

# 連続体の一次元的波動における非伝ば項について

浦 田 喜 彦

生産機械工学科

(1978年9月9日受理)

## On Non-Propagative Modes of One-Dimensional Wave Motions in Continua

Yoshihiko URATA

*Department of Industrial-Mechanical Engineering*

(Received September 9, 1978)

In this paper, a discussion on analyses of one-dimensional or quasi-one-dimensional wave motions in continua such as elastic bars or fluids in tubes is done. It is pointed out that solutions of differential equations which govern the motions can be generally divided into two parts...propagative terms and non-propagative terms. It is also pointed out that the objects of the usual analyses of infinitely long systems are only the propagative modes. And then, a study of properties of the non-propagative modes is made. The effects of these modes decrease along axes with distance from boundaries. Therefore, at a point far from any boundary, the wave motions are governed almost only by the propagative modes. Then, it is showed that numerical process for eigen-frequencies of a system with finite length can be improved by the study of the non-propagative modes.

### 1. 結 言

連続体の振動・波動の中には、弦などのように全くの一次元方程式でよく記述されるもののほかに、棒あるいは筒状弾性体のように、方程式は厳密には三次元のものになっても、その解の中で軸に沿って進行したり、定在したりするものが重要になる例はきわめて多い。このような振動・波動は、軸に垂直な断面上での振幅は一様ではないが、本論文ではそのふるまい方から準一次元とし、一次元、準一次元の線形振動・波動の解析における境界条件の扱い方について若干の整理を試みたい。

さて、連続体の一次元、準一次元の振動・波動についての研究は非常に多く行われてきているが、解析の際のアプローチのしかたは、大部分が二つに大別されると思われる。一つは、棒にしろ管にしろ、軸上に境界条件が一切与えられない無限長系として解析するもので、これは分散性など波の基本的な性質を把握するのによく用いられる。他は、当初から境界条件を考慮して有限長系として解析し、固有振動の振動数や振動形などを調べようとするものである。これら二つのいき方の中には、密接

な関連があることは言うまでもない。たとえば、弦の場合、無限長系で得られる正、負両方向へ進む振幅の等しい二つの正弦波を重ね合わせてできる定在波の節点で区切られる部分を切り取れば、それは両端を固定された有限長弦の振動になる。はりの曲げ振動や円筒の振動などでも、無限長系の定在波の節点での状態に一致する同次の境界条件がある場合には同じことが生じる。(このような境界条件は、はりでは両端単純支持と呼ばれ、円筒などでも類似の名称が当てられている。)しかしながら、これらは特殊に属する場合であって、有限長系の一般の境界条件に対するの議論は、これほど簡単にはならない。結論的なことを書くと、ある一定の振動数の下では、無限長系で可能な波動モードは有限個であるが、有限長系では一般の境界条件を満たすには、その系の軸に垂直な断面上での自由度にみあったオーダーの数の項が必要である。ここに、断面上での自由度とは、軸上の1点に着目したときに、系の配置を定めるのに必要なパラメータの数で、はりではつりあい点からの変位とたわみ角で2となり棒の3次元解析では断面上の点の数 $\infty \times \infty$ と1点あ

たりの可能な変位の数3の積のオーダーとなる。したがって、有限長系では、無限長系では現われない項が、系の自由度に応じた数だけ必要となるが、これらはすべて普通の意味の進行する波としての性質を持たない。このような項を本論文では非伝ば項と呼ぶことにする。この非伝ば項の役割を積極的に考察した例は、半無限長剛管内の粘性流体の波動<sup>1)</sup>、物性の異なる二種類の丸棒を接合した系の弾性応力波<sup>2)</sup>などの研究に見られるが、これらも一般的な視点に立っているとは言えず、そのほかは、有限長系の振動は境界がなければ進行し続けるはずの波が有限領域内に閉じ込められたものという漠然とした了解に立っているだけのように思われる。そのために、無限長系での解析の意味が理解されにくかったり、数値計算上のトラブルを回避する有効な手法が発見されにくかったりすることは日常しばしば経験する。これらは、ここで言う非伝ば項の性質を知れば、解決されると思われる。

著者は、これまで弾性円管と流体の連成波動の問題を解析的に調べてきたが、これらはほとんど無限長系を対象にしており、有限長系については境界条件の影響をわずかに定性的に推測しているにすぎない。そこで、有限長系に対してより詳しい議論の必要を感じたのがこの考察の発端である。ところが、連続体の振動・波動では、対象によって方程式はさまざまであるが、波の性質という点からは共通に議論できることから多い。もちろん、問題ごとの詳しい検討は必要であるが、本論文では波一般に共通な性質について考察する。

本論文で用いる主な記号はつぎのとおりである。

$x, r, \theta$ : 円筒座標

$t$ : 時間

$j$ : 虚数単位

$\omega$ : 角振動数

$\beta$ : 波数

$\gamma$ : 特性指数  $\gamma = -j\beta$

$\nabla^2$ : 二次元 Laplace 演算子

$J_n, Y_n$ :  $n$  次の Bessel 関数

$I_n, K_n$ :  $n$  次の変形 Bessel 関数

弾性体に関して

$E$ : ヤング率

$\rho$ : 密度

$I$ : はりの断面二次モーメント

$A$ : はりの断面積

$\kappa AG$ : はりのせん断剛性

$w$ : はり、板の横変位

$\phi$ : はりの軸に垂直な断面の回転変位

$h$ : 板の厚さ

$D$ : 板の曲げ剛性,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ,  $\nu$ : ポアソン比  
流体に関して

$\rho$ : 密度

$K$ : 体積弾性率

$c$ : 音速

$p$ : 圧力 (変動分)

$q$ : 粒子速度 (成分,  $q_x, q_r$ )

$a$ : 管内壁半径

その他はそのつど説明する。なお上述のものと同じ記号でも誤解のない限り別の意味に用いることもある。

## 2. 非伝ば項の一般的性質

2.1 非伝ば項の性質を整理するために、はりの曲げ振動における Bernoulli-Euler の近似方程式 (以下 BE 方程式) を例にとる。

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

この方程式の解を  $x$  の正方向に進む正弦波の形に仮定する。

$$w = W \exp [j(\beta x - \omega t)] \quad (2)$$

これらの2式から、 $\omega$ のある値に対して $\beta$ は

$$\beta = \pm \theta, \pm j\theta; \quad \theta = \left( \frac{\rho A \omega^2}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3)$$

となる。したがって、式(1)の一般解として次式を得る。

$$w = W_1 \exp [j(\theta x - \omega t)] + W_2 \exp [-j(\theta x + \omega t)] \\ + W_3 e^{-\theta x} \cdot e^{-j\omega t} + W_4 e^{\theta x} \cdot e^{-j\omega t} \quad (4)$$

この式の右辺第1, 2項は  $x$  軸の正, 負の方向へ進む正弦波であるが、第3, 4項には普通の意味の波としての性質はない。本論文では前者を伝ば項、後者を非伝ば項と呼ぶことにする。無限長系では、領域  $-\infty < x < \infty$  で  $|w|$  の大きさは物理的な意味から有限にとどまるべきなので、 $W_3 = W_4 = 0$  となり、伝ば項だけが関心の対象となる。

さて、非伝ば項の意味を明確にするために、 $x=0$ に境界をもつ半無限長系を考えてみる。境界条件は

$$x=0 \text{ で } w = C e^{-j\omega t}, \quad \partial w / \partial x = 0 \quad (5a)$$

$$x \rightarrow \infty \text{ で } |w| < \infty, \quad \partial w / \partial x > 0 \quad (5b)$$

まず式(5b)の第1式より、 $W_4 = 0$ 、また、第2式は群速度が正で波のエネルギーが  $x$  の正方向に流れていることを意味し、これより  $W_2 = 0$  となる。つぎに式(5a)を適用すれば

$$w = \frac{C}{1+j} \left\{ \exp [j(\theta x - \omega t)] + j e^{-\theta x} e^{-j\omega t} \right\} \quad (6)$$

したがって、非伝ば項は  $x$  が小さいところ、すなわち境界の近傍では、伝ば項とほぼ同じ程度の大きさをもつが、境界から離れるとその大きさは急激に減じ、 $x$  が十分に

大きい領域では無視し得る程度になる。この性質は、管内粘性流体の波動<sup>3)</sup>において、管壁近傍での境界層の形成に本質的な役割を演じる粒子速度ベクトルの回転成分と非常に類似しており、非伝ば項には「境界項」という名称もまたふさわしいと思われる。以上は、非同次境界条件下の半無限長系の場合であったが、境界条件が同次で有限長であったとしても、非伝ば項の役割の本質は変わらないとせば、長さ  $l$  のはりの両端固定の条件

$$x=0, l \text{ で } w=0, \partial w/\partial x=0 \quad (7)$$

の下では、式(1)の解は

$$w = W \{ (\cos \theta l - \cosh \theta l) (\cos \theta x - \cosh \theta x) + (\sin \theta l + \sinh \theta l) (\sin \theta x - \sinh \theta x) \} e^{-j\omega t} \quad (8)$$

$\theta l$  の満たすべき固有値方程式は

$$\cos \theta l \cdot \cosh \theta l - 1 = 0 \quad (9)$$

となる。式(8)では、三角関数が伝ば項、双曲線関数が非伝ば項を表わしているが、いくつかの固有振動における伝ば項と非伝ば項の比較を Fig. 1 に示す。次数が大きくなるほど、換言すれば、振動数が大きくなるほど非伝ば項の影響は境界の近くに局在するようになる。

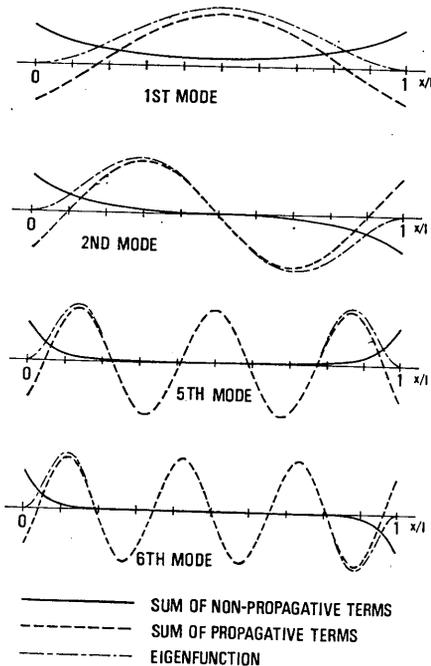


Fig. 1 The propagative terms and the non-propagative terms in some eigenfunctions of lateral vibration of straight beam. (Bernoulli-Euler's Equation)

さて、BE 方程式では現われない非伝ば項の重要な性質がある。これを見るために、BE 方程式より高精度とされる Timshenko<sup>4)</sup> の方程式について調べてみる。

$$\left. \begin{aligned} (EI - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa AG - \rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \phi + \kappa AG \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \kappa AG \frac{\partial \phi}{\partial x} - (\kappa AG \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2}) w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

解の形をやはりつぎのようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \Psi \exp [j(\beta x - \omega t)], \\ w &= W \exp [j(\beta x - \omega t)] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(10), (11)から  $\beta$  を求めると

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 &= \frac{1+s \pm \sqrt{(1-s)^2 + 4s/\bar{\omega}^2}}{2s} \\ \beta^2 &= \beta^2 \cdot \frac{I}{A}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\rho I}{\kappa AG} \omega^2, \quad s = \frac{E}{\kappa G} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(12)から  $\beta^2$  の複号の正に対応するものは常に正の値をもつが、他の複号の負に対するものは  $\bar{\omega} < 1$  では負、 $\bar{\omega} > 1$  では正となる。言い換えれば、 $\omega < \sqrt{\kappa AG/\rho I}$  の領域では虚の波数が存在して非伝ば項を与えるが、 $\omega < \sqrt{\kappa AG/\rho I}$  では波数  $\beta$  はすべて実数となり、したがって非伝ば項は存在しなくなる。臨界の振動数  $\omega = \sqrt{\kappa AG/\rho I}$  を遮断振動数と呼ぶことは周知のことおである。

一般的には、非伝ば項とは、Timoshenko の方程式に見られるように、高振動数域では伝ば項となるものが、遮断振動数以下の領域で波として伝ばする性質を失ったものと言うことができる。このことは、連続体の波動における分散性の波動モードにおいてはごく普通の性質である。BE 方程式では近似の精度が悪いために、遮断振動数が無限大に移行してしまったものと考えられることができる。

2.2 ここでつぎのことに注意をしておきたい。波数  $\beta$  は BE 方程式でも、Timoshenko の方程式でも、実数、虚数を問わず、絶対値が等しく符号が反対のものが必ず対になって出てくる。このことは、ここでとりあげた、はりの曲げ振動に限らず、流体であれ、弾性体であれ、また、種々ある近似の段階を問わず、さらには非散逸系でも散逸系でも必ず成立するものである。これは、波の媒体としての連続体に、 $x$  軸の正負を区別するような方向性がないことに由来している。すなわち、ある境界条件の下で一つの方程式を満足する解が存在したとすれば、 $x$  軸の正負を入れ替えたものものと全く対称な境界条件を満たす解も同じ方程式の解でなければならない。それゆえ、一般解はこれら二つの可能性を同時に包含したものでなければならない。したがって、 $\omega$  を与えて  $\beta$  を求める方程式を作るとそれは代数方程式であっても、超越方程式であっても  $\beta$  の偶数べきだけを含み、奇数べきは含まれることはない。この性質は、連続体の一次元、導一次元の動的問題における対称性の一つであって、他の相反定理にもてづく対称性などと同様に重要であると

考えられる。

2.3 2.1で検討したはりの曲げ振動のように、自由度が比較的小さい場合には、当初から有限長系として解析することはごく普通であるが、弾性棒の三次元解析のように自由度が非常に大きい場合には解析はほとんど無限長系に対して行われていて、有限長あるいは半無限長の系にはほとんど関心が寄せられていない。この理由の一つに、多くの場合、はりの曲げ振動のように自由度を適当に限定して行う近似的な解析で実用上は十分であるという事情があるわけであるが、一方で無限長系に対する精密な解析が盛んに行われながら、有限長系では精密な解析に触れた書物はほとんど見られないのは不均衡と言わざるを得ない。有限長系と無限長系の概念上の連続性を得たり、近似的な解析の限界を予見したりするためには、少なくとも解析の手順程度は明らかにしておくべきだと思われる。そこで、ここではやはり、簡単な例として半無限長剛円管内に満たされた非粘性圧縮性流体の軸対称波動をとりあげる。

方程式は

$$\rho \frac{\partial q}{\partial t} = -\text{grad } p \quad (\text{運動方程式}) \tag{13}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \text{div } q \quad (\text{連続の条件}) \tag{14}$$

境界条件として、管が剛体であることより

$$[q_r]_{r=a} = 0 \quad (0 \leq x < \infty) \tag{15}$$

また、管の一端  $x=0$  で軸方向の粒子速度がつぎのように与えられるとする。

$$[q_x]_{x=0} = f(r) e^{-j\omega t} \tag{16}$$

ここに  $f(r)$  は  $0 \leq r \leq a$  で定義された任意の区分的に連続な関数で、式(16)の条件は管の半径  $a$  より小さい半径をもつ剛体ピストンが管端で調和的な往復運動を行っている場合である。一方、半無限長であるから、他端からの反射はなく、 $x$  が十分に大きい領域では波は有限の振幅をもち、正方向へ進む成分だけから成るものとする。ここでは、境界条件式(16)に由来する強制定常波動解(特解)のみを求め、初期条件は考慮しない。式(13)、(14)から  $q$  を消去すれば

$$r^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{17}$$

式(17)の解をつぎのようにおく。

$$p = R(r) \exp [j(\beta x - \omega t)] \tag{18}$$

式(18)を式(17)に代入して、 $p$  が  $r=0$  で有限であることを考慮して  $R(r)$  を求め、これを再び式(18)に代入すると

$$p = A J_0(mr) \cdot \exp [j(\beta x - \omega t)] \tag{19}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{a}{m_i^2 - m_k^2} \{ m_i J_1(m_i a) J_0(m_k a) - m_k J_0(m_i a) J_1(m_k a) \} = 0, \quad (i \neq k) \\ & \int_0^a J_0(m_i r) J_0(m_k r) r dr = \\ & \frac{a^2}{2} \{ [J_0(m_k a)]^2 + [J_1(m_k a)]^2 \} = \frac{a^2}{2} [J_0(z_k)]^2, \quad (i=k) \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

$$m = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2} \tag{20}$$

式(19)と運動方程式から  $q$  の成分を定めると

$$q_x = A \frac{\beta}{\rho \omega} J_0(mr) \exp [j(\beta x - \omega t)] \tag{21}$$

$$q_r = A \frac{j m}{\rho \omega} J_1(mr) \exp [j(\beta x - \omega t)] \tag{22}$$

式(22)と式(15)から、まず、

$$J_1(ma) = 0 \tag{23}$$

が必要となる。Bessel 関数  $J_1(z)$  の 0 点は実軸上に原点に対称に可付番無限個存在するが<sup>5)</sup>、このうち非負のものを順に  $z_0=0, z_1, \dots, z_i, \dots$  とする。式(23)から  $m = z_i/a$ 。これから波数  $\beta$  を求めると

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{z_i^2}{a^2}} \equiv \pm \beta_i \quad (\text{複号同順}) \tag{24}$$

式(24)から明らかなように、一定の  $\omega > 0$  に対して  $(\omega/c) \geq (z_M/a)$  であって、かつ、 $(\omega/c) < (z_{M+1}/a)$  であるような番号  $M$  が必ず存在する。このとき、 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_M$  は実数であるが、 $\beta_{M+1}, \beta_{M+2}, \dots$  はすべて純虚数となる。とくに、 $\beta_0 = \omega/c$  は必ず実数で流体の音速  $c$  で伝ばする最低次の波動モードに対応している。ここで、虚数となる  $\beta_i$  の記号をつぎのように変更する。

$$\beta_i = j \gamma_i, \quad (i \geq M+1) \tag{25}$$

ここで、一般解  $q_x$  をについて表わすと式(21)を参照して

$$\begin{aligned} q_x = & \sum_{i=0}^M \frac{\beta_i}{\rho \omega} J_0(m_i r) \{ A_i \exp [j(\beta_i x - \omega t)] \\ & - B_i \exp [-j(\beta_i x + \omega t)] \} \\ & + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{j \gamma_i}{\rho \omega} J_0(m_i r) \{ A_i e^{-\gamma_i x} - B_i e^{\gamma_i x} \} e^{-j\omega t} \end{aligned} \tag{26}$$

したがって、有限個の伝ば項と無限個の非伝ば項から解が成っていることがわかる。個数  $B_i$  は  $x \rightarrow \infty$  での条件により、すべて 0 に等しい。また、式(26)に  $x=0$  を代入し、式(16)と等置すれば

$$f(r) = \sum_{i=0}^M A_i \frac{\beta_i}{\rho \omega} J_0(m_i r) + \sum_{i=M+1}^{\infty} A_i \frac{j \gamma_i}{\rho \omega} J_0(m_i r) \tag{27}$$

この式の両辺に  $J_0(m_k r) r$  を乗じ、 $0 \leq r \leq a$  で積分すれば

$$\left. \begin{aligned} & A_k \frac{\beta_k}{\rho \omega} \frac{a^2}{2} [J_0(z_k)]^2, \quad 0 \leq k \leq M \\ & \int_0^a f(r) J_0(m_k r) r dr = \\ & A_k \frac{j \gamma_k}{\rho \omega} \frac{a^2}{2} [J_0(z_k)]^2, \quad k \geq M+1 \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

ただし、ここでは Lommel の積分定理<sup>5)</sup> と式(11)から導かれるつぎの直交関係を用いた。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{a}{m_i^2 - m_k^2} \{ m_i J_1(m_i a) J_0(m_k a) - m_k J_0(m_i a) J_1(m_k a) \} = 0, \quad (i \neq k) \\ & \int_0^a J_0(m_i r) J_0(m_k r) r dr = \\ & \frac{a^2}{2} \{ [J_0(m_k a)]^2 + [J_1(m_k a)]^2 \} = \frac{a^2}{2} [J_0(z_k)]^2, \quad (i=k) \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

したがって、式(9)左辺の積分を行えば係数はすべて定まったこと実なる。

以上をふり返ってみると、断面上での自由度が無限大である場合には、解は有限個の伝ば項と無限個の非伝ば項から成る級数によって表わされる。そして、係数は軸に垂直な面内での各項間に存在する何らかの直交性を見出せば、形式的には積分を含んだ形で決定できる。これらのことが相違するだけで、本質的にははりのように自由度の小さい場合の解析手順のほとんど単純な拡張になっているにすぎない。

ところで、直交条件式(9)は、式(9)、(10)を参照すれば、

$$\int_S p_i \cdot q_{x,k} ds = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ \neq 0 & (i = k) \end{cases} \quad (10)$$

を意味していることがわかる。ただし、 $s$ は断面を意味し、積分は断面全体にわたって行う。また、 $p_i, q_{x,k}$ は $\beta$ の値を $\beta_i, \beta_k$ にとったときの式(9)、(10)で与えられる $p, q_x$ である。式(10)は $\beta_i$ に対応する波動モードの圧力 $p_i$ は他のモードの粒子速度 $q_{x,k}$ に対して仕事をしないことを意味し、各モードが力学的に独立であることを意味している。実は、同様の関係は、はりの曲げ振動でも見られる。すなわち、 $w_i, w_k$ を式(1)の正規化された固有関数とすれば、適当な同次の境界条件の下では

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l w_i w_k dx &= \delta_{ik}, & \int_0^l \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^3} dx &= A \delta_{ik} \\ \int_0^l \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} dx &= B \delta_{ik}, & \int_0^l \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \cdot w_k dx &= C \delta_{ik} \end{aligned} \right\} (11)$$

などが成立する。ただし、 $\delta_{ik}$ はKroneckerのデルタ、 $A \sim C$ は適当な定数である。第1式と第4式とは、式(1)を参照すれば明らかなように同じ意味で、あるモードの分布慣性力は他のモードの変位に対して仕事をしないという解釈が成立する。同様に、第2、3式は、あるモードのせん断力は他のモードの横変位に対して、あるいは、あるモードの曲げモーメントは他のモードの回転変位にして仕事をしないという解釈が可能である。これらの関係では、直交関係を求めておいて後に物理的な解釈を付与したのであるが、複雑な数式で表現される系、たとえば弾性体と流体の複合系などでは、初めに力学的な意味を考え、それを数式上の直交条件を導く手がかりにすることは可能かと思われる。

2.4 以上に見てきたように、非伝ば項はすべて境界から遠ざかればその影響を減ずる。定量的には各場合に合った検討はされなければならないが、定性的には非伝ば項のこの性質はあらゆる場合に共通である。それゆえ、境界から離れたところでの波の挙動はほぼ伝ば項のみによって定められ、したがって、波動においては伝ば項のもつ意味が本質的であると言うことができよう。無限長

という一見非現実的な仮定を含んだ、伝ば項のみを対象とした解析が、実際上も有用であり得るのはこのような事情が背景にあるからである。

### 3. 数値計算法について

有限長のはり、円筒などの固有振動数を適当な近似理論を用いて数値計算する際に、計算過程でトラブルを生じて正しい解に収束しないことがしばしばある。その多くは非伝ば項の数値的特性が原因になっている。例をはりのBE方程式で説明する。

式(1)の一般解は次式のようにも表わされる。

$$w = [W_1 \cos \theta x + W_2 \sin \theta x + W_3 \cosh \theta x + W_4 \sinh \theta x] e^{-j\omega t} \quad (12)$$

前にも指摘したとおり、[ ]内の第3、4項が非伝ば項である。ところで、双曲線関数の定義

$$\left. \begin{aligned} \cosh \theta x &= \frac{1}{2} (e^{\theta x} + e^{-\theta x}) \\ \sinh \theta x &= \frac{1}{2} (e^{\theta x} - e^{-\theta x}) \end{aligned} \right\} (13)$$

から明らかなように、引数 $\theta x$ が大きくなると $\cosh \theta x$ と $\sinh \theta x$ とは非常に接近した値をもつようになる。ところが、計算機の有効桁数は限られているので、 $\theta x$ が一定の値を越えるとこれらの関数は区別できなくなってしまい、互いに一次独立であるべきという要請が実際には満たされなくなってしまう。また、オーバフローを生じるほど大きな値が現われ得ることも容易にわかる。これらの問題点はすでに指摘されているが、<sup>7)</sup>一般的な解決のしかたは示されていないようである。式(12)は数学的には全く正しい表現であるが、関数の数値的な特性に対する配慮を全く行っていない。式(12)の代りにつぎの表現も可能である。

$$w = [W_1 \cos \theta x + W_2 \sin \theta x + W_3 e^{-\theta x} + W_4 e^{-\theta(l-x)}] e^{-j\omega t} \quad (14)$$

この表現では、 $0 \leq x \leq l$ で各関数の値は1を越えることもなく、一次独立性が侵されることもない。したがって、安定した計算が可能である。それに加えて、第3項は $x=0$ の、第4項では $x=l$ の近傍で主に意味をもち、この表現は、非伝ば項の「境界項」としての意味をも明確にしている。

さて、式(12)に境界条件式(7)を適用すると $W_1 \sim W_4$ についての同次連立一次方程式が得られるが、これが自明ではない解をもつための必要十分条件、係数行列の行列式を0に等置したものを整理すると、固有値方程式(9)になる。式(9)では $\cosh \theta l$ はいくらでも大きな値をとれるのであるから、 $\cos \theta l$ は非常に小さくなくてはならないことがある。このような時、式(9)を直接プログラム化してもオーバフローなどのトラブルを生じるだけである。式(9)は

$$\cos \theta l - \operatorname{sech} \theta l = 0 \quad (15)$$

と変形できる。この式であれば、安定した計算ができ、しかも、容易につきの漸近式が求められる。

$$\cos \theta l \approx 0, \quad \theta l \gg 1 \tag{36}$$

式(36)に式(7)を適用して、同様の計算を行うと、

$$\cos \theta l (1 + e^{-2\theta l}) - 2e^{-\theta l} = 0 \tag{37}$$

となって、表現は若干異なるものの式(36)と同様に数値計算上、性質のよい方程式になる。したがって、式(36)の表現は、固有値計算の面でも有利である。

はりが複雑な構造物の部分系として現われる場合には遷移行列法が有用であり、実際によく用いられている。この場合は、遷移行列を導く際に、式(36)から出発しても従来の結果と全く同じになる。これは遷移行列法の本質からもたらされるもので、式(36)の形の表現の効果は遷移行列法には及ばないことに注意しなければならない。

以上の注意は、はりだけではなく、円筒などより高階の微分方程式で記述される系の振動を扱う場合にも当然あてはまり、また、より有益なものとなる。一般に、固有値方程式は微分方程式と同じ階数の行列式 0 をに等置したものになるが、6階、8階などの行列式を展開整理することは事実上不可能であり、数値計算も形式的に求めた行列式について行わなければならない。その際、掃き出し法などの般用アルゴリズムを用いることになるが、安定した計算を行うためには、行列式の要素の数値がすべて 1 以下となる式(36)のような表現が有利なことは明らかである。とくに、長い円筒などでは、固有振動数そのものは小さいにもかかわらず、波数のうちで、低振動数域では振動数にほとんど依存しないものもあるので、長さの効果が直接的に影響する。それゆえ、上述の注意は不可欠である。

若干注意を要する点は波数  $\beta$ 、あるいは特性指数  $\gamma$  (式(3)参照) が実部、虚部ともに 0 ではない複素数値をとる場合のあることである。

$$\gamma = \pm (p \pm jq) \equiv \pm r_i, \pm \bar{r}_i \tag{38}$$

$\bar{r}_i$  は  $r_i$  の共役複素数。符号が反対の二組の共役複素数が現われるのは、2・2 で述べた対称性にもとづく。この場合に一般的に用いられる解の表現は

$$w = \{ \dots + A_i \cos qx \cosh px + B_i \cos qx \sinh px + C_i \sin qx \cosh px + D_i \sin qx \sinh px + \dots \} e^{-j\omega t} \tag{39}$$

であるが、これが数値計算上は好しくないものであることは、式(37)と同じである。この場合にはつきぎの表現がよい。

$$w = \{ \dots + A_i \operatorname{Re} [e^{-r_i x}] + B_i \operatorname{Im} [e^{-r_i x}] + C_i \operatorname{Re} [e^{-r_i (l-x)}] + D_i \operatorname{Im} [e^{-r_i (l-x)}] + \dots \} e^{-j\omega t} \tag{40}$$

4. 二次元問題における類似な現象

一次元、準一次元問題で解が伝ば項と非伝ば項に分

けられることを述べたが、二次元問題などでもこれと類似なことが生じる。均質な円板を例にとる。方程式は

$$D\nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{41}$$

解の形をつぎのようにおく。

$$w = R(r) \cos (n\theta + \varphi_n) \cdot e^{j\omega t} \tag{42}$$

すると、 $R(r)$  はつきぎのような一般形をもつ。

$$R(r) = A_1 J_n(mr) + A_2 Y_n(mr) + A_3 I_n(mr) + A_4 K_n(mr) \tag{43}$$

$$m = \left( \frac{\rho h \omega^2}{D} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{44}$$

$Y_n, K_n$  は  $r=0$  に特異点をもつ。それゆえ、円板中心部が他の部分と同じであれば、解は正則であるべきなので、式(43)において、係数のうち、 $A_2=A_4=0$  となる。もし、中心部に円板外周円と同心の穴などがあれば、一般に  $A_2$  も  $A_4$  も 0 とはならない。ここでは後者の例を考えよう。各関数の数値的なふるまいを  $n=1$  の場合について示すと、Fig. 2 のようになる。<sup>8)</sup> Bessel 関数  $J_n, Y_n$  は振動的で、はりの伝ば項と類似しているが、変形 Bessel 関数  $I_n, K_n$  は非振動的ではりの非伝ば項と類似している。

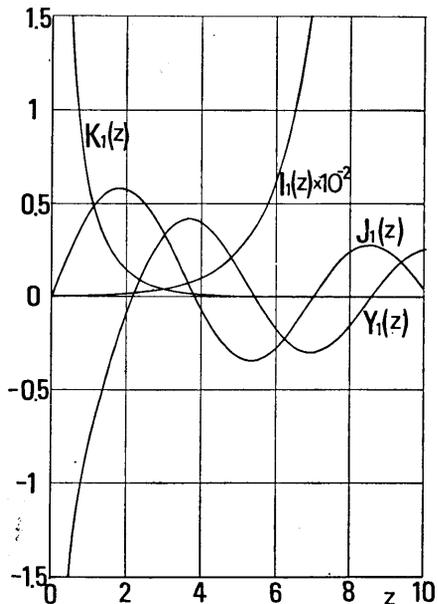


Fig. 2 Numerical behavior of Bessel functions and modified Bessel functions of order 1.

ただ、円板では、はりの場合と異り、 $r$  の方向には対称性はないので、関数値にも対称性はもちろんない。 $I_n$  が円板外周の、 $K_n$  が内周の境界付近でとくに意味をもつものであることは、Fig. 2 より明らかである。数値計算に当たっては、やはり関数値の挙動に注意した工夫は必要である。

他にも、Rayleigh 波が境界からの距離が大きくなる

に従って、振幅を指数関数的に減じることなどにも、非伝ば的な性質を見出せる。

## 5. その他の問題

5.1 はりにおける Timoshenko<sup>9)</sup>、板における Mindlin<sup>9)</sup>、また円筒かくにおける Herrmann-Mirsky<sup>10)</sup> の理論はいずれも回転慣性とせん断変形を考慮した振動の精密な近似理論として知られる。ところで、これらが提案されている論文では無限長系で検討し、伝ばモードとしての最低次の波動モードが全振動数域で三次元理論によるものとよく一致することが示されているにとどまっている。したがって、厳密に言えば、非伝ば項の影響の大きい有限長系でも同様に高精度であるということは未証明である。せん断変形が考慮されていることから、定性的には有限長系でも有効であろうとの推測は成立するが、定量的なことは一切不明である。理論の整備のうえからは、これらについてさらに検討が必要であることを指摘しておきたい。

5.2 系が散逸である場合、すなわち、固体の粘弾性や流体の粘性などが関与している場合には、若干の注意が必要である。粘弾性体はりの曲げ振動を例にとる。この場合にはヤング率  $E$  をつぎの複素ヤング率  $E^*$  で置き換えれば、形式的には式(1)以下の計算は有効である。

$$E^* = E(1 + j\eta) \quad 0 < \eta \ll 1 \quad (4)$$

$\eta$  は損失率で、材料によってはかなりの振動数依存性を示す。式(4)を式(3)の第2式の  $E$  に代入すれば

$$\theta = \left\{ \frac{\rho A \omega^2}{EI(1 + \eta^2)} \right\}^{\frac{1}{4}} \cdot \exp \left\{ -\frac{j}{4} \tan^{-1} \eta \right\} \quad (4)$$

したがって、波数  $\beta$  はすべて実部、虚部がともに0ではない複素数となる。このことは、伝ば項でも軸に沿って減衰することを意味するが、散逸系では当然である。伝ば項も、非伝ば項と共通の性質をもつことになるわけであるが、両者の区別は、減衰の量的な違いに求めるしかない。一般に、散逸の大きさが、非散逸系にわずかな振動が加わったとできる程度であれば、散逸を0にした極限の性質で、伝ば項か非伝ば項かを定められる。数値計算上の注意は、非散逸系の場合とほぼ同じである。

## 6. 結 言

本論文では、棒または筒状弾性体、管内流体などに生じる一次元・準一次元の波動・振動の解析において、伝ば項と非伝ば項の意味の相違を考察した。その結果、波の本質は主に伝ば項によって特徴づけられるが、媒質である連続体の軸上に何らかの境界が存在する場合には、境界条件が一般的に満足されるためには、主に境界の近傍でのみ意味をもち、普通の意味の波として伝ばする性

質をもたない非伝ば項が系の自由度に応じた数だけ必要になることを示した。また、有限長系の固有振動数などを数値的に求める際に、安定した計算を進めるためには非伝ば項の数値的挙動に注意した解の表現が有効であることを指摘した。これらのことは、数学的には既知のことがらの言い換えにすぎないと言えようが、波の挙動を考察するためには不可欠であると思われる。そして、比較的簡単なことであるにもかかわらず、連続体の波動・振動の研究において、わずかな例を除き、ほとんど関心が寄せられて来なかったように思われるので若干の整理を試したいである。個々の問題の中には、より具体的な検討を必要とするものもあるので、今後の課題としていきたい。

## 文 献

- 1) Gerlach, C.R. and Parker, J.D.: Wave Propagation in Viscous Fluid Lines Including Higher Mode Effects, Trans. ASME, Ser. D, 12(1967), pp. 782-788
- 2) 戸田裕己, 他2名: 複合棒の不連続接合部における周期応力波の応答, 日本機械学会講演論文集 No.770-7 (1977), pp. 81-86.
- 3) 浦田喜彦: 弾性円管と流体の連成波動 (第2報) 日本機械学会論文集 42-357 (昭和51年), pp. 1389-1398.
- 4) Timoshenko, S. (谷下, 他訳): 工業振動学, 東京図書, (1956), pp. 297-313.
- 5) 寺沢寛一: 自然科学者のための数学概論, 岩波書店, (昭和29年), pp. 460-461.
- 6) 文献5)の pp. 458-460.
- 7) 柴田碧: 遷移行列法による固有値解析問題, 日本機械学会講演論文集, No. 710-12 (1971), pp. 163-166.
- 8) 林柱一: 高等函数表第2版, 岩波書店, (1967) pp. 282-311.
- 9) Mindlin, R.D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, J. Appl. Mech., 18-1 (1951-3), pp. 31-38.
- 10) Herrmann, G. and Mirsky, I.: Three-Dimensional and Shell-Theory Analysis of Axially Symmetric Motions of Cylinders, J. Appl. Mech., 23-64 (1956-12), pp. 563-568