線形制御系の最適化に関する研究（II）
収束時間の推定

武藤三郎・中村光一
電気工学科
(1977年9月10日受理)

An Optimal Control Study of a Linear System (II)

Saburo MUTO and Koichi NAKAMURA

Department of Electrical Engineering
(Received Septmber 10, 1977)

In a stable linear control system the system response damps with the lapse of time. In an automatic speed governing and synchronizing system (presented in ref. 1) once the phase-and frequency-differential decrease lesser, with the onset of the operation, the generator is connected with the power system. It takes a lot of computing time to estimate the system controlling time from the system response for each initial condition.

There is a convetional method of finding out the system converging time analytically. In this method, however, the state variable used to represent the system is invariably at its worst. Considerable error may therefore arise when we want to estimate the convergent time of partial state variables.

In this paper we propose another method of estimating convergent time from the convergent characteristics of the state variables under consideration and thus solving this problem. Our method enables us to obtain precisely the state variables in the control system, and thus enables us to evaluate the superiority or inferiority of the response characteristics of the optimal control system.

1. 緒　言

線形制御系が安定ならば，系の動作は与えられた初期値から時間とともに減衰してゆく。文献〔1〕で述べたように発電機の自動同期並列方式では，揃速同期操作を開始してのち位相差および周波数差が同期したみなせるような小さな値に達したとき，発電機が電力系統に並列される。この所要時間を知る場合，初期値を逐次変えて，そのつど系の応答を求めるのではぼう大な時間を要することになる。

このような場合，文献〔2〕において系の収束時間を解析的に推定する方法が示されている。しかしこの方法は全ての状態変数の内で最も収束の悪い状態変数の収束特性を基準にとるため，部分的で，かつ特定の状態変数の収束時間を論する場合には大きな誤差を伴う。

本論では，この問題を解決するため，特定の状態変数の収束特性から収束時間を推定する方法を提案する。この方法を以下“縮約法”とよぶ。この方法によれば高い精度で制御系の収束時間を推定できると同時に，この得られた収束時間から最適制御系の応答性の良否も判定できる。

2. 線形制御系の収束時間の推定

2.1 理論概要[1)]

線形時不変系において状態方程式は一般に次のように与えられる。

$$\dot{X}=AX+BU \quad (\text{ただし } X(0)=X_0) \tag{1}$$

$$y=CX \tag{2}$$

制御入力Uは(4)式で示されるようにyとは異るもう1つの出力 y_m によってつくられるものとする。すなわち，

$$y_m=C_mX \tag{3}$$

$$U=-Fy_m=-FC_mX \qquad (4)$$

評価関数 J は，

$$J=\int_0^\infty \frac{1}{2}(y'Qy+U'RU)\,dt \qquad (5)$$

ただし，記号は転置を表わす

この J に(1)～(4)式の関係を代入し整理すると，

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty X'(t)\,[C'QC+C_m'F'RFC_m]\,X(t)\,dt \qquad (6)$$

と書ける，つぎにこの制御系のリアプノフ関数が次式によって定置されると仮定する。

$$V(X)=\int_t^\infty X'[C'QC+C_m'F'RFC_m]Xdt \qquad (7)$$

(7)式で与えられるような V(X) の時間全微分は，

$$\dot{V}(X)=-X'[C'QC+C_m'F'RFC_m]X \qquad (8)$$

この $\dot{V}(X)$ は評価関数の被積分項の符号を変えたものである。V(X) は X に関して 2 次形式であり，制御対象の方程式(1)は線形であるので，V(X) もまた 2 次形式，

$$V(X)=\int_0^\infty X'[C'QC+C_m'F'RFC_m]Xdt=X'K^*X \qquad (9)$$

で与えられると仮定する。これを時間微分すれば，

$$\dot{V}(X)=\dot{X}'K^*X+X'K^*\dot{X}$$
$$=X'[(A-BFC_m)'K^*+K^*(A-BFC_m)]X \qquad (10)$$

を得る。 この結果を(8)式と比較すれば，K^* は次式を満足する必要がある。

$$(A-BFC_m)'K^*+K^*(A-BFC_m)=$$
$$-(C'QC+C_m'F'RFC_m) \qquad (11)$$

2.2 時間推定の一般的方法

ある系 $\dot{X}=A^*X$ に対して，時間全微分 $\dot{V}(X)$ が負定値であるような正定値のスカラ関数（リアプノフ関数）が見いだせたと仮定する。この系の状態変数が原点に近づく速度の推定値を得るために，状態空間の全ての点における V(X) と $-\dot{V}(X)$ の比の最大値 T を次式で定義する。

$$T=\max_X \frac{V(X)}{-\dot{V}(X)} \qquad (12)$$

V(x) はリアプノフ関数，$\dot{V}(X)$ は V(X) の導関数である。(12)式を t=0 から t_s まで部分積分すれば次式をうる。[2)]

$$V[X(t_s)]\leq V[X(0)]e^{-ts/T} \qquad (13)$$

上式は系の状態が t_s 秒後に初期状態 X^0 から曲面 $V(X)=V(X^0)e^{-ts/T}$ の内部あるいはその上に移っていることを示している。いま V(X) が揃速同期したとみなしうる微小領域内部に丁度入ったときの時刻 t_s は近似的な意味で揃速同期間とみなすことができる。

いま V(X)，$\dot{V}(X)$ を二次形式で次のように表わせば，

$$\dot{V}(X)=-X'Q^*X \qquad (14)$$

$$V(X)=X'K^*X \qquad (15)$$

系の漸近的安定条件より K^* は次式で得られる対称行列である。

$$A^{*\prime}K^*+K^*A^*=-Q^* \qquad (16)$$

この式は $A^*=A-BFC_m$，$Q^*=C'QC+C_m'F'RFC_m$ とおけば(11)式に一致する。

(14)，(15)式を(12)式に代入すればTは，

$$T=\max_X[X'K^*X/X'Q^*X] \qquad (17)$$

となり，これより参考文献(2)に基づけばTは(18)式，

$$T=[Q^{*-1}K^*] \text{ の最大固有値} \qquad (18)$$

となる。

(18)式よりTが得られたので，これを(13)式に代入すれば，系が初期値 X(0) から $V[X(t_s)]=a$ （a は定数）で示されるある目的領域内に達する所要時間の上限 t_s は

$$t_s=T\cdot\ln\ \{a/V[X(0)]\} \qquad (19)$$

で与えられる。

この一般的方法は系のすべての状態変数が原点近傍に収束する場合の収束時間推定には有効である。しかしながら，位相差や周波数差などのように状態変数の 1 部の収束時間を推定する場合，このTを用いるとかなりの誤差が出ることがある。何となれば，収束時定数Tは収束性の最も遅い状態変数によって定まるからである。そこで以下示すような縮約法を提案する。

2.3 縮約法

n 次元の状態変数ベクトルXに対し着目している状態変数からなる縮約ベクトル x を考える。

$$x=GX \qquad (20)$$

ここで G は n×n 行列で，その要素は着目している l この状態変数に関する対角項のみ 1 でそれ以外の要素は全て零である。$\dot{V}(x)$，V(x) をそれぞれ (14)，(15) 式で定義された $\dot{V}(X)$，V(X) のX軸上での l 次元断面空間を表わすものとする。したがって，

$$\dot{V}(x)=-x'[C'QC+C_m'F'RFC_m]x$$
$$=-x'Q^*x=-x'G'Q^*GX \qquad (21)$$

$$V(x)=x'K^*x=X'G'K^*GX \qquad (22)$$

この部分空間 $\dot{V}(x)$，V(x) はもとの $\dot{V}(X)$，V(X) 空間の漸近安定性に従うから，x の収束時定数 τ を，

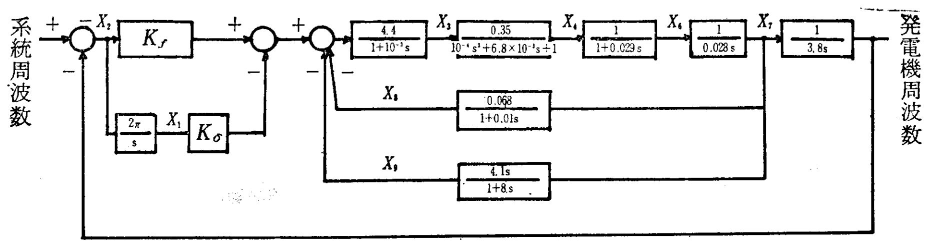
$$\tau=\max_x \frac{V(x)}{-\dot{V}(x)} \qquad (23)$$

で定義すれば τ は

$$\tau=\{(G'Q^*G)^{-1}(G'K^*G)\} \text{ の最大固有値} \qquad (24)$$

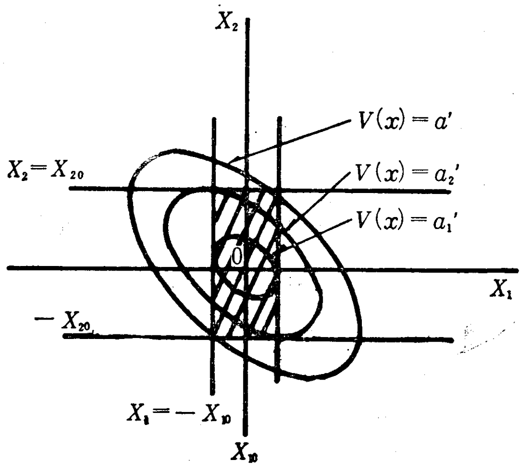
となる。したがって x が初期値 $x(0)$ から $V[x(t_s)]=a'$ で与えられる領域内に達するまでの所要時間 t_s は次式で与えられることになる。

$$t_s\leq-\tau\{\ln\{a'/V[x(0)]\}\} \qquad (25)$$



第1図　高速自動揃速同期制御系

Fig. 1　Block diagram of the high speed and automatic synchronizing system in a hydraulic power plant



第2図　発電機の並列領域

Fig. 2　Paralelling area of a generator

3.　揃速同期制御系への適用

3.1　揃速同制御の収束時間の推定

ここで制御系は第1図に示すような揃速同期制御系[3]で，発電機の電力系統への並列条件は位相差および周波数差の2つの状態変数で与えられるので，x として X_1, X_2 の2次元列ベクトルを考える。

並列領域* が第2図の斜線の内部とすれば，同図で(22)式の $V(x)=a'$ より作られる曲線（この場合だ円）が $|X_1|\leq X_{10}$ および $|X_2|\leq X_{20}$ の内部に完全に入るか，少くともそれに接するときのa'の値を求める。(22)式の係数行列 $G'K^*G$ の x に対応する行列要素を $k_{11}, k_{12}(=k_{21})$, k_{22} とすれば $V(x)$ は，

$$V(x)=k_{11}X_1^2+2k_{12}X_1X_2+k_{22}X_2^2 \tag{26}$$

で表湯される。したがって，

(i)　$|X_1|\leq X_{10}$ で与えられる領域内に $V(x)=a'$ の曲線が入るようなa'の値は $V(x)$ の $X_1=\pm X_{10}$ における X_2 の極値条件から求められる。すなわち

$$\frac{\partial V(x)}{\partial X_2}=2k_{12}X_1+2k_{22}X_2=0$$

より極値 a' は

$$a'=a_1'=X_{10}^2\ (k_{11}-k_{12}^2/k_{22})$$

したがって収束時間 t_{s1} は(25)式より，

$$t_s=t_{s1}\leq-\tau\cdot\ln\{a_1'/V[x(0)]\} \tag{27}$$

で与えられる。

(ii)　また $|X_2|\leq X_{20}$ で与えられた領域内部に入ったときの $V(x)=a'=a_2'$ および収束時間 t_{s2} は上と同様にして計算すると，

$$a_2'=X_{20}^2(k_{22}-k_{12}^2/k_{11})$$

$$t_{s2}\leq-\tau\cdot\ln\{a_2'/V[x(0)]\} \tag{28}$$

それゆえ x が並列条件をみたすまでの所要時間は t_{s1} と t_{s2} の間にあることが推定できる。

3.2　計算結果

第1図のモデル調速機において(1)式の係数行列 **A**および **B**を第3図に示す。また(6)式の評価関数に適用された行列 **Q**, **C**, $\mathbf{C_m}$ を第1表に示す。これらのデータをもとに文献〔1〕に基づき行列 $\mathbf{K^*}$ および **F**を求めた。この結果の例を第2表から第4表に示す（case 3の場合）。

次に行列 $\mathbf{K^*}$ および $\mathbf{Q^*=C'QC+C_m'F_rRFC_m}$ を用い，

A =

	-2π							
						0.263		
$-1000\,K_\sigma$	$4400\,K_f$	−1000					−4400	−4400
				1				
		3500	−10000	−68				
			34.48		−34.48			
					35.71			
						6.8	−100	
					18.3			−0.125

B =

		4400						

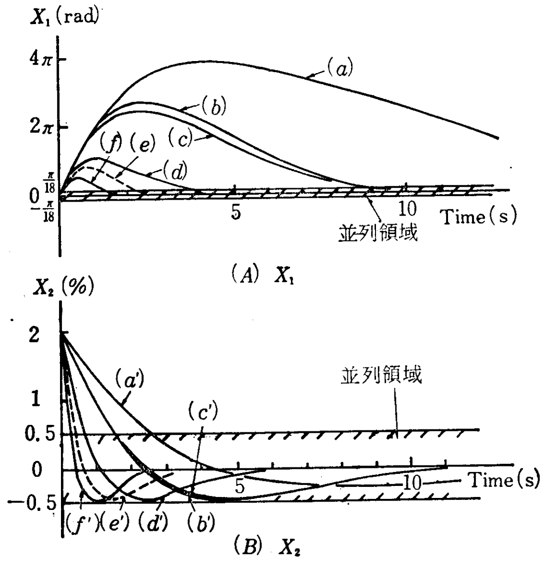
第3図　係数行列 **A**, **B** の値

Fig. 3　Coefficient matrix A and B

* 本研究で定めた並列領域は，発電機に非同期並列方式[4]を適用したため，一般よりも相当広く取ってある。

第1表 C, C_m, Qの行列
Table. 1 Matrix of C, C_m and Q

C C_m Q	case および重み	行列	rank
C C_m の 行 列	case-1	C_m=diag〔1 1 1 1 1 1 1 1 1〕 C =diag〔1 1 1 1 1 1 1 1 1〕	rank 9
	case-2	C_m=diag〔1 1 1 1 - - 1 1 1〕 C =diag〔1 1 1 1 - - 1 1 1〕	rank 7
	case-3	C_m=diag〔1 1 - - - - - - - -〕 C =diag〔1 1 - - - - - - - -〕	rank 2
Q の 行 列	重み-1	Q=diag〔1 1 1 1 1 1 1 1 1〕	
	重み-2	Q=diag〔10 1 1 1 1 1 1 1 1〕	
	重み-3	Q=diag〔100 1 1 1 1 1 1 1 1〕	



第4図 位相角差 X_1 および周波数差 X_2 の時間応答曲線 a; 最適制御なしの場合, 曲線 b; 第1表で case-1, 重み-1, c; case-2, 重み-1, d; case-3, 重み-1, e; case-3, 重み-2, f; case-3, 重み-3. (B)図の曲線 a'〜f' も a〜f に対応

Fig. 4 Time response of phase angle difference X_1 and frequence difference X_2

(24)式に代入すればτが得られる。これを第5表にしるす。また状態変数の初期値を $X_1=X_3=X_4=X_5=X_6=X_7=X_8=X_9=0$, $X_2=7.54$〔rad/see〕, 並列領域を $X_{10}=\pm10$〔deg〕, $X_{20}=\pm1.88$〔rad/sec〕と定めれば, (27)および(28)式より収束時間の上限 t_{s1}, 下限 t_{s2} がそれぞれ得られる。これも第5表に示す。

第4図は (4.1)式の微分方程式を逐分積分を行って求めた系の応答特性の1例である。これらの曲線が初期値すなわち揃速開始より並列領域に収束するまでの所要時間を求めたものが, 第5表の t_s の欄に示してある。

t_s の値は t_{s1} と t_{s2} の間にあることから, 縮約法による収束時間推定法は妥当であるといえる。しかし上限値 t_{s1} と下限値 t_{s2} の時間幅が条件によってはかなり開く例もみられるが, いづれにしても系の応答はこの範囲内に入ることを理論づけた。

また収束時定数τは t_{s1}, t_{s2} に比例していることから

第2表 case-3, 重み-1 の場合の行列 K^*, F の値 ($K\delta=0.0016$, $K_f=1$)
Table. 2 Matrix K and F in case of case-3 and weight-1

K*=	2.677	2.432	2.531E-4	5.018E-3	7.240E-5	2.119E-2	2.769E-1	−1.099E-2	−4.988E-1
		3.876	3.894E-4	7.700E-3	1.113E-4	3.255E-2	9.028E-2	−1.694E-2	−1.129E-1
			4.605E-8	8.941E-7	1.316E-8	3.797E-6	7.848E-5	−2.018E-6	−1.461E-4
				1.756E-5	2.557E-7	7.415E-5	1.498E-3	−3.891E-5	−2.782E-3
					3.760E-9	1.085E-6	2.240E-5	−5.762E-7	−4.168E-5
						3.141E-4	6.445E-3	−1.659E-4	−1.198E-2
							1.362	−3.492E-3	−2.646
								8.878E-5	6.507E-3
									5.141

F=〔1.63 2.42〕

第3表　case-3，重み-2 の場合の行列 **K***，**F** の値

Table. 3 Matrix K and F in case of case-3 and weight-2

	1.304 E-1	7.470	7.409 E-4	1.486 E-2	2.121 E-4	6.239 E-2	4.098 E-1	−3.193 E-2	−6.753 E-1
		7.317	7.251 E-4	1.443 E-2	2.075 E-	6.080 E-2	1.120 E-1	−3.141 E-2	−9.899 E-2
			8.502 E-8	1.650 E-6	2.429 E-8	6.995 E-6	9.680 E-5	−3.718 E-6	−1.759 E-4
				3.256 E-5	4.720 E-7	1.369 E-4	1.830 E-3	−7.149 E-5	−3.310 E-3
					6.941 E-9	2.000 E-6	2.761 E-5	−1.062 E-6	−5.016 E-5
K*＝						5.783 E-4	7.912 E-3	−3.048 E-4	−1.435 E-2
							1.640	−4.331 E-3	−3.186
								1.636 E-4	7.894 E-3
									6.192

F＝〔4.10　3.98〕

第4表　case-3，重み-3 の場合の行列 **K***，**F** の値

Table. 4 Matrix K and F in case of case-3, and weight-3

	7.068 E-1	2.398 E-1	2.273 E-3	4.646 E-2	6.515 E-4	1.932 E-1	6.813 E-2	−9.671 E-2	−9.316 E-1
		1.416 E-1	1.381 E-3	2.777 E-2	3.954 E-4	1.163 E-1	1.432 E-1	−5.940 E-2	−4.683 E-2
			1.640 E-7	3.181 E-6	4.684 E-8	1.345 E-5	1.228 E-4	−7.152 E-6	−2.148 E-4
				6.316 E-5	9.102 E-7	2.640 E-4	2.290 E-3	−1.369 E-4	−3.962 E-3
					1.339 E-8	3.845 E-6	3.500 E-5	−2.042 E-6	−6.119 E-5
K＝						1.111 E-3	9.966 E-3	−5.831 E-4	−1.735 E-2
							2.003	−5.538 E-3	−3.891
								3.147 E-4	9.756 E-3
									7.563

F＝〔10.45　6.41〕

もかるわように，系の収束の良し悪しはτによっても判定できることもわかる。

4. 結　言

線形制御系において，系の状態変数が収束するまでの所要時間を解析的に求める問題について理論展開を試みた。そして全ての状態変数のうち，一部の状態変数が収束する時間推定について縮約法を提案した。この方法を発電機調速機の揃束同期系に適用して解析を行った。この時間推定法による結果と，系の時間応答による結果とを比較したところ良い一致をみた。

またこの推定法は一般制御系において，着目する状態変数の収束時間を推定するうえで有効な方法である。

参　考　文　献

1)　中村，永野；名古屋工業大学学報，投稿中
2)　Schultz & Melsa（久村訳）；状態関数と線形制御系，学献社
3)　中村，三宅，武藤；昭和49年電気関係学会東海支部連大論文集，4a—c—4

第 5 表 揃速同期時間の推定値 t_{s1}, t_{s2} と逐次数値解析結果 t_s との比較

Table. 5 Comparison between the estimated values t_{s1}, or t_{s2}, and analitical value t_s

C_m, C の値	Qの値		重み-1	重み-2	重み-3
Case-1	収束時定数	τ 〔s〕	2.13	1.11	0.629
	推定時間	上限 t_{s1} 〔s〕	20.8	9.83	5.02
		下限 t_{s2} 〔s〕	7.40	4.00	2.33
	逐次解による時間	t_s 〔s〕	9.7	5.2	2.9
Case-2	収束時定数	τ	1.57	0.842	0.485
	推定時間	t_{s1}	15.1	7.32	3.72
		t_{s2}	5.40	2.98	1.74
	逐次解による時間	t_s	9.6	5.2	2.9
Case-3	収束時定数	τ	0.854	0.506	0.346
	推定時間	t_{s1}	7.47	3.96	2.35
		t_{s2}	3.09	1.85	1.26
	逐次解による時間	t_s	3.9	2.4	1.5

4) 中村, 武藤, 川越; 電気学会論文誌, vol. 94-B, No. 2, 昭和 49-2