

# 弾性円管と流体の連成波動

(伝ば速度の近似式の精度)

浦 田 喜 彦

生産機械工学科

(1980年9月6日受理)

## Coupled Wave Motions of Elastic Pipes and Fluids (Accuracy of Approximations of Propagating Velocity)

Yoshihiko URATA

*Department of Industrial-Mechanical Engineering*

(Received September 6, 1980)

An exact analysis of the coupled waves of elastic pipes and fluids is done. The three dimensional theory of elasticity is used for the precise expression of movement of pipes. And some approximations of propagating velocity of the waves are examined by comparing with the exact values.

### 1. 緒 言

管内流体の波動の性質を知ることは流体管路の動的な特性を把握するうえで不可欠である。管が弾性的である場合には管自身の運動も加わるのでその性質はやや複雑になるが、このような問題を管と流体とが連成する波動と見る観点から主に解析的な方法で調べてきた。これらの解析は連成波の性質を詳しく知ることを主な目的としていたために、そこでの計算法を実際的な問題に直ちに適用できるほど簡潔なものにはなっていない。このために、応用面への対応として、精密な解析結果を基準にして従来から用いられてきた簡便な近似式の精度や適用限界の評価も行なった。<sup>1)</sup>ところが、この点について少し不十分な点があることがその後の検討で明らかになったので、ここで補足しておきたい。

ここで検討する内容はつぎのとおりである。弾性円管と流体の連成波動で、低振動数域で波として伝ばする性質を持つのは、第一次モード（以下においてはモード名をC1とする）と第二次モード（以下C2）の二つだけであり、しかも、それらのモードは波長が管平均直径の約10倍を越える領域ではほとんど非分散的になり、性質が著しく単純になる。このような領域を対象にした伝ば速度の簡便な近似式がいくつか提案され、中でも Kort-

eweg による式などは実用的にすっかり定着したものになっている。これらを検討する基準として Herrmann-Mirsky による円筒かく理論<sup>2)</sup>と非粘性流体の線形理論を連立させて得た各モードの位相速度の値を用いた。ここで問題になるのは円筒かく理論の精度である。この点についてはつぎのように考えていた。管内に流体がない場合の管単独の軸対称波動の第一次モード（以下T1と呼ぶ）の位相速度を三次元弾性論による厳密値と比較すると、元来は薄肉であることを前提にしている円筒かく理論も低振動数域ではかなり厚肉でも非常に精度がよいことが明らかになった。連成波動のC2モードはこのT1モードが流体の存在のために少し変形しただけのものであり、性質も非常に類似しているので、円筒かく理論を用いたことによる精度の悪化はほとんどないと考えた。また、C1モードの位相速度はC2モードのものよりかなり小さいので、他の多くの振動・波動問題と同様に高次モードほど精度が悪くなるとすれば、C1の精度はC2よりよいと推定していた。ところが、C2モードに対する判断はほぼ妥当であったが、C1モードはその運動様式がC2やT1とはかなり異なり、流体のたて波を主にしながら管はそれに対する応答として半径方向に変位するので、ほぼ管のたて波としての性質を持つT1の精度は直接の参考にはならないのである。この点を明確にするには、管についても三次元弾性論を用いた連成

波の解析を行なう必要がある。実際に解析した結果は、波の性質という定性的な側面ではこれまでの解析は全く問題がないものの管材の性質によっては円筒かく理論を用いた解析では精度的に不十分な場合もあり得ることが明らかになったので、以下にその点に関する若干の補足を行なっておく。

本論文で用いる主な記号

$t$ : 時間

$x, r$ : 円筒座標

$u, u_x, u_r$ : 管の変位ベクトルとその成分

$E, \nu, \rho_p$ : 管のヤング係数, ポアソン比, 密度

$p$ : 流体圧力

$q, q_x, q_r$ : 流体の粒子速度とその成分

$K, \rho_L$ : 流体の体積弾性率, 密度

$a, h$ : 管の平均半径, 肉厚

$b, b'$ : 管の内壁, 外壁半径

$\alpha$ : 位相速度

$\beta$ : 波数

$\lambda$ : 波長

$J_n(z), K_n(z)$ :  $n$  次の変形ベッセル関数

$J_n(z), Y_n(z)$ :  $n$  次のベッセル関数

$j = \sqrt{-1}$

$\tilde{\lambda} = \lambda/a$

$\bar{\rho} = \rho_p/\rho_L$

$S = K/E$

$\eta = a/h$

$\Delta$ : 位相速度の近似値の厳密値に対する相対誤差

## 2. 管に三次元弾性論を適用した連成波動の解析

ここでは、流体を非粘性としたときの連成波動を管についても三次元理論を用いて解析する方法について述べる。まず、弾性体の三次元運動方程式は

$$\rho_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (A+2M) \text{grad div } u - M \text{rot rot } u \quad (1)$$

ここに、 $A, M$  は Lamé の定数で、 $E, \nu$  とはつぎの関係にある。

$$A = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad M = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2)$$

式(1)を書き直して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_p^2 \text{grad div } u - c_s^2 \text{rot rot } u \quad (3)$$

$$c_p^2 = \frac{(1-\nu)E}{\rho_p(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c_s^2 = \frac{E}{2\rho_p(1+\nu)} \quad (4)$$

$c_p$  はたて波の、 $c_s$  は横波の速度である。さて、変位ベクトル  $u$  はつぎのように非回転、回転の二成分に分解して考えることができる。

$$u = u_p + u_s, \quad \text{rot } u_p = 0, \quad \text{div } u_s = 0 \quad (5)$$

したがって、式(4)に対してはつぎの二式が十分条件となる。

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = c_p^2 \text{grad div } u_p \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = -c_s^2 \text{rot rot } u_s \quad (7)$$

ここで  $u_p$  はスカラーポテンシャル  $\varphi$ ,  $u_s$  はベクトルポテンシャル  $\psi e_x$  から導かれるものとする。

$$u_p = \text{grad } \varphi \quad (8)$$

$$u_s = \text{rot rot } (\psi e_x) \quad (9)$$

式(8)を式(6)に代入して

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

式(9)を式(7)に代入して

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

これらの方程式の解の形をつぎのようにおく、

$$\varphi = \Phi(r) \cos[\beta(x-\alpha t)] \quad (12)$$

$$\psi = \Psi(r) \sin[\beta(x-\alpha t)] \quad (13)$$

これらを弾(10), (11)に代入して

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \beta^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{c_p^2} \right) \right\} \Phi(r) = 0 \quad (14)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \beta^2 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{c_s^2} \right) \right\} \Psi(r) = 0 \quad (15)$$

これらの方程式の一般解は、連成波の位相速度  $\alpha$  が小さく、 $\alpha < c_s (< c_p)$  であればつぎのように表わされる。

$$\Phi(r) = AI_0(mr) + BK_0(mr), \quad m = \beta \sqrt{1 - \left( \frac{\alpha}{c_p} \right)^2} \quad (16)$$

$$\Psi(r) = CI_0(nr) + DK_0(nr), \quad n = \beta \sqrt{1 - \left( \frac{\alpha}{c_s} \right)^2} \quad (17)$$

$\alpha$  が  $c_s$  より大きければ、式(17)の代りに

$$\Psi(r) = CJ_0(nr) + DY_0(nr), \quad n = \beta \sqrt{\left( \frac{\alpha}{c_s} \right)^2 - 1} \quad (18)$$

を、また、 $\alpha$  が  $c_p$  より大きければ式(16)の代りに

$$\Phi(r) = AJ_0(mr) + BY_0(mr), \quad m = \beta \sqrt{\left( \frac{\alpha}{c_p} \right)^2 - 1} \quad (19)$$

を用いれば、計算を実数の範囲内で完結させることができる。式(16), (17)を式(12), (13)に代入すれば  $\varphi, \psi$  の具体形が得られるが、これを式(8), (9)に代入すれば  $u_p, u_s$  が求められる。これを成分ごとに書くと

$$\left. \begin{aligned} u_{pr} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = m \{ AI_1(mr) - BK_1(mr) \} \\ &\quad \times \cos[\beta(x-\alpha t)] \\ u_{ps} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\beta \{ AI_0(mr) + BK_0(mr) \} \\ &\quad \times \sin[\beta(x-\alpha t)] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial x} = \beta n \{CI_1(nr) - DK_1(nr)\} \\ &\quad \times \cos[\beta(x-\alpha t)] \\ u_{xx} &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)\phi = -n^2\phi \\ &= -n^2\{CI_0(nr) + DK_0(nr)\} \\ &\quad \times \sin[\beta(x-\alpha t)] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

つぎに、後に境界条件を考慮するときに必要になる応力成分を計算する。計算式は

$$\begin{aligned} T_{rr} &= A \operatorname{div} u + 2M \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ T_{rx} &= M \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

である。

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \left[ A \left\{ -\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)^2 A + m^2 M \right\} I_0(mr) + Am^2 M I_2(mr) \right. \\ &\quad + B \left\{ -\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)^2 A + m^2 M \right\} K_0(mr) + Bm^2 M K_2(mr) \\ &\quad + C\beta n^2 M \{I_0(nr) + I_2(nr)\} + D\beta n^2 M \{K_0(nr) \\ &\quad \left. + K_2(nr)\} \right] \times \cos[\beta(x-\alpha t)] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T_{rx} &= M \left[ -2A\beta m I_1(mr) + 2B\beta m K_1(mr) \right. \\ &\quad \left. Cn(n^2 + \beta^2) I_1(nr) + Dn(n^2 + \beta^2) K_1(nr) \right] \\ &\quad \times \sin[\beta(x-\alpha t)] \end{aligned} \quad (24)$$

つぎに流体についてはつぎの二式から出発する。

$$\rho_L \frac{\partial q}{\partial t} = -\operatorname{grad} p \quad (25)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \operatorname{div} q \quad (26)$$

これらから  $q$  を消去して

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (27)$$

$$c^2 = \frac{k}{\rho_L} \quad (28)$$

ここで

$$p = P(r) \cos[\beta(x-\alpha t)] \quad (29)$$

とおけば、式(27)が満たされるためには

$$P(r) = F I_0(kr), \quad k = \beta \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2} \quad (30)$$

であればよい。

$$\therefore p = F I_0(kr) \cos[\beta(x-\alpha t)] \quad (31)$$

式(31)を式(25)に代入して  $q$  の成分を計算すると

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \frac{F}{\rho_L \alpha} I_0(kr) \cos[\beta(x-\alpha t)] \\ q_r &= \frac{Fk}{\rho_L \beta \alpha} I_1(kr) \sin[\beta(x-\alpha t)] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

もし、 $\alpha > c$  であれば式(30)、(32)に含まれる変形ベッセル関数の引数が虚数となるので、第一種ベッセル関数に変換しておくとして計算と実数の範囲内で実行できる。

以上に求めた弾性管と流体に関する解を連立させなければならぬが、その条件は管の内壁、外壁における境

界条件として与えられる。まず、管内壁  $r=b$  では管と流体の半径方向の応力と粒子速度が連続であるべきこと、管のせん断応力がとなることから

$$[T_{rr}]_{r=b} = [-p]_{r=b} \quad (33)$$

$$[T_{rx}]_{r=b} = 0 \quad (34)$$

$$\left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} \right]_{r=b} = [q_r]_{r=b} \quad (35)$$

式(33)の両辺が異符号になっているのは、 $T_{rr}$  は引張り側を正とし、 $p$  は圧縮側を正とする弾性論、流体力学の習慣に本論文も従っているためである。一方、外壁  $r=b'$  では、管の応力成分はいずれの方向も0となるから

$$[T_{rr}]_{r=b'} = 0 \quad (36)$$

$$[T_{rx}]_{r=b'} = 0 \quad (37)$$

式(23)、(24)、(31)、(32)などをこの条件式(33)~(37)に代入して整理すれば未定係数  $A \sim D$ 、 $F$  に関する同次の連立一次方程式が得られるが、これが自明ではない解を持つ条件、係数行列の行列式を0に等置したものが  $\beta - \alpha$  関係を求めるための方程式になる。その具体形は省略する。

### 3. 近似式の精度について

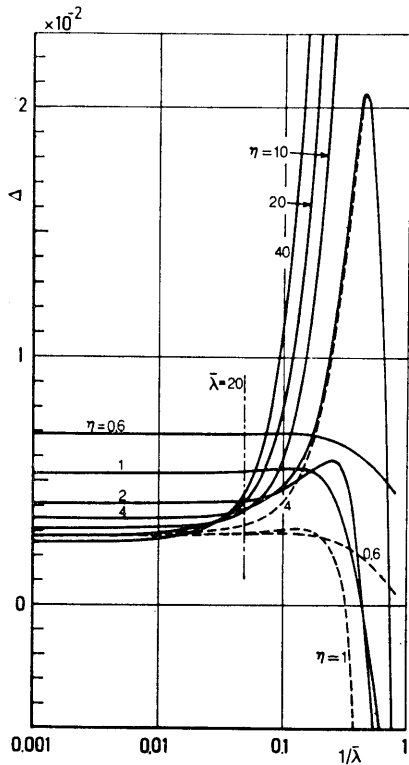
以上に求めた方法による弾性円管一流体系の連成波動の位相速度  $\alpha$  の無限小振幅の場合の厳密値を基準にしていくつかの近似式の精度を検討してみる。近似式としてまずとりあげるべきは Korteweg<sup>3)</sup> によるものである。

$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{1+2Ka/Eh}} = \frac{c}{\sqrt{1+2S\eta}} \quad (38)$$

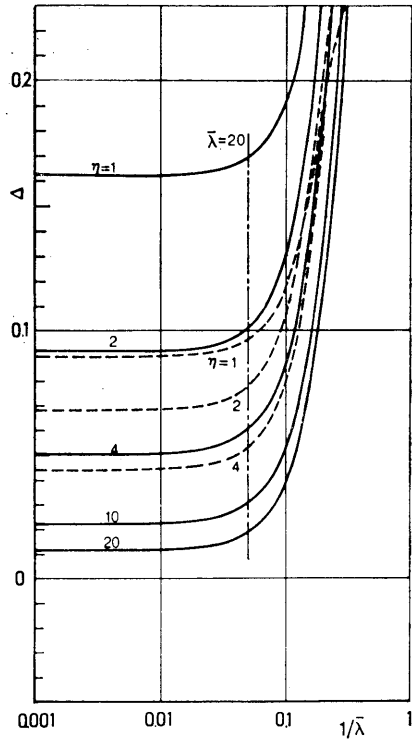
この式は管と流体の両方の弾性を考慮したものとしては最も古く、最も簡潔なもので、現在でも有用性は高い。式(38)は薄肉管に対するものであるが、厚肉管に対しては管の剛性を修正して次式が用いられる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{c}{\sqrt{1+2K(b^2+b'^2)/E(b'^2-b^2)}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{1+2S(\eta+1/4\eta)}} \end{aligned} \quad (39)$$

これらの式による値の厳密値に対する相対誤差  $\Delta$  を、管が鋼、塩化ビニル(硬質)で流体が水の場合について波長に対する変化として Fig. 1 に示す。計算データは鋼管-水の場合に  $S=0.009857$ 、 $\bar{\rho}=7.8$ 、 $\nu=0.3$  塩ビ管-水の場合に  $S=0.618$ 、 $\bar{\rho}=1.42$ 、 $\nu=0.37$  である。まず、鋼管-水の場合には  $\eta=0.6$  というかなり極端な厚肉管でも式(38)、(39)はともに長波長域での誤差は1%以下であり、どちらを用いても精度的な問題は少ない。逆に言えば式(39)の利点はあまり発揮されない。これは管と流体の弾性係数の比  $S=K/E$  が小さいので  $\eta$  の影響が減殺されてしまうためである。 $S$  の値は管が金属であれば、通常の液体に対してはかなり小さくなるので、ここ



Steel pipe-Water



Polyvinyl chloride pipe-Water

Fig. 1 Relative errors vs. dimensionless wave length. The solid lines and the dotted lines mean the error of Eq. (38) and Eq. (39) respectively.

におけるのと同様の結果になるであろう。ところが、塩ビ管-水の場合には  $S=0.618$  と単位の大きさに近いので  $\eta$  の影響はかなりはっきり現われ、式(38)の方がよい精度であることがわかる。しかし、この場合には、いずれの近似式の精度も鋼管-水の場合に比べて格段に悪くなっている。これは、円筒かく理論を用いたより精度の高い解析法においても同様であって、管の慣性が三次元弾性論を用いてはじめて説明されるほど複雑な形で影響していることを示唆している。それゆえ、この精度の悪化は、簡単な近似では克服できないと考えられるので、管がプラスチック類の場合には式(38)、(39)はもとより、円筒かく理論を用いた解析による C 1 モードの伝ば速度の値の使用にあたっては注意が必要であろう。このようなことが生じる背景には、管内流体と管材の物性定数の接近が影響していると考えられる。

以上は C 1 モードの低振動数非分散域についての議論であったが、境界条件によっては管を伝わる応力波が主になる C 2 モードも無視できないことがある。このような場合に対する近似として、円筒かく理論を用いた解析

において  $\beta \rightarrow 0$ 、すなわち、 $\lambda \rightarrow \infty$  の位相速度の極限值を採用することを考える。その詳細は省略するが、結果は次式で与えられる。

$$\alpha = c \sqrt{\frac{1 + \rho S + 2\eta S \pm \sqrt{(1 + \rho S + 2\eta S)^2 - 4\rho S(1 + 2\eta S(1 - \nu^2))}}{2\rho S(1 + 2\eta S(1 - \nu^2))}} \tag{40}$$

なお、この式では曲げ剛性  $Eh^3/12a^2(1-\nu^2)$  を引張りの剛性  $Eh/(1-\nu^2)$  との比較において無視している。この近似式は物理的には、管は半径方向の慣性力を省略した膜力理論を、流体に関しては、 $p, q_x$  は、 $r$  方向の変化がなく、 $q_r$  は  $r$  について一次式になっているとしたものを用いていることになっている。この式の根号内の複号は負が C 1、正が C 2 モードに対応している。これによる結果の厳密値と対する相対誤差  $\Delta$  を鋼管-水、塩ビ管-水の場合について  $\eta$  に対する変化として Fig. 2 に示す。ただし、厳密値は  $\lambda=100$  の場合のものを代表として用いている。まず、C 1 モードに関する限りは式(38)とほとんど精度は同じである。一方、C 2 モードについては、C 1 よりよい精度で計算ができる。それゆえ、この

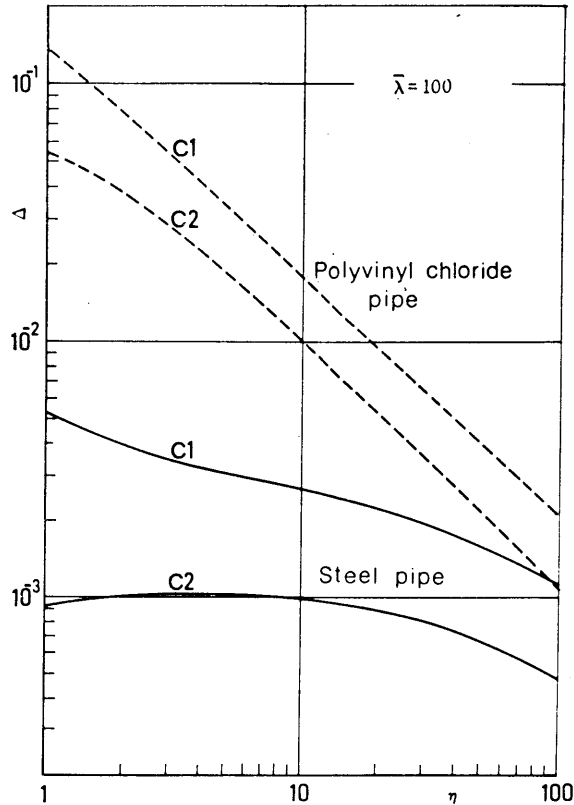


Fig. 2 Relative errors of Eq. (40) vs.  $\eta = a/h$

式の利点はC2モードも含めて検討を要する場合にだけ発揮されることに注意しなければならない。

4. 結 言

本論文では、すでに報告した円筒かく理論を用いた連成波動の解析では、管と流体の物性値の組み合わせによっては精度が不足することがあるので、管についても三次元理論を用いた厳密な解析を行なって、近似式の精度に再検討を加えた。その結果、近似式(38), (39), (40)はいずれも管材が金属であれば精度的な問題は普通の液体に対して生じることはないが、管材がプラスチック類の場合には金属管の場合ほどよい精度は保たれない可能性のあ

ることを指摘した。この場合の精度の悪化は簡単な近似では克服できないので、これらの近似式の使用に当っては金属管以外では注意を要する。以上、文献 1) に対する補足としたい。

文 献

- 1) 浦田, 機論, 41—351 (昭 50—11), 3114.
- 2) Herrmann, G. and Mirsky, I., *J. Appl. Mech.*, 23—4 (1956—12), 563.
- 3) Korteweg, D.S., *Ann. Phys. und Chem.*, 5 (1878), 525.