予ひずみを受けた材料の逆負荷の応力ひずみ曲線

川嶋紘一郎
機　械　工　学　科
(1978年9月5日受理)

Plastic Stress-Strain Curve in the Reverse Loading Process

Koichiro KAWASHIMA
Department of Mechanical Engineering
(Received September 5, 1978)

An analysis of the results of tension-compression and torsion-reverse torsion tests on aluminum alloy 5056 in a previous paper has shown that the reverse loading stress-strain curve has the following characteristics: (a) When the plastic strain in the reverse loading exceeds a certain value (about 1%), the relation between the equivalent stress and length of plastic strain path is expressed as a parallel curve to the extension of the preloading curve. The amount of stress drop (stationary softening) is considered to be independent of prestrain. (b) If the stationary softening is separted from the total softening in the transient range in the reverse loading, dimensionless stress-strain curve in this range is approximately independent of kinds and amount of prestrain.

In consideration of the above characteristics, an equation for the reverse loading stress-strain curve which is related to the preloading curve was derived in a form in which the effect of prestrain is expressed concisely.

The hardening curve derived from the equation, which is used with the plastic deformation theory, agreed very well with the experimental results.

The derived equation was compared with other equations proposed fo far.

1. 緒　言

従来から，塑性状態で繰返し負荷を受ける材料の強度を評価するため，低サイクル疲れの実験が多数行われている。その実験の主な目的は，与えたひずみ又は応力の振幅と破壊までの繰返し数の関係及びそれに及ぼす種々の因子の影響を知ることであって，繰返しに伴う各半サイクルの応力-ひずみ曲線の変化を検討した報告は比較的少い。[1),2),3)]

一般に，機械・構造要素内に生ずる塑性変形は一様でなく，また各要素の応力-ひずみ曲線は繰返し数とともに変化するので，物体内部の応力分布は負荷の繰返しに伴い次第に変化する。それゆえ，単軸引張・圧縮，薄肉円管のねじり等の一様応力状態の下で行った低サイクル疲れ実験の結果だけに基づいて，上記の変形あるいは強度を評価することはできない。この評価のためには，材料が受けた変形履歴を合理的に考慮できる応力-ひずみ関係を用いて，繰返し負荷の，各半サイクルに対する変形を順次解析する必要がある。

塑性状態で繰返し負荷を受ける場合の応力-ひずみ関係として，一般化 Masing モデル[4),5)]， Valanis の式[6)]，Mróz のモデル[7)]，Backhaus の式[8)]，低サイクル疲れ実験結果に基づく表示式[9)] 等が提案されている。しかし，これらの関係は，繰返しの初期において著しい応力-ひずみ曲線の変化ならびにひずみ履歴依存性の取り扱い方，および変形解析に使用する際の簡潔さ等の点において，まだ問題を残していると考えられる。

本報告では，繰返し負荷の最初の半サイクル，すなわち，予負荷とその後の逆方向負荷に対して，予ひずみ依存性を比較的簡単な形で考慮できる，予負荷の応力-ひずみ曲線に関連させた，逆負荷の応力-ひずみ曲線の表示式を提案し，実験結果との比較を示す。さらに上記の

式とこれまでに提案された二，三の関係式との比較，ならびに繰返し負荷に対してそれを一般化する際の問題点について検討する。

2. 予負荷と逆方向負荷の実験結果

先に報告した，焼きなましたアルミニウム合金5056の薄肉円管を用いた，引張後圧縮及びねじり後逆方向ねじりの実験結果[10]を Fig.1 に示す。図の縦軸は Mises 形の相当応力を，横軸は相当塑性ひずみ孤長を表わし，四

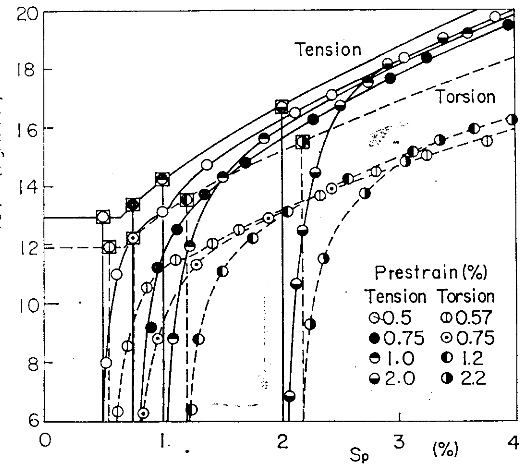

Fig. 1 Relation between equivalent stress $|\sigma|$ and length of plastic strain path S_p for tension-compression and torsion-reverse torsion tests.

角で囲んだ点は除荷開始点を示す。Fig.1 にて，同一種類の予ひずみに対する逆方向負荷の各応力-ひずみ曲線は，除荷開始点より測ったひずみ孤長（以下 ΔS_p と呼ぶ）が約1％を越えれば，予負荷曲線を延長したものと平行になり，また前者と後者の応力差は，わずかなばらつきを無視すれば，予ひずみの大きさに無関係であり，ほぼ一定とみなしうる。同様な傾向は，銅[11),12)]，黄銅[12)]，純アルミニウム[12)]についても見られる。

次に ΔS_p が1％以下の遷移域における，逆負荷曲線に及ぼすひずみの影響について検討する。前述の結果から，負荷の逆転によって材料は一定応力だけ軟化する（定常軟化）と考えられるので，遷移域における全軟化量からこの量を分離して扱うこととする。このため，Fig. 2 に示すように，逆負荷曲線が予負荷曲線の延長と平行になった点で後者に平行な曲線（Fig. 2 の破線）を除荷開始点まで描き，各 ΔS_p の値につき，破線上の応力 $|\tilde{\sigma}|$ と逆負荷の応力 $|\sigma'|$ の比を Fig. 1 より求めた。Fig. 3 に示すこの結果から，無次元化した遷移域の応力-ひずみ曲線は，ΔS_p の増大とともに $|\sigma'|/|\tilde{\sigma}|=1$ 急速に近ずくこと，予ひずみが降伏段にて与えられた場合を除けば，

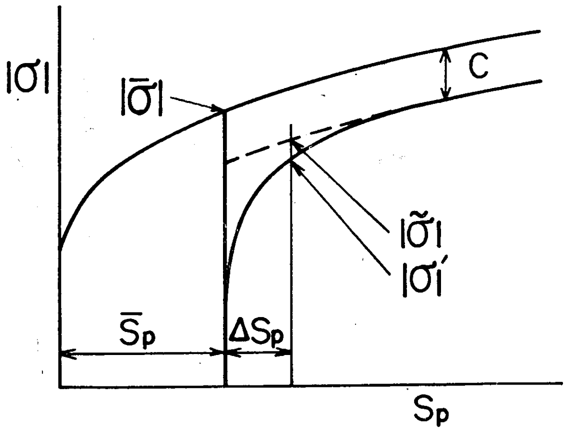

Fig. 2 Schematic stress-strain diagram for preloading and reverse loading.

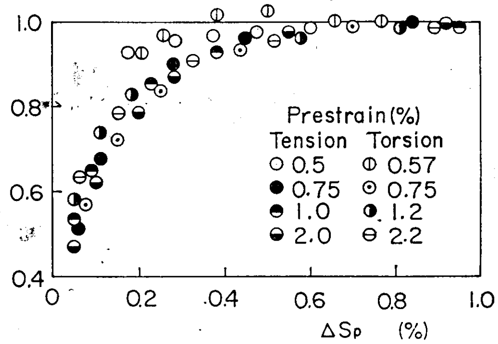

Fig. 3 Dimensionless stress-strain curves in transient range.

予ひずみの種類と大きさにほとんど依存しないことがわかる。前述の銅，黄銅，純アルミニウムについても，Fig. 3のように整理した曲線は，予ひずみの大きさにほとんど依存しないことが確かめられる。

Fig. 1 から明らかなように，ねじり予ひずみの場合の定常軟化量は引張予ひずみの場合より3倍程大きい。除荷開始点の応力（Fig. 2 の $|\bar{\sigma}|$）で無次元化した逆負荷の応力 $|\sigma'|/|\bar{\sigma}|$ と ΔS_p の関係[10)]では，引張予ひずみに対する曲線がねじり予ひずみに対するものよりかなり高く現われたが，Fig. 3 において両者の間にほとんど差異がないので，これは予ひずみの種類による定常軟化の差によるものであることがわかる。また，従来から，バウシンガ効果係数[13)]（適当に定めた ΔS_p の値における $|\sigma'|/|\bar{\sigma}|$ の値）は，多くの材料について引張予ひずみの場合よりねじり予ひずみの場合に小さく現われる[14)]ことが報告されているが，上述の事実から判断すると，これもまた予ひずみの種類による定常軟化の大きさの差異に起因するものと考えられる。

なお，予ひずみの値が極めて小さい場合，Fig. 3 の曲

線の形状は予ひずみの値に依存して変化すると予想されるが[3),15)]，以下においてはこの変化を無視できるひずみの範囲についての取り扱いに限ることとする。

3.　逆負荷の応力-ひずみ曲線の表示式

Fig. 1 と 3 に示した実験結果の傾向を考慮して，予負荷曲線と関連させた逆負荷の応力-ひずみ曲線の表示を導く。

最初に，予負荷の相当応力 $|\sigma|$ と相当塑性ひずみ弧長 S_p の関係を，大きな S_p の値についても精度良く表わすことのできるように，次の形で表わす。

$$|\sigma|=\sigma_o(1+\alpha S_p)^n \tag{1}$$

ここに，σ_o, α, n は材料定数である。

逆負荷過程におけるひずみ ΔS_p が十分大きくなると，逆負荷の応力-ひずみ曲線が予負荷の曲線に平行になると考え，次式で表わす。

$$|\bar{\sigma}|=\sigma_o\{1+\alpha(\bar{S}_p+\Delta S_p)\}^n-C \tag{2}$$

ここに $|\bar{\sigma}|$ は Fig. 2 の破線に対応する逆負荷の相当応力，$\bar{S}_p$ は相当塑性予ひずみ，C* は定常軟化量を表わす。

次に Fig. 3 に示す遷移内の曲線を次式で近似する。

$$\frac{|\sigma'|}{|\bar{\sigma}|}=1-e^{-\beta\Delta S_p} \tag{3}$$

これを式(2)に用いて，逆負荷の相当応力を次の形に表わす。

$$|\sigma'|=[\sigma_o\{1+\alpha(\bar{S}_p+\Delta S_p)\}^n-C][1-e^{-\beta\Delta S_p}] \tag{4}$$

適当な β の値を用いれば，ΔS_p が大きくなったとき，後の角括弧内を十分 1 に近ずけることができる。

上述の式(1)及び(4)は相当応力と相当塑性ひずみ弧長の関係として表わされているが，繰返し負荷を受ける物体の変形解析に用いるためには，それを相当応力と相当ひずみの関係として表わし，全ひずみ理論と組み合せて用いるのが便利である**。

そこで，ひずみが微小であるとき線形弾性関係が成り立つように，相当ひずみ ε を用いて，式(1)及び(4)を書き換える。

予負荷曲線を次式で表わすものとする。

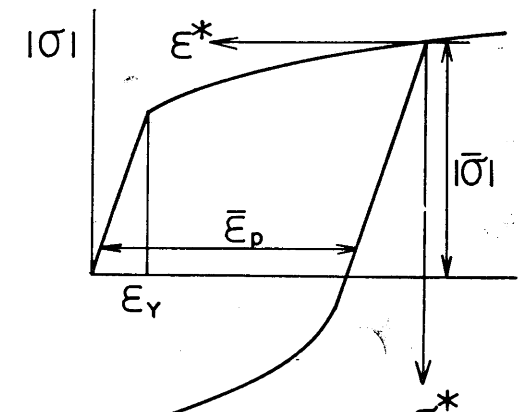

Fig. 4 Definition of reverse loading coordinate system.

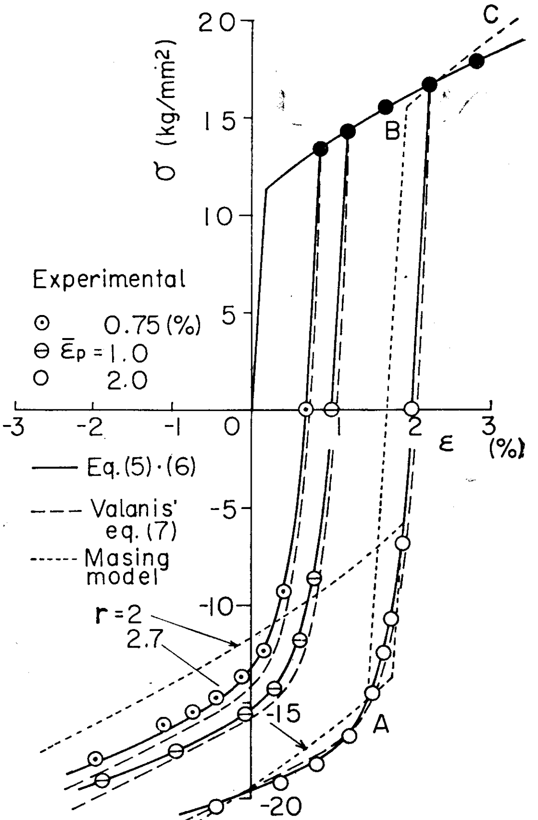

Fig. 5 Comparison of stress-strain curve evaluated by Eq. (6) with experimental curve (tension-compression).

* 降伏段で与えた予ひずみの値が小さいとき，逆負荷曲線が下降伏点応力に近ずくという実験結果[15)]に対しては，$C=C_o(1-e^{-\kappa\Delta S_p})$ のように表わせばよい。C_o, κ は材料定数。

**変動荷重を受ける物体内の各要素について，各半サイクルのひずみ経路は直線に近いことが予想されるので[17)]，全ひずみ理論を用いることができる。流れ理論を用いるとき，微小応力増分又はひずみ増分についての繰返し計算が必要となるが，全ひずみ理論では，与えた荷重に対応する変形状態を直接定めることができるので，繰返し負荷の解析において計算時間を短縮できる。

$$\left.\begin{array}{ll}|\sigma|=3G\varepsilon & (\varepsilon\leqq\varepsilon_Y)\\ |\sigma|=\sigma_o(1+\alpha\varepsilon)^n & (\varepsilon\geqq\varepsilon_Y)\end{array}\right\} \quad (5)$$

ここに G は横弾性係数，ε_Y は降伏ひずみである。

Fig. 4 に示す，除荷開始点を原点にとり座標軸の向きを予負荷のそれと逆向きに定めた除荷座標系 $\sigma^*-\varepsilon^*$ において，除荷と逆負荷の応力-ひずみ曲線を次の形で表わす。

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma^*=3G\varepsilon^* & (\varepsilon^*\leqq\varepsilon_s)\\ \sigma^*=|\bar{\sigma}|+[\sigma_o\{1+\alpha(\bar{\varepsilon}_p+\varepsilon^*)\}^n-C][1-e^{-\beta(\varepsilon^*-\varepsilon_s)}] & \\ \qquad (\varepsilon^*\geqq\varepsilon_s) & \end{array}\right\} \quad (6)$$

ここに $|\bar{\sigma}|$ は除荷開始点の相当応力，$\bar{\varepsilon}_p$ は相当塑性予ひずみであり，$\varepsilon_s=|\bar{\sigma}|/3G$.

Fig. 5 及び 6 に，Fig. 1 に示した引張後圧縮及びねじり後逆ねじりの実験結果を各種丸印で，式(5)及び(6)によるそれらのあてはめの結果を実線で示す。ここで，式(5)と (6) に含まれる材料定数として，Fig. 5 に対し，$\sigma_o=10.7\,\mathrm{kg/mm^2}$, $C=0.7\,\mathrm{kg/mm^2}$, $\alpha=90$, $n=0.41$, $\beta=400$, $3G=8100\,\mathrm{kg/mm^2}$, Fig. 6 に対し，$\sigma_o=10\,\mathrm{kg/mm^2}$, $C=2\,\mathrm{kg/mm^2}$, $\alpha=82$, $n=0.4$, β $3G$ は上記の値，を用いた。

Fig. 5 及び 6 における実線は，いずれの予ひずみの値についても実験結果と非常に良く一致しており，式(5)と(6)の近似の精度が高いことを示す。

4. 検　討

これまでに提案された，逆負荷及び繰返し負荷の応力-ひずみ関係のうち一般性を持つと考えられる関係による Fig. 1 の実験結果のあてはめと，式(6)による結果との比較，ならびにそれらを繰返し負荷の場合に拡張する際の問題点について検討する。

最初に，逆負荷曲線が予負荷曲線と相似であると仮定する Masing モデル[4),5)]による，引張予ひずみ 2 %に対する，相似比 $r=2$ (流れ理論の移動硬化モデル[16)] に対応する) と2.7の場合の結果を Fig. 5 に点線で示す。図から明らかなように，$\gamma=2$ の場合の結果は実験値より著しく小さい応力を与える。一方 $\gamma=2.7$ の結果は実験値にかなり近いが，実験結果を結ぶ曲線より大きな傾きを持つので，逆方向負荷の変形が増大するにつれて，実際よりかなり大きな応力を与えることになる。さらに，例えばA点から除荷し再び引張負荷を加えた際の関係は点線ＡＢＣで表わされるが，それは再負荷曲線が予負荷曲線の延長とほぼ平行になるかあるいは一致するという実験結果の傾向を表わすことができない。

一方，式(6)に含まれる C の値が各半サイクル数に依存して変化すると考えれば，同式を再負荷過程に適用したとき，再負荷曲線は予負荷曲線 (式(5)) と平行な曲線に近ずき，上記の矛盾は生じない。

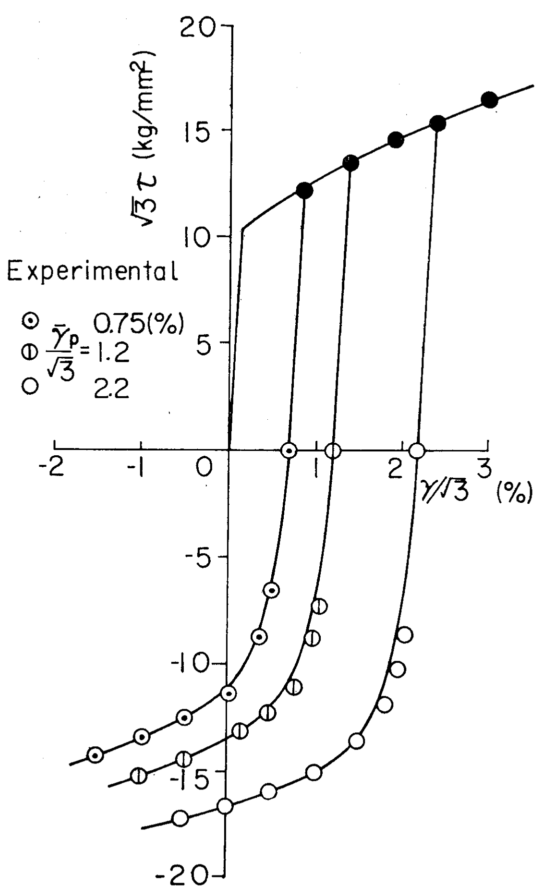

Fig. 6 Comparison of stress-strain curve evaluated by Eq. (6) with experimental curve (torsion-reverse torsion).

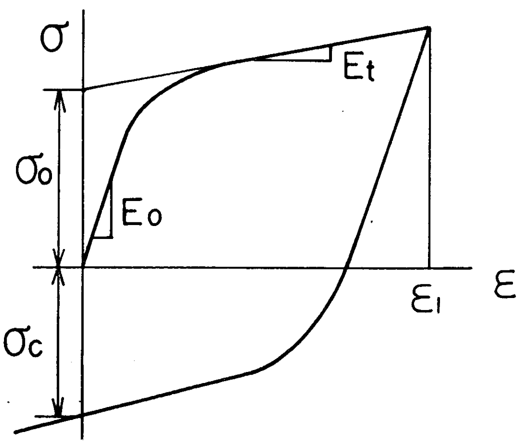

Fig. 7 Definition of material constants appeared in Eq. (8).

Valanis[6) は，Fig. 7 に示すように，ひずみが大きいとき予負荷曲線を直線で近似できる場合，繰返し負荷の応力-ひずみ曲線を次式で表わした。

$$\sigma=E_1\varepsilon+(1+\beta\zeta)\sigma_o\left\{(-1)^m-\left(\frac{1}{1+\beta\zeta}\right)^n+2\sum_{r=1}^{m}(-1)^{n+1}\left(\frac{1+\beta\zeta_r}{1+\beta\zeta}\right)^n\right\} \tag{7}$$

ここに $\zeta=2\sum_{s=0}^{m}(-1)^{s-1}\varepsilon_s+(-1)^m\varepsilon\,(\varepsilon_0=0)$，$\zeta_r=2\sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\varepsilon_r+(-1)^r\varepsilon_r$ であり，ε_s は s 番目の負荷の符号の変化する点のひずみの値である。予負荷の曲線に対し式(7)より次の関係を得る (Fig. 7 参照)。

$$E_1+E_2=E_0,\quad E_2/(\beta n)=\sigma_0,\quad E_1-\sigma_0\beta=E_t \tag{8}$$

予ひずみ ε_1 を与えた後の逆負荷において $\varepsilon=0$ となったとき，式(7)より $\sigma_c/\sigma_0=1+2\beta\varepsilon_1$ の関係を得る。単軸負荷試験により，式(8)の右辺の値を知り，その後の $\varepsilon=0$ までの圧縮試験により σ_c の値を知れば，式(7)に含まれるすべての定数が定まる。

Fig. 1 の引張曲線と引張予ひずみ 2 %に対する逆負荷曲線に基づいて定めた定数値 $E_0=7000\text{kg/mm}^2$，$\sigma_0=12\text{kg/mm}^2$，$E_t=2\text{kg/mm}^2$，$\beta=14$ を用いて，式(7)より計算した結果を Fig. 5 に破線で示す。この結果は全体としてかなり実験値に近いが，逆負荷ひずみが小さいとき実際よりかなり大きな弾性係数を与えること，異なる予ひずみの値を持つ幾つかの逆負荷曲線のすべてを精度良く表わすことができないという欠点を持つことがわかる。また，単軸負荷の応力-ひずみ曲線のひずみの大きい部分を直線で近似することが困難な場合，式(8)を用いて定数を求める際かなりの誤差が含まれよう。

5. 結　言

アルミニウム合金5056に対する引張後圧縮及びねじり後逆ねじりの実験結果を考慮して，予ひずみ依存性を簡単な形で表現できる，予負荷曲線と関連させた逆負荷の応力-ひずみ曲線の表示式を導いた。また，これまでに提案された応力-ひずみ曲線の表示式のいくつかとの比較を行った。

得られた主な結果は以下のようである。

(1)逆負荷の相当応力—相当塑性ひずみ弧長の関係は，逆負荷のひずみが 1 %を越えれば，予負荷曲線を一定応力だけ下側に平行移動した曲線で表わされ，この低下量（定常軟化量）は，予ひずみが一定値以上であれば，予ひずみの大きさに依存しない。

(2)上述の一定の低下量を分離して求めた遷移域の無次元化応力-ひずみ曲線 $(|\sigma'|/|\bar{\sigma}|-\Delta S_p)$ は，降伏段で与ひずみが与えられた場合を除けば，予ひずみの種類と大きさに依存しない。

(3)従来報告されている，ねじり後逆ねじりにおけるバウシンガ効果が引張後圧縮の場合より著しいという結果は，前者の場合の定常軟化量が後者のそれより大きいことによるものと考えられる。

(4)上記の傾向を考慮して導いた逆負荷の応力-ひずみ曲線の表示式は，異なる大きさの予ひずみに対する実験結果の全体を精度良く表わすことができる。

参 考 文 献

1) 穐原智，日本機械学会論文集，31 (1965)，173.
2) 平修二他 3 名，材料，21 (1972)，83.
3) 大橋義夫・川嶋紘一郎，水野貞男，日本機械学会論文集，38 (1972)，3029.
4) Masing, G., Wiss. Veröff. a.d. Siemens-Konzern, 3 (1923)，231.
5) Москвитин, В.В., Пластичность при Переменных Нагружениях, Изд. Моск. ун-та, (1965)，39.
6) Valanis, K.C., Arch, Mech. Stosow., 23 (1971)，535.
7) Mróz, Z., J. Mech. Phys. Solids, 15 (1967)，163.
8) Backhaus, G., ZAMM, *52* (1972)，293.
9) Jhansale, H.R. & Topper, T.H., ASTM STP 519, ASTM, (1973)，246.
10) 大橋義夫・川嶋紘一郎，日本機械学会論文集，44 (1978)，882.
11) Nabai, A., Theory of Flow and Fracture of Solids, McGraw-Hill, (1950)，21.
12) 遠藤勝昭他 4 名，日本機械学会講演論文集，No. 773-1，(1977)，23.
13) Milligan, R.V., Koo, W.H. & Davidson, T.E., Trans. ASME, Ser. D, 88 (1966)，480.
14) Тальпов, Г.В., Изв. АН СССР, О.Т.Н. Мех.и Маш., No. 6 (1964)，131.
15) 大橋義夫・川嶋紘一郎，日本機械学会論文集，35. (1969)，1177.
16) Prager, W., Proc. Inst. Mech. Engrs, 169 (1955)，41.
17) 大橋義夫・川嶋紘一郎，日本機械学会論文集，38 (1972)，3091.