

妥当性検証時の情報を利用する論理式の証明図作成方法

大芝 猛・永田周郎・舟橋 栄

共通講座教室

(1979年9月8日受理)

A Method for Obtaining Proof Figures of Valid Formulas in the First Order Predicate Calculus

Takeshi OSHIBA, Shuro NAGATA and Sakae FUNAHASHI

Department of Engineering Sciences

(Received September 8, 1979)

In this paper, a method for obtaining proof figures of valid formulas is presented with a certain procedure for checking the validities of formulas.

The process of the application of the method to an arbitrary formula is as follows.

The validity checking procedure is applied to a given formula.

In the case when the procedure terminates, it takes out informations characterizing the validity of the formula.

Then, the main algorithm in the method, by using the informations, derives a proof figure of the formula.

0. 目的と概要

一階述語論理の任意の論理式に対し、その妥当性を検証する手続き、また妥当性を期待して証明図の作成を試みる手続きが存在する。しかし、任意の論理式に対し、これらの目的が達せられるか否かは一般には決定不能であり従って手続自体はアルゴリズムではない。本稿の目的は証明図作成手続の1つとして次のものを提起することにある。(1) 証明図作成手続は2つの部分からなる。第1の部分は与えられた任意の論理式の妥当性を検証するものであり、論理式が本来妥当なものならば、その妥当性を特性づける情報を見出して手続は一たん停止する。第2の部分は、上記のようにして求めた情報の助けをかりて与えられた論理式の証明図を一意に手もどりに展開するアルゴリズムからなる。

(2) 証明図はLKタイプを用いた式 (sequents) の樹形配列からなる。各 sequent は $A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_m$ なる形をとり、内容的には「 $A_1 \& \dots \& A_n$ ならば B_1 or \dots or B_m 」を意味している。

証明図の展開は次の通りである。与えられた論理式 A に対し、その妥当性検証時にえられる情報に即してきまる個数だけ A を並べた sequent を $\rightarrow A, \dots, A$ とし、この中の論理記号 [\vee (or), \wedge (&), \supset (imply), \neg (not), \forall (for all), \exists (for some)] を外側のものから順次はずし分解しつつ上方へ推論を逆に堆積展開して行く方式による。

このとき各ステップは推論の下式 (lower sequent) に対し1個または2個の推論の上式 (upper sequents) を決定論的に定めて上部に記述して行くものであり、下式の論理記号を含む複数の論理式のうちどれを分解の対象とするか ν 問題となる。また特に分解の対象が $\forall x B(x)$, $\exists x B(x)$ のとき上式において x に代入すべき項または自由変数を決定することが問題となるが、本稿ではこれを妥当性検証終了時に得られる情報により決定する方法をとる。

(3) 上記アルゴリズムを正確に定式化するために各 quantifier (\forall または \exists) にあらかじめ「分解時に代入すべき項 (または自由変数を意味する項) を index とし添付しておく方式をとる。

このような index 付の論理式や sequent また proof-figure に対して pseudo-formula, pseudo-sequent, pseudo-proof-figure なる概念を定義しておく。

妥当性検証時に得られる情報は上に述べたように A に index を付与した pseudo-formula の列 $\rightarrow A^{(1)}, \dots, A^{(m)}$ として与えられる。前述の証明図の展開のアルゴリズムは本質的に $\rightarrow A^{(1)}, \dots, A^{(m)}$ に到る pseudo-proof figure を展開する形式で式化される。かくして得られる pseudo-proof figure から一せいに index を除去することにより $\rightarrow A, \dots, A$ (従って $\rightarrow A$) に到る LK の証明をうる。

以下これらの手続きおよびアルゴリズムの詳細を記述する。

1. formula (論理式) とその付随式

1 階述語論理の体系としては Gentzen の LK⁴⁾ を用いる。従って formula (論理式), sequent (式), inference (推論), proof figure (証明図) の定義は通常の LK の通りとする

但し用いる記号は次の通りとする

- (1) 対象変数: $x, y, z, x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$
- (2) n 変数関数記号: $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots (n=0, 1, 2, \dots)$
- (3) n 変数述語記号: $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots (n=0, 1, 2, \dots)$

但し $f_i^{(n)}, p_i^{(n)}$ 等は f_i, p_i と argument 数を省略して用いる。

- (4) 論理記号: $\vee, \wedge, \supset, \neg, \forall, \exists$
- (5) 括弧: $(,)$

またこれらの記号を用いて以下のように定義される項、や論理式を表わす文字として $F, G, \tau, \sigma; A, B, \dots$ を用いる。

1° 項 (term)

- (1) 対象変数は項である (2) f が n 変数の関数記号, τ_1, \dots, τ_n が項のとき $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ は項である。(0変数の関係記号はそれ自身で項であるとする。)

2° 論理式

- (1) p が n 変数の述語記号で τ_1, \dots, τ_n が項ならば $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ は論理式である。(但し 0 変数の述語記号はそれ自身論理式である。)
- (2) A と B とが論理式ならば $(A \vee B), (A \wedge B), (A \supset B), (\neg A)$ は論理式である
- (3) A が論理式, x が対象変数ならば $\forall x A, \exists x A$ は論理式である

3° $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ が論理式のとき, $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$ は sequent (式) である

4° 推論, 証明図の定義は文献 2), 4) 参照

[formula の付随式の定義]

LK の論理式 A に対しその付随式 \bar{A} を次のように定義する。

(0) A の限定記号の束縛変数を限定記号の位置が異なれば異なる束縛変数になるように A を変形しておく。

(1) A の 1 つの限定記号 $\#x$ (但し $\#$ は \forall または \exists を表わす) につき, $\#x$ の否定の次数を ($\#x$ の外側の \neg の個数) + ($\#x$ の外側で右にある \supset の個数) と定義する。

A 中の $\forall x$ につき,

その否定の次数が

- { 偶数ならば $\forall x$ を $\forall x[]$ でおきかえ,
- { 奇数ならば $\forall x$ を $\forall x()$ でおきかえる。

A 中の $\exists x$ につき,

その否定の次数が

- { 偶数ならば $\exists x$ を $\exists x()$ でおきかえ,
- { 奇数ならば $\exists x$ を $\exists x[]$ でおきかえる。

以上のようにして得られる図式を A' とする。

(2) A' のすべての

- { () 付変数を左から x_1, x_2, \dots, x_n
- { [] 付変数を左から y_1, y_2, \dots, y_m

でおきかえる。この際 A' 中の左から i 番目の () 付変数 $\#x()$ を $\#x_i()$ でおきかえるとき $\#x(\dots x \dots)$ なる $\#x$ の scope 内の x も同時に x_i でおきかえ $\#x_i(\dots x_i \dots)$ とする。同様に A' の左から j 番目の [] 付変数 $\#y[]$ につき $\#y_j[](\dots y \dots)$ を $\#y_j[](\dots y_j \dots)$ でおきかえる。かくしてうる図式を A'' とする。

(3-1) A'' の () 付変数 $\#x_1(), \dots, \#x_n()$ につき $x_i()$ 内に同じ番号の表示変数 X_i を入れ $\#x_1(X_1), \dots, \#x_n(X_n)$ でおきかえてうる図式を A''' とする

(3-2) A''' 内の [] 付変数 $\#y_j[]$ に対し, この外側に位置する () 付変数が x_{i_1}, \dots, x_{i_p} であるとき, $\#y_j[]$ を $\#y_j[f_j(X_{i_1}, \dots, X_{i_p})]$ でおきかえる。これをすべての [] 付変数 $\#y_j[] (j=1, \dots, m)$ について行なつてうる図式を A の付随式といい \bar{A} または $\bar{A} \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ であらわす。但し, y_j に対して用いる f_j は A にない新しい関数記号とし, これらを A の Skolem 関数という

2. 論理式 A の付随式の Assignment と β -formula.

$\bar{A} \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ 内の functions (関数記号) を用いてうる項の全体を $H(A)$ であらわし, A のエルブラン領域という。但し, $\bar{A} \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ にある functions (A に元からある関数記号と付随式を作ったときに生じた Skolem 関数とからなる) の中に arguments 数 0 の関数記号 (個体定数) がないときは, 特定の 1 つの個体定数記号 c_0

を付け加えておくものとする。

$\tau_1, \dots, \tau_n \in H(A)$ を $\bar{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ に代入してうる図式 $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ を $\bar{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ の1つの assignment という。

$\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形: A の β -formula の定義

(0) $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ 自身 $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形である。

(1) $\#x_i(\tau)C(x_i)$ が $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形るとき

$C(\tau)$ も $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形である。

(2) $\#y_j[f_j(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_p})]D(y_j)$ が $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形るとき, $D(f_j(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_p}))$ も $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形である。

(3) $B\vee C$ が $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形るとき, B および C は $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形である。

(4) $B\wedge C$ が $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形るとき, B および C は $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形である。

(5) $B\supset C$ が $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形るとき, B および C は $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形である。

(6) $\neg B$ が $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形るとき, B は $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ の分解形である。

A の付随式 $\bar{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ のある assignment $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle$ のある分解形を A の β -formula という。

A の β -formula は次項の A に対する pseudo-formula の一種である。

3. Pseudo-formula と sub-operation, cl-operation

(1) A の pseudo-formula, pseudo-term の定義

(それぞれ p -formula, p -term と略称する。)

(1.0.1) A の付随式にあらわれる束縛変数 $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ は p -term である。(x_i は () 付変数, y_j は [] 付変数)

(1.0.2) \bar{A} の個体定数 (arguments 数0の関数) は p -term である。

(1.1.1) g が A に初めからある関数記号で (arguments 数 r), τ_1, \dots, τ_r が p -terms のとき $g(\tau_1, \dots, \tau_r)$ は p -term.

(1.1.2) f_j が \bar{A} の Skolem 関数で (arguments 数 r), τ_1, \dots, τ_r が束縛変数を含まない p -terms のとき $f_j(\tau_1, \dots, \tau_r)$ は p -term.

(2-1) p が arguments 数 r の A の述語記号で, τ_1, \dots, τ_r が p -terms のとき, $p(\tau_1, \dots, \tau_r)$ は p -formula.

(2-2) B, C が p -formulas のとき $B\vee C, B\wedge C, B\supset C, \neg B$ は p -formulas.

(2-3-1) $B(x_i)$ が p -formula で x_i は free で full indicate されているとし, τ が p -term で束縛変数を含まないとき $\exists x_i(\tau)B(x_i), \forall x_i(\tau)B(x_i)$ は p -formulas.

(2.3.2) $B(y_j)$ が p -formula で y_j は free で full indicate されているとし, $f_j(\tau_1, \dots, \tau_r)$ が p -term 従って束縛変数があらわれていないとき $\forall y_j [f_j(\tau_1, \dots, \tau_r)]B(y_j), \exists y_j [f_j(\tau_1, \dots, \tau_r)]B(y_j)$ は p -formulas.

(2) sub-operation の定義: (B が A の p -formula) のとき sub(B) を p -formula B の形により分け次のように定義する。(sub は substitution の略。)

1. $sub(\#x_i(\tau)C(x_i)) = sub C(\tau)$

2. $sub(\#y_j[f_j(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_p})]D(y_j)) = sub D(f_j(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_p}))$

3. $sub(B\vee C) = sub B\vee sub C$

4. $sub(B\wedge C) = sub B\wedge sub C$

5. $sub(B\supset C) = sub B\supset sub C$

6. $sub(\neg B) = \neg sub B$

7. $sub(p(\tau_1, \dots, \tau_n)) = p(\tau_1, \dots, \tau_n)$

(3) cl-operation の定義 (A の p -formula B につき, $cl(B)$ なる LK の formula 対応させる: B 内の $\#x_i(\tau), \#y_j[F]$ の $(\tau), [F]$ を除いてうる formula.) (cl は clear の略。)

1. $cl(p(\tau_1, \dots, \tau_n)) = p(\tau_1, \dots, \tau_n)$

2. $cl(B\vee C) = cl(B)\vee cl(C)$,

3. $cl(B\supset C) = cl(B)\supset cl(C)$

4. $cl(\neg B) = \neg cl B$

5. $cl(\#x_i(\tau)C(x_i)) = \#x_i cl(C(x_i))$

6. $cl(\#y_j[f_j(\tau_1, \dots, \tau_i)]C(y_j)) = \#y_j cl(C(y_j))$

[Proposition (S)] $C(y_j)$ が p -formula で y_j が full indicate されているとし, F が p -term で束縛変数をもたないとき $cl(C(y_j)) \binom{F}{y_j} = cl(C(F))$ 。 ($\binom{F}{y_j}$ は y_j への F の代入) (証明) $C(y_j)$ が p -formula 故 y_j は (), [] 内に現われないことに注意すれば, $C(y_j)$ 内の論理記号の数に関する帰納法により示される。

更に A の β -formula は p -formula の一種であるが, この β -formula は次の性質をもつ。

[Proposition (☆)] $B = \#y_j[F]A_1(y_j), C = \#y_j[F]A_2(y_j)$ が共に論理式 A の2つの β -formula のとき

$cl(A_1(F)) = cl(A_2(F))$ 。

[Proposition (†)] B, C が共に A の β -formula で, それぞれ $\bar{A}\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle, \bar{A}\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ の分解形るとき, B 内に $\exists y_j[F]$, (or $\forall y_j[F]$) があり, C 内に $\#y_j[F]$ があるとき, $y_j = y_i, \# = \exists$ (or $\# = \forall$) [or は同順] であり更に $F = f_j(\tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_p})$ とかけ $\sigma_{d_1} = \tau_{d_1}, \dots, \sigma_{d_p} = \tau_{d_p}$ である。

[Proposition (+)] A の β -formula : 中の $f_d(\tau_1, \dots, \tau_p)$ の中に変数 y_j は決して現われない。但し f_d は $\#y_d[]$ に対する Skolem 関数である。

これら3つの Propositions の証明は Appendix 参照。

4. 証明図作成手続きとアルゴリズム PAL

(def.) A の β -formula B が Q 整合とは次のこととする： B 内のすべての $\forall y []$, $\exists x ()$ の否定の次数が偶数であり、

B 内のすべての $\exists y []$, $\forall x ()$ の否定の次数が奇数である。

(def) $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ が β -formula のとき ($n, m \geq 0$), $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$ を β -sequent といひ $\Gamma \rightarrow \Delta$ 等であらわす。また, $\neg A_1, \dots, \neg A_n, B_1, \dots, B_m$ がすべて Q 整合のとき $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$ を $Q\beta$ -sequent という。

(def) 与えられた $Q\beta$ -sequent $\Gamma_0 \rightarrow \Delta_0$ に対し, これを最下式とし上に向かって $Q\beta$ -sequents を 1 分岐または 2 分岐の樹状に堆積した図式を作ったとき, これを $\Gamma_0 \rightarrow \Delta_0$ を root とする $Q\beta$ -tree という。

(def) \mathcal{P} が $Q\beta$ -tree のとき, $sub(\mathcal{P})$ を \mathcal{P} の各々の sequent $\Gamma_i \rightarrow \Delta_i$ につき $sub(\Gamma_i) \rightarrow sub(\Delta_i)$ におきかえてうる図式とする。但し $sub(A_1, \dots, A_n) = sub(A_1), \dots, sub(A_n)$ とする。

(def) \mathcal{P} が $Q\beta$ -tree のとき, $cl(\mathcal{P})$ を \mathcal{P} の各々の sequent $\Gamma_i \rightarrow \Delta_i$ につき $cl(\Gamma_i) \rightarrow cl(\Delta_i)$ におきかえてうる図式とする。但し $cl(A_1, \dots, A_n) = cl(A_1), \dots, cl(A_n)$ とする。

[証明図作成手続き]

論理式 A の妥当性検証時の情報を利用する証明図作成手続きを以下に述べる。

(Step-1) 与えられた論理式 A の付随式 $\bar{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ を作り, Step-2 へ進む。

(Step-2) sub -operation により限定記号を除き, $sub(\bar{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle) = D\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ を作り Step-3 へ進む。

(Step-3) ... (A の妥当性検証手続き)

(3.0) $m=1$ として (3.1) へ進む

(3.1) (アルゴリズム CHK) ... (文献 [7] 参照。)

$D(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m}) \vee \dots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ がトートロジーとなる $\tau_{ij} \in H(A)$ を search.

{not found ならば $m \leftarrow m+1$ とし, (3.1) へ戻る。
found ならば Step-4 へ。

(Step-4) Step-3 で found した $\tau_{i1}, \dots, \tau_{in}$ を付随式 $\bar{A}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ に代入し $\bar{A}\langle \tau_{i1}, \dots, \tau_{in} \rangle$ を作り ($1 \leq i \leq m$) これらを並べてうる pseudo-sequent

$\rightarrow \bar{A}\langle \tau_{11}, \dots, \tau_{1n} \rangle, \dots, \bar{A}\langle \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn} \rangle$

を作り Step-5 へ進む

(Step-5) [証明図展開アルゴリズム PAL: 詳細は次項]

アルゴリズム PAL を $\rightarrow \bar{A}\langle \tau_{11}, \dots, \tau_{1n} \rangle, \dots, \bar{A}\langle \tau_{m1}, \dots,$

$\tau_{mn} \rangle$ に適用し, これを最下の sequent とする sequents の樹状堆積としての pseudo-proof figure

$\mathcal{P}_1 = \text{PAL}[\rightarrow \bar{A}\langle \tau_{11}, \dots, \tau_{1n} \rangle, \dots, \bar{A}\langle \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn} \rangle]$

を作り, Step-6 へ

(Step-6) [LK の証明図への変換ステップ]

cl -operation を前 Step で得た pseudo-proof \mathcal{P}_1 に適用し, てすべての index を落し, 更に必要な推論を付加し, eigen variable に対応する自由変数の適正化を行い $\rightarrow A, \dots, A$ に到る LK-proof $cl(\mathcal{P}_1)$ を作り Step 7 へ。

(Step-7) Step-6 で得た $\mathcal{P}_2 = \text{proof}[\rightarrow A, \dots, A]$ に減の推論を適用し, 求める $\rightarrow A$ に到る LK の証明図をうる。

以下「与えられた $Q\beta$ -sequent $\Gamma_0 \rightarrow \Delta_0$ が後述の条件 (\diamond) をもつとき, これを root とする $Q\beta$ -tree $\text{PAL}[\Gamma_0 \rightarrow \Delta_0]$ であって, $1^\circ cl(\text{PAL}[\Gamma_0 \rightarrow \Delta_0])$ が $cl(\Gamma_0) \rightarrow cl(\Delta_0)$ にいたる LK の正しい推論の堆積を与え, $2^\circ sub(\text{PAL}[\Gamma_0 \rightarrow \Delta_0])$ が $sub(\Gamma_0) \rightarrow sub(\Delta_0)$ にいたる \forall, \exists なしの LK の正しい推論の堆積となる」ものを作るアルゴリズム PAL を与える。

(1) このようなアルゴリズムの目的は「与えられた論理式 A に対し, 第 1 の A の妥当性検証手続き CHK (文献 7 参照) が肯定的に終了したときに求まる $m \geq 1$ と term $\tau_{ij} \in H(A)$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) を用いて, 先ず $\Gamma_0 \rightarrow \Delta_0 = \rightarrow \bar{A}\langle \tau_{11}, \dots, \tau_{1n} \rangle, \dots, \bar{A}\langle \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn} \rangle$ (これは条件 \diamond をみたす) を作り, これに引き続いてアルゴリズム PAL, と cl とを適用することにより “ $\rightarrow A$ ” に到る正しい LK の証明図をうる」ことにある。即ち

1° より $tree(*) cl(\text{PAL}[\rightarrow \bar{A}\langle \tau_{11}, \dots, \tau_{1n} \rangle, \dots, \bar{A}\langle \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn} \rangle])$ が「 $cl(\rightarrow \bar{A}\langle \tau_{11}, \dots, \tau_{1n} \rangle, \dots, \bar{A}\langle \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn} \rangle)$ 」即ち $\rightarrow A, \dots, A$ に到る LK の正しい推論の堆積となり ... (i)

2° と特にこの $\Gamma_0 \rightarrow \Delta_0$ については $sub(\Gamma_0) \rightarrow sub(\Delta_0)$ とがトートロジーの意味をもつことから「tree form(*) の最上部の sequents もすべてトートロジーの意味をもつ $\dots, D, \dots \rightarrow \dots, D, \dots$ なる形の始式に限られること」が導びかれる ... (ii)。即ち (i), (ii) より tree form(*) は $\rightarrow A, \dots, A$ にいたる LK の証明図となる (詳しい証明は後述の定理参照)。

(2) PAL の手続きの骨子は $Q\beta$ -sequent $\Gamma_0 \rightarrow \Delta_0$ を root とする $Q\beta$ -tree を lower most, left most に構成して行くものであるが, 本質的な部分は次項に定義する $US = \text{operation}$ 「任意の (少なくとも 1 つの論理記号を含む) $Q\beta$ -sequent $\Gamma \rightarrow \Delta$ に対し, 1 つまたは 2 つの $Q\beta$ -sequent $US(\Gamma \rightarrow \Delta) = \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1$ (または $\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1; \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2$) を上部に作る操作」にある。この US -operation を用い tree form の骨組を作るアルゴリズムは次の Step 0 ~ Step 2 に示す。

但し、tree form における各 β -sequent の位置は (I, i) なる index で示す。即ち

$\Theta(I, i)$ は枝 I の下から $i (\geq 0)$ 番目の β -sequent を表わすこととし枝の位置 I は l (左), r (右) の 2 つの symbols の列で表わすとよい。例えば $I=llr$ は root から上へ始めての 2 分枝を左へ進み次の 2 分枝を左へ進み更に次の 2 分枝の右上の枝をあらわす。

即ち ll と lr はそれぞれ枝 I の左上, 右上の枝をあらわす。また $I \oplus 1$ は「枝 I を下にたどり、始めて到達する左分枝が lI のとき、その右分枝 lr 」を表わすものとする。(もしかかる枝 lI がいないときには $I \oplus 1$ は root を表わす)

Step 0: 処理対象 sequent $\Theta(I, i) = \Gamma_0 \rightarrow \Delta_0$ を $I=\lambda, i=0$, (root の位置) に set し, Step 1 へ進む。

Step 1: $\Theta(I, i)$ が原始論理式*のみからなるか?

yes のとき $\begin{cases} I \oplus 1 = \lambda(\text{root}) \text{ なら tree 作成は終了} \\ I \oplus 1 \neq \lambda \text{ ならば,} \\ \text{処理対象 sequent を } \Theta(I \oplus 1, 0) \text{ とし Step 1 へ。} \end{cases}$
no のとき: Step 2 へ。

Step 2. $US(\Theta(I, i))$ が 1 つの sequent のみか?

yes ならば $US(\Theta(I, i)) = \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1$ form.
このとき処理対象を $\Theta(I, i+1) = \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1$ とし Step 1 へ
no ならば, $US(\Theta(I, i)) = \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1; \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2$ form.
このとき $\Theta(ll, 0) = \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1; \Theta(lr, 0) = \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2$ を set し, 処理対象を $\Theta(ll, 0)$ として Step 1 へ。

5. US-Operation (上式決定操作)

(1) アルゴリズム PAL に用いる「与えられた $Q\beta$ -sequent $\Gamma \rightarrow \Delta$ に対しその upper sequents を求める US-operation を定義する前に, term の degree の定義と 2 ~ 3 の性質を述べる。

A の付随式 $\bar{A}(X_1, \dots, X_n)$ にあらわれる Skolem 関数 f_j を用いた term $f_j(\tau_1, \dots, \tau_k)$ に対し

$$deg(f_j(\tau_1, \dots, \tau_k)) = \omega \cdot lg(f_j(\tau_1, \dots, \tau_k)) + j \quad (k \geq 0)$$

なる順序数を対応させる。

A に初めからある関数記号 g に対しては

$$deg(g(\sigma_1, \dots, \sigma_r)) = \omega \cdot lg(g(\sigma_1, \dots, \sigma_r)) \quad (r \geq 0)$$

なる順序数を対応させる。

但し $lg(h(\tau_1, \dots, \tau_d)) = lg(\tau_1) + \dots + lg(\tau_d) + 1 \quad (d \geq 0)$

$lg(c) = 1$ (c は 1 文字) とする。

[Proposition] 論理式 A の β -formula B の中で $\#y_i$ が $\#y_j$ の外側にあれば $i < j$

(証明) β -formula の定義から明らか

$p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ なる形の論理式を原始論理式という

[Proposition*] $C = \#y_i[F_i]B(y_i, \#y_j[F_j]D(y_i, y_j))$ が A の β -formula ならば $deg(F_i) < deg(F_j)$

(証明) C は $\bar{A}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ の分解形であり, \bar{A} の作り方から $\#y_i$ の外の () 付変数が x_{i_1}, \dots, x_{i_r} ならば $\#y_j$ の外の () 付変数は x_{j_1}, \dots, x_{j_s} ($r \leq s$)

従って $F_i = f_i(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_r}), F_j = f_j(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_s})$

従って $lg(F_i) \leq lg(F_j)$, また前 Proposition より $i < j$

従って $deg(F_i) < deg(F_j)$. //

[Proposition (*)'] $C = \#x(\tau)B(\tau, \#y[F]D(x, y))$ が A の β -formula ならば $deg(\tau) < deg(F)$.

(証明) 前 Proposition と同様に示される。//

(2) US-operation の定義に対する要請。

少なくとも 1 つの論理記号を含む $Q\beta$ -sequent $\Gamma \rightarrow \Delta$ に対し, Γ と Δ に同じ β -formula がない場合に, 1 つまたは 2 つの $Q\beta$ -sequents (upper sequents) $US(\Gamma \rightarrow \Delta) = \Gamma_1 \rightarrow \Delta_1$ (または $\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1; \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2$) を対応させる operation US で次の property をもつものを作る。

(i) 「 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が次の性質 (\diamond) をもつならば, $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ も性質 (\diamond) をもつ。

(\diamond) 「 $\Gamma \rightarrow \Delta$ の β -formula 内に $\forall y[F]$ または $\exists y[F]$ があれば $cl(\Gamma \rightarrow \Delta)$ の β -formula 内に F なし。」

(ii) $\Gamma \rightarrow \Delta$ が上記性質 (\diamond) をもつとき,

$cl(US(\Gamma \rightarrow \Delta))$ は LK の証明となる。但し \forall 右, \exists 左 $cl(\Gamma \rightarrow \Delta)$ タイプの場合は $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ に indicate される F は自由変数 x_F とみなすものとする。

(iii) $sub(US(\Gamma \rightarrow \Delta))$ は LK の \forall, \exists なしの証明であり $sub(\Gamma \rightarrow \Delta)$ 下式がトートロジー的ならば上式もトートロジー的である (但し $\forall A_1 \dots \forall A_n \forall B_1 \dots \forall B_m$ がトートロジーのとき $A_1, \dots, A_n \rightarrow B_1, \dots, B_m$ をトートロジー的という)。

(3) US-operation の定義

[Case 0] $\Gamma \rightarrow \Delta$ の中に同じ β -formula があるとき。

(0.0) $\Gamma \cap \Delta \neq \phi$ のとき: ($\Gamma \rightarrow \Delta$ は $\dots, B, \dots \rightarrow \dots, B, \dots$ form) このとき $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ は undefined とする。

(0.1) $\Gamma \cap \Delta = \phi$ のとき:

(0.1.1) Γ 内に同じ β -formula があるとき: それらの最も左にあるものを D とする。このとき

(def) $US(\Gamma \rightarrow \Delta) = \Gamma_0, D, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k \rightarrow \Delta$ とする。

但し $\Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma_0, D, \Gamma_1, D, \dots, D, \Gamma_k \rightarrow \Delta, k \geq 2, \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ には D なし。

(0.1.2) Γ 内に同じ formula なく, Δ 内に同じ formula がありその最も左のものを C とする。

(def) $US(\Gamma \rightarrow \Delta) = \Gamma \rightarrow \Delta_0, C, \Delta_1, \dots, \Delta_l$

但し, $\Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma \rightarrow \Delta_0, C, \Delta_1, C, \dots, C, \Delta_l, l \geq 2, \Delta_0, \Delta_1,$

..., \mathcal{A}_2 には C なし。

[Case 1] $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ に同じ β -formula なく (Case 0 でなく) $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ 内の β -formula に $B \vee C, B \wedge C, B \supset C, \neg B$ のいずれかがあるとき、その最も左のもの D に着目し、 D を分解してうる β -formula をもつ $Q\beta$ -sequent $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A})$ を作る。

(1.1.1) $\Gamma \ni D = B \vee C$ の case.

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma_1, B, \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}; \Gamma_1, C, \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$

但し、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma_1, B \vee C, \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$ であるとする。

(1.1.2) $\Gamma \ni D = B \wedge C$ の case.

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma_1, B, C, \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$

但し、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma_1, B \wedge C, \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$ であるとする。

(1.1.3) $\Gamma \ni D = B \supset C$ の case.

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow B, \mathcal{A}; \Gamma_1, C, \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$

但し、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma_1, B \supset C, \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$

(1.1.4) $\Gamma \ni D = \neg B$ の case.

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow B, \mathcal{A}$

但し、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma_1, \neg B, \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$

(1.r.1) $\mathcal{A} \ni D = B \vee C$ の case.

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, B, C, \mathcal{A}_2$

但し、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, B \vee C, \mathcal{A}_2$

(1.r.2) $\mathcal{A} \ni D = B \wedge C$ の case.

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, B, \mathcal{A}_2; \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, C, \mathcal{A}_2$

但し、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, B \wedge C, \mathcal{A}_2$

(1.r.3.) $\mathcal{A} \ni D = B \supset C$ の case.

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = B, \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, C, \mathcal{A}_2$

但し、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, B \supset C, \mathcal{A}_2$

(1.r.4) $\mathcal{A} \ni D = \neg B$ の case.

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = B, \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$

但し、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, \neg B, \mathcal{A}_2$

(註) (0.0) は「 $cl(\Gamma) \cap cl(\mathcal{A}) \ni \phi$ のとき ($cl(\Gamma) \rightarrow cl(\mathcal{A})$) が始式のとき $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A})$ を undefined」としてもよい。

[Case 2] $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ に同じ β -formula がなく $B \vee C, B \wedge C, B \supset C, \neg B$ なる formula がないうち、(即ち Case 0 でも Case 1 でもないとき) 先ず

$$deg(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \begin{cases} \text{def: } \min \{deg(F) \mid \#y[F] \text{ in } \Gamma \rightarrow \mathcal{A}\} \\ \text{(但し、} \Gamma, \mathcal{A} \text{に } \#y[F] \text{ form あり)} \\ 0 \text{(但し、} \Gamma, \mathcal{A} \text{に } \#y[F] \text{ form なし)} \end{cases}$$

により $Q\beta$ -sequent の degree を定義しておく。

(2.1) $deg(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) > 0$ のとき。

(2.1.1) $deg(\tau) < deg(\Gamma \rightarrow \mathcal{A})$ なる $\#x(\tau)B(x)$ が Γ, \mathcal{A} にあるとき。

(2.1.1.1) その最も左のもの $C \in \Gamma$ のとき: このとき $C = \forall x(\tau)B(x)$ の形である ($(\cdot) \supset C$ が Q 整合であるため) このとき、

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma_1, B(\tau), \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$

但し、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma_1, \forall x(\tau)B(x), \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$

(2.1.1r) その最も左のもの $C \in \mathcal{A}$ のとき: このとき $C = \exists x(\tau)B(x)$ の形である。

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, B(\tau), \mathcal{A}_2$

但し、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, \exists x(\tau)B(x), \mathcal{A}_2$

(2.1.2) $deg(\tau) < deg(\Gamma \rightarrow \mathcal{A})$ なる $\#x(\tau)B(x)$ が Γ, \mathcal{A} にないうち: この case では $deg(F) = deg(\Gamma \rightarrow \mathcal{A})$ なる $\#y[F]$ in Γ, \mathcal{A} は必ず $\#y[F]A(y)$ なる β -formula 自体として $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ にあらわれる。^(*) (証明は後述)

これらのうち最も左のもの $C = \#y[F]A_1(y)$ に着目、

(2.1.2.1) $C \in \Gamma$ のとき: $C = \exists y[F]A_1(y)$ の形である。

Γ, \mathcal{A} 内の $\exists y[F]$ を冠頭にもつ β -formula すべてをマークする。 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ が $Q\beta$ -sequent 故、これらは \mathcal{A} になく Γ にあり、即ち $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ は

$= \Gamma_0, \exists y[F]A_1(y), \Gamma_1, \exists y[F]A_2(y), \Gamma_2, \dots$

$\dots, \Gamma_{k-1}, \exists y[F]A_k(y), \Gamma_k \rightarrow \mathcal{A}$

なる形をしている。このとき

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma_0, A_1(F), \Gamma_1, A_2(F), \Gamma_2, \dots, \Gamma_{k-1},$

$A_k(F), \Gamma_k \rightarrow \mathcal{A}$ とする。(但しこの場合、Proposition(☆)から

$cl(A_1(F)) = cl(A_2(F)) = \dots = cl(A_k(F))$ である

ことは後述の Property (ii) の証明に用いられる。)

(2.1.2.r) $C \in \mathcal{A}$ のとき: $C = \forall y[F]A_1(y)$ の形である。

Γ, \mathcal{A} 内の $\forall y[F]$ を冠頭にもつ β -formula をすべてマークする。これらは (2.1.2.1) と同様の理由で Γ になく \mathcal{A} にあり。即ち $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ は

$= \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_0, \forall y[F]A_1(y), \mathcal{A}_1, \forall y[F]A_2(y), \mathcal{A}_3, \dots$

$\dots, \mathcal{A}_{k-1}, \forall y[F]A_k(y), \mathcal{A}_k$

なる形をしている。このとき

(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_0, A_1(F), \mathcal{A}_1, A_2(F), \mathcal{A}_2, \dots,$

$\mathcal{A}_{k-1}, A_k(F), \mathcal{A}_k$ とする。(この場合も、 $cl(A_1(F)) = \dots = cl(A_k(F))$ である。)

(2.2) $deg(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = 0$ のとき:

(2.2.1) $\#x(\tau)B(x)$ なる β -formula が Γ, \mathcal{A} にあるとき:

(2.2.1.1) その最も左のもの $C \in \Gamma$ のとき、 $C = \forall x(\tau)B(x)$ の形であり、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma_1, \forall x(\tau)B(x), \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$ である。

このとき、(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma_1, B(\tau), \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{A}$ とする。

(2.2.1.r) その最も左のもの $C \in \mathcal{A}$ のとき、 $C = \exists x(\tau)B(x)$ の形であり、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A} = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, \exists x(\tau)B(x), \mathcal{A}_2$ である。

このとき、(def) $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A}) = \Gamma \rightarrow \mathcal{A}_1, B(\tau), \mathcal{A}_2$ とする。

(2.2.2) $\#x(\tau)B(x)$ なる β -formula が Γ, \mathcal{A} にないうち、このとき $US(\Gamma \rightarrow \mathcal{A})$ は undefined とする。(このとき、 $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$ は $P_1, P_2, \dots, P_k \rightarrow Q_1, \dots, Q_k$ なる原始論理式

P_n, Q_j のみからなる.)

(*) [(2.1.2) の Case における (*) の証明]

このとき, $\#y[F]$ が Γ, Δ のある β -formula の真に内部にあらわれると仮定する。一般に [Case 2] では

Γ, Δ には ①原始論理式かまたは ② $\#x'x'(\tau)D(x')$,

③ $\#y'F''[F'']F(y'')$ なる β -formula のみ現われることに注意する。従って $\#y[F]$ は②または③の β -formula 内のみにあらわれる。先ず②の内部にあるときは

$\#x'x'(\tau)D'(x', \#y[F]A'(x', y)) \in \Gamma, \Delta$ であり

Proposition (※') より $deg(\tau) < deg(F)$ 従って 2.1.1 の場合が起こっていることになる。(矛盾)

③の内部にあるとき, $\#y'F''[F'']E'(y'', \#y[F]A''(y'', y)) \in \Gamma, \Delta$ であり, Proposition (※) より

$deg(F'') < deg(F) = deg(\Gamma \rightarrow \Delta) \leq deg(F'')$ (矛盾)

6. US-operation に対する property (i), (ii), (iii) の証明

以下に Property を再掲して証明を行う

(i) $\Gamma \rightarrow \Delta$ が性質 (\diamond) をもつならば $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ も性質 (\diamond) をもつ。

(\diamond) 「 $\Gamma \rightarrow \Delta$ の β -formula 内に $\forall y[F]$ または $\exists y[F]$ があれば $cl(\Gamma \rightarrow \Delta)$ の formula 内に F なし。」

ここで, $\exists x(x), \forall x(x), \exists y[G], \forall y[G]$ なる (τ), $[G]$ を index と呼ぶことにすれば, cl -operation は index を除去する操作なので, (\diamond) は次の (\diamond') の形でかける。

(\diamond') 「 $\Gamma \rightarrow \Delta$ の β -formula 内に $\#y[F]$ があれば $\Gamma \rightarrow \Delta$ 内の F はすべて index 内にある。」

(但し, $\#$ は \forall または \exists をあらわす)

従って, (i) は「 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が性質 (\diamond') をもつとき $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ も (\diamond') をもつ」ことを US-operation の各々につき確かめればよい。

「 \forall, \exists を除去する4つの Cases 以外の Cases」

$US(\Gamma \rightarrow \Delta) \ni \#y[F]$ のとき, すでに $\Gamma \rightarrow \Delta \ni \#y[F]$, 従って仮定「 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が性質 (\diamond') をもつこと」から $\Gamma \rightarrow \Delta$ 内のすべての F は index 内にある。これらの cases では US-operation により新たに index 外の term を生じない故 $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ 内の F もすべて index 内にある。

(2.1.1.1) の場合:

(*) $US(\Gamma \rightarrow \Delta) = \Gamma_1, B(\tau), \Gamma_2 \rightarrow \Delta$

$\Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma_1, \forall x(\tau)B(x), \Gamma_2 \rightarrow \Delta$

但し $deg(\tau) < deg(\Gamma \rightarrow \Delta)$

「 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が性質 (\diamond') をもつにかゝらず $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ が (\diamond') をもたないとせよ」即ち, $US(\Gamma \rightarrow \Delta) \ni \#y[G]$

かつ $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ に index 外の G がある。(*) の形より $\Gamma \rightarrow \Delta \ni \#y[G]$, $\Gamma \rightarrow \Delta$ は性質 (\diamond') をもつ故 $\Gamma \rightarrow \Delta$ 内の G はすべて index 内にあり, 従って $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ の index 外の G は(*)の形に注意すれば $B(\tau)$ にあり, その1つを指定 (G とかく) ことにすれば次の2つの場合がある

{ (I) indicated G in $B(\tau)$ が indicated τ 's と完全に分かれているとき。

(II) indicated G in $B(\tau)$ がある indicated τ と共通部分をもつとき。

(I) の場合は $\forall x(\tau)B(x) \in \Gamma \rightarrow \Delta$ にすでに index 外の G があることになる。(矛盾)

(II) の場合は更に次の3つの場合が考えられる:

- ① G (in $B(\tau)$) がある indicated τ の真部分となる。
- ② G (in $B(\tau)$) がある indicated τ と一致する。
- ③ G (in $B(\tau)$) がある indicated τ を内部にもつ。

①, ②の場合: $deg(G) \leq deg(\tau)$, この US-operation の条件から更に $< deg(\Gamma \rightarrow \Delta) \leq deg(G)$. (矛盾)

③の場合: $\#y[G] \in US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ 故, $\#y[G]$ は (当初の論理式 A) のある β -formula にあらわれる。従って $G = f_d(\tau_1, \dots, \tau_n)$ なる形をしている。

G 内に indicated τ がある故

$G = f_d(\tau_1(\tau), \dots, \tau_n(\tau))$ とかける。但し ($\tau_i'(\tau)$)

のうち少なくとも1つは実際に τ があらわれる。従って

$B(\tau) = B'(f_d(\tau_1'(\tau), \dots, \tau_n'(\tau), \tau))$, 従って

$\forall x(\tau)B(x) = \forall x(\tau)B'(f_d(\tau_1'(x), \dots, \tau_n'(x)), x)$

(A) の β -formula の1つである $\forall x(\tau)B(x)$ 内の Skolem 関数 f_d 内に変数 x があらわれる。これは矛盾である。(Proposition (+) を参照せよ)

(2.1.1.1) の場合も前の場合と同様

(2.1.2.1) の場合:

(*) $US(\Gamma \rightarrow \Delta) = \Gamma_0, A_1(F), \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, A_k(F), \Gamma_k \rightarrow \Delta$
 $\Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma_0 \exists y[F]A_1(y), \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}, \exists y[F]A_k(y), \Gamma_k \rightarrow \Delta$

但し, 上式に $\exists y[F]C(y)$ なる形の formula なし(*)

また $deg(F) = deg(\Gamma \rightarrow \Delta) = \min\{deg(T) \mid \#y[T] \in \Gamma \rightarrow \Delta\}$ (*). 「 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が性質 (\diamond') をもつにかゝらず, $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ が (\diamond') をもたない」とせよ。このとき次のように矛盾が導かれる。

即ち, $US(\Gamma \rightarrow \Delta) \ni \#y[G]$ かつ $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ に index 外の G あり。(*)の形より, $\Gamma \rightarrow \Delta \ni \#y[G]$ 従って仮定より G は $\Gamma \rightarrow \Delta$ 内ですべて index 内にあり。従って $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ 内に index 外の G がありとすればそれはある $A_{i_0}(F)$ 内にあり。その1つを指定 (G とかく) すれば, 先ず, 2つの場合あり,

- {(I) indicated \underline{G} in $A_{i_0}(F)$ が indicated F と分離。
- {(II) indicated \underline{G} in $A_{i_0}(F)$ が indicated F と共通部分をもつ。

(I) の場合は $\Gamma \rightarrow \Delta \ni \exists y[F]A_{i_0}(y)$ 内にすでに index 外の \underline{G} があったことになる。(矛盾)

(II) の場合は、更に次の3つの場合が考えられる。

- ① \underline{G} (in $A_{i_0}(F)$) がある indicated F の真部分となる
- ② \underline{G} (in $A_{i_0}(F)$) がある indicated F と一致
- ③ \underline{G} (in $A_{i_0}(F)$) がある indicated F を内部にもつ。

①の場合] $lg(G) < lg(F)$, 故に $deg(G) < deg(F) = deg(\Gamma \rightarrow \Delta) \leq deg(G)$. (矛盾)

②の場合] $G = F$, $US(\Gamma \rightarrow \Delta) \ni \#y'[G] = \#y'[F]$
 $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ の β -formula の中に $B = C(\#y'[F]D(y))$ なるものあり。この (2.1.2.l) の場合 B は原子論理式かまたは冠頭に \forall または \exists をもつ故、次の3つが考えられる。

- (2-1) $B = \#y'[F]D(y')$
- (2-2) $B = \#y''[F'']H(y'', \#y'[F]K(y'', y'))$
- (2-3) $B = \#x(\tau)E(x, \#y'[F]L(x, y'))$

(2-1) の場合 $\#y'[F]D(y')$, $\exists y[F]A_1(y)$ が共に (同じ A) β -formula 故 (Proposition (†)) より $\# = \exists$, $y' = y$. 従って $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ に $B = \exists y'[F]D(y)$ form が残留している。(矛盾)

(2-2) の場合。 B の形から Proposition (※) により。
 $deg(F'') < deg(F) = deg(\Gamma \rightarrow \Delta)$

一方 $US(\Gamma \rightarrow \Delta) \ni \#y''[F'']$ 故、 $\Gamma \rightarrow \Delta \ni \#y''[F'']$ 従って、

$deg(\Gamma \rightarrow \Delta) \leq deg(F'')$ 従って $deg(F'') < deg(F'')$ (矛盾)

(2-3) の場合、 Proposition (※') より $deg(\tau) < deg(F) = deg(\Gamma \rightarrow \Delta)$. これは (2.1.1) の場合に該当する。(矛盾)

③の場合も (2.1.1.l) と同じ論法で $\Gamma \rightarrow \Delta$ 内のある $\exists y[F]A_{i_0}(y)$ が $\exists y[F]A'(f_d(\tau_1'(y), \dots, \tau_r'(y)), y)$ のようにかけ f_d の argument の中に変数 y があらわれることが導かれる。(矛盾)

従って「 $\Gamma \rightarrow \Delta$ が性質 (\diamond) をもてば $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ も性質 (\diamond') をもつ。」

(2.1.2.r) についても同様に (i) が成立する。

(iii) の証明: (2.1.2.l), (2.1.2.r) 以外は条件 (\diamond) に無関係に $cl(US(\Gamma \rightarrow \Delta))$

$cl(\Gamma \rightarrow \Delta)$ がLKの証明となることは $US(\Gamma \rightarrow \Delta)$ の形から殆んどあきらみである。

(2.1.2.r) (\forall 右 推論に対応する場合) を確かめる。

$\Gamma \rightarrow \Delta = \Gamma \rightarrow \Delta_0, \forall y[F]A_1(y), \Delta_1, \dots, \Delta_{k-1}, \forall y[F]A(y), \Delta_k$ が条件 (\diamond) をみたす故「 $cl(\Gamma \rightarrow \Delta) = cl(\Gamma) \rightarrow cl(\Delta_0)$,

$\forall ycl(A_1(y)), cl(\Delta_1), \dots, cl(\Delta_{k-1}), \forall ycl(A_k(y)), cl(\Delta_k)$ に F なし。], 従って下の (※) の下式に F なし, 更に $cl(A_1(F)) = cl(A_1(y)) \binom{F}{y}$ (2節 Proposition S), 更に (※) の上部において F を自由変数 α_F におきかえうる (次節7の定理の証明または文献5参照) より (※) は正しい \forall 右 推論となる。

$$\frac{cl(\Gamma) \rightarrow cl(\Delta_0), cl(A_1(F)), cl(\Delta_1), \dots, cl(\Delta_{k-1}), cl(A_k(F)), cl(\Delta_k)}{cl(\Gamma) \rightarrow cl(\Delta_0), cl(\Delta_1), \dots, cl(\Delta_k), cl(A_1(F)), \dots, cl(A_k(F))} \text{ 換}$$

$$\frac{cl(\Gamma) \rightarrow cl(\Delta_0), cl(\Delta_1), \dots, cl(\Delta_k), cl(A_1(F)), \dots, cl(A_k(F))}{cl(\Gamma) \rightarrow cl(\Delta_0), cl(\Delta_1), \dots, cl(\Delta_k), \forall ycl(A_1(y)), \dots, \forall ycl(A_k(y))} \text{ 減}$$

$$\frac{cl(\Gamma) \rightarrow cl(\Delta_0), cl(\Delta_1), \dots, cl(\Delta_k), \forall ycl(A_1(y)), \dots, \forall ycl(A_k(y))}{cl(\Gamma) \rightarrow cl(\Delta_0), \forall ycl(A_1(y)), cl(\Delta_1), \dots, cl(\Delta_{k-1}), \forall ycl(A_k(y)), cl(\Delta_k) = cl(\Gamma \rightarrow \Delta)} \text{ (※)}$$

但し上記推論の上から2行目の (減) 推論は2節 Proposition (☆) より $cl(A_1(F)) = \dots = cl(A_k(F))$ が成立することにより正しい推論である。

(2.1.2.l) の場合も同様に (ii) が成立する。

(iii) の証明について: US -operation の2.1 以外の場合は明らかであり。2.1 の場合 $sub(US(\Gamma \rightarrow \Delta)) = sub(\Gamma \rightarrow \Delta)$ より零ステップの推論とみなせる故成立する。

7. 証明図の作成手続きの妥当性

4節に示される手続きにより $\rightarrow A$ のLK (Gentzen タイプによる1階述語論理) の証明図が得られる事を示す。定理 A の付随式 $\vec{A} \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ に対し, $sub(\vec{A} \langle X_1, \dots, X_n \rangle) = D(X_1, \dots, X_n)$ としたとき,

$D(\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}) \vee \dots \vee D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})$ がトートロジーとなる $\tau_{ij} \in H(A)$ と $m \geq 1$ がみつければ,

$\mathcal{P}_1 = PAL[\rightarrow \vec{A} \langle \tau_{11}, \dots, \tau_{1n} \rangle, \dots, \vec{A} \langle \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn} \rangle]$ (*) について

- (I) $cl(\mathcal{P}_1)$ は $Proof[\rightarrow A, \dots, A]$ を与え,
- (II) $sub(\mathcal{P}_1)$ は $Proof[\rightarrow D(\tau_{11}, \dots, \tau_{1n}), \dots, D(\tau_{m1}, \dots, \tau_{mn})]$ (但し \forall, \exists なし) を与える。

(証明) 先ず $PAL[\rightarrow \vec{A} \langle \tau_{11}, \dots, \tau_{1n} \rangle, \dots, \vec{A} \langle \tau_{m1}, \dots, \tau_{mn} \rangle]$ (*) は $Q\beta$ -sequents が樹状にならぶ図式であるが

- (0) 最上式は必ず $\dots, B, \dots \rightarrow \dots, B, \dots$ なる形の始式となる。

ことを併せて示す。

PAL アルゴリズムの作り方から (*) の最上式は (1) $P_1, \dots, P_p \rightarrow Q_1, \dots, Q_q$ なる原始論理式のみからなる sequent かまたは

- (2) $\dots, C, \dots \rightarrow \dots, C, \dots$ なる始式のいずれかである。

「sub (PAL[->A<τ₁₁, ..., τ_{1n}>, ..., A<τ_{m1}, ..., τ_{mn}>] (*1)
 は US-operation の Property (iii) により ∀, ∃ 推論なしの LK の推論の推積であり, 最下式は
 →sub (A<τ₁₁, ..., τ_{1n}>), ..., sub (A<τ_{m1}, ..., τ_{mn}>) 即ち
 →D (τ₁₁, ..., τ_{1n}), ..., D (τ_{m1}, ..., τ_{mn}) である。

仮定より D (τ₁₁, ..., τ_{1n}) ∨ ... ∨ D (τ_{m1}, ..., τ_{mn}) はトートロジーであるから (*1) の各 sequent について,

A₁, ..., A_r → B₁, ..., B_s について対応する論理式

∇A₁ ∨ ... ∨ ∇A_r ∨ B₁ ∨ ... ∨ B_s が下から順次トートロジーである。従って最上式

- (1)' P₁, ..., P_p → Q₁, ..., Q_q (sub (P_i) = P_i, sub (Q_j) = Q_j)
- (2)' ..., sub (C) → ..., sub (C), ...

のうち (1)' タイプについても ∇P₁ ∨ ... ∨ ∇P_p ∨ Q₁ ∨ ... ∨ Q_q はトートロジーであり, 従って P_i = Q_j となる i, j あり

従って (II) と (0) の成立が示された。従って更に cl (Φ₁) = cl (PAL [->A<τ₁₁, ..., τ_{1n}>, ..., A<τ_{m1}, ..., τ_{mn}>]) について: ①最上の sequent は (0) からすべて ..., cl (B), ... → ..., cl (B), ... なる形の始式であり, ②最下の sequent は →A, ..., A であり, ③途中の sequent の推積は US-operation property (ii) から LK の正しい推論となる。故に cl (Φ₁) は →A, ..., A にいたる LK の証明図となる。但し, Property (ii) の証明で述べたように「cl (Φ₁) 内の ∀_右 (または ∃_左) 推論の上式 F → A₁, B (F), A₂ (または F₁, B (F), F₂ → A) より上に現われるすべての F を自由変数 α_F におきかえうる。」ことを示すことが残されている。これには cl (Φ₁) の最上部の ∀_右 (∃_右) につき「」を示せば十分である。問題は最上部の ∀_右 (∃_左) より更に上部の ∀_左 または ∃_右 推論で F = f_i (τ₁, ..., τ_r) の真部分 τ が束縛される場合のみであるが, これは起らず心配ない。(もし F = f_i (τ₁ (τ), ..., τ_r (τ)) の τ が束縛され f_i (τ₁ (x), ..., τ_r (x)) を生じるなら, f_i (Skolem 関数) が cl (Φ₁) の最下の →A, ..., A に残る。これは矛盾)

[Appendix] 諸 Propositions の証明

6 節における Property の証明に用いられた Propositions の証明を以下に行う。

(Proposition ☆)

B = #y_j[F₁]A₁(y_j), C = #y_j[F₂]A₂(y_j) が共に A の β-formula のとき, F₁ = F₂ ならば cl (A₁(F₁)) = cl (A₂(F₂))

(証明) A₁(F₁), A₂(F₂) は, それらの内部にある #x (), #y [] の (), [] 内の index を無視すれば, 完全に同じ式であることを言えばよい

B = #y_j[F₁]A₁(y_j) は A<τ₁, ..., τ_n> の #y_j[F₁] が現

われるまで分解してうる形であり,

C = #y_j[F₂]A₂(y_j) は A<σ₁, ..., σ_n> の #y_j[F₂] が現われるまで分解してうる形とする。

先ず A<τ₁, ..., τ_n>, A<σ₁, ..., σ_n> 共に (), [] 内の index を除けば同じ式である。(*0)

A<τ₁, ..., τ_n> の #y_j[F₁] の外側の変数列と A<σ₁, ..., σ_n> の #y_j[F₂] の外側の変数列とは完全に一致する。

A<τ₁, ..., τ_n> の #y_j[F₁] の外側の #x () を #1x_{i1} (τ_{i1}), ..., #r x_{ir} (τ_{ir}) とすると F₁ = f_j (τ_{i1}, ..., τ_{ir}) であり

A<σ₁, ..., σ_n> の #y_j[F₂] の外側の #x () は #1x_{i1} (σ_{i1}), ..., #r x_{ir} (σ_{ir}) であり, F₂ = f_j (σ_{i1}, ..., σ_{ir}) である。

仮定 F₁ = F₂ (= F) より τ_{i1} = σ_{i1}, ..., τ_{ir} = σ_{ir} (*1)

また, A<τ₁, ..., τ_n> の #y_j[F₁] の外側の #'y_k[G₁],

A<σ₁, ..., σ_n> の #y_j[F₂] の外側の #'y_k[G₂] につき, G₁ = f_k (τ_{i1}, ..., τ_{is}), G₂ = f_k (σ_{i1}, ..., σ_{is}) (s ≤ r) 従って (*1) より G₁ = G₂. (*2)

以上より A<τ₁, ..., τ_n>, A<σ₁, ..., σ_n> の #y_j[F] の外側の Quantifier #' の対応する 2 つの index は等しい。

従って, A<τ₁, ..., τ_n>, A<σ₁, ..., σ_n> をそれぞれ #y_j[F] まで分解するとき, 対応する変数に代入される term はすべて等しい, 従って, かく分解してうる A₁(F), A₂(F) は A₁(F), A₂(F) 内に残された () や [] 内の index を除いて完全に一致する。従って cl (A₁(F)) = cl (A₂(F))。 [Proposition (+)]

B, C が A の β-formula であり, それぞれ A<τ₁, ..., τ_n>, A<σ₁, ..., σ_n> の分解形るとき, B 内に ∃y_i[F] (または ∀y_i[F]) があり, C 内に #y_j[F] があるとき, y_i = y_j # = ∃ (または # = ∀), () 内同順, であり, 更に

F = f_i (τ_{d1}, ..., τ_{dp}) とかけ σ_{d1} = τ_{d1}, ..., σ_{dp} = τ_{dp}.

(証明) ∃y_i[F] は B 内にあり, 従って A<τ₁, ..., τ_n> 内にあって, y_i は A(X₁, ..., X_n) 内の左から i 番目の [] 付変数である。y_i の外側にある #x () 変数を x_{d1} (X_{d1}), ..., x_{dp} (X_{dp}) とすれば (0)

A<X₁, ..., X_n> 内で ∃y_i は ∃y_i[f₁(X_{d1}, ..., X_{dp})] の形で入る。従って, A<τ₁, ..., τ_n> 内で ∃y_i[F] = ∃y_i[f_i(τ_{d1}, ..., τ_{dp})] (1)。

同様に #y_j[F] は A<σ₁, ..., σ_n> 内にあり,

#y_j は A<X₁, ..., X_n> 内の左から j 番目の y [] 変数従って, y_j の外側の #x () 変数を x_{h1} (X_{h1}), ..., x_{hq} (X_{hq}) とすれば... (0')

#y_j[f_j(X_{h1}, ..., X_{hq})] が A<X₁, ..., X_n> 内にあり, 従って A<σ₁, ..., σ_n> 内で #y_j[F] = #y_j[f_j(σ_{h1}, ..., σ_{hq})] 仮定より, f_i(τ_{d1}, ..., τ_{dp}) = F = f_j(σ_{h1}, ..., σ_{hq})

従って f_i = f_j, 故に i = j, y_i = y_j, p = q, 従って y_j は A 内で左から i 番目の [] 付変数, 従って # = ∃。

[Proposition (+)] A の β -formula の中の $f_d(\tau_1, \dots, \tau_p)$ の中に変数 y_j は決して現われない。(但し f_d は $\#y_d[]$ 変数に対する Skolem 関数である。)

(証明) 分解の段階数に関する帰納法により, 確かめうる。

謝辞, 筑波大の前原昭二教授, 京大数理解析研の高須達教授立教大学の島内剛一教授, 筑波大の本橋信義助教授に御教示を戴いたことを感謝します。

文 献

- [1] J. SHOENFIELD: *Mathematical Logic*, (1967) Addison-Wesley.
- [2] S. KLEENE: *Mathematical Logic*, (1967) John-Wiley.
- [3] Z. MANNA: *Mathematical Theory of Computation*, (1974) McGraw-Hill. (五十嵐滋訳プログラムの理論)
- [4] 前原昭二: 数理論理学, 昭和48年5月, 培風館。
- [5] 島内剛一: 証明のプログラミング, 数学15巻
- [6] 西村敏男: 定理の証明, 情報処理, Vol. 11, No. 11.
- [7] 大芝猛, 永田周郎, 舟橋栄: 妥当な論理式 (1階述語論理) の証明図作成の1つの方法, (1978), 数理解析研究所講究録 322.