

利水用貯水池の機能評価へのマルコフ連鎖理論の応用

長 尾 正 志

土 木 工 学 科

(1979年8月14日受理)

Application of Markov Chain to a Stochastic Reservoir Theory for Water Supply

Masashi NAGAO

Department of Civil Engineering

(Received August 14, 1979)

This study aims at the checking the reliability of existing reservoir for water supply. First of all, the mathematical modelling is explained to describe stochastic characters of inflow-series in a season of scarce of water by a discrete Markov chain.

Next, consideration is carried to reduce the probabilistic distribution of reserved water through a random walk theory and Wald's fundamental identity expanded for a Markov chain in sequential analysis.

Then, those theories are applied to actual reservoir basins. And, the availability of this approach is clarified in means of a positive or a negative binomial distribution by which the probability distribution of inflow data can usually be approximated.

Finally, it can numerically be shown that the effects of some parameters, which are classified to the distribution parameters of inflow-series and the control parameters of reservoir operation, to the probability of water-shortage or the expected water reserved in dam.

1. 従来の研究の概要

近時の人口の都市集中に伴って、地域的にも時間的にも偏重した形で、上水や工業用水などの需要が急増するとともに、農業の多角経営なども関連して、より恒常的な水供給が要望されつつある。それに対処する現段階での最も確実な技術手段に利水用貯水池がある。しかし、今後とも、ダム適地の確保や貯水池の新規建設には幾多の困難が憂慮される。そこで、既存の貯水池に対して、現実の利水機能を再検討し、水資源としての供給の可能性への的確な見通しを得ることは研究面のみでなく実用的にも急務と目されている。

1.1 従来の研究と問題点

紙数の関係でなるべく平易に要点のみの記述に止めるが、詳細は文献を参照されたい。¹⁾

a) 独立な流量系列による取り扱い

貯水池利水機能の評価に、数学的モデルの導入を最初に試みたのは Moran²⁾ といわれる。その骨子は、流量系列が定常・独立という前提で離散化した確率入力を受ける在庫問題とした解析にある。この前提の下では、貯水量に関する推移確率行列が流量分布を使って定常的に表現される。したがって、任意の初期貯水量状態と推移確率行列から、貯水量状態の変化が確率的に判り、結果として、貯水量の定常分布が、多元連立方程式の解で求まる。

b) 相関のある流量による取り扱い

独立流量の前提は、計算が比較的容易ではあるが、現実の渇水期にみられるような持続性の顕著な流況とはかなりかけ離れている。したがって、何らかの意味で流量時系列の自己相関性を導入するモデル化が必要となるが、現在のところ、このモデルには(単純)マルコフ過程、しかも主として単純マルコフ連鎖、が採用されるこ

とがほとんどである。

そこで、既述の Moran 流の手法を修正して相関を導入しようとする試みがある。その代表的な研究は Lloyd³⁾ にみられる。これは、独立の場合に、推移確率行列が定常的な流量分布だけで表記されたのに対して、直前の流量状態を推移確率行列の表示に組み入れる形で展開される。しかし、当然その結果、推移行列の次元が増し実用的な計算はきわめて煩雑になる。

c) 酔歩理論を利用する方法

上記の次元の拡大による煩雑化を回避して、しかもマルコフ従属性を勘案しようとする手法に、酔歩 (random walk) 理論の応用がある。これは、貯水量の遷移を、1次元の酔歩粒子の運動に擬して数式化し、貯水量の定常確率などの計算を容易にしたもので、Phatarfod などの研究⁴⁾ がある。

その手順は、まず貯水量過程を両端に不可入壁をもつ酔歩過程とみなし、双対関係によって吸収壁の問題に単純化する。ついで、マルコフ連鎖へ拡張した逐次解析理論での Wald の基本等式によって、貯水量の定常分布を計算していく。著者は、Phatarfod の手法を発展させて、流量の存在範囲、目標放流量、および貯水池容量を任意に選んだ場合の計算法を提示した。⁵⁾

1.2 研究の目的と概要

ここでは、利水用貯水池による渇水時の利水補給の可能性評価の理論と実河川への適用例について、できるだけ具体的に記述する。すなわち、前述の流量系列にマルコフ連鎖従属を仮定した貯水量の定常分布の酔歩理論を利用して、目標放流量が確保されない確率 (以後渇水確率と呼ぶ) という形で、貯水池の補給機能の表現を意図している。

それには、まず渇水流況時の流量時系列の数式化が基礎となるが、その際の要点は以下の2点であろう。

- a) 流量の持続性が顕著である。
- b) 流量の少ない方が出現しやすい。

具体的に説明すると、a) は流量系列の自己相関係数が大きいことである。実例を Fig. 1 に示すが、これは4カ所の多目的ダム上流域について、冬期 (1959年12月始めから1960年2月末) の j 日間総流量に対するコレログラムである。標本期間が長くなると、相関係数値は一般に小さくなるが、 $j=6$ 日でもなお0.5前後とかなり大きいことに注意すべきである。

つぎに、b) の例として、永瀬ダムの冬期流量 (1959~1975) の経験分布を Fig. 2 に示す。なお、これら、あるいは、以後の資料は建設省河川局編「多目的ダム管理年報」による。このように量の少ない方にピークを持ち

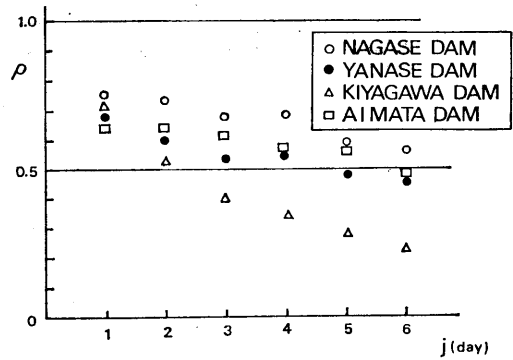


Fig. 1 Correlograms of inflow-series during a successive j -day intervals in winter.

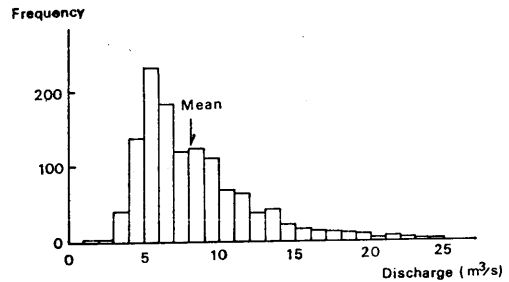


Fig. 2 Observed histogram of frequencies of daily inflow data in winter for Nagase dam basin.

量の多い方に長く尾を引いた (正の歪をもつ) 分布は、離散型分布としては、正または負の二項分布で表現できるようで、以後こうした面からの数式化を行なっている。さらに、以後の内容を要約すると、まず、2. で流量系列にマルコフ連鎖を考慮した貯水量分布の理論を述べる。ついで 3. で実際の貯水池への適用を計り、流量分布の母数、自己相関係数、および貯水池操作上のパラメータと貯水量の定常確率 (とくに渇水確率) との関連性について検討している。

2. 流量系列にマルコフ連鎖従属性を考慮した貯水量分布の理論

2.1 貯水量過程と酔歩理論

貯水量を適当な期間ごとの時点で考え、これを Z_n ($n=0, 1, 2, \dots$) と記す。この単位期間長は、流量系列の特性と、貯水池操作の有効性から決定されるべきであるが、ここでは、たとえば j 日間としておく。つぎに、貯水池容量を K 、期間 $(n-1, n)$ の総流量、目標放流量をそれぞれ X_n, M とする。目標放流量をなるべく満足させるように放流取水すれば、単位期間後の貯水量変化はつ

ぎのようになる。

$$Z_n = \begin{cases} 0 & (Z_{n-1} + X_n - M \leq 0) \\ Z_{n-1} + X_n - M & (0 < Z_{n-1} + X_n - M < K) \\ K & (K \leq Z_{n-1} + X_n - M) \end{cases} \quad (2.1)$$

いま貯水量純増分を $Y_n = X_n - M$ とすると、貯水量が満水ならば、その時点以後で、 $\{Y_n\}$ の符号が初めて負になるまで満水を続ける。また、貯水量が空水ならば、 $\{Y_n\}$ が正号に転ずるまで空水を続ける。もちろん、満水や空水に達する以前の貯水量過程は、 $Z_{n+1} = Z_n + Y_n$ である。

この貯水量過程 $\{Z_n\}$ のような統計過程は、0 と K に不可入壁をもつ飛躍 Y_n の酔歩といわれる。

2.2 流量時系列モデル

以下、流量時系列の周辺分布には正または負の二項分布を用いるが、さらに汎用性のある流量分布族の記述から出発する。なお、前提としては流量系列は単純マルコフ連鎖をなし、かつ定常な周辺分布に従うとする。まず、あい継続した流量 X_i, X_{i+1} の確率母関数に次式を仮定する。

$$G(\theta_1, \theta_2) = \{A + B(\theta_1 + \theta_2) + C\theta_1\theta_2\}^r \quad (2.2)$$

ただし、 A, B, C と r は定数で、 $A + 2B + C = 1$ である。

上式は、Edwards らの提案式で、定数にある特殊な値を代入すれば、 X_i の定常分布は、標準離散分布 (正または負の二項分布、幾何分布、ポアソン分布) の1つになる。(2.2) 式より条件付結合分布 $p_{ij} = P_i[X_{i+1} = j | X_i = i]$ 、および定常分布 $P_i = P_i[X_i = i]$ が求められる。さらに、平均、分散、歪係数、相関係数はそれぞれ次式となる。

$$\left. \begin{aligned} E(X) &= r(B+C), & V(X) &= r(A+B)(B+C) \\ C_s(X) &= \{1 - 2(B+C)\} / \sqrt{r(A+B)(B+C)} \\ \text{Corr}(X_i, X_{i+1}) &\equiv \\ \rho &= (AC - B^2) / \{(A+B)(B+C)\} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

これより、相関係数の流量分布母数との関連や、満水時の特徴である正の歪を与えるには $B+C < 1/2$ とすればよいことなどが分る。具体的に、正あるいは負の二項分布の p_{ij}, P_i や各種母数を Table 1 に示す。なお、幾何分布は負の二項分布で $k=1$ とおけばよい。

この二変数分布は、 θ_1 と θ_2 について対称であるから、 (X_0, X_1, \dots, X_n) の結合分布と $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$ のそれとが同一となり、後述の双対関係が利用できる。

2.3 双対関係

貯水量過程を両端に不可入壁をもつ酔歩粒子の運動として数式化しても、まだ複雑であるが、さらに、これを両端が吸収壁の問題に置き直すと、かなり単純化される。吸収壁とは、そこに到達した粒子は以後もその位置に留まり続けるものである。

これら2種の酔歩過程には、以下の関連性がある。まず、 $Z=0, K$ で不可入壁を仮定し、上壁 ($Z=K$) から出発した n 時点後の粒子の位置の累積分布を $F_n(x)$ と記す。同様に、 $Z=0, K$ に吸収壁を仮定し、初期位置 $Z_0 = x$ から出た粒子が n 時点以前に下壁に吸収される確率を $Q_n(x)$ と記すと、両者の間にはつぎの双対関係がある。

$$Q_n(x) = F_n(K-x), \quad (0 < x < K) \quad (2.4)$$

こうして、不可入壁で数式化された貯水量過程での定常的な貯水量の状態確率が、吸収壁に対するものから求められる。

2.4 Wald の拡張等式

独立の酔歩粒子の吸収壁に到達する定常確率は Wald の等式 (Wald's fundamental identity) から求められるが、この等式は、酔歩粒子がマルコフ連鎖をなす場合にも拡張できる。以後、これを拡張等式と呼び、その要点

ITEM	TYPE	BINOMIAL ($i, j=0, 1, 2, \dots, r$)	NEGATIVE BINOMIAL ($i, j=0, 1, 2, \dots$)
$P_{ij} \equiv$ $P_r[X_{t+1}=j X_t=i]$		$\sum_{s=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{s} \binom{-i+r}{j-s} \{a(1-\rho) + \rho\}^s \times \{1-a(1-\rho)\}^{s+r-i} a^{j-s} (1-a)^{i-s} (1-\rho)^{i+j-2s}$	$\sum_{s=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{s} \binom{-i-k}{j-s} \times \frac{(-1)^j \{1+a(1-\rho)\}^{s-k-i-j} \{a(1-\rho)-\rho\}^s}{a^{s-j} (1+a)^{s-1} (1-\rho)^{2s-i-j}}$
$P_i \equiv$ $P_r[X_t=i]$		$\binom{r}{i} (1-a)^{r-i} a^i$	$\binom{i+k-1}{i} a^i (1+a)^{-k-i}$
PARAMETERS	$E(X)$	ra	ka
	$V(X)$	$ra(1-a)$	$ka(1+a)$
	C_s	$(1-2a)/\{ra(1-a)\}^{1/2}$	$(1+2a)/\{ka(1+a)\}^{1/2}$
	$\text{Corr}(X_t, X_{t+1})$	ρ	ρ

Table 1 Conditional joint distribution, marginal distribution and some parameters for a positive or a negative binomial distribution.

を説明しておく。

まず $\{X_i\}$ ($i=0, 1, 2, \dots$) を正則な非負マルコフ連鎖、また $Y_i=h(X_i)$ を実関数とするが、いまの場合 $Y_i=X_i-M$ である。ついで、 n を开区間 (b, c) の内に和 $S_n=Y_1+Y_2+\dots+Y_n$ がない最小の正整数とする。

ここで、 S_n の積率母関数 $M_n(t)$ が大きな n に対して、 $M_n(t) \sim D(t) \cdot \{\lambda(t)\}^n$ (\sim : 漸進的近似) と書けたとする。ただし、 $\lambda(t)$ は、マルコフ連鎖の特性を導入した $\{X_i\}$ の推移確率行列の最大固有値である。このとき成立する

$$E[\exp(tS_n) \cdot \{\lambda(t)\}^{-n} \cdot d(t|X_n)] = D(t) \quad (2.5)$$

が拡張等式と呼ぶものである。なお、 d, D は以下の関係を満す。

$$E[\exp(tS_n|X_0)] \sim d(t|X_0) \cdot \{\lambda(t)\}^n, \\ D(t) = E[d(t|X_0)]$$

ここで、 $\lambda(t)=1$ を満す実の非零解 $t=t_0$ が唯一存在することが要求されるが、いまの場合その成立が示される。

たとえば、二項分布では、最大固有値は $\lambda(t) = \{\mu_1(t)\}^r e^{-Mt}$ の形となる。なお、 M は、2.1 の目標放流量を単位操作期間の末に設定したもので、このとき、 n 期間の総貯水量増分

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n X_i - nM \equiv T_n - nM$$

の積率母関数 (*m.g.f.*) が、漸進的に $C(t) \cdot \{\mu_1(t)\}^{rn} \exp(-Mnt)$ の形式になることが知られている。

解析的にいえば、 $\mu_1(t)$ は、 T_n の *m.g.f.* から導かれ

る斉次線形 2 次方程式の大きい方の根である。これと、もう一つの根 $\mu_2(t)$ などを、正、負の二項分布について、Table 2 に一括して示す。ただし、 μ_1 は正の根号に対応する。

2.5 貯水量の定常分布

初期貯水量 $u=Z_0$ から出発して満水することなく空になる定常確率 P_u を得るために、 $Z=0$ と $K-M+1$ に吸収壁をもつ酔歩問題として考える。Wald の拡張等式で、 $t=t_0$ とおき、 $\lambda(t_0)=1$ に注意すれば、 P_u はつぎのように表現される。

$$P_u = \frac{E_2[d(t_0|X_n) \cdot \exp(t_0 S_n)] - D(t_0)}{E_2[d(t_0|X_n) \cdot \exp(t_0 S_n)] - E_1[d(t_0|X_n) \cdot \exp(t_0 S_n)]} \quad (2.6)$$

ここで、 t_0 は $\lambda(t_0)=1$ から得られるし、また、 E_1, E_2 はそれぞれ $Z_n=0, K-M+1$ において、酔歩粒子が壁に吸収されるという条件付期待値を示す。この期待値演算は以下の方針に従って行なう。

a) E_1 (空水になる条件付期待値)

E_1 は、 $S_n \leq -u$ (貯水量が空) になるという条件下の期待値である。粒子が下壁で吸収される可能性があるのは、 $X_n \leq M-1$ の場合で、こうした X_n と S_{n-1} の組合せを、流量分布 $P_i = P_r[X_n=i]$ が既知として、累計すればよい。

b) E_2 (満水になる条件付期待値)

E_2 は $S_n \geq K-u$ (貯水量が満水) になるという条件付期待値である。一般には、これには上壁にちょうど達す

ITEM	TYPE	BINOMIAL	NEGATIVE BINOMIAL
$\mu_1(t)$		$\frac{1}{2} \left[1 - a(1-\rho) + \{a(1-\rho) + \rho\} e^t \right]$	$\frac{1}{2} \left[1 + a(1-\rho) - \{a(1-\rho) - \rho\} e^t \right]$
$\mu_2(t)$		$\pm \sqrt{[1 - a(1-\rho) + \{a(1-\rho) + \rho\} e^t]^2 - 4\rho e^t}$	$\pm \sqrt{[1 - a(1-\rho) - \{a(1-\rho) - \rho\} e^t]^2 - 4\rho e^t}$
$\lambda(t)$		$\{\mu_1(t)\}^r \cdot e^{-Mt}$	$\{\mu_1(t)\}^{-k} \cdot e^{-Mt}$
$d(t X_n)$		$\left[\frac{\mu_1(1-\mu_2)}{\mu_1-\mu_2} \right]^r \left[\frac{1-a(1-\rho)-\mu_1}{-a(1-\rho)e^t} \right]^{X_n}$	$\left[\frac{\mu_1(1-\mu_2)}{\mu_1-\mu_2} \right]^{-k} \left[\frac{1-a(1-\rho)-\mu_1}{a(1-\rho)e^t} \right]^{X_n}$
$D(t)$		$\left[\frac{\mu_1(1-\mu_2)(e^t-\mu_2)}{(1-\rho)(\mu_1-\mu_2)e^t} \right]^r$	$\left[\frac{\mu_1(1-\mu_2)(e^t-\mu_2)}{(1-\rho)(\mu_1-\mu_2)e^t} \right]^{-k}$
$x_0 = e^{t_0}$		$a(1-\rho)(x^{r-1} + \dots + x + 1) + (\rho x^{r-M} - 1)(x^{M-1} + \dots + x + 1) = 0$ Obtain positive real root X and put $x_0 = X^r$ ($r > M$)	$a(1-\rho)(x^{k+M-1} + \dots + x + 1) + (\rho x^{k+M} - 1)(x^{M-1} + \dots + x + 1) = 0$ Obtain positive real root X and put $x_0 = X^k$ (k : positive integer)
$E_1 [d(t_0 X_n) x_0^{S_n}]$		$\left\{ \sum_{i=0}^{\min(r, M-1)} P_i d(t_0 i) \sum_{j=0}^{M-i-1} x_0^{-j} \right\} x_0^{-u} / \sum_{\ell=0}^{\min(r, M-1)} P_\ell$	$\left\{ \sum_{i=0}^{M-1} P_i d(t_0 i) \sum_{j=0}^{M-i-1} x_0^{-j} \right\} x_0^{-u} / \sum_{\ell=0}^{M-1} P_\ell$
$E_2 [d(t_0 X_n) x_0^{S_n}]$		$r < M+1: 0$ $r \geq M+1: \left\{ \sum_{i=M+1}^r P_i d(t_0 i) \right\} x_0^{-u} / \sum_{\ell=M+1}^r P_\ell$	$\left\{ D(t_0) - \sum_{i=0}^M P_i d(t_0 i) \right\} x_0^{-u} / \left\{ 1 - \sum_{i=0}^M P_i \right\}$

Table 2 $\lambda(t), \mu_1(t), \mu_2(t), d(t|X_n)$ and $D(t)$ for a positive or a negative binomial distribution.

る場合と越す場合があるが、水不足が憂慮される渇水期では、後者の確率は無視しうると考えて、次式で近似する。

$$E_2[d(t_0|X_n) \cdot \exp(t_0 S_n)] \approx E_2[d(t_0|X_n)] \exp((K-u)t_0)$$

この近似の精度は、 K が Y_i に比して大きい (すなわち単位期間の貯水量増分 $X_i - M$ がそのたどるべき総量 $K - u$ に比べて相対的に小さい) ほど良くなるはずである。これら E_1 , E_2 を一括して Table 2 に示す。

c) t_0 あるいは x_0 の算定

原理的には、 $\lambda(t_0) = 1$ を満たす非零解であるが、これを多項式の解として Table 2 に示す。これより正実根 X を求め、たとえば正の二項分布では、 $x_0 = X^r$ から $t_0 = \log x_0$ で t_0 が得られる。

d) 貯水量の定常確率と渇水確率

以上で求められた初期貯水量 u から空水に至る確率 P_u を使えば、貯水量の定常分布 $V_i = P_r[Z=i]$ が、双対関係から、つぎのように表記される。

$$\left. \begin{aligned} V_i &= P_{K-M-i} - P_{K-M-i+1}, \quad (i=1, 2, \dots, K-M-1) \\ V_0 &= P_{K-M}, \quad V_{K-M} = 1 - P_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

このうち渇水問題で重要なのは V_0 で、これは目標放流量が充足できない確率にはほぼ相当し、渇水確率と略称しておく。

こうした計算に際して、とくに注意すべきは、 $M = E(X)$ 、すなわち目標放流量と流量平均が等しい場合である。したがって、この場合貯水量純増分 $\{Y_i\}$ の長時間平均が零となり、貯水量過程は1種の平衡状態になるから、これが貯水量過程の特性で重要な分岐点を与えることが類推される。

このとき、若干の演算から、 $x_0 = D(t_0) = E_1[d(t_0|X_n)] / x_0^{-u} = E_2[d(t_0|X_n)] / x_0^{K-u} = 1$ を得る。これらを式 (2.6) に代入すると、 P_u は 0/0 の不定形となり、このままでは値は求められない。しかし、その際でも、不定形の極限に対する L'Hopital の定理によって、たとえば、正の二項分布については

$$P_u = \lim_{a \rightarrow M/r} \frac{\text{分子の } a \text{ による微分}}{\text{分母の } a \text{ による微分}}$$

というようにして、解を得ることができる。

3. 実流域への適用計算

さて、上述の理論を、実際の貯水池へ適用するための種々の工夫とその具体的方法、および流量時系列の各種母数や貯水池パラメータの貯水量の定常確率 (とくに渇水確率) への影響の数値的検討について述べる。

3.1 流量時系列の離散モデル化

(1) 常時確保流量と単位期間

a) 常時確保流量

流量資料を概観すると、ある一定流量以下の部分は常時維持される、いわゆる基底流量分の存在する、ことが伺える。そこで、以後これを非統計的成分として分離して扱うことにした。具体的には、既往資料の最渇水流量を、 $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ 単位で表現したものを常時確保流量とした。

b) 単位期間

流量分布の母数推定に必要な分散や自己相関係数の値

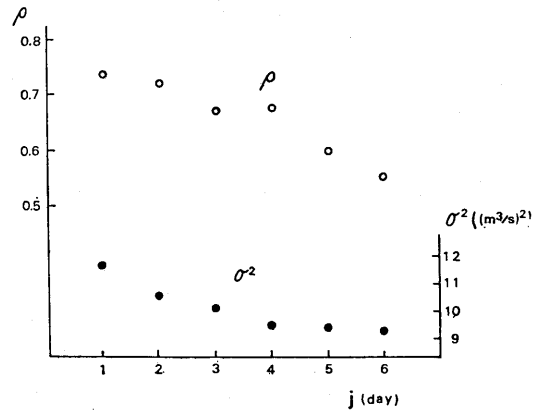


Fig. 3 Auto-correlation coefficient and variance of mean discharge in successive j-day intervals for Nagase dam basin.

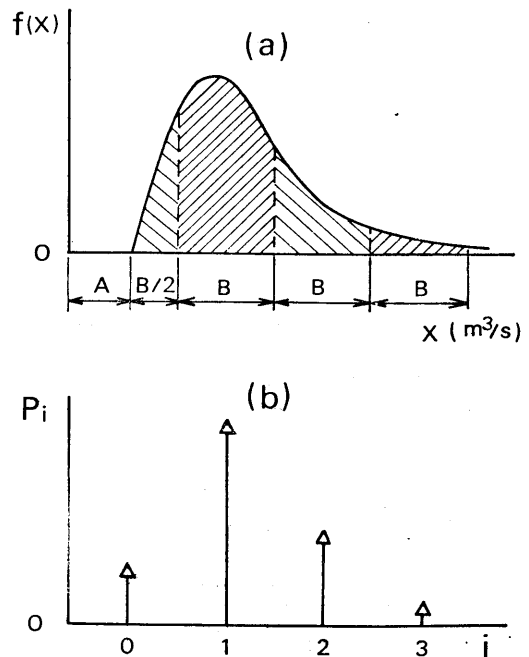


Fig. 4 Transformation of an observed probability density distribution to a discrete probability distribution.

は、当然標本系列を表現する単位期間長によって変化する。Fig. 3 は重複しないで採った j 日間の平均流量に対する永瀬ダム流域の分散 σ^2 と自己相関係数 ρ である。このように、この程度の期間では、単位期間を長くするほど、両者の値は小さくなる傾向がある。一方、貯水池の利水機能から判断すると、小容量貯水池では、下流への補給や溢水抑制には、比較的短期間ごとに貯水量を検討する必要がある。他方、大容量では調整能力が高いから単位期間を比較的長くとることができよう。

ここでは、一応の目安として、冬期の最大流量 (m^3/s 単位) を貯水池有効容量 (m^3) で割って、日単位で表現したものを流用することにした。

(2) 経験連続分布の理論離散分布への適合

連続的に変化すると目される流量の確率密度分布を、常時確保流量 A と、単位化流量 B とで、Fig. 4 のように離散化する。

すなわち、離散化後の代表流量値 i は、それを中央値としてそれより $\pm B/2$ の範囲にある量であることを示すが、とくに、 $i=0$ は A 以上で $B/2$ 未満の領域の流量を代表している。

つぎに、離散化後の平均 m_d 、分散 σ_d^2 ともとの平均 m 、分散 σ^2 、の関係はつぎのとおりで、自己相関係数は変わらない。

$$m_d = (m - A) / B, \sigma_d^2 = \sigma^2 / B \tag{3-1}$$

Table 3 Objective river basins for calculation.

NAME OF DAM	RIVER	BASIN AREA	EFFECTIVE RESERVOIR CAPACITY
NAGASE DAME	MONONOBE RIVER	295.2km ²	45.3×10 ⁶ m ³
YANASE DAM	YOSHINO RIVER	170.7	29.6
KIYAGAWA DAM	KIYAGAWA RIVER	84.1	21.1
AIMATA DAM	TONE RIVER	110.8	20.0

Table 4 (a) Characters as a continuous distributon of inflow-series to dam.
(b) Characters as a discrete distribution of inflow-series to dam.

(a)

NAME OF DAM	UNIT INTERVAL J	BASE FLOW A	MEAN m	ST. DEV. σ	CORR. COEFF. ρ
NAGASE DAM	2days	3.0m ³ /s	8.08m ³ /s	3.28m ³ /s	0.725
YANASE DAM	3	1.0	3.10	1.97	0.546
KIYAGAWA DAM	4	0.0	2.32	1.78	0.349
AIMATA DAM	6	0.5	2.10	0.93	0.496

(b)

NAME OF DAM	AVAILABLE UNIT FLOW B (m ³ /s)	DISCRETE MEAN m_d	DISCRETE ST. DEV. σ_d	DIST. TYPE	PARAMETERS		DISCRETE RESERVOIR CAPACITY K
					k or r	a	
NAGASE DAM	3.0	1.69	1.10	p	6	0.283	87
	4.0	1.27	0.82	p	3	0.423	66
	5.0	1.02	0.66	p	2	0.508	52
YANASE DAM	1.0	2.10	1.97	n	2	0.508	114
	2.0	1.05	0.98	p	14	0.075	57
	3.0	0.70	0.66	p	2	0.350	38
KIYAGAWA DAM	1.0	2.23	1.78	n	6	0.362	61
	2.0	1.16	0.89	p	4	0.290	31
AIMATA DAM	1.0	1.60	0.91	p	3	0.532	39

NOTE p:positive binomial, n:negative binomial distribution

この m_d, σ_d^2 を使って、適合すべき分布型の母数を決定する。たとえば、正の二項分布では、Table 1 の平均値、分散から、 r, a を計算し、 r の小数点以下の四捨五入による整数を \hat{r} 、さらに $\hat{a} = m_d / \hat{r}$ とする。また、負の二項分布では、まず k, a を計算し、 k を整数化した \hat{k} 、および、 $\hat{a} = m_d / \hat{k}$ を解とする。

(3) 単位貯水量と各種貯水関連量の離散化

まず、単位貯水量は、流量単位 $B(\text{m}^3/\text{sec})$ に単位期間長 $j \text{ day} = 86,400 j \text{ sec}$ を乗じた $86,400 B j (\text{m}^3)$ で表わす。したがって、これを基準として、目標放流量 M 、貯水量 Z 、および、有効貯水池容量 K を、実際に最も近い整数として表現する。

3.2 適用計算例

計算対象を Table 3 の 4 ダム流域とする。Table 4 (a) に連続分布としての時系列特性を、(b) に離散化特性量を示す。ただし、記号は以下のである。

j : 単位期間長 (day)

A : 常時確保流量 (m^3/s)

B : 選びうる単位流量 (m^3/s)

m, σ^2 : 流量系列の平均、標準偏差 (m^3/s)

ρ : 単位期間 ($j \text{ day}$) ずれの自己相関係数

m_d, σ_d^2 : 離散化流量の平均、標準偏差

k, r, a : 正または負の二項分布としての母数

K : 離散化貯水池容量

a) 離散分布としての理論分布の適合

設定された単位期間、常時確保流量、および流量単位について、離散的な経験分布と、それに対する理論分布のあてはめの例を Fig. 5 に示す。適合は、部分的に若干問題のあるものも認められるが、全般に良好である。

b) 貯水量分布に対する自己相関の考慮の有無

Fig. 6 で、永瀬ダムについて、自己相関を無視した場合と考慮した場合での貯水量の定常分布の相違を (a)、(b) に示す。

もちろん、平均流量に比して目標放流量が小さければ、溢水確率が減じ、逆に、大きければ、渇水確率が増す。さて、相関を考慮しないと、渇水確率、溢水確率、および、中間の貯水量状態の確率が、図のように連続して変化するが、相関を考慮すると、中間の状態の確率には一様化傾向がみられるとともに、両極端の渇水、溢水確率が、それとは、不連続に大きくなる。また、相関を考慮した方が、渇水、溢水確率の値そのものは小さくなるが、その理由は、中間貯水量状態の総確率が、その自己相関性から大きいためと解釈される。

c) 自己相関係数の影響

Fig. 7 は、他の条件は同一として、自己相関係数の渇水確率および貯水量期待値への影響を永瀬ダムで試算したものである。

貯水量期待値 $E(V) = \sum_{i=0}^K i \cdot V_i$ は、相関の増加とともに単調に増すが、渇水確率は相関係数が、0.8 付近で

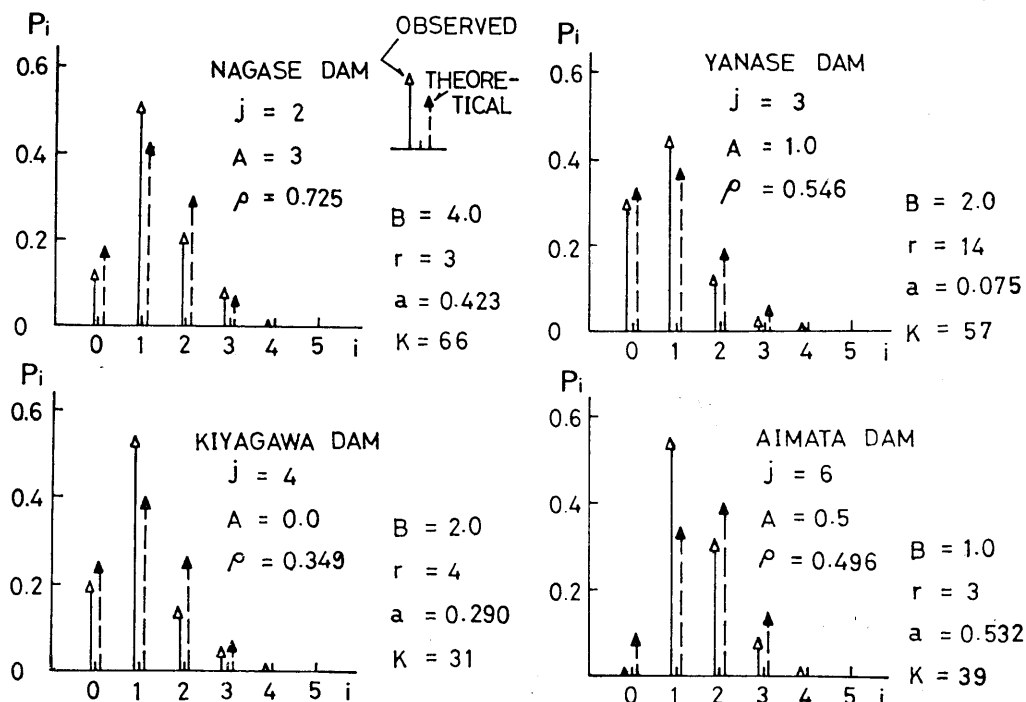


Fig. 5 Discrete fitting observed distribution to theoretical distribution.

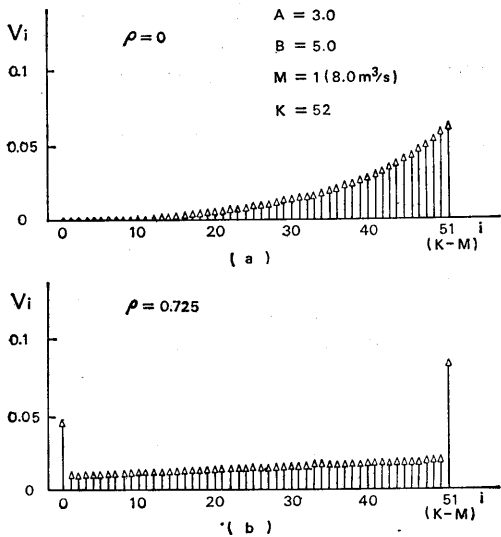


Fig. 6 Comparison of taking into account or not auto-correlation for steady distribution of reserved water.

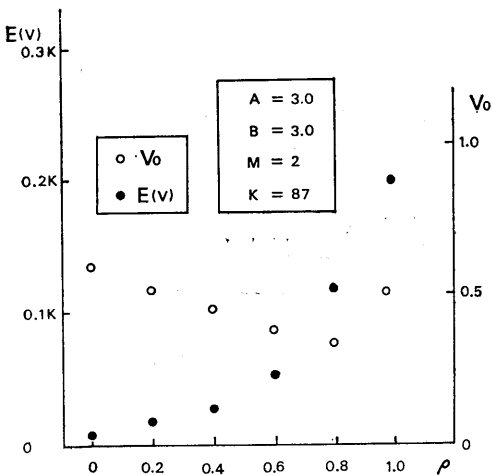


Fig. 7 Relation of auto-correlation coefficient ρ to probability of water-shortage V_0 and expected reserved water $E(V)$.

一度極小になり、それ以後増加し、完全従属に近づくにつれて1に近づく。恐らく、他の場合でも、相関係数が0.8を越すことはまずないであろうから、普通には相関が増すと渇水確率は小さくなる。すなわち利水上有利になる、と考えてよい。

d) 目標放流量の影響

Fig. 8 に、永瀬ダムでの目標放流量と渇水確率、期待貯水量の関係を示す。ただし、期待貯水量 $E(V)$ は貯水池容量 K を基準として表わす。

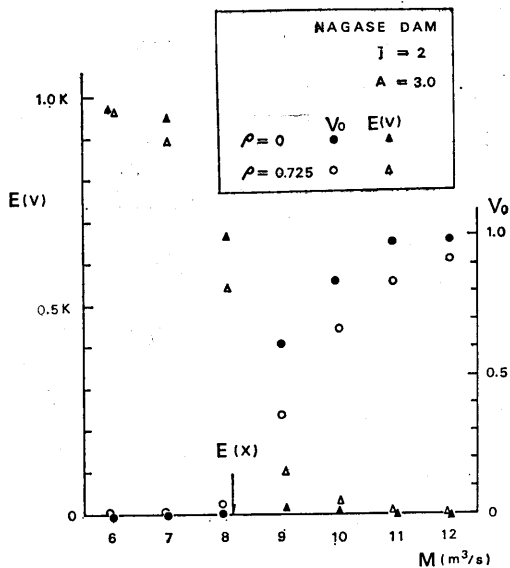


Fig. 8 Relation of demanded release M to probability of water-shortage V_0 and expected reserved water $E(V)$.

目標放流量を増すと渇水確率は増し、期待貯水量は減少するが、いずれの場合でも、目標放流量が流量平均 $E(X)$ に合致する前後で急激な変化がみられる。この点が貯水量過程の重要な分岐点を与えることを理論的に示したが、数値的にも示されたといえよう。

また、相関の有無と渇水確率、期待貯水量と目標放流量との関連をみると、独立とみた場合には、平均流量の前後での渇水確率、期待貯水量の変化が、相関を考慮した場合より顕著である。すなわち、独立とみると、目標放流量が平均流量より大きい(小さい)場合にはより渇水(溢水)しやすい。

したがって、平均流量付近の流量に相関を考慮すれば、目標放流量の変化に対して、独立仮定の際よりも安定した放流操作が期待できようである。

最後に、資料整理、計算に前本学大学院生、池田吉隆君、学部生、安井雅彦君の助力、および文部省科研費一般研究(c)の補助を受けたことを記し謝意を表しておく。

参 考 文 献

- 1) 長尾正志: 利水用貯水池の取水機能の信頼性評価に関するマルコフ連鎖理論の応用, 第21回土木学会水理講演会論文集 1977, pp. 133-141
- 2) P.A.P. Moran: A probability theory of dams and storage systems, Aust. J. Appl. Sci., Vol. 5, 1954,

- pp. 116~124.
- 3) E.H. Lloyd: A probability theory of reservoirs with serially correlated inputs, J. Hydrol., Vol. 1, 1967, pp. 99-128
 - 4) R.M. Phatarfod & K.V. Mardia: Some results for dams with Markovian inputs, J. Appl. Prob., Vol. 10, 1973, pp. 166~180
 - 5) 長尾正志・池田吉隆: 流量相関を考慮した利水用貯水池の機能評価に関する確率過程論の応用, 第23回土木学会水理講演会論文集, 1979, pp. 247-255
 - 6) C.B. Edwards & J. Gurland: A class of distributions applicable to accidents, J. Amer. Stat. Ass., Vol. 56, 1961, pp. 503~517