

## 非定形浅水波の変形特性に関する研究

石田 昭・高橋宏直

土木工学科

(1980年9月6日受理)

### A Study on the Characteristics of the Deforming Shallow Water Waves

Akira ISHIDA and Hironao TAKAHASHI

*Department of Civil Engineering*

(Received September 6, 1980)

Non-permanentivity of coastal waves seems to be necessarily introduced in the research technics in some future both theoretically and experimentally. By this time Hulsbergen (1974) or Bijker (1976) actually introduced the inclination of the wave form in the study of sand transport problems. In this report the characteristics of deforming shallow water waves, known as secondary waves or soliton deformation, were researched applying both the numerical calculation of KDV equation suggested by Zabusky and Galvin (1971), and the wave number frequency spectral analysis. As the principal result, the mean velocity of the first soliton over the recurrence length coincides with the first order Cnoidal wave theory when its value exceeds the linear long wave celerity  $\sqrt{gh}$ , and with the third order Stokes' theory when less than  $\sqrt{gh}$ . Some other characteristics were made clear in relation to Ursell's number  $Ur$ , for example the mean velocity of second and third soliton, maximum developing number of solitons, the distribution of each soliton's crest heights and trough depth along the recurrence length and others. In the last the inclination of wave form, which shows the important role on the sand transport mechanism, was quantitatively grasped in relation to the first order moment of the wave form calculated around the crest of first solitons.

#### 1. 緒言

従来海岸工学の分野では波浪に起因する数多くの問題例えば構造物に作用する波力、波による漂砂、あるいは波による流れの発生といった問題の解決に当り、実験的にも理論的にも現地波に見られる不規則性あるいは進行に伴って波形が変化する非定形性を無視して、非常に単純化した規則的な波に置きかえて研究を進めてきた。近年になり不規則性に関しては有義波および周波数スペクトルなどの概念を取り入れた研究がなされるようになってきているが、非定形波に関してはそれが非常に強い非線型現象であることもあって、数学的取扱いかたが確立されず、あまり研究が進んでいないのが実情である。

非定形現象は以前から二次波峯現象として Miche<sup>1)</sup>

(1944) 堀川<sup>2)</sup> (1960) 合田<sup>3)</sup> (1976) らによりその存在が報告されてきてはいるが、二次波峯を発生させないような目的に重点が置かれたため、現象そのものの詳細な把握はなされてこなかった。

しかしながら、細井ら<sup>4)</sup> (1970) が始めて非定形現象下での漂砂現象を実験的に研究し、その後 Hulsbergen<sup>5)</sup> (1974) Bijker<sup>6)</sup> (1976)、野田ら<sup>7)</sup> (1979) によっても指摘されたように非定形波によって波形の前後非対称性が交互に出現することが浅海域での漂砂現象に重要な影響を持つことがわかってきていることなどから今後は益々非定形性を取り入れた波浪の研究が重要となってくるように思われる。

一方細井ら<sup>8)</sup> (1970) は前述の漂砂に関する実験的研究以来非線型性の強い非定形波現象を表示するためには波数周波数スペクトルという概念が有効であることに着目

Table 1 Conditions of Numerical Analysis and Some Results

Data No.	Conditions				Results			
	$U_r$	$h$ (cm)	$H_0$ (cm)	$L$ (cm)	$T\sqrt{g/h}$	$C_1/\sqrt{gh}$	$C_2/\sqrt{gh}$	$L_{00}/L$
1	20	10	2	100	9.47	0.950	0.783	2.36
2*	26	30	6	343	11.03	0.968	0.829	2.99
3	31	20	4	250	12.21	0.977	0.851	3.37
4*	39	20	4	280	13.86	0.990	0.882	4.08
5	40	10	4	100	9.81	0.981	0.788	2.05
6*	52	30	12	343	11.38	1.005	0.835	2.45
7	56	30	6	500	16.58	1.005	0.916	5.12
8	60	10	6	100	9.74	1.027	0.801	1.77
9*	61	20	4	350	17.36	1.008	0.923	5.42
10	74	30	8	500	16.29	1.023	0.919	4.44
11*	78	10	2	198	19.41	1.020	0.943	6.13
12*	78	20	8	280	13.44	1.042	0.896	3.06
13*	78	30	18	343	10.75	1.064	0.855	2.04
14	80	10	8	100	9.21	1.085	0.817	1.53
15*	88	20	4	420	20.51	1.024	0.952	6.58
16	94	20	12	250	11.58	1.080	0.886	2.28
17	111	30	12	500	15.65	1.065	0.937	3.67
18*	118	20	12	280	12.60	1.111	0.926	2.52
19*	120	20	4	490	23.73	1.034	0.971	7.71
20*	123	20	8	350	16.38	1.068	0.948	3.93
21	125	20	4	500	24.16	1.035	0.973	7.81
22	148	30	16	500	15.03	1.111	0.964	3.28
23*	157	10	4	198	18.22	1.087	0.978	4.49
24*	176	20	8	420	19.25	1.092	0.988	4.75
25*	184	20	12	350	15.19	1.152	0.996	3.19
26	185	30	20	500	14.23	1.169	0.997	2.89
27	204	30	22	500	13.95	1.196	1.015	2.80
28*	235	10	6	198	17.23	1.167	1.027	3.68
29*	240	20	8	490	22.54	1.105	1.015	5.63
30*	265	20	12	420	18.76	1.180	1.044	3.83
31*	360	20	12	490	20.44	1.195	1.078	4.59

して研究を進め、主として実験波の波数周波数スペクトル構造を調べてきた。また Galvin<sup>9)</sup>(1967), Zabsky<sup>10)</sup>(1971)は多くの工学分野で注目されるようになってきている Soliton 分裂現象と二次波峯現象とが同じものである、その変形特性は KDV 方程式に基づく数値解析によって説明できることを指適している。石田ら(1973<sup>11)</sup>, 1975<sup>12)</sup>, 1979<sup>13)</sup>, 1980<sup>14)</sup>は Zabusky ら<sup>10)</sup>の数値解析手法と波数周波数解析とを用いて一様水深部での非定形波の特性を報告してきたが、本報告は同じ手法によって数値解析を行ない Soliton の波速、波高などに関してさらに詳細にその特性を報告するものである。

## 2. 数値解析の条件

分裂を開始する前の初期波の条件として Table 1 に示すように初期波高  $H_0$  が 2cm から 22cm の間、初期波のアーセル数  $U_r = H_0 L^2/h^3$  が 20 から 360 の間になるように 31 ケースを設定して KDV 方程式に基づく数値解析を行なった。これらの条件のうち Table 1 で\*印のものは文献13)に、\*印のないものは文献14)に結果の一部を報告したものである。数値解析の手法は Zabusky ら<sup>10)</sup>によるものと同じであり、波数周波数スペクトル解析は細井ら<sup>4)</sup>による手法に準じている。また波数周波数スペクトル  $A_{ij}$  の添字の意味は文献13)14)に示したものと同

じである。

3. 非定形浅水波の諸特性

(1) 基本波の波速および Fontanet 波の波速

すでに周知の現象であるが、二次波峯現象には一般に再帰現象があり、その間隔  $L_{00}$  は再帰間隔、追い越し間隔あるいは二次波峯発生間隔などの名で呼ばれているまたアーセル数が大きくなって変形が激しくなると完全には再帰現象を示さなくなることがあるが、その場合の  $L_{00}$  は各場所での時間変形を調和解析して得られる基本成分波の再帰性から決定される。再帰間隔を4等分した各場所での時間波形の概略図を示したのが Fig. 1 である。 $L_{00}/4$  での空間波形は前傾性を示し、 $3/4 L_{00}$  での

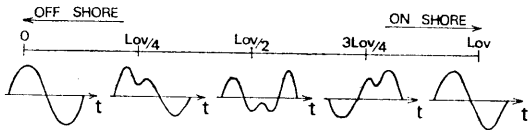


Fig. 1 Time Recrds of Secondary Waves at Several Portions along Wave Basin

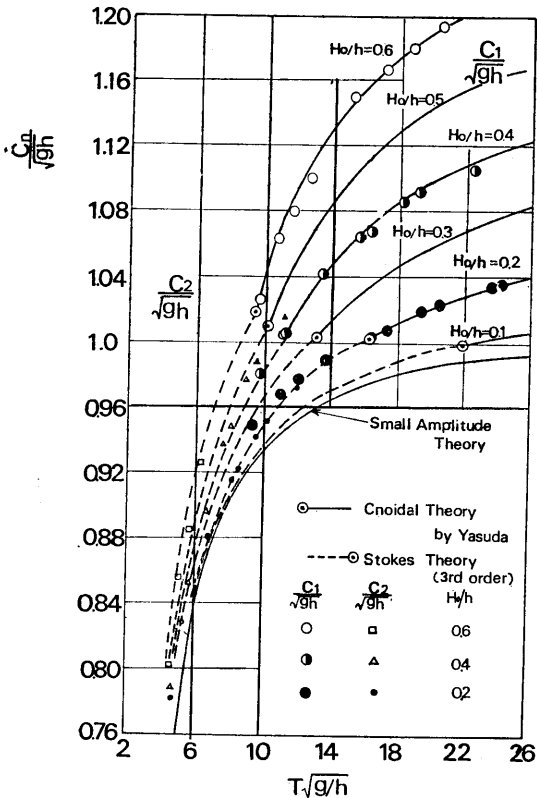


Fig. 2 Celerity ( $C_1, C_2$ ) of Fundamental Component Wave  $A_{01}$  Fontanet Wave  $A_{12}$

それは後傾性を示すことは同図の時間波形から推察できよう。

さて文献 14) にも述べたように数値解析波形からさらに波数周波数スペクトルを求め、基本波  $A_{01}$  の波速  $C_1$  および Fontanet 波  $A_{12}$  の波速  $C_2$  を示したのが Fig. 2 である。

図中の実線は安田<sup>15)</sup>が提案している新しいクノイド波理論の第一近似解を示したもので、点線はストークス波の第三近似解を示している。基本波の値  $C_1/\sqrt{gh}$  は  $C_1/\sqrt{gh} > 1.0$  については安田の理論と非常によく一致しているが  $C_1/\sqrt{gh} < 1.0$  ではこの理論から離れ、むしろストークス波理論に近い値を取りながら微小振幅波理論の値に収束していく傾向がみられる。両理論値が一致する時の  $C_1/\sqrt{gh}$  の値は  $H_0/h$  によって若干変化するがほぼ 1.0 の時であることがわかる。Fontanet 波の値  $C_2/\sqrt{gh}$  については横軸  $T\sqrt{g/h}$  の周期の値を基本波の半分としてプロットしてあるが、ストークス波とも若干違う傾向を示している。

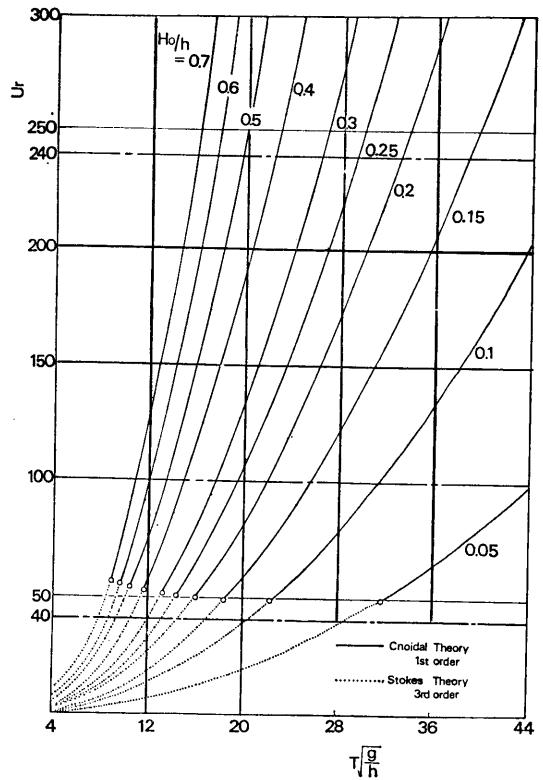


Fig. 3 Theoretical Relation between Ursell's Number ( $Ur$ ) and Nondimensional Period with Parameter of Relative Height

(2) 相対波高をパラメータとしたアーセル数と無次元周期の関係

Fig. 3 は初期波の相対波高  $H_0/h$  をパラメータとして、初期波のアーセル数  $U_r = H_0 L^2 / h^3$  と無次元周期  $T\sqrt{g/h}$  の関係を示したものである。実線は安田によるクノイド波の第一近似解から得られる関係であり、点線はストークス波の第3近似解による関係である。両者が一致する時のアーセル数は  $H_0/h$  によって若干変化しているが、概略  $U_r = 50$  の時である。以後の議論では両理論が一致する時の無次元周期より長周期についてはクノイド波理論を使い、短周期についてはストークス波を使うことにする。図中には後述する Soliton の分裂数に対応するアーセル数を一点鎖線で示してある。

(3) 各 Soliton の平均波速

ここでは  $L_{0n}$  間での 1st Soliton の平均波速  $C_{s1}$  ( $A_{01}$  の波速即ち  $C_1$  に等しい) に対する 2nd, 3rd Soliton の  $L_{0n}$  間内での平均波速  $C_{s2}, C_{s3}$  の比率をしらべる。 $C_{s2}$  は波数周波数スペクトルで言えば  $A_{11}$  という成分波の波速に等しく、 $C_{s3}$  は  $A_{21}$  の波速に等しい。したがって次式が成り立つ。 $n$  は Soliton の番号である。

$$C_{sn}/C_{s1} = \frac{k_1}{k_1 + (n-1)\Delta k} = 1 + (n-1) \frac{1}{\frac{C_1}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{T\sqrt{gh}}{L_{0n}}}$$

この式に  $C_1/\sqrt{gh}$  として Fig. 2 に示すようなクノイド波とストークス波の理論値を代入し、 $L_{0n}/T\sqrt{gh}$  については文献14) に述べた次式

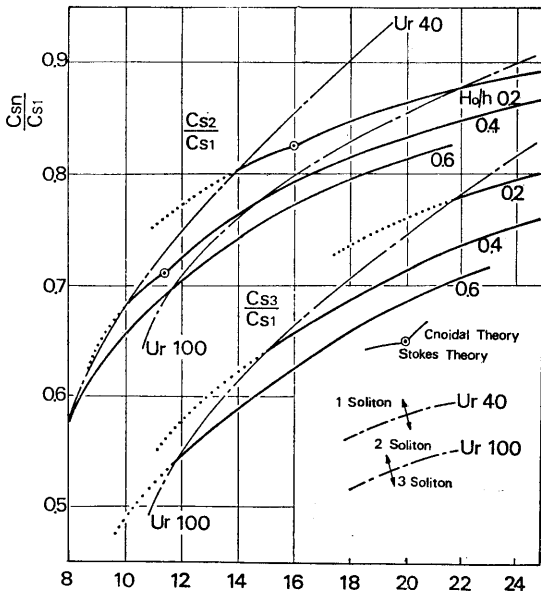


Fig. 4 Mean Celerity of 2nd and 3rd Soliton,  $C_{s2}, C_{s3}$

$$L_{0n} = K_0 (gT^2 - 4\sqrt{gh} \cdot T) / 2$$

を代入して  $n=2$  と  $3$  について計算結果を示したのが Fig. 4 である。 $K_0$  の値は  $H_0/h=0.2$  の時 0.81 で、 $0.4$  の時 0.69, 同じく  $0.6$  の時 0.57 である。図中には Fig. 3 と同じように Soliton の発生個数に対する関係も示してある。

(4) Soliton の発生領域と個数

Soliton の発生条件および発生個数について Galvin<sup>9)</sup> は 137 ケースの水槽実験の結果をもとにして相対波高  $H/h$  と、相対水深  $h/L$  を座標とする平面上において発生個数ごとの領域図を提案した。また土屋ら<sup>16)</sup> は発生個数が  $\lambda = 1/(6U_r)$  をパラメータとして整理できると述べ、若干の数値解析波形を求めて確かめている。土屋らのデータと共に Table 1 で無印のデータ群について発生個数とアーセル数の関係を示したのが Fig. 5 である。この図より発生個数はアーセル数によって次のように分類されることがわかる。

- 1 Soliton  $U_r \leq 40$
- 2 Solitons  $40 < U_r < 100$
- 3 Solitons  $100 < U_r < 240$
- 4 Solitons 以上  $U_r > 240$

分裂数が 4 つの場合はデータ数が少いのであまり正確ではない。Fig. 6 は Galvin の領域図上に著者らのデータをプロットする共に、 $U_r = 40, 100, 240$  の関係を示したものである。上述したアーセル数による発生個数の分類は Galvin の発生領域と一致する部分が多いことがわかる。ただし Date No. 8, 14, 16, 26, 27 などは Galvin によれば造波板から、 $1/2 L_{0n}$  進行するまでの間に碎波する領域に入っているため水槽実験では再帰性は示さない波と考えられる。ここで Soliton の発生数は再帰間隔内において最も数多く分裂した時のもので一般に発生点と

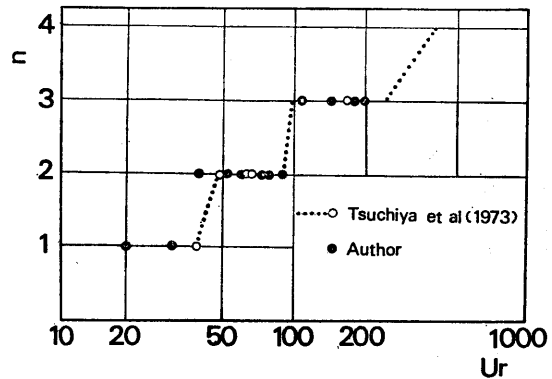


Fig. 5 Maximum Number (n) of Solitons Emitted in the Recurrence Length

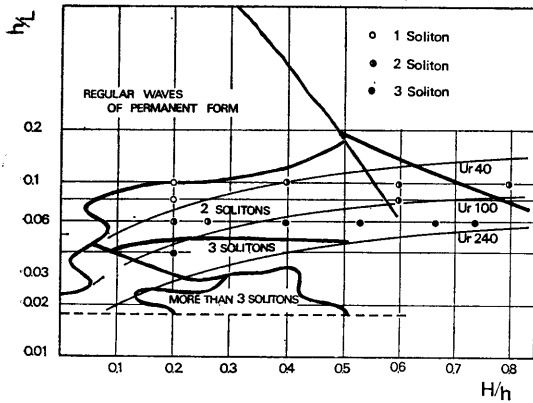


Fig. 6 Maximum Number and Appearing Conditions of Solitons

追い越し点の間でみられる。

(5) 再帰間隔内での波形の変化

文献14)では変形特性を波数周波数スペクトル成分15個を再合成した波形からしらべたが、アーセル数が大きくなると15成分でもまだ精度が悪いことが考えられる。ここでは数値解析した“生の波形”を使って各特性値をしらべた。分裂波形の諸量をZabuskyらにならってFig. 7のように定義することにする。

1) 波高の変化

ここで波高  $H$  は Fig. 7 には示していないが、最大値  $a_1$  の値と最少値  $b_1$  ( $b_2, b_3$  となることもある) との差として定義している。Fig. 8 は  $H$  と初期波高  $H_0$  との比  $H/H_0$  を再帰間隔  $L_{or}$  内で示したものである。この図より次のようなことがわかる。(1) 二次波が発生しない ( $U, < 40$ ) 程度の弱い非定形波においても波高は変化するこ

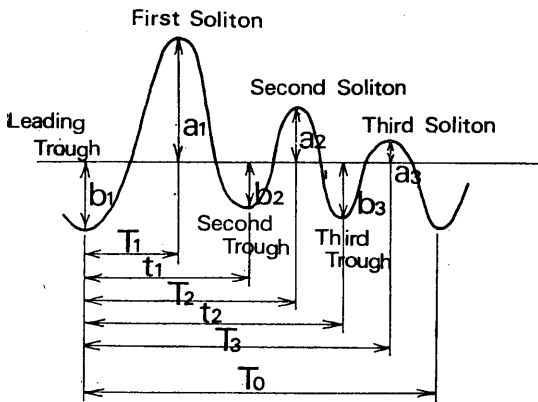


Fig. 7 Definitions of Crest Height ( $a_n$ ), Trough Depth ( $b_n$ ) and Time Length ( $T_n$ )

とがわかる。(2) 二次波峰が一つ現われる場合即ち 2 Solitons の場合までは ( $U, < 100$ ) 波高の最大値は  $L_{or}/4$  あるいは  $3/4 L_{or}$  付近に現われ、 $U$  の増大と共に  $H_{max}$  も増大する。(3) 二次波峰が二つ以上現われると波高の変化はより複雑となる。(4) 波形が元に戻る  $x=L_{or}$  地点は速度の遅い Soliton 群と主 Soliton が重なり、主 Soliton が他の Soliton を追い越す地点であるにもかかわらず波高は最小値となる。このことは Soliton 現象の

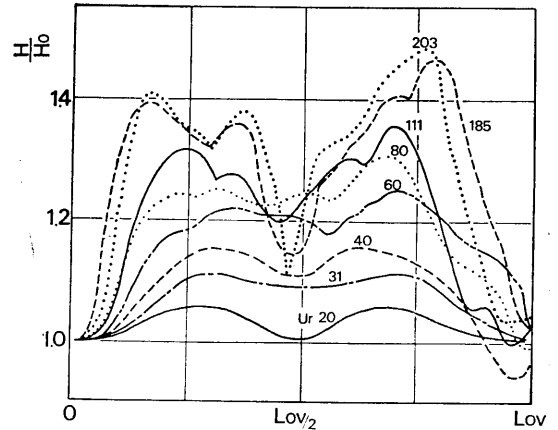


Fig. 8 Distribution of Wave Height ( $H$ ) over the Recurrence Length ( $L_{or}$ )

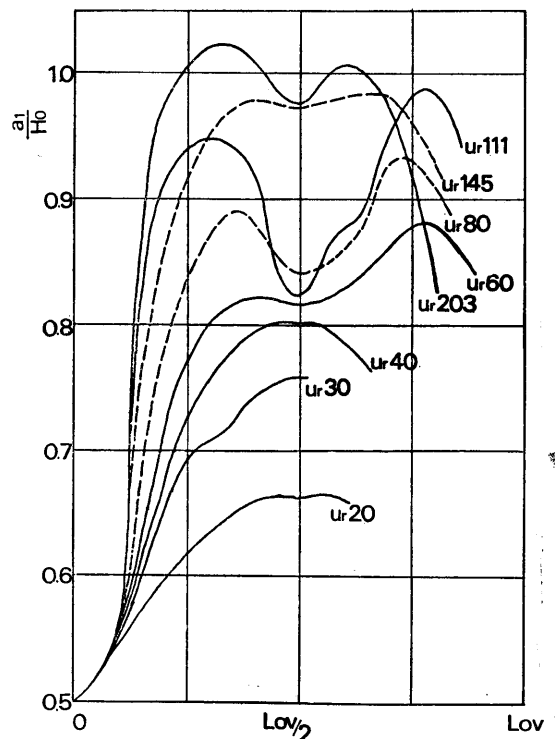


Fig. 9 Distribution of 1st Soliton's Crest Height ( $a_1$ ) over the Recurrence Length

特性として周知のことがらである。

2) 波峰位の変化

Fig. 9 は主 Soliton (1st Soliton) の波峰位  $a_1$  と初期波高の比  $a_1/H_0$  を示したものである。Fig. 8 に示した波高の変化と似たような傾向を示しているが、 $U_r=40$  付近までは最大値が  $L_{00}/2$  即ち発生点で現れ、それを越えると最大値は  $L_{00}/4, 3/4L_{00}$  の方へ移動する。またアーセル数が 100 を越えても波高の変化ほど複雑な変化は示さないこと、初期波高に対する増大率は  $U_r$  の増大と共に大きくなることなどがわかる。

Fig. 10 は 2nd Soliton の波峰位  $a_2$  と初期波高の比  $a_2/H_0$  を示したものである。2nd Soliton が出現するのは  $U_r$  数が大きくなる程早いこと、かつその値  $a_2$  も大きくなること、さらに  $U_r=100$  を越えて 3rd Soliton が

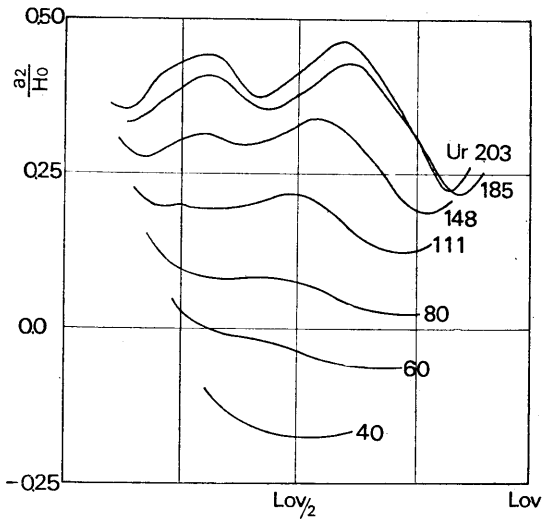


Fig. 10 Distribution of 2nd Soliton's Crest Height ( $a_2$ ) over the Recurrence Length

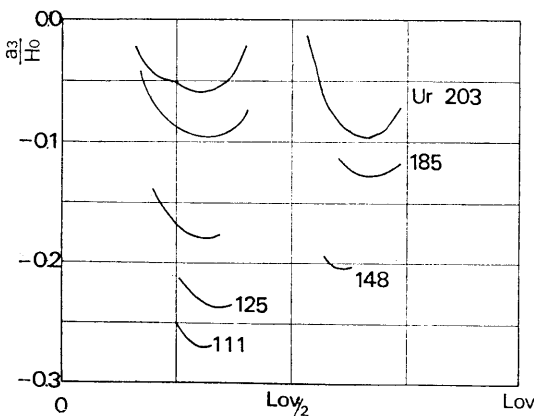


Fig. 11 Distribution of 3rd Soliton's Crest Height ( $a_3$ ) over the Recurrence Length

出現するようになると  $a_2$  の値がさらに複雑に変化し、 $L_{00}/4, 3/4L_{00}$  付近に  $a_2$  の極大値が現われることなどがわかる。

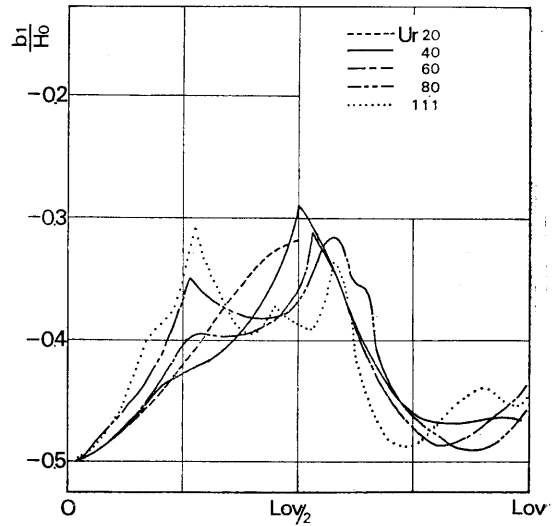


Fig. 12 Distribution of Leading Trough Depth

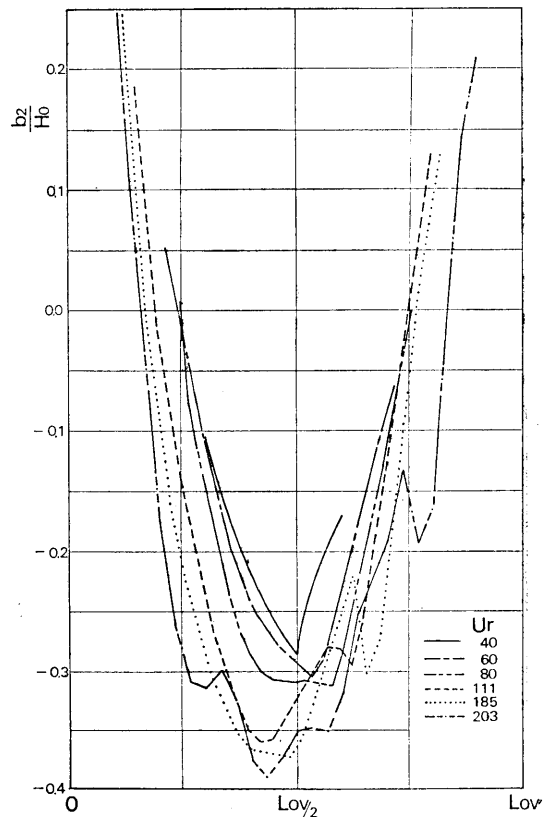


Fig. 13 Distribution of 2nd Soliton's Trough Depth

Fig. 11 は 3rd Soliton の波峯位  $a_3$  と初期波高の比  $a_3/H_0$  を示したもので、3rd Soliton が出現するのは  $L_{00}/4, 3/4L_{00}$  付近だけであり、追い越し点、発生点では見られないことがわかる。また  $a_3$  の値は  $U$  の増大と共に大きくなること、 $a_3$  の値が正の値を取る場合、即ち平均水面より上に出る場合は解析の範囲では存在しないことなどがわかる。

3) 波谷位の変化

Fig. 12 は Leading trough の深さ  $b_1$  と初期波高の比  $b_1/H_0$  を示したもので、Fig. 13 は 2nd Soliton の直前の trough の深さ  $b_2$  と  $H_0$  の比を、さらに Fig. 14 は 3rd Soliton の直前の trough の深さ  $b_3$  と  $H_0$  の比  $b_3/H_0$  を示したものである。Fig. 12 をみると Leading trough の位置は分裂と共に高くなり、二次波が発生しない程度の変形の時には  $L_{00}/2$  で一番高くなるが、二次波が発生する場合には  $L_{00}/2$  の前後で最も高くなる傾向がみられる。一方 Fig. 13 をみると 2nd Soliton の trough  $b_2$  はすべて  $L_{00}/2$  で最も底くなっている。Fig. 14 の 3rd trough の Soliton  $b_3$  についても同じ傾向を示しているが、 $L_{00}/2$  付近では、3rd Soliton が存在しないので  $b_3$  は値を持たなくなる。一般に波谷位についてはどの場合もアーセル数による変化は波峯位ほど激しくないことがわかる。

(6) 前傾性と後傾性の評価

諸言でも述べたように非定形波現象においては場所によって波形が前傾性を示したり後傾性を示したりする場

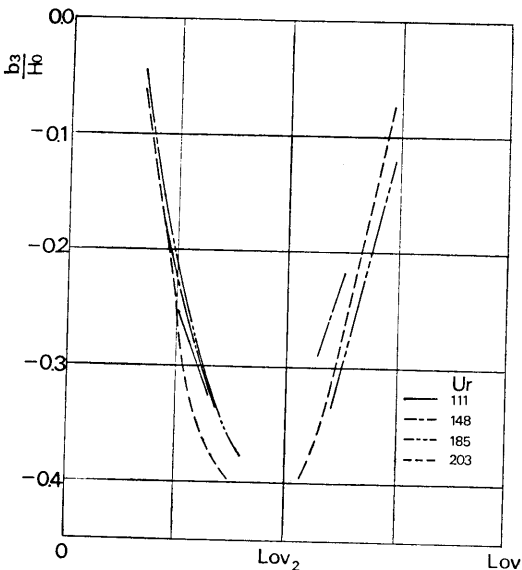


Fig. 14 Distribution of 3rd Soliton's Trough Depth

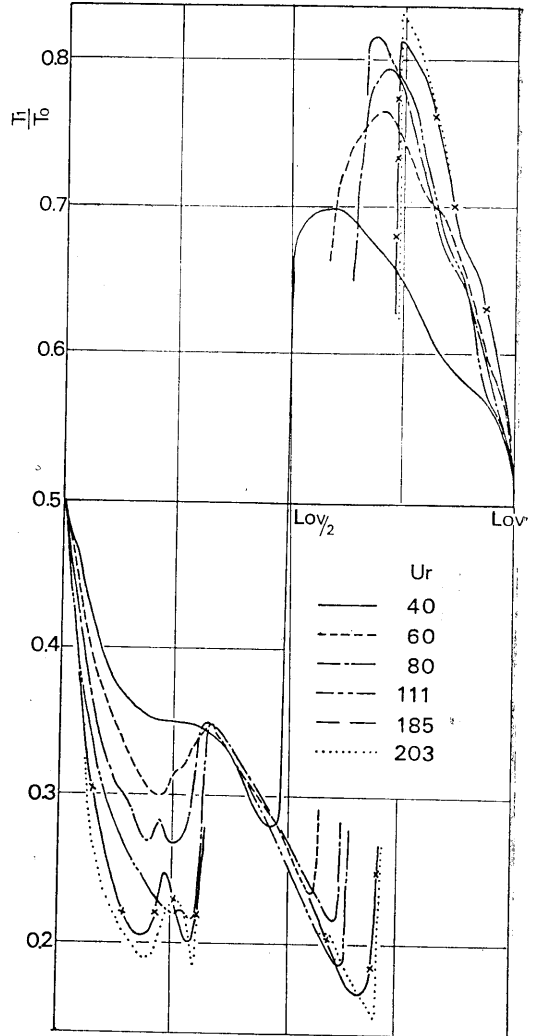


Fig. 15 Degree of Forward Inclination and Backward Inclination

合があり、これが漂砂現象に強い影響を及ぼしていることが報告されている。したがって前傾性、後傾性を定量的に把握することは重要であると思われる。ここでは波峯の位置から決める方法と波形の一次モーメントから決める方法によって評価した。

1) 波峯位置による評価

Fig. 15 は Fig. 7 に示したように Leading Trough から計った 1st Soliton の波峯の位置  $T_1$  と周期  $T_0$  との比を示したものである。分裂前は余弦波形であるから当然 0.5 という値を持ち、分裂が始まると急激に小さな値となり、前傾性を示すようになる。減少率はアーセル数が大きいほど激しいことがわかる。一方  $3/4L_{00}$  から

$L_{00}$  の間では  $T_1/T_0$  は 0.5 より大きな値を示し、後傾性を示していることがわかる。アーセル数が大きくなると  $1/4 L_{00}$  付近に極大値が現われるが、これと対称的になるものと期待される  $3/4 L_{00}$  には極小値がみられない。また  $L_{00}/2$  付近で急激な変化を示すが、変化する位置にかなりの変動がみられることなどから、一般に分裂直後あるいは追い越し点直前ではこの方法で前傾性、後傾性を評価することができるが、中間部では明確な評価ができないように思われる。Fig. 16 は同様に  $T_2/T_0$  を示したものである。 $T_1/T_0$  と同じく、分裂後は 2nd Soliton の峯も Leading Trough に接近して前傾性を示すこと、 $L_{00}/2$  を過ぎると傾向が逆転して後傾性を示すことがわかるが、 $L_{00}/2$  付近ではやはり急激な変化があってその位置が一定していない。

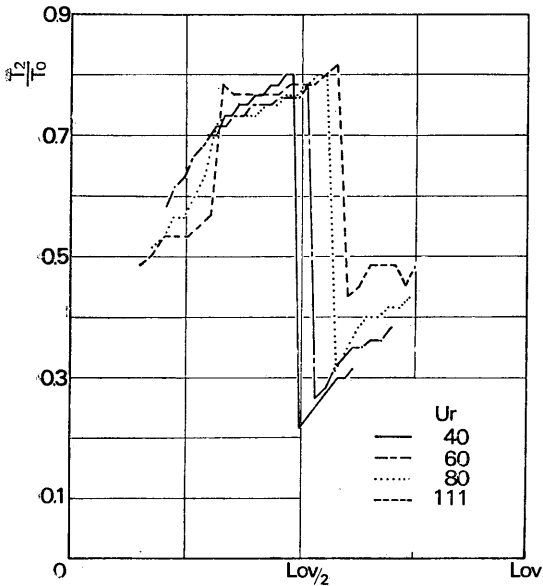


Fig. 16 Time Length between Leading Trough and 2nd Soliton

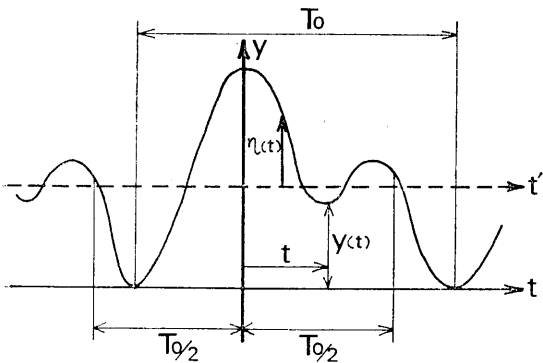


Fig. 17 Definitions Vertical and Horizontal axis Calculating 1st Order Moment

2) 波形の一次モーメントによる評価

波峯位置による評価は簡便であるが、 $L_{00}/2$  付近では不明確であった。ここでは Fig. 17 に示すように 1st Soliton の波峯位置を横座標の原点 ( $t=0$ ) とし、波谷位の最小位置を縦座標の原点 ( $y=0$ ) とし、 $t=0$  から前後  $\pm 1/2$  周期について鉛直軸回りの一次モーメント  $M_0$  を次のような積分を行なって計算した。縦軸と横軸はそれぞれ  $H_0$ ,  $T_0$  で無次元化している。

$$M_0 = \int_{-1/2 T_0}^{1/2 T_0} \left( \frac{y(t)}{H_0} \right) \cdot \frac{(-t)}{T_0^2} \cdot dt$$

Fig. 18 は上式で計算した一次モーメントを  $L_{00}$  間で示したものである。この図を見るとどの場合でも  $L_{00}/2$

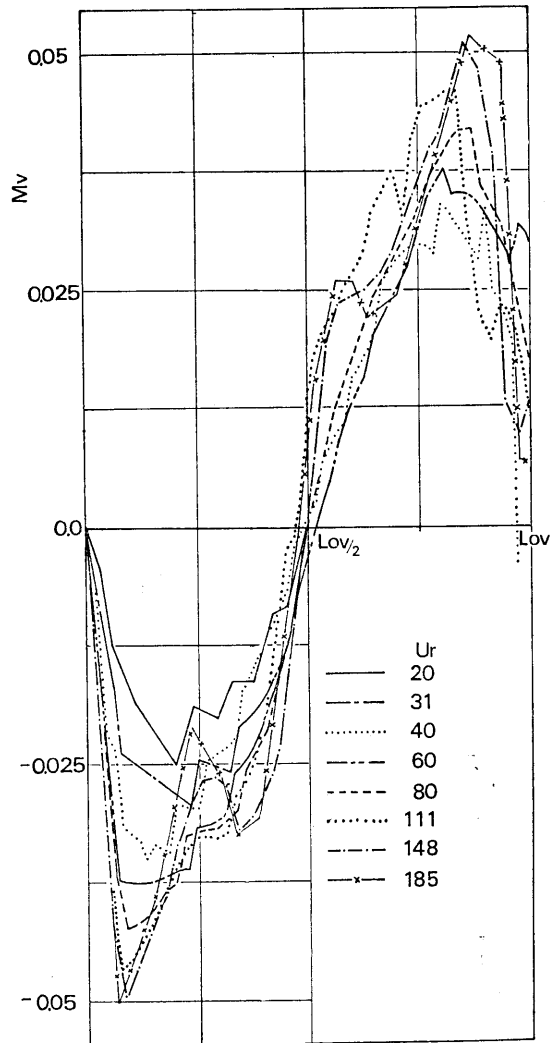


Fig. 18 Degree of Forward inclination and Backward Inclination Defined with 1st Order (vertical) moment of Time Record



において0を取り、かつその近辺で急激な変化は示さないこと、アーセル数が大きくなった場合でも中間部で複雑な変化を示さないことなどがわかり、Fig. 15 に示した方法よりは有効な評価方法であるといえる。この方法によるとアーセル数が小さくて二次波が発生しない程度の変形の時には前傾度と後傾度の最大値はそれぞれ  $L_{00}/4$ ,  $3/4L_{00}$ 。近辺にみられるが、アーセル数が大きくなるにつれて、それよりも追い越し点に近い側に見られるようになる。またアーセル数が大きくなるほど前傾度、後傾度は強くなるということが定量的に把握できる。

この方法によると発生点でも追い越し点でも  $M_H$  は0を示している。したがって現地において波高計設置地点の波が追い越し点に近い波なのか発生点に近い波なのか判定する場合にはこの方法による前傾度を調べるだけでは判定ができない。

そこで次式に示すような平均水面回り ( $\theta'$  軸回り) の一次モーメントも調べてみた。(Fig. 17 参照)

$$M_H = \int_{-\frac{1}{2}T_0}^{\frac{1}{2}T_0} \frac{\eta(t)}{H_0} \cdot \left| \frac{\eta(t)}{2H_0} \right| \cdot \frac{dt}{T_0}$$

Fig. 19 は上式による計算値を示したものである。 $M_H$  の値は分裂前は0であるが分裂後急激に増大し  $L_{00}/2$  付

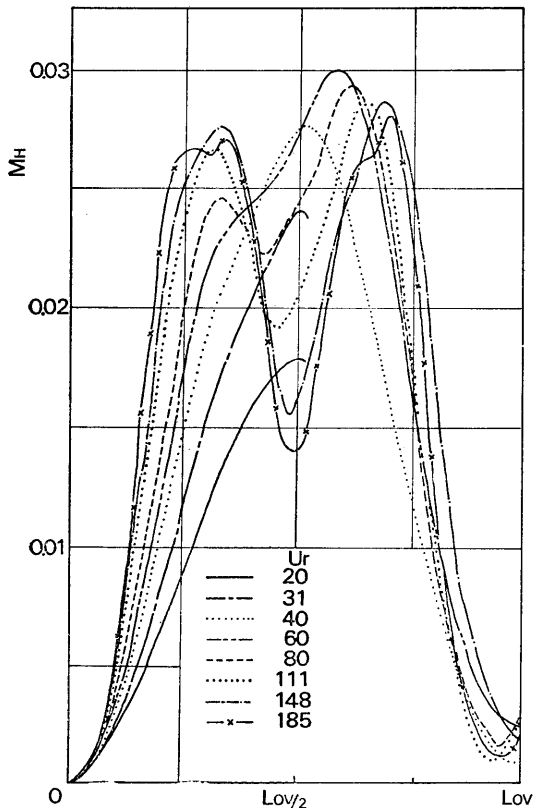


Fig. 19 Degree of Sharpness Defined with 1st Order (horizontal) Moment of Time Record

近では大きな値を取ることがわかる。現地波に適用する場合には、 $M_0$  と  $M_H$  を求めれば、波高計設置点の非定形波形がどんな性質を持つ波形となっているのか判定することができると思われる。

#### 4. 結語

本研究では非線型かつ非定形となる一様水深域での浅水波の変形特性を KDV 方程式に基づく数値解析法によって研究したものである。主要な結論として次のようなことが得られた。

- 1) 基本 (波数周波数) 成分  $A_{01}$  の波速は (1st Soliton の平均波速に等しい)  $\sqrt{gh}$  より大きい場合には新しいクノイド波理論として安田が提案した理論の第一近似解に等しいが、 $\sqrt{gh}$  より小さい場合にはむしろストークス波の第三近似解の方に近い値を示す。
- 2) 第二, 第三の Soliton の平均波速を無次元周期と相対波高 ( $H_0/h$ ) によっても表示することができた。
- 3) Soliton の発生個数はアーセル数の大小で規定されることがわかった。
- 4) 波高の変化および各 Soliton の波峯位と波谷位の変化とアーセル数との関係が把握できた。
- 5) 波形の前傾性, 後傾性を定量的に把握するには 1st Soliton の波峯を中心とする波形の鉛直軸回りの一次モーメント  $M_0$  が有効であることがわかった。
- 6) 現地波の非定形性を推定する場合には  $M_0$  の他に水平軸回りの波形の一次モーメント  $M_H$  を利用すると良いことがわかった。

本論文をまとめるにあたり図面の作成等に助力をいただいた学部生井辺裕彦君に感謝の意を表すると共に、本研究は文部省自然災害科学特別研究 (代表者京大工学部岩垣雄一教授) による研究であることを付記する。

#### 参考文献

- 1) Miche, M: Mouvements Ondulatoires de la Mer en Profondeur Constante ou Decroissante, Ann. de Ponts et Chausees, Tome 114, 1944.
- 2) Horikawa, K.: Secondary Wave Crest Formation, Torans. of JSCE., No. 66, Jan. 1960.
- 3) 合田良実: 造波水路における波浪実験の二, 三の問題点について, 第 15 回海岸工学講演集 pp. 50~57, 1968
- 4) 細井正延・石田昭・平山秀夫: 進行波による dune の発生に関する研究, 土木学会第25回年次学術講演会講演概要集, 1970.

- 5) Hulsbergen, C.H.: Origin, Effect and Suppression of Secondary Waves, Proc 14th Conf. on Coastal Eng., 1974.
- 6) Bijker, E.W., E.V. Hijum and P. Vellinga: Sand Transport by Waves, Proc. 15th Conf. Coastal Eng., 1976.
- 7) 野田英明・松原雄平：岸・沖向き漂砂に関する実験的研究，第26回海岸工学講演会論文集，1979.
- 8) 細井正延・石田昭：二次波峯現象における非線型性の解析，第17回海岸工学講演会論文集，1970.
- 9) Galvin, C.J.: Secondary Waves, Research Division CERC 22, 1967.
- 10) Zabusky, N.J. and C.J. Galvin: Shallow-Water Waves, the Korteweg-de Vries Equation, J.F.M., vol. 49, 1971.
- 11) 石田昭・石田和生：浅水領域における波形の分裂現象——二次波峯と Soliton について——第20回海岸工学講演会論文集，1973.
- 12) 石田昭：浅水領域での分裂波 Soliton の特性について，第22回海岸工学講演会論文集，1975.
- 13) 石田昭・広沢遼・西垣嘉行：数値解析による非定形浅水波の波数周波数特性，第26回海岸工学講演会論文集，1978.
- 14) 石田昭・高橋宏直・金沢和幸：数値解析による浅海波の変形特性，第27回海岸工学講演会論文集，1980.
- 15) 安田孝志：浅海における有限振幅波理論とその適用に関する研究，京大学位論文，1978.
- 16) 土屋義人・安田孝志：浅海における波の変形，第20回海岸工学講演会論文集，1973.