弾—粘塑性中の縦せん断組合せ応力波

深津鋼次・飯田育克

機械工学科

(1976年9月11日受理)

An Analysis of Combined Longitudinal and Torsional Stress Waves in an Elastic/Viscoplastic Material

Kouji FUKATSU and Ikuyoshi IIDA

Department of Mechanical Engineering

(Received September 11, 1976)

This paper carries out an analysis of the propagation of elastic viscoplastic waves due to a combined load of pressure and shear distributed on the free boundary of a plate the thickness of which is of the order of a wave length.

The numerical solutions are obtained using finite difference equations obtained by integration along bicharacteristics in which the Mises yield condition and Malvern's rate-dependent theory are assumed.

The loading consists of a static pressure or torque, to a stress beyond the yield point of the material, followed by a longitudinal and torsional impact.

The theoretical results show that the stress paths in deviatoric stress and shear stress are very complicated in cases where pretorque is applied.

1. 緒　言

材料の動的塑性変形に関する研究は，まず単軸応力問題から進められ，主に構成方程式が研究されてきた。この面でも，いまだ一次元問題の現象すら完全に説明できる構成式が確立されてはいない現状ではあるが，一方，三次元物体における動的塑性挙動の解明に対する要請も大きくなってきているために，最近，組合せ応力を受ける平面応力問題，平面ひずみ問題が理論的あるいは実験的に研究されている。

塑性域における組合せ応力波に関する理論的研究としては，まず，Bleich と Nelson[1] が完全弾塑性を仮定し，無限体にステップ負荷を与えて計算した。また，Clifton[2] は円管における組合せ塑性波の一次元伝ぱ問題を等方加工硬化を仮定し，ひずみ速度依存性を無視して解析した。さらに，Ting[3] や Goel[4] は等方加工硬化の半無限体において，ひずみ速度依存性を考慮して理論解析した。

筆者らは，この Ting および Goel の理論を基にし，塑性域まで圧縮またはせん断負荷が加えられた板に，組合せ衝撃負荷を与えた場合を計算し，前負荷からの応力やひずみの増加量の非瞬間的塑性効果による影響を調べた。

Lipkin-Clifton[5] は，ひずみ速度に依存しない理論による理論解析を行うと同時に，塑性域までねじり負荷を加えたアルミ円管に引張衝撃を与えた実験を行い，定性的には理論結果とほぼ一致したことを報告している。また，福岡[6] はひずみ速度に依存しない理論による数値解と増分衝撃負荷実験の結果を比較し，ねじり増分衝撃を

与えた場合には，せん断ひずみが理論解と一致しないこと，さらに，波頭の観測結果によれば，塑性域においても波頭には常に瞬間的塑性応答はなく瞬間的弾性応答と非瞬間的塑性応答がみられたことを報告している。

このように組合せ応力下では，ひずみ速度による非瞬間的塑性効果が大きな影響力を持つものと思われる。そこで，本報では，ひずみ速度依存性を考慮した。その理論解から，せん断前負荷の場合，せん断応力がせん断波の到達時にせん断前負荷応力以下になり，その後増加するという結果を得た。また，偏差応力とせん断応力の応力軌跡は，どちらかの応力が減少する経路をたどり，せん断前負荷の場合には特に複雑な応力経路となることがわかった。そのために時間的応力経過における非瞬間的塑性応答の特徴は，圧縮応力よりせん断応力にはっきり現われた。

2. 基礎方程式

図1に示すごとき $x=l_x$ が固定端で，$x=0$ に一様な圧縮とせん断の組合せ衝撃負荷を受ける無限板を考える。v_x, v_y は粒子速度の x, y 方向成分で，x と時間 t の関数とし，粒子の Z 方向速度成分を零と仮定すると，軸応

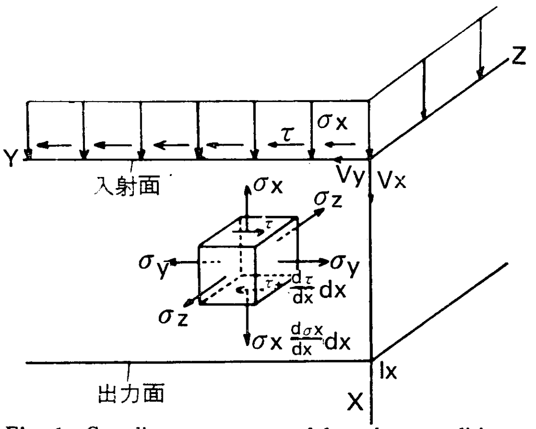

Fig. 1 Coordinate system and boundary condition.

力 σ とせん断応力 τ に対し，運動方程式

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}=\rho\frac{\partial v_y}{\partial t} \tag{2}$$

が成り立つ。ここに ρ は材料の密度である。

材料の構成方程式は Sokolovskii-Malvern 型の構成式

$$\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial\varepsilon^e{}_{ij}}{\partial t}+\frac{\partial\varepsilon^p{}_{ij}}{\partial t}=\frac{1}{2G}\cdot\frac{\partial S_{ij}}{\partial t}+\frac{\delta_{ij}}{3K}\cdot\frac{\partial\sigma_m}{\partial t}+S_{ij}\Phi(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^p) \tag{3}$$

を用いる。ここに ε_{ij}, S_{ij} はひずみテンソルと偏差応力テンソル，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ，σ_m に平均応力，G, K, Φ は横弾性係数，体積弾性係数，非瞬間的塑性効果を表わす。また，降伏条件は Levy-Mises の関係を用い，次のように仮定した。

$$\frac{\partial\varepsilon^p{}_{ij}}{\partial t}=\frac{3}{2}\cdot\frac{S_{ij}}{\bar{\sigma}}\Phi(\bar{\sigma},\ \bar{\varepsilon}^p),$$
$$\Phi(\bar{\sigma},\ \bar{\varepsilon}^p)=\begin{cases}k(\bar{\sigma}-f(\bar{\varepsilon})) & :\bar{\sigma}\leqq f(\bar{\varepsilon})\\ 0 & :\bar{\sigma}<f(\bar{\varepsilon})\end{cases} \tag{4}$$

ただし，相当応力 $\bar{\sigma}=\sqrt{3S_{ij}S_{ij}/2}$, 相当ひずみ $\bar{\varepsilon}^p=\sqrt{2\varepsilon^p{}_{ij}\varepsilon^p{}_{ij}/3}$, また，$k$ は定数，$\bar{\sigma}-f(\bar{\varepsilon})$ は過剰応力，$f(\bar{\varepsilon})$ は静的変形抵抗力である。ここで y, z 方向に無限の場合，$\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=0$, $\sigma_y=\sigma_z$ の条件により，式(3)は

$$\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial t}=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial t}-2\nu\frac{\partial\sigma_y}{\partial t}\right)+S_x\Phi(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^p) \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial t}=0=\frac{1-\nu}{E}\cdot\frac{\partial\sigma_y}{\partial t}-\frac{\nu}{E}\cdot\frac{\partial\sigma_x}{\partial t}+S_y\Phi(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^p) \tag{6}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{1}{2G}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial t}+\tau\Phi(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^p) \tag{7}$$

となる。ただし，$S_y=-S_x/2$, $\bar{\sigma}=\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+3\tau^2}$, $\bar{\varepsilon}^p=\sqrt{(\varepsilon^p{}_x)^2+3(\gamma^p)^2}$, ν はポアソン比，E は縦弾性係数，γ はせん断ひずみである。また，連続の条件より

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial t} \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{9}$$

を得る。式(5)〜(9)を行列の形で表わすと

$$AW_t+BW_x=C \tag{10}$$

となる。ここに W, C は

$$W=\begin{pmatrix}u\\ v\\ \sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau,\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -S_x\Phi\\ S_x\Phi\\ -2\tau\Phi\end{pmatrix}$$

なるベクトルであり，A, B は

$$A=\begin{pmatrix}\rho & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/E & -2\nu/E & 0\\ 0 & 0 & -2\nu/E & 2(1-\nu)/E & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

式(10)は準線形双曲型偏微分方程式で，特性曲線法による解法が可能である。

3. 特性曲線と微分関係式

式(10)の特性曲線はこの系の固有値 c に一致するので，特性速度 c は

$$\det\ (cA-B)=0 \qquad (11)$$

の解として

$$c_0=0,\ c_1=\pm\sqrt{\frac{E}{\rho}\cdot\frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}},$$
$$c_2=\pm\sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad (12)$$

の5つが得られる。この5つの特性曲線に沿って成り立つ微分関係式は

$$\left.\begin{aligned} &d\varepsilon_x-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}d\sigma_x-\frac{1-2\nu}{1-\nu}S_x\Phi dt=0\\ &d\gamma-(1/2G)\,d\tau-\tau\Phi dt=0\\ &d\sigma_y-\frac{\nu}{1-\nu}d\sigma_x-\frac{E}{2(1-\nu)}S_x\Phi dt=0 \end{aligned}\right\}:c=c_0 \qquad (13)$$

$$d\sigma_x-\rho c_1dv_x+\frac{E}{1+v}S_x\Phi dt=0 \qquad :c=c_1 \qquad (14)$$

$$d\tau-\rho c_2dv_y+2G\tau\Phi dt=0 \qquad :c=c_2 \qquad (15)$$

になる。

本報では，ステップ負荷が入射する場合の数値計算結果については紹介していないが，その場合の微分関係式は次のようにして求められる[7]。すなわち，Ugoniot の関係式より $dx\pm cdt=0$ の前後で，圧縮ステップ波の波頭では $\Delta\sigma_x\pm\rho c_1\Delta v_x=0,\ \Delta v_x\pm c_1\Delta\varepsilon_x=0,\ \Delta\sigma_y\pm(\nu/(1-\nu))\cdot\Delta\sigma_x=0$，せん断ステップ波の波頭では $\Delta\tau\pm\rho c_2\Delta v_y=0,\ \Delta v_y\pm 2c_2\Delta\gamma=0$ が成り立ち，それぞれの微分関係式は

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\sigma_x=-\rho c_1\Delta v_x\\ &\Delta v_x=-c_1\Delta\varepsilon_x\\ &\Delta\sigma_y=(\nu/(1-\nu))\,\Delta\sigma_x \end{aligned}\right\} \quad :c=c_1\ \text{前後で} \qquad (16)$$

$$d\sigma_x-\rho c_1dv_x+(E/(1+v))\,S_x\Phi dt=0$$
$$:c=c_1\ \text{に沿って} \qquad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\tau=-\rho c_2\Delta v_y\\ &\Delta v_y=-2c_2\Delta\gamma \end{aligned}\right\} \quad :c=c_2\ \text{の前後で} \qquad (18)$$

$$d\tau-\rho c_2dv_y+2\tau G\Phi dt=0 \qquad :c=c_2\ \text{に沿って} \qquad (19)$$

を用いて数値計算できる

4. 積分計画

式(12)の特性曲線は図2のような網目を形成する。この網目に沿って成り立つ微分関係式が差分式に書き直される。まず，P, Q, R 点の各値が既知であれば，S 点の値は次式より求まる。

$$\sigma_x{}^S-\rho c_1v_x{}^S=\sigma_x{}^R-\rho c_1v_x{}^R-(E/(1+\nu))\,S_x{}^R\Phi^Rdt \qquad (20)$$

$$\sigma_x{}^S+\rho c_1v_x{}^S=\sigma_x{}^Q+\rho c_1v_x{}^Q-(E/(1+\nu))\,S_x{}^Q\Phi^Q\Delta t \qquad (21)$$

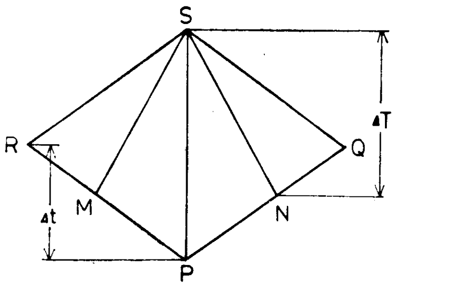

Fig. 2 Construction of characterisitc network.

$$\tau^S-\rho c_2v_y{}^S=\tau^M-\rho c_2v_y{}^M-2G\tau^N\Phi^M\Delta T \qquad (22)$$

$$\varepsilon_x{}^S-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}\sigma_x{}^S=\varepsilon_x{}^P-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}\sigma_x{}^P$$
$$+\frac{1-2\nu}{1-\nu}S_x{}^P\Phi x\Delta t \qquad (24)$$

$$\gamma^S-\frac{1}{2G}\tau^S=\gamma^P-\frac{1}{2G}\tau^P+2\tau^P\Phi^P\Delta t \qquad (25)$$

$$\sigma_y{}^S-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y{}^S=\sigma_y{}^P-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x{}^P+\frac{E}{1-\nu}S_x{}^P\Phi^P\Delta t \qquad (26)$$

$$\Delta T=(2c_1/(c_1+c_2))\,\Delta t \qquad (27)$$

また，M 点，N 点の値は R, P 点 P, R 点より内挿法で求める。すなわち

$$\begin{aligned} (\text{M 点の値})&=(\text{R 点の値})\ \frac{2c_2}{c_1+c_2}\\ &\quad+(\text{P 点の値})\ \frac{c_1-c_2}{c_1+c_2}\\ (\text{N 点の値})&=(\text{Q 点の値})\ \frac{2c_2}{c_1+c_2}\\ &\quad+(\text{P 点の値})\ \frac{c_1-c_2}{c_1+c_2} \end{aligned} \qquad (28)$$

入射端の値は網目の SPQ を考え，S 点での入射境界応力 $\sigma_x{}^S$, τ^S が既知であれば，

$$v_x{}^S=\frac{1}{\rho c_1}\left(-\sigma_x{}^S+\sigma_x{}^Q-\frac{E}{1+\nu}S_x{}^Q\Phi^Q\Delta t\right)+v_x{}^Q \qquad (29)$$

$$v_y{}^S=\frac{1}{\rho c_2}\,(-\tau^S+\tau^N-2G\tau^N\Phi^N\Delta t)+v_y{}^N \qquad (30)$$

と式(24)～(26)より求める。

出力端の値は網目の SRP を考え，出力端が固定の場合には，$v_x{}^S=v_y{}^S=0$ より

$$\sigma_x{}^S=\sigma_x{}^R-\rho c_1v_x{}^R-\frac{E}{1+\nu}S_x{}^R\Phi^R\Delta t \qquad (31)$$

$$\tau^S=\tau^M-\rho c_2v_y{}^M-2G\tau^M\Phi^M\Delta T \qquad (32)$$

が得られ，式(24)～(26)と連立して解くことができる。

5. 数値計算

図3のような圧縮応力とせん断応力を同時に与え，表1のように初期条件として前負荷のない場合，圧縮前負荷の場合，せん断前負荷の場合の三種類の変化を与え数値計算した。

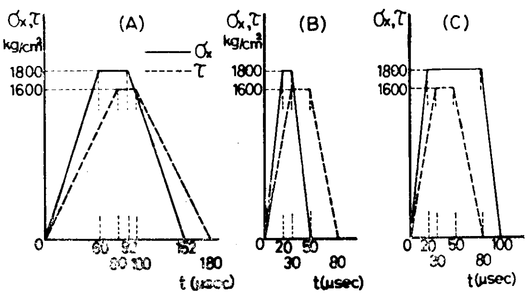

Fig. 3 Initial conditions.

Table 1 Initial conditions.

	case 1	case 2	case 3
σ_x kg/cm^2	0	1847.9	0
σ_y 〃	0	892.4	0
υ 〃	0	0	800
ε_x	0	0.00207	0
γ	0	0	0.0201
v_x cm/s	0	0	0
v_y 〃	0	0	0

計算に用いた材料はアルミニュームを対象にし，非瞬間的塑性効果 $S_x\Phi$ は

$$S_x\Phi=10^6(\sigma-703.1\times10^4(2\times10^4-10/\varepsilon))\quad[s^{-1}]:\varepsilon\geqq\varepsilon_Y \tag{33}$$

$$S_x\Phi=0 \qquad :\varepsilon<\varepsilon_Y$$

とした[8]。また，$E=7.031\times10^5$ kg/cm^2，$\rho=2.81\times10^{-6}$ kg·sec^2/cm^4，$\nu=0.3$，$G=2.704\times10^5$ kg/cm^2，$\varepsilon_Y=0.001$，とし，$l_x=11.6$cm，きざみ幅 $\Delta t=0.2\,\mu$sec，$\Delta x=0.116$cm で数値積分した。

図4はせん断前負荷時の軸応力σ_xとせん断応力τを表わしている。σ_xの前負荷量から増加した量（以後増加量とよぶ）は，前負荷なし，圧縮前負荷のいずれの場合にも，図4とほぼ同量であった。一方，前負荷なしおよび圧縮前負荷の場合におけるτは，せん断波の到達後増加するのに対し，せん断前負荷の場合には，せん断波が到達した時点でまず減少し，その後増加する。出力端でのτは約 100μs でせん断前負荷応力の大きさに達し，以後ほぼその値を保つ。

このように，せん断前負荷の場合のせん断応力が，せん断波の到達時に，せん断前負荷応力以下になる現象は，非瞬間的塑性応答の項（$-\tau\Phi$）によるものである。すなわち，せん断波に先行する圧縮波によって Φ が増加している上に，せん断前負荷によって大きなτを与えると非瞬間的塑性応答の項（$-\tau\Phi$）が極端に大きくなり，せん断波の減衰が急激に起るためである。

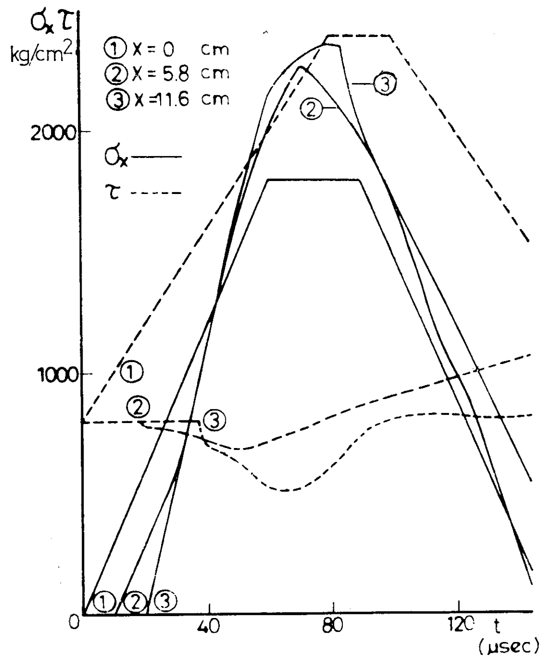

Fig. 4 History of compressive and shearing stress.

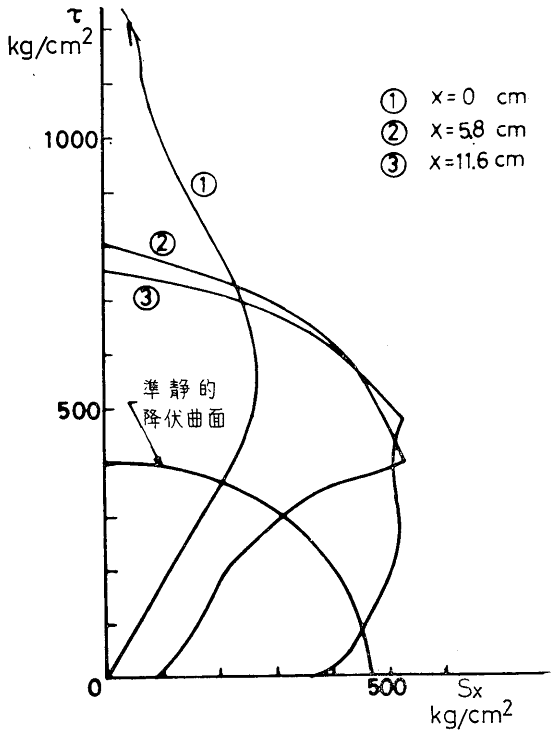

Fig. 5 Stress trajectories in a precompressed plate.

図5と図6はそれぞれ前負荷のない場合とせん断前負

荷時の偏差応力とせん断応力の軌跡を描いたものであり，塑性域での組合せ応力波の伝ぱにおいては，偏差応力かせん断応力のいずれかが減少するような経路をたどるものと思われる。このように前負荷無しおよび圧縮前負荷の場合，圧縮波が到達した以後，偏差応力 S_x が減少し続ける。このために，σ_x に対しては非瞬間的塑性応答の項（$-S_x\Phi$）の影響は比較的小さくなる。また，せん断前負荷の場合には，図6のように非常に複雑な応力経路をたどる。以上のように，非瞬間的塑性応答の特徴は，圧縮応力よりせん断応力にはっきりと現われるものと思われる。

σ_y の増加量は，圧縮前負荷時には前無負荷の場合の1.6倍になった。また，せん断前負荷時の σ_y の増加量は，出力端では前負荷のない場合より小さい。これは前負荷によって相当ひずみが大きくなり，過剰応力が小さくなるため非瞬間的塑性応答の項 Φ による σ_y の増加が小さく，その上図4が示すようにせん断応力も出力端ではほとんど増加しないため，σ_yの増加が起らないものと思われる。このように σ_x の増加量が前負荷の影響をほとんど受けないのに対し，σ_yの増加量は前負荷に対しかなり敏感である。

図8は圧縮前負荷時の軸ひずみ ε_x の時間的変化を示しており，図7の σ_x, σ_y の時間的変化と比較すると，σ_x は衝撃後 80 μsec で最大値 4260 kg/cm^2 に達し，ε_x は 88 μsec 後に最大値 0.0067 に，σ_y は 92 μsec 後に最大値 3840 kg/cm^2 に達している。このように軸応力 σ_x の減少時に，ε_x とσ_yの増加が見られるが，これは Malvern 型構成方程式の非瞬間的塑性応答の特徴である。そして，ε_x, ε_y は共に $c=0$ の特性曲線に沿って，伝播するので，

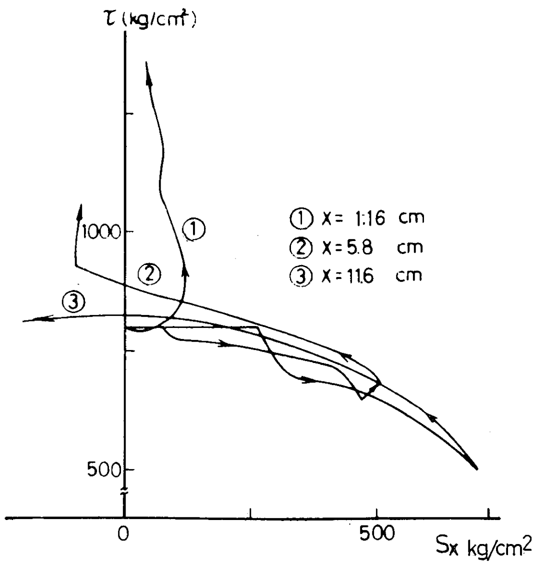

Fig. 6 Stress trajectories in a pretorqued plate.

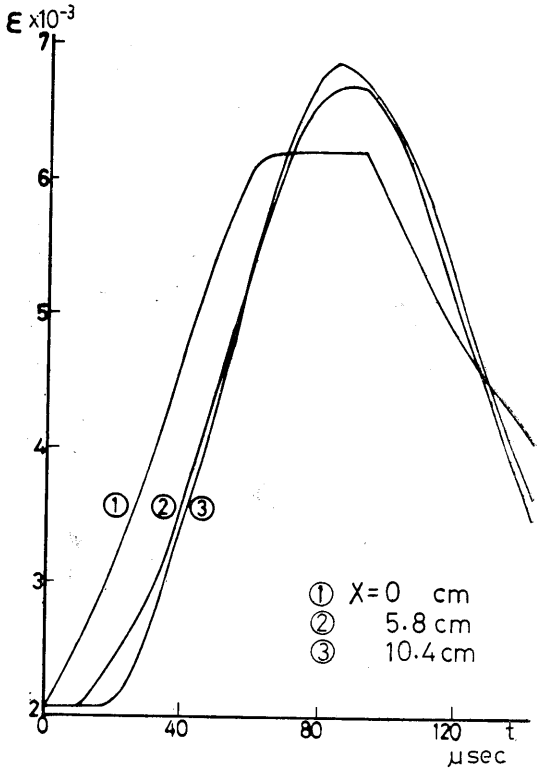

Fig. 7 History of compressive stress.

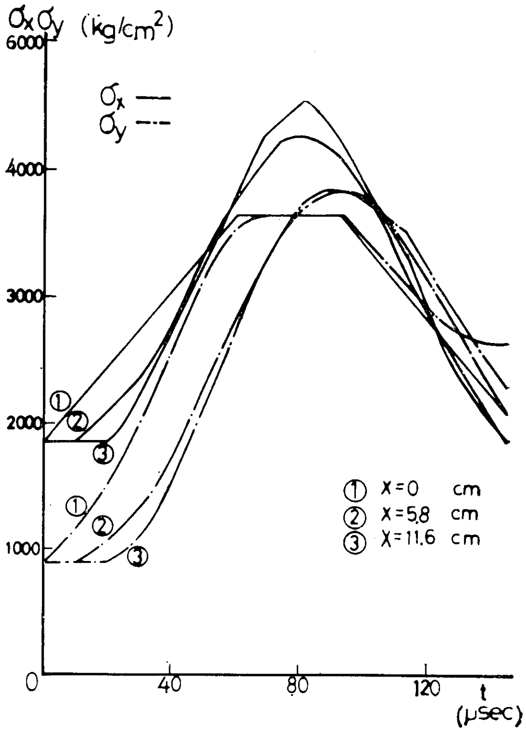

Fig. 8 History of axial strain.

非瞬間的塑性応答の影響は，式(13)から（$S_x\Phi$ の係数）／（$\Delta\sigma_x$ の係数）の値によって決まることがわかる。その値は，ε_x に対して $(E/(1+\nu))\cdot dt$，σ_y に対して $(E/2\nu)dt$ となるので，一般に σ_y の方が ε_x より粘塑性の影響を大きく受け，σ_y が ε_x より遅れることになる。

6. 結　論

圧縮前負荷，せん断前負荷が，塑性域における縦せん断組合せ衝撃応力に与える影響を調べた結果，次のような特徴がわかった。

(1) σ_x の増加量が前負荷の影響をほとんど受けないのに対し，σ_y の増加量は前負荷に対し敏感である。

(2) せん断前負荷時のせん断応力の増加量は，せん断波の伝ぱによってせん断前負荷応力以下に一旦減少した後増加する。

(3) 塑性域での組合せ応力波の伝ぱにおいては，偏差応力かせん断応力のいずれかが減少する経路をたどる。

(4) 時間的応力経過における非瞬間的塑性応答の特徴は圧縮応力よりせん断応力に顕著に現われる。

終りに，本研究に対し終始ご指導，ご援助を賜った名古屋工業大学織田昌信教授に深く感謝の意を表します。

文　献

1) Bleich, H.H. and Nelson I., *J. Appl. Mech.*, **33** (1966), 146.

2) Clifton, R.J., *J. Appl. Mech.*, **35** (1968), 782.

3) Ting, T.C.T. and Nan, N., *J. Appl. Mech.*, **36** (1969), 189.

4) Goel, R.P. and Malvern, L.E., *J. Appl. Mech.*, **93** (1971), 895.

5) J. Lipkin and Clifton, R.J., 12 Inter. Cong. Appl. Mech., (1968), 292.

6) 福岡，益居，日本機械学会論文集，**40** (1974), 1544.

7) Wood, E.R. and Phillips, A., *J. Mech. Phys. Solids*, **15** (1967), 241.

8) Malvern, L.E., *J. Appl. Mech.*, **18** (1951), 203.