イノベーション表現による線形確率系の同定について

柴田晃・藤井省三
機械工学科
(1977年9月10日受理)

On the Identification of a Linear Stochastic System by Means of an Innovation Model

Akira SHIBATA, Seizo FUJII
Department of Mechanical Engineering
(Received September 10, 1977)

In order to accomplish the optimum control of a real process over a wide range of operating conditions, it is necessary to estimate continually the parameters and state variables of the process. Simultaneous estimation of the parameters and state variables in the model becomes a nolninear problem, even for a linear state space model of the process. For the difficult problem, there is a suboptimal but practical method which uses an innovation model of the linear stochastic system and separates the simultaneous estimation.

In this paper, the estimation method is first discribed and its characteristics are discussed by use of a simple example. Next, simulation results of the method applied to the estimation and control in a refrigerant compressor test are given. A few problems are noted and actual alternative is proposed.

1. 緒　言

実プラントを種々の運転状態で最適に制御するためには，そのパラメータと状態変数をたえず推定すること，すなわち，統計的に変動している制御対象の同定を行なうことが必要である。線形確率系に対するパラメータと状態変数の同時推定の問題は本質的に非線形な問題として定式化される。この問題に対する厳密ではないが実用になる解法としては拡張カルマンフィルタを用いる方法がある。しかし，この方法は初期状態の不十分な推定や定式化された系の非線形性のためにしばしば発散する。したがって，この問題に対して経済的な計算量で，しかも頑丈なアルゴリズムが常に要求されている。

ここでは系が線形であることに着目して，まず系のパラメータを推定しその後で状態変数を推定する方法[2,3]を考える。これは線形系のある正準形のイノベーション表現を考え，それを等価な入出力モデルに変換することによって可能となる。

本報告ではまず簡単な系にこの同定法を適用することによってその特徴を調べる。さらに本手法を冷凍機性能試験に適用した同定と制御のシミュレーション結果をのべ，本手法の問題点を明らかにして，その対策を考察する。

2. イノベーション表現を用いる同定法

2.1 問題の記述

次の離散時間線形系を考える。

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{\Phi x}(k)+\boldsymbol{\Delta u}(k)+\boldsymbol{\Gamma w}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) &= \boldsymbol{Hx}(k)+\boldsymbol{v}(k) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ここで$\boldsymbol{x}(k)$はn次の状態，$\boldsymbol{u}(k)$はr次の入力，$\boldsymbol{y}(k)$はm次の観測される出力，$\boldsymbol{w}(k)$はp次のプラントノイズ，$\boldsymbol{v}(k)$はm次の観測ノイズである。系は完全可制御，完全可観測と仮定する。ノイズ$\boldsymbol{w}(k)$，$\boldsymbol{v}(k)$はガウス過程で，次の統計量を持つものと仮定する。

$$\left.\begin{aligned} &E\{\boldsymbol{v}(k)\}=\boldsymbol{o},\ E\{\boldsymbol{w}(k)\}=\boldsymbol{o} \\ &E\{\boldsymbol{v}(k)\boldsymbol{v}^T(j)\}=\boldsymbol{V}(k)\delta_{k-j} \\ &E\{\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{w}^T(j)\}=\boldsymbol{\Omega}(k)\delta_{k-j} \\ &E\{\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{v}^T(j)\}=\boldsymbol{L}(k)\delta_{k-j} \end{aligned}\right| \tag{2}$$

ここで，$E\{\ \}$は期待値演算を表わし，δ_{k-j}はKronecker

のデルタである。

さて，いま問題は(1)式のパラメータ Φ, Δ と状態 $x(k)$ の推定値を求めることである。しかし(1)式の系ではパラメータと状態変数を求めるには非線形フィルタが必要である。そこで系(1)に対する次の定常ゲイン K^* を持ったフィルターを考えよう。

$$\left.\begin{aligned} x(k+1/k) &= \Phi x(k/k-1) + \Delta u(k) + K^* e(k) \\ y(k) &= Hx(k/k-1) + e(k) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ここで, $e(k)$ はイノベーション過程であり,白色ガウス過程である。 (3)式の $x(k+1/k)$ は k が十分大きいとき(1)式の $x(k+1)$ の二乗平均最少の意味での推定値となる。したがって，(3)式を(1)式の近似モデルとして，パラメータと状態変数を分離して推定することを以下に考える。(3)式は(1)式のイノベーション表現と呼ばれている。(3)式のフィルタゲイン K^* と定常状態におけるカルマンフィルタのゲイン K との関係は次のように求まる。(1)式の系に対するカルマンフィルタの主方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x(k+1/k+1) &= x(k+1/k) + K(k+1)\{y(k+1) \\ &\quad - Hx(k+1/k)\} \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式を用いて $x(k+1/k)$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} x(k+1/k) &\triangleq \Phi x(k/k) + \Delta u(k) \\ &= \Phi^2 x(k-1/k-1) + \Phi\Delta u(k-1) + \Delta u(k) \\ &\quad + \Phi K(k) e(k) = \Phi x(k/k-1) + \Delta u(k) + \Phi K \\ &\quad (k) e(k) \end{aligned} \quad (5)$$

ゆえに(3)式と(5)式を比較して $K^* = \Phi K$ をうる。

(1)式の次元 n, m, p, r は既知と仮定する。

2.2 入出力モデルの導出

(1)式は状態空間の基底ベクトルとして可観測行列の独立な行を選ぶことによってルーエンバーガーの正準形に変換することができる。すなわち次のように選択する。

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_1\Phi \\ \vdots \\ h_1\Phi^{p_1-1} \\ h_2 \\ h_2\Phi \\ \vdots \\ h_m\Phi^{p_m-1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここで, h_i は観測行列Hの第 i 行, p_i は構造指数で $\sum_{i=1}^{m} p_i = n$ である。したがって(1)式は一般性を失なうことなくルーエンバーガーの正準形をしていると仮定する。そのとき (Φ, H) は次の形をしている。

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= [\phi_{i,j}] \quad i,j=1,2,\cdots m \\ H &= [h_1^T h_2^T \cdots h_m^T]^T \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

ここで

$\phi_{ii} = \begin{bmatrix} \phi \ \vdots \ I_{Pi-1} \\ \cdots\cdots \\ a_i^T \end{bmatrix}$ は $(p_i \times p_i)$ 行列で, a_i^T は p_i 行ベクトル

$\phi_{ij} = \begin{bmatrix} o \\ b_i^T \end{bmatrix}$ は $(p_i \times p_j)$ 行列で, b_i^T は p_j 行ベクトル $(i \neq j)$

$$h_i = \begin{cases} [0 \cdots\cdots 0\ 1\ 0 \cdots\cdots 0] & p_i \neq 0 \\ \quad \leftarrow \sum_{k=1}^{i-1} p_k \rightarrow & \\ [* \cdots\cdots *\ 0\ 0 \cdots\cdots 0] & p_i = 0 \end{cases}$$

*は0とは限らない値を表わすものとする。

ここでは再び一般性を失なうことなく H はフルランクと仮定する。 Δ と Γ については特別な形は持っていない。等価な入出力関係を得るために(1)式から状態変数 $x(k)$ を消去しなければならない。q を系(1)の可観測指数とし，次の $q+1$ 個の式を考えよう。

$$\left.\begin{aligned} y(k) &= Hx(k) + v(k) \\ y(k+1) &= H\Phi x(k) + H\Delta u(k) + H\Gamma w(k) + v(k+1) \\ &\ \vdots \\ y(k+q-1) &= H\Phi^{q-1}x(k) + H\Phi^{q-2}\Delta u(k) + \cdots \\ &\quad + H\Delta u(k+q-2) + H\Phi^{q-2}\Gamma w(k) + \cdots \\ &\quad + H\Gamma w(k+q-2) + v(k+q-1) \\ y(k+q) &= H\Phi^q x(k) + H\Phi^{q-1}\Delta u(k) + \cdots \\ &\quad + H\Delta u(k+q-1) + H\Phi^{q-1}\Gamma w(k) + \cdots \\ &\quad + H\Gamma w(k+q-1) + v(k+q) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

これらの式のうち上から q 個の式は次のように書ける。

$$Y(k) = Gx(k) + MU(k) + NW(k) + V(k) \quad (9)$$

ここで

$$\begin{aligned} Y(k) &\triangleq [y^T(k)\, y^T(k+1) \cdots\cdots y^T(k+q-1)]^T \\ U(k) &\triangleq [u^T(k)\, u^T(k+1) \cdots\cdots u^T(k+q-1)]^T \\ W(k) &\triangleq [w^T(k)\, w^T(k+1) \cdots w^T(k+q-1)]^T \\ V(k) &\triangleq [v^T(k)\, v^T(k+1) \cdots\cdots v^T(k+q-1)]^T \end{aligned}$$

$$M \triangleq \begin{pmatrix} o & & & o \\ H\Delta & o & & \\ H\Phi\Delta & H\Delta & o & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ H\Phi^{q-2}\Delta & & H\Delta & o \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} o & & & o \\ H\Gamma & o & & \\ H\Phi\Gamma & H\Gamma & o & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ H\Phi^{q-2}\Gamma & & H\Gamma & o \end{pmatrix}$$

$$G \triangleq [H^T (H\Phi)^T \cdots\cdots (H\Phi^{q-1})^T]^T$$

G は可観測行列なので可観測性の仮定からそのランクは n であり，G から n 本の独立な列ベクトルを選んで正則行列 T を作ることができる。したがって(9)式から

$$Y_s(k) = Tx(k) + M_s U(k) + N_s W(k) + V_s(k) \quad (10)$$

をうる。さらにもし $Y_s(k)$ を次のようにとるなら，T は単位行列 I となる。

$$\begin{aligned} Y_s(k) &\triangleq [y_1(k) \cdots y_1(k+p_1-1)\, y_2(k) \cdots y_2(k+p_2-1) \\ &\quad \cdots y_m(k) \cdots y_m(k+p_m-1)]^T \end{aligned} \quad (11)$$

$V_s(k), M_s, N_s$ もそれに従って定まる。

(10)式はそれ故，状態ベクトル $x(k)$ について解ける。

$$x(k) = Y_s(k) - M_s U(k) - N_s W(k) - V_s(k) \quad (12)$$

次に(8)式から次の m 個の成分を選ぶ。

$$y_i(k+p_i)=a_i^T x(k)+[g_{p_i}^{iT}\cdots g_1^{iT}o^T]V(k) \tag{13}$$

$$+[d_{p_i}^{iT}\cdots d_1^{iT}o^T]W(k)+v_i(k+p_i)\ i=1,2,\cdots m$$

ここで

$$\Delta=[g_1^1\cdots\ g_{p_1}^1 g_1^2\cdots\ g_{p_2}^2\cdots g_1^m\cdots g_{pm}^m]^T$$

$$\Gamma=[d_1^1\cdots d_{p_1}^1\ d_1^2\cdots d_{p_2}^2\cdots d_1^m\cdots d_{pm}^m]^T$$

(13)式から(12)式を用いて$x(k)$を消去すると求める入出力モデルをうる。すなわち

$$y_i(k+p_i)=Y_s^T(k)a_iU^T(k)\sigma_i-V_s^T(k)a_i+W^T(k)\ \gamma_i$$

$$+v_i(k+p_i)\ \ i=1,2,\cdots,m \tag{14}$$

ここで，$\sigma_i=-M_s^Ta_i+[g_{p_i}^{iT}\cdots g_1^{iT}\ o^T]^T$

$$\gamma_i=-N_s^Ta_i+[d_{p_i}^{iT}\cdots d_1^{iT}o^T]^T$$

(3)式のモデルに関しては(14)式は次のようになる。

$$y_i(k+p_i)=Y_s^T(k)a_i+U^T(k)\sigma_i-E_s^T(k)a_i$$

$$+E^T(k)\gamma_i+e_i(k+p_i) \tag{15}$$

ここで，$E^T(k)\triangleq[e^T(k)e^T(k+1)\cdots e^T(k+q-1)]$

$$E_s^T(k)\triangleq[e_1(k)\cdots e_1(k+p_1-1)e_2(k)\cdots e_2(k+p_2-1)\cdots e_m(k)\cdots e_m(k+p_m-1)]$$

上式で$E_s^T(k)a_i$を$E^T(k)a_i^l$　とかくと(15)式は次のように書ける

$$y_i(k+p_i)=Y_s^T(k)a_i+U^T(k)\sigma_i+E^T(k)\ \gamma_i^l+e_i(k+p_i) \tag{16}$$

ここで，$\gamma_i^l\triangleq\gamma_i-a_i^l$

a_i^l は 0と a_i の成分をならべなおした mq 次の列ベクトル，(14)式の入出カモデルでは，(1)式における非線形の項 $\Phi x(k)$は消去されているが，$\Gamma w(k)$ は $W^T(k)\gamma_i$に持ち込まれている。したがって(1)式の入出カモデル(14)では非線形性を避けることはできない。しかし(3)式の入出カモデル(16)では次に示すように，この問題点を解消することができる。

2.3 同定の方法

(16)式はまとめて次の形の式に書ける。

$$y_i(k)=Z^T(k)\theta_i(k)+e_i(k) \tag{17}$$

ここで，$Z^T(k)=[y^T(k-1),\cdots,y^T(k-q),u^T(k-1),\cdots,u^T(k-q)\ \ e^T(k-1),\cdots e^T(k-q)]$

θ_i は未知パラメータのベクトルで，その時間変化は次のランダム・ウオークでモデル化されるものと仮定する。

$$\theta_i(k+1)=\theta_i(k)+w_i(k) \tag{18}$$

$$E\{w(k)\}=o,\ \ E\{w(k)w^T(j)\}=W\delta_{k-j}$$

式(17)，(18)はイノベーション過程 $e(k)$ が未知なことをのぞけばカルマンの結果を適用できる形である。すなわち次のパラメータ推定器が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\theta_i(k)=\theta_i(k-1)+K_i(k)[y_i(k)-Z^T(k)\theta_i(k-1)]\\&K_i(k)=P_i(k-1)Z(k)[Z^T(k)P_i(k-1)Z(k)\\&\qquad+V_{ii}(k-1)+(H\bar{P}H^T)_{ii}]^{-1}\\&P_i(k)=[I-K_i(k)Z^T(k)]P_i(k-1)+W\end{aligned}\right| \tag{19}$$

ここに $\bar{P}$ は状態変数 xの共分散行列である。

未知のイノベーション過程 $e(k)$ はパヌスカ[4] によって次式で推定することが提案されている。

$$e_i(k)=y_i(k)-Z^T(k)\theta_i(k)\ \ i=1,2,\ \cdots,m \tag{20}$$

2.4 簡単な例

次の２次の線形形系を考えよう。

$$\left.\begin{aligned}x(k+1)&=\begin{bmatrix}0&1\\a_1&a_2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}w(k)\\y(k)&=[1\ \ 0]\ x(k)+v(k)\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

そのイノベーション表現は次になる。

$$x(k+1)k=\begin{bmatrix}0&1\\a_1&a_2\end{bmatrix}x(k/k-1)+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}u(k)+\begin{bmatrix}k_1^*\\k_2^*\end{bmatrix}e(k)$$

$$y(k)=[1\ \ 0]\ x(k)+v(k) \tag{22}$$

対応する入出力モデルは(16)式より次になる。

$$y(k)=[y(k-2)\,y(k-1)\,u(k-2)\,u(k-1)\,e(k-2)\,e(k-1)]\times[a_1,a_2,b_2-b_1a_2,b_1,K_2^*-a_1-K_1^*a_2,K_2^*-a_2]^T+e(k) \tag{23}$$

パラメータ値は $a_1=-0.7$，$a_2=1.5$，$b_1=1.0$，$b_2=-1.0$，$c_1=1.0$ $c_2=1.5$ であり $w(k),v(k)$は次の統計量を持っている。

$$E\{w(k)\}=E\{v(k)\}=0$$

$$E\{v(k)v(j)\}=\sigma_v^2\delta_{k-j},\ \ E\{w(k)w(j)\}=\sigma_w^2\delta_{k-j}$$

入力 $u(k)$も次の統計量を持つガウス過程とする。

$$E\{u(k)\}=0,\ \ E\{u(k)u(j)\}=1.0\delta_{k-j}$$

このとき系(21)において w，vを無視したときの出力 y の共分散 σ_y^2は定常状態においては次の式から求まる。

$$X=\Phi X\Phi^T+\Delta U\Delta^T \tag{24}$$

$$E\{y^2\}=H^TXH=\sigma_y^2$$

ここで，$X=E\{x(k)x^T(k)\}$

$$\Phi=\begin{bmatrix}0&1\\a_1&a_2\end{bmatrix},\ \Delta=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix},\ \ H=[1\ \ 0]$$

ノイズと出力の標準偏差の比(SN比) σ_w/σ_y，σ_v/σ_y をパラメータとして同定結果の一例を Fig. 1に示す。ここで，縦軸 $\|\theta(k)-\theta\|/\|\theta\|$はパラメータ a_1,a_2,b_1,b_2についてでありフィルターゲイン K_1,K_2は含んでいない。また Fig. 2に (SN1, SN2)＝(0.0002，0.0002) の場合　すなわちノイズがほとんど無視できる場合のフィルターゲイン K_1,K_2 の推定結果を示す。系のパラメータ値はノイ

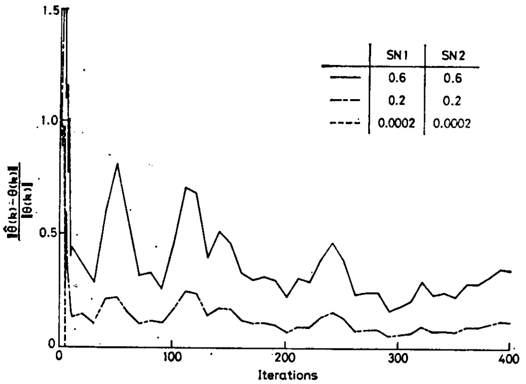

Fig. 1 Normalized error in parameters of an innovation model

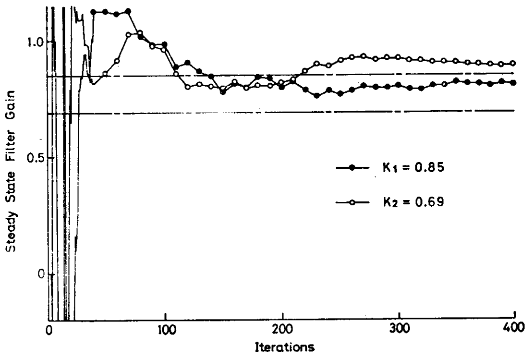

Fig. 2 Estimated values of the steady state filter gain

ズの分散が小さいほど正しく推定できることがわかる。またフィルターゲインの推定については系のパラメータ推定値が十分真値に近くても，なお 400回の繰返し回数では十分な推定値が得られていない。

3. 冷凍機性能試験のシミュレーション

3.1 入出力モデル

前報[1] の冷凍機性能試験で用いた数学モデルは次式であった。

$$\left.\begin{aligned} z(k+1) &= Pz(k) + Qu(k) + \omega(k) \\ y(k) &= Cz(k) + v(k) \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & \\ 1 & -a_2 & & & & & o & & \\ & & 0 & -a_3 & & & & & \\ & & 1 & -a_4 & & & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_5 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -a_6 \\ & o & & & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_7 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & -a_8 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_9 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 \\ c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ d_{11} & 0 & d_{13} \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ d_{31} & 0 & d_{33} \\ d_{41} & 0 & d_{43} \\ d_{51} & 0 & d_{53} \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & o & & \\ & o & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このモデルは $n=9$, $r=3$, $m=3$, 可観測指数 $q=5$, 構造指数 $p_1=2$, $p_2=2$, $p_3=5$である。 (25)式は(6)式から次の変換行列 Tを用いて(27)式の正準形に変換される。

$x(k)=Tz(k)$

$$T=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1P \\ c_2 \\ c_2P \\ c_3 \\ c_3P \\ c_3P^2 \\ c_3P^3 \\ c_3P^4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ 1 & -a_2 & & & & & o & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & 1 & -a_4 & & & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ & & o & & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ & & & & 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ & & & & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \qquad (26)$$

$$\alpha_2=-a_8+a_9$$

$$\alpha_3=-a_7+2a_8a_9-a_9^3$$

$$\alpha_4=-a_6+2a_7a_9$$

$$-3a_8a_9^2+a_9^4$$

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Delta u(k) + w(k) \\ y(k) &= Hx(k) + v(k) \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

$$\Phi=TPT^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -a_1 & -a_2 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & -a_3 & -a_4 & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & o & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & -a_5 & -a_6 & -a_7 & -a_8 & -a_9 \end{pmatrix}$$

$$,\quad w(k)=T\omega(k)$$

$$H=CT^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & o & & \\ & & 1 & 0 & & & & & \\ & o & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Delta=TQ$$

ΔはQと同じ形である。

若干の計算の後，対応する入出力モデルは次のように求まる。

$$y_i(k)=Z_i^T(k)\,\theta_i(k)+e_i(k) \quad i=1,2,3 \qquad (28)$$

ここで,

$$Z_1^T(k)=[y_1(k-2)\ y_1(k-2)\ u_1(k-2)\ u_2(k-2)\ u_1(k-1)\ u_2(k-1)\ e_1(k-2)\ e_1(k-1)]$$

$$Z_2^T(k)=[y_2(k-2)\ y_2(k-1)\ u_1(k-2)\ u_2(k-2)\ u_1(k-1)\ u_2(k-1)\ e_2(k-2)\ e_2(k-1)]$$

$$Z_3^T(k)=[y_3(k-5)\ y_3(k-4)\ y_3(k-3)\ y_3(k-2)\ y_3(k-1)\ u_1(k-5)\ u_3(k-5)\ u_1(k-4)\ u_3(k-4)\ u_1(k-3)\ u_3(k-3)\ u_1(k-2)\ u_3(k-2)\ u_1(k-1)\ u_3(k-1)\ e_3(k-5)\ e_3(k-4)\ e_3(k-3)\ e_3(k-2)\ e_3(k-1)]$$

$$\theta_1^T(k)=[-a_1,\ -a_2,\ b_{21}+a_2b_{11},\ b_{22}+a_2b_{12},$$

$$b_{11}, b_{12}, K_{21}^*+a_1+a_2K_{11}^*, K_{11}^*+a_2]$$

$$\theta_2^T(k)=[-a_3, -a_4, c_{21}+a_4c_{11}, c_{22}+a_4c_{12}, c_{11}, c_{12}, K_{42}^*+a_3+a_4K_{32}^*, K_{32}^*+a_4]$$

$$\theta_3^T(k)=[-a_5, -a_6, -a_7, -a_8, -a_9, d_{11}a_6+d_{21}a_7 +d_{31}a_8+d_{41}a_9+d_{51}, d_{13}, a_6+d_{23}a_7+d_{33}a_8 +d_{43}a_9+d_{53}, d_{11}a_7+d_{21}a_8+d_{31}a_9 +d_{41}, d_{13}a_7+d_{23}a_8+d_{33}a_9+d_{43}, d_{11}a_8+d_{21}a_9 +d_{31}, d_{13}a_8+d_{23}a_9+d_{33}, d_{11}a_9+d_{21}, d_{13}a_9 +d_{23}, d_{11}, d_{13}, K_{53}^*a_6+K_{63}^*a_7+K_{73}^*a_8+K_{83}^*a_9 +K_{93}^*+a_5, K_{53}^*a_7+K_{63}^*a_8+K_{73}^*a_9+K_{83}^* +a_6, K_{53}^*a_8+K_{63}^*a_9+K_{73}+a_7, K_{53}^*a_9+K_{63}^* +a_8, K_{53}^*+a_9] \tag{29}$$

3.2　状態変数の推定

(19)式のパラメータ推定器から得られたパラメータ値から(28)式を用いて系のパラメータ推定値$\Phi(k), \Delta(k)$および フィルターゲイン推定値$K(k)$が算出される（$K(k) \triangleq \Phi(k)K^*(k)$）。したがって系の状態変数 xはパラメータ推定が十分に行なわれた後，次の状態推定器によって推定される。

$$\left.\begin{aligned}&x(k+1/k)=\Phi(k)x(k/k)+\Delta(k)u(k)\\&x(k+1/k+1)=x(k+1/k)+K(k+1)[y(k+1)\\&\quad -x(k+1/k)]\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

3.3 最適制御の計算法

同定された状態変数，パラメータをもとに次の評価関数を考える。

$$J=E[\sum_{k=N}^{N+5}\{\|y(k+1)-y_d\|Q_y+\|u(k)-u_d\|^2R_u\}] \tag{31}$$

ただし，y_d：出力yの目標値

u_d：y_dと推定パラメータとから計算される定常状態y_dに対応する操作量

Q_y：重み行列（非負定値，対称）

R_u：重み行列（正定値，対称）

(31)式が最小となる $u^0(k)$ を計算時間短縮のために$k=N, N+1, \cdots, N+5$ の6段階に対して求める。それらは次のアルゴリズムで計算され，制御対象には常に $u^0(N)$が加えられる。

$$\left.\begin{aligned}&F(k)=M(k)+Q_y, F(N+5)=Q_y\\&G(k)=-[\Delta^TF(k+1)\Delta+R_u]^{-1}\Delta F(k+1)\Phi\\&u^0(k)=u_d-G(k)[x_d(k)-x(k/k)]\\&M(k)=\Phi^TF(k+1)\Phi+\Phi^TF(k+1)\Delta G(k)\end{aligned}\right| \tag{32}$$

ただし，$u_d=[H(I-\Phi)^{-1}\Delta]^{-1}y_d$

$x_d=(I-\Phi)^{-1}\Delta u_d$（$y_d$ に対応する状態変数の値）

u_d, x_dの計算ではΦが固有値1を持つ場合（系に積分性がある場合）には$(I-\Phi)^{-1}$が存在しなくなるので，これをさけるために次のように計算する。この計算では$n\times n$行列の逆行列の計算がいらないので計算量が減る利点がある。(12)式でノイズの項を省略し，その定常状態を考えることにより次式をうる。（付録1参照）

$$x_d=Y_{sd}-M_sV_d \tag{33}$$

ただし

$$Y_{sd}=[y_{1d}\ y_{1d}\ y_{2d}\ y_{2d}\ y_{3d}\ y_{3d}\ y_{3d}\ y_{3d}\ y_{3d}]^T$$

$$u_d=[u_d^T\ u_d^T\ u_d^T\ u_d^T\ u_d^T]^T$$

$$u_d=(\sum_{i=1}^{5}B_i)^{-1}(I-\sum_{i=1}^{5}A_i)y_d$$

A_i，B_i は(28)式の入出力モデルを多次元自己回帰モデルに表現したときのそれぞれ出力と入力に掛る係数行列である。

3.4 シミュレーション結果

シミュレーションで用いた系(26)式のパラメータ値を次に示す。

$-a_1=-0.040023$	$b_{11}=0.29641$	$b_{12}=-0.00388$
$-a_2=0.07296$	$b_{21}=-0.00442$	$b_{22}=-0.00264$
$-a_3=0.05752$	$c_{11}=0.07435$	$c_{12}=-0.08083$
$-a_4=0.48782$	$c_{21}=0.05493$	$c_{22}=-0.03963$
$-a_5=-0.03404$	$d_{11}=0.26132$	$d_{13}=0.00545$
$-a_6=0.16913$	$d_{21}=-0.16406$	$d_{23}=0.00647$
$-a_7=-0.80779$	$d_{31}=-0.04729$	$d_{33}=0.02104$
$-a_8=0.67341$	$d_{41}=-0.03043$	$d_{43}=0.03718$
$-a_9=0.99976$	$d_{51}=-0.04592$	$d_{53}=0.05028$

これらの値は冷凍機プラントを多次元自己回帰モデルによって同定し，さらに得られたモデルを前述の方法で同定して得たものである。したがって，プラントを同定したときの平衡点

$$\begin{bmatrix}u_1, n_2, u_3\\y_1, y_2, y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.298, & 4.015, & 1.985\\0.9807, & 5.112, & 10.0\end{bmatrix}$$

のまわりでの主要な特性は表わされているものと考えられる。ノイズは次の統計量を持つガウス過程とした。

$$w(k)=[w_1(k)\ \ 0\ \ w_2(k)\ \ 0\ \ w_3(k)\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$$

$$v(k)=[v_1(k)\ \ v_2(k)\ \ v_3(k)]^T$$

$$E\{w(k)\}=E\{v(k)\}=o$$

$$E\{w_i(k)w_j(l)\}=W_i\delta_{i-j}\delta_{k-l}\ \ i, j=1, 2, 3$$

$$E\{v_i(k)v_j(l)\}=V_i\delta_{i-j}\delta_{k-l}\ \ i, j=1, 2, 3$$

$$W_1=W_2=V_1=V_2=0.0001,\quad W_3=V_3=0.00009$$

状態推定については簡単な例の場合からもわかるように，定常フィルターゲインの推定に時間がかかり過ぎるので(30)式の推定器は実用にならないことがわかった。そこで次のような状態変数の推定法を考える。たとえば系(25)のサブシステム3の状態変数の推定値 $\hat{z}_3(k+1/k)$は(25)式において k時刻で推定されたパラメータを用い，ノイズを無視すると次のように計算できる[1]。

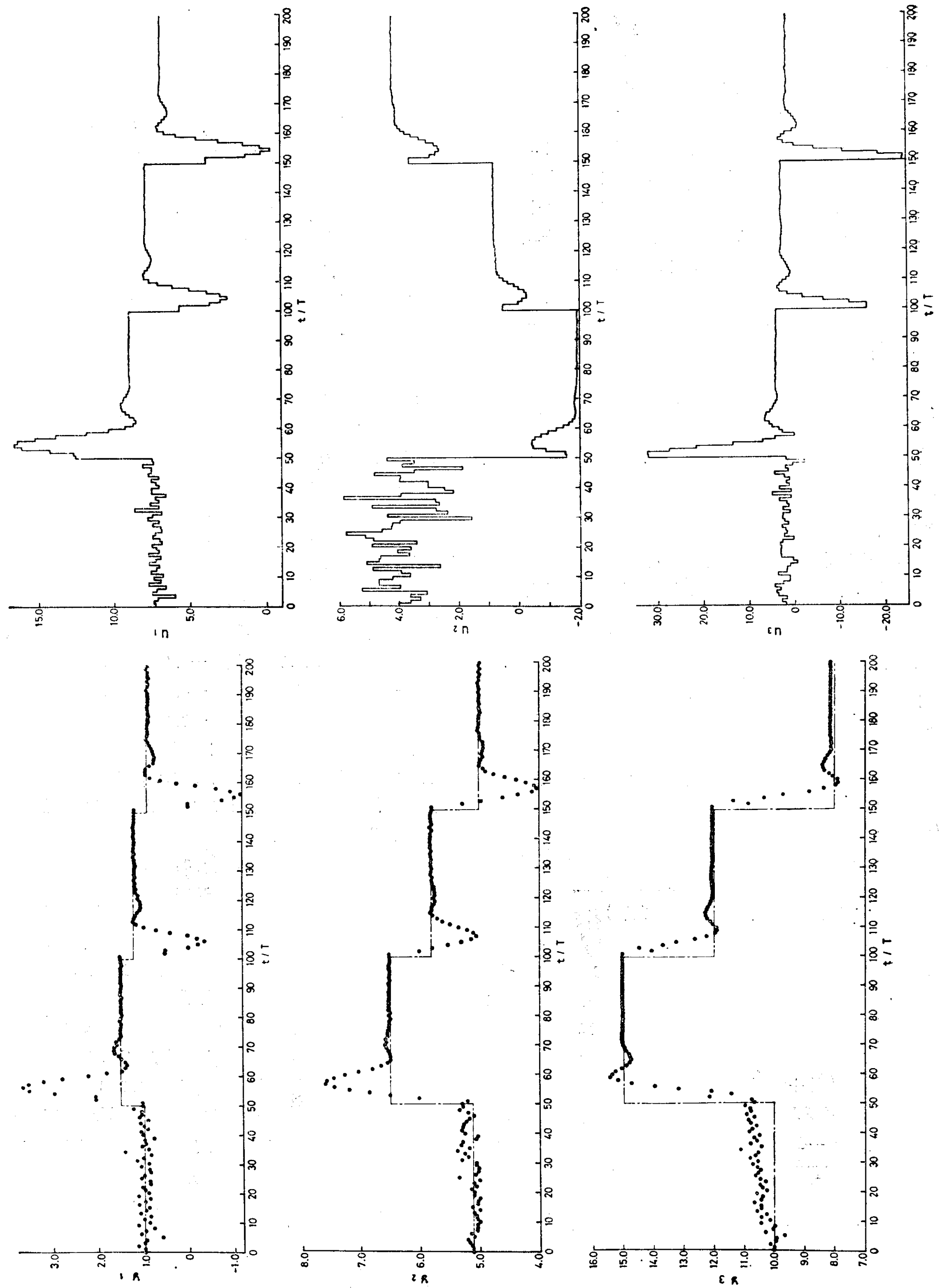

Fig. 3 A simulation result of the estimation and control in a refrigerant compressor test

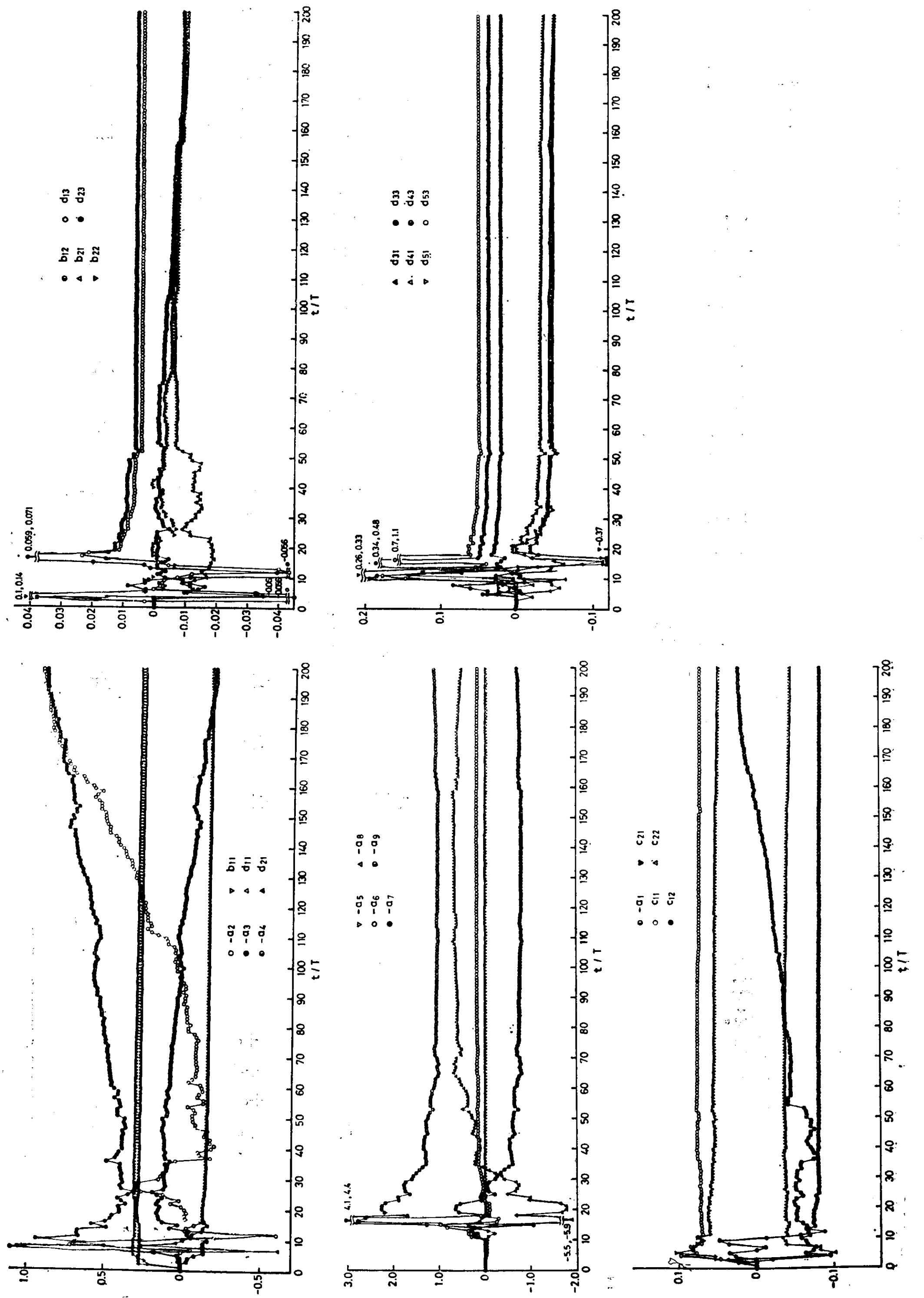

Fig. 4 Estimated values of the parameters in the case of Fig. 3

$z_3(k+1/k)=$

$$\left(\begin{array}{rrr} -a_5 & d_{11} & d_{13} \\ o\ -a_5-a_6 & o\quad d_{11}d_{21} & o\quad d_{13}d_{23} \\ -a_5-a_6-a_7 & d_{11}d_{21}d_{31} & d_{13}d_{23}d_{33} \\ -a_5-a_6-a_7-a_8 & d_{11}d_{21}d_{31}d_{41} & d_{13}d_{23}d_{33}d_{43} \\ -a_5-a_6-a_7-a_8-a_9 & d_{11}d_{21}d_{31}d_{41}d_{51} & d_{13}d_{23}d_{33}d_{43}d_{53} \end{array}\right)$$

$$\times \boldsymbol{D}(k) \tag{34}$$

$$\boldsymbol{D}(k)=[y_3(k-4)\cdots y_3(k)\,u_1(k-4)\cdots u_1(k)\,u_3(k-4)\cdots u_3(k)]^T$$

各サブシステムについて同様の計算行ない(26)式の変換行列 Tによって

$$\boldsymbol{x}(k+1/k)=\boldsymbol{TZ}(k+1/k) \tag{35}$$

とすれば系(27)の状態変数の予測値をノイズを無視して求めたことになる。さらにこの予測値をそのまま時刻$k+1$での状態変数の推定値と考えることにする。この状態変数の推定法による同定と制御のシミュレーション結果をFig. 3 に示す。また Fig. 4 にそのときのパラメータ推定値変化を示す。(31)式における重み行列はそれぞれdiag$\boldsymbol{Q}_y=[10, 10, 100]$, diag$\boldsymbol{R}_u=[1, 1, 1]$とした。シミュレーションにおいてはイテレーション回数が50回までは各入力にランダムな変化を与えて同定のみを行ない，以後50回ごとに出力の目標値を変化させ，同定と制御を行なっている。入力には制約がないものとする。個々のパラメータ推定値が真値から離れているにもかかわらず，良好な制御経過が得られている。

上で述べた状態変数の推定法では時刻 kにおいて その時刻でのパラメータ推定値と過去4時点間の入出力とによってその推定値が得られる特徴がある。この状態変数の推定法の他に， たとえば系を各時刻に得られる変動するパラメータに基ずいて，時変係数系と考えてカルマンフィルタを用いて状態変数を推定する方法が考えられる。しかし，この方法はフィルタゲインは多くの場合正しい定常ゲインに近い値になるにもかかわらず正しい状態変数推定値を与えない。その理由は，正しくないパラメータ推定値による事前状態推定値 $\boldsymbol{x}(k/k-1)$ の 誤差が推定値 $\boldsymbol{x}(k/k)$に累積していくためである。 同様の考えから次のことがわかる。すなわち前述のパラメータと状態変数の同定法ではパラメータが正しく求まらない限り，漸近的に状態変数を推定する方法（推定した定常ゲイン K^* を用いる方法も含めて）は有効ではない。

4. 結　言

線形確率系のイノベーション表現を用いるとパラメータ推定が行なえ，定常カルマンフィルタゲインも推定できる。この場合，イノベーション過程は未知であるがパヌスカの推定器によって推定される。このアルゴリズムによって得られたフィルターゲインは真値に近ずくのがおそく，実用的ではないことが簡単な例によって示された。また，この同定法を用いて冷凍機性能試験のシミュレーションを行なった。その際，状態変数推定には漸近的に状態を推定する方法ではなく，各時点ごとに新らたに状態変数推定を行なうのが有効であることを示した。

今後の課題としては，本同定法の他の方法との比較，実プラントを用いての制御実験，その際に生ずる非線形性への配慮等がある。

本研究には本学機械工学教室のミニコンピュータMelcom 70 を用いた。

文　献

1) 藤井・柴田・羽尻，名古屋工業大学学報，28(昭51)，259.

2) L.W. NELSON·E. STEAR, IEEE Trans. A.C. vol. 21, 94, 1976.

3) G.W. IRWIN·A.P. ROBERTS, Int. J. CONTROL, vol. 23, No. 6, 851, 1976.

4) V. PANUSKA, Proc. 8th IEEE Symp. Adaptive Processes, 1969 paper 6-e

付録 1.

(28)式の入出力モデルはイノベーション過程を省略すると次のように書きなおせる。

$$y_1(k)=-a_2y_1(k-1)-a_1y_1(k-2)+\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{u}(k-1)+\boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{u}(k-2) \tag{A-1}$$

$$y_2(k)=-a_4y_2(k-1)-a_3y_2(k-2)+\boldsymbol{b}_3^T\boldsymbol{u}(k-1)+\boldsymbol{b}_4^T\boldsymbol{u}(k-2) \tag{A-2}$$

$$\begin{aligned} y_3(k)=&-a_9y_3(k-1)-a_8y_3(k-2)-a_7y_3(k-3)\\ &-a_6y_3(k-4)-a_5y_3(k-5)+\boldsymbol{b}_5^T\boldsymbol{u}(k-1)+\boldsymbol{b}_6^T\\ &\boldsymbol{u}(k-2)+\boldsymbol{b}_7^T\boldsymbol{u}(k-3)+\boldsymbol{b}_8^T\boldsymbol{u}(k-4)+\boldsymbol{b}_9^T\boldsymbol{u}(k-5) \end{aligned} \tag{A-3}$$

ただし，$\boldsymbol{b}_1^T=[b_{11}b_{12}0]$, $\boldsymbol{b}_2^T=[b_{21}+a_2b_{11}\ \ b_{22}+a_2b_{12}\ \ 0]$

$\boldsymbol{b}_3^T=[c_{11}c_{12}0]$, $\boldsymbol{b}_4^T=[c_{21}+a_4c_{11}\ \ c_{22}+a_4c_{12}\ \ 0]$

$\boldsymbol{b}_5^T=[d_{11}\ 0\ d_{13}]$, $\boldsymbol{b}_6^T=[d_{11}a_9+d_{21}\ 0\ d_{13}a_9+d_{23}]$

$\boldsymbol{b}_7^T=[d_{11}a_8+d_{21}a_9+d_{31}\ 0\ d_{13}a_8+d_{23}a_9+d_{33}]$

$\boldsymbol{b}_8^T=[d_{11}a_7+d_{21}a_8+d_{31}a_9+d_{41}\ 0\ d_{13}a_7+d_{23}a_8+d_{33}a_9+d_{43}]$

$\boldsymbol{b}_9^T=[d_{11}a_6+d_{21}a_7+d_{31}a_8+d_{41}a_9+d_{51}\ \ 0\ \ d_{13}a_6+d_{23}a_7+d_{33}a_8+d_{43}a_9+d_{53}]$

(A-1), (A-2), (A-3) 式をまとめると(28)式に対応する次の自己回帰モデルが得られる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(k)=&A_1\boldsymbol{y}(k-1)+A_2\boldsymbol{y}(k-2)+A_3\boldsymbol{y}(k-3)\\ &+A_4\boldsymbol{y}(k-4)+A_5\boldsymbol{y}(k-5)+B_1\boldsymbol{u}(k-1)+B_2\boldsymbol{u}(k-2)+B_3\boldsymbol{u}(k-3)\\ &+B_4\boldsymbol{u}(k-4)+B_5\boldsymbol{u}(k-5) \end{aligned} \tag{A-4}$$

ただし，

$$A_1=\begin{bmatrix}-a_2 & 0 & 0\\ 0 & -a_4 & 0\\ 0 & 0 & -a_9\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}-a_1 & 0 & 0\\ 0 & -a_3 & 0\\ 0 & 0 & -a_8\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_7\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_6\end{bmatrix},\ A_5=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_5\end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix}b_1^T\\ b_3^T\\ b_5^T\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}b_2^T\\ b_4^T\\ b_6^T\end{bmatrix}, B_3=\begin{bmatrix}o^T\\ o^T\\ b_7^T\end{bmatrix}, B_4=\begin{bmatrix}o^T\\ o^T\\ b_8^T\end{bmatrix}, B_5=\begin{bmatrix}o^T\\ o^T\\ b_9^T\end{bmatrix}$$

いま定常状態を考えると $y(k-i)=y_d$, $u(k-i)=u_d$ $i=1,2,\cdots,5$ として (A-4) 式より次式をうる。

$$y_d=(\sum_{i=1}^{5}A_i)\,y_d+(\sum_{i=1}^{5}B_i)\,u_d \tag{A-5}$$

ゆえに，出力の目標値 y_dに対応する入力の目標値 u_dは次式より求まる。

$$u_d=(\sum_{i=1}^{5}B_i)^{-1}(I-\sum_{i=1}^{5}A_i)\,y_d \tag{A-6}$$