-1)} + 42.7 \end{aligned} \right\} \quad (\text{圧縮半サイクル}) \quad (13)$$

ここに、 $\varepsilon_{ep}^{(N-1)}$ は考える半サイクルの直前の半サイクルにて生じた相当塑性ひずみを表わす。

また、 $m=0.5$ と得られた。

3.3. 計算方法

計算は、通常の二次元の変位法による有限要素法⁽⁸⁾を

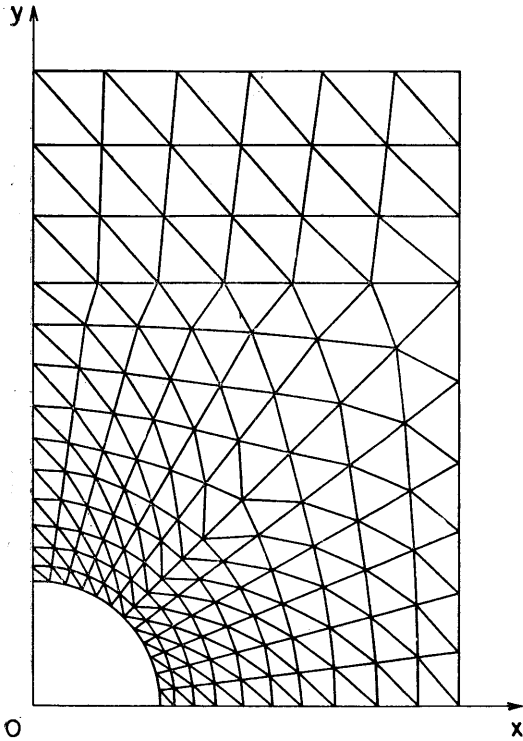


Fig. 4 Division of analytical model into triangular elements; $r=30\text{mm}$, $a=150\text{mm}$, $b=100\text{mm}$.

用いて行った。各要素剛性行列には、式(4)あるいは(5)に現われる $A=2\sigma_e/(3\epsilon_e)$ が含まれる。弾性状態に対し $A=2G$ であり、最初の負荷過程の塑性状態については式(11)より A の値を計算できる。他方、繰返し負荷過程の応力-ひずみ曲線(式(9))は相当塑性ひずみの関数として表わされているので、以下に述べる方法によって、各有限要素に対する A の値を求める。

式(9)に現われる N 半サイクル座標系の相当塑性ひずみ ϵ'_{ep} は対応する全ひずみ $\epsilon_e^{(N)}$ と応力 $\sigma_e^{(N)}$ を用いて $\epsilon'_{ep} = \epsilon_e^{(N)} - \sigma_e^{(N)}/3G$ (14) と表わすことができる。また式(9)の $g(\sum \epsilon_{ep}^{(n)} + \epsilon'_{ep})$ は、Fig. 1 および 2 からわかるように、

$$f\left(\sum \epsilon_{ep}^{(n)} + \frac{\bar{\sigma}_{MAX}}{3G} + \epsilon_e^{(N)} - \frac{\sigma_e^{(N)}}{3G}\right) \quad (15)$$

に等しい。ここで、 $\bar{\sigma}_{MAX}$ によって、考える半サイクル以前の $\bar{\sigma}_e^{(n)}$ のうち最大のものを表わす。これを式(9)に代入して得られる

$$\sigma_e^{(N)} = \left[f\left(\sum \epsilon_{ep}^{(n)} + \frac{\bar{\sigma}_{MAX}}{3G} + \epsilon_e^{(N)} - \frac{\sigma_e^{(N)}}{3G}\right) - C \right] \times \left[1 - \exp\left\{-\beta\left(\epsilon_e^{(N)} - \frac{\sigma_e^{(N)}}{3G}\right)^m\right\} \right] + \bar{\sigma}_e^{(N-1)} \quad (16)$$

を満足する $\sigma_e^{(N)}$ と $\epsilon_e^{(N)}$ を反復法によって求め、これより $A^{(N)} = 2\sigma_e^{(N)}/(3\epsilon_e^{(N)})$ を計算する。本解析では、予

負荷後、基準系の相当応力が增大する過程を塑性変形過程とみなすので、初期値として $\sigma_e^{(N)} = \bar{\sigma}_e^{(N-1)}$, $\epsilon_e^{(N)} = \bar{\sigma}_e^{(N-1)}/3G$ を用いることができる。

4. 計算結果

計算は、板幅に対する円孔の直径の比 r/b が 0.1, 0.3 および 0.5 の各場合につき、板の最小断面の平均応力が σ_0 よりやや小さい $p=4\text{kgf/mm}^2$ およびそれよりかなり大きい $p=6\text{kgf/mm}^2$ の2種類について行った。以下では、主に、 $p=4\text{kgf/mm}^2$ に対して得られた縦方向の応力 σ_y の分布について述べる。

Fig. 5 には、 $p=4\text{kgf/mm}^2$ の予負荷を与えた際の無次元化した縦方向応力 σ_y/p の最小断面上 (x 軸上) の分布を示す。実線は平面応力、破線は平面ひずみ状態に対する結果であり、一点鎖線は材料が完全弾性体の場合の結果を表わす。実線および破線に付けた小さい矢印は弾塑性境界を示し、 x/b の値がそれ以下の部分が塑性域に対応する。図から明らかなように、 r/b の値によって応力分布は著しく変化する。 $r/b=0.1$ の場合、 x/b が 0.3 を越えれば σ_y/p の値はほぼ一定となる。これに対し、

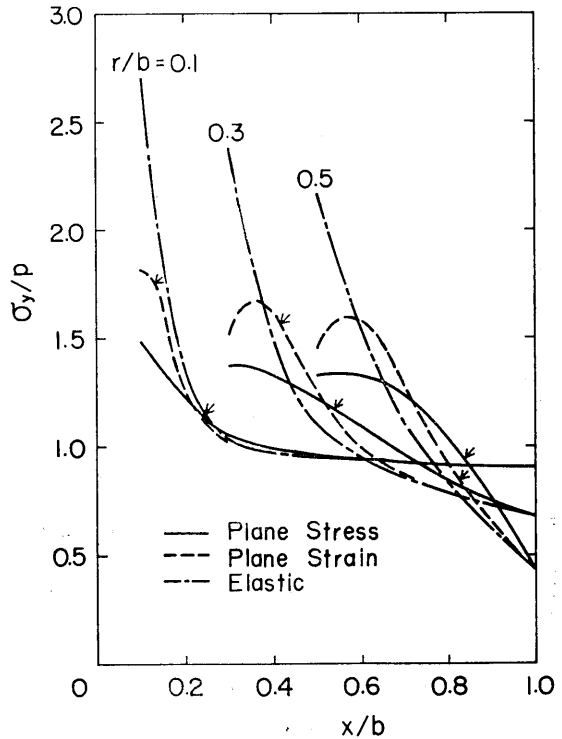


Fig. 5 Distribution of longitudinal dimensionless stress on the minimum cross section for preloading.

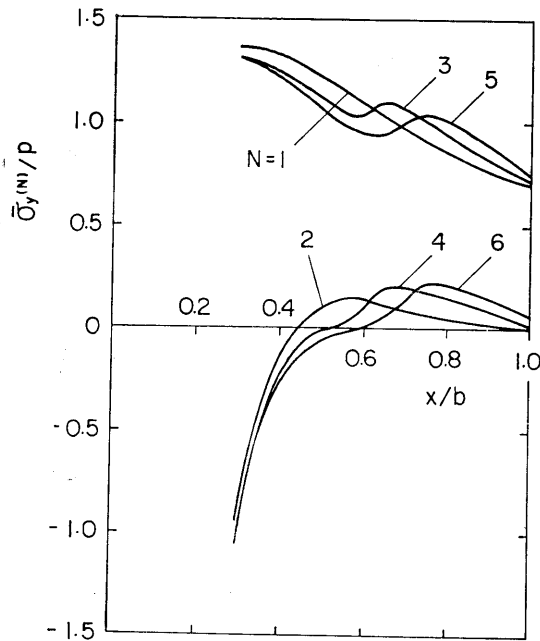


Fig. 6 Distribution of longitudinal dimensionless stress at the end of half cycle.

$r/b=0.3$ および 0.5 の場合には、 x/b の増大に伴い応力値は低下し続ける。また、塑性域の出現によって、円孔底近傍における弾性状態の高い応力集中は緩和され、応力分布は一様化する。平面ひずみの場合、塑性拘束のため σ_x/p は円孔底で最大値をとらず、その外側で最大となる。 $r/b=0.1$ のときこの傾向が見られないのは、円孔底附近の要素分割がやや大きすぎたためと考えられる。平面応力の場合と比較して、平面ひずみの場合に最大応力が20%程度高くなることに注意する必要がある。

Fig. 6 には、 $r/b=0.3$ 、 $p=4\text{kgf/mm}^2$ で平面応力の場合について、 p の値を $4 \rightarrow 0 \rightarrow 4 \rightarrow 0 \rightarrow 4$ と変化させて繰返し引張を与えたときの各半サイクル終了時の最小断面上の無次元化した応力 $\bar{\sigma}_y/p$ の分布を示す。負荷時 ($N=1, 3, 5$) の応力は、円孔に近い部分では N の増加に伴い低下するが、板の側面に近い部分では逆に高く現われ、次第に分布が一様となる傾向を示す。図の下部の除荷時 ($N=2, 4, 6$) の残留応力は、円孔底近傍では圧縮応力であり、その絶対値は繰返し数とともに幾分か増大するが、 $N=4$ と 6 に対する結果はほぼ同一となる。帯板の側面に近い部分の残留応力は正であって、 N の増加とともに少しずつ増大する。この図から、外部荷重が0と引張りの片振状態であっても、円孔近傍の要素は引張-圧縮の両振状態となることが明らかである。円孔よりだ円孔、さらにき裂となるにつれて周囲の拘束が強まるので、この傾向はより強められることが予想される。

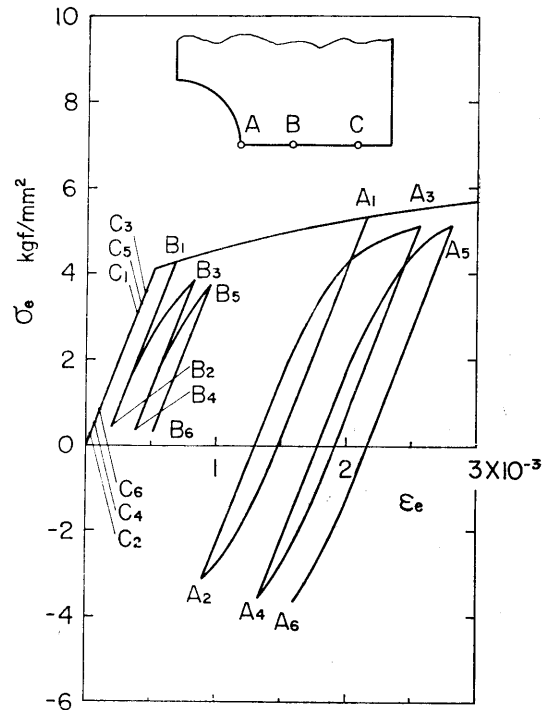


Fig. 7 Stress-strain hysteresis loops of some typical elements.

Fig. 7 には、Fig. 6 の場合と同一の条件下での、最小断面上の3個の要素の相当応力-相当ひずみ履歴曲線を示す。円孔底の要素Aは前述のように両振応力状態にあ

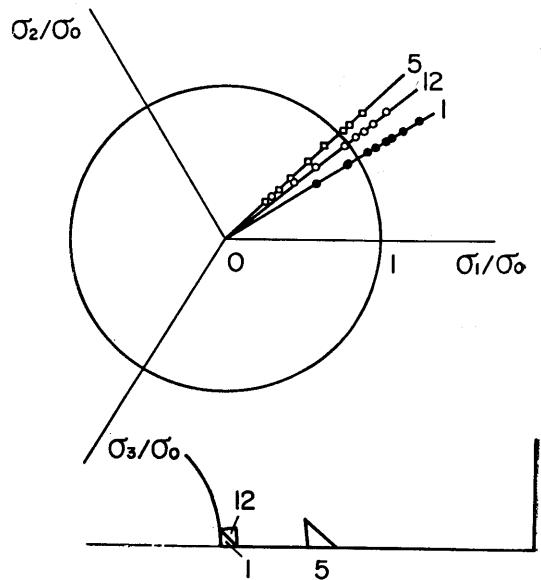


Fig. 8 Stress trajectories of some elements on the deviatoric stress plane.

り、負荷の繰返しに伴い平均ひずみが増大するサイクリッククリープ現象を示す。一方、円孔底より 24 mm 離れた要素 B はほぼ片振応力状態であるがやはりサイクリッククリープを示す。要素 C は弾性状態での片振状態にある。

前述のように、全ひずみ理論の妥当性が保証されるのは負荷経路が比較的直線に近い場合である。本計算例において上記の条件が満たされているか否かを検討するため、 $r/b=0.3$ の平面応力の場合について、平均応力を 0.5 kgf/mm^2 から 5 kgf/mm^2 まで 0.5 kgf/mm^2 毎に増加させた際の、図中に記入した 3 個の有限要素の主偏差応力面上の負荷軌跡を Fig. 8 に示す。図の円内は弾性状態、円外が塑性状態に対応する。図から明らかなように、いずれの要素の負荷軌跡も直線に近く、比例負荷の条件をほぼ満足していると言える。従って、本解析に全ひずみ理論を用いたことは妥当であると考えられる。

5. 結 言

中心に円孔を有する帯板が繰返し引張力を受けるとき、繰返しに伴う円孔近傍の応力分布の変化を有限要素法を用いて解析した。塑性状態に対し Hencky の全ひずみ理論を用い、繰返しによる材料の変形特性の変化を考慮できる相当応力-相当ひずみ曲線の表示式を組み合わせた。板幅に対する円孔直径の比が 0.1, 0.3 および 0.5 の各場合について、最小断面の平均応力が単軸引張降伏応力よりやや小さい場合について計算を行った。得られた結果は以下のように要約できる。

(1) 外部荷重が引張りの片振りであっても、円孔底近傍の要素は周囲の拘束のため引張-圧縮の両振応力状態

となり、繰返しに伴ってサイクリッククリープを示す。
(2) 塑性域出現後縦方向応力の分布は一様化する。また、繰返しとともに負荷半サイクルの終了時の応力分布も一様化する。

(3) 平面応力状態と比較して、平面ひずみ状態では最大応力が 20% 程高く現われる。

(4) 最小断面に近い 3 個の要素の主偏差応力面上の負荷軌跡はほぼ直線であり比例負荷の条件が満足されているので、全ひずみ理論の使用は妥当である。

なお、本研究に協力された当時名古屋工業大学学生高畑泰幸、戸沢宏一の両君に感謝する。

参 考 文 献

1. Prager, W., An introduction to plasticity (1959), Addison-Wesley.
2. Mowbray, D.E., and Slot, T., Trans. ASME Ser.D, 91-3 (1969), 379.
3. Crews, J.H.Jr., NASA TN D-5253 (1969).
4. Gowda, C.V.B., and Topper, T.H., Proc. SESA, 29-2 (1972), 359.
5. 川嶋, 材料, 29-318 (1980), 351.
6. Жуков, А.М., Вопросы теории пластичность (1961), АН СССР.
7. Москвитин, В.В., Пластичности при переменных нагружениях (1965), Изд. Моск. ун-та.
8. Zienkiewicz, O.C., The finite element method in engineering science (1971), McGraw-Hill.