回転二球間流れの摩擦抵抗の一考察

中　林　功　一

生産機械工学科

(1975年　8月　25日受理)

A Note for Frictional Resistance of the Flow between Two Concentric Spheres, One of which Roates.

Kouichi NAKABAYASHI

Department of Mechanical Engineering

(Received August 25, 1975)

Frictional resistance of the flow between two concentric spheres, the outer one rotating and the inner one stationary, is theoretically considered in the case where the clearance between the two spheres is not so small. The results obtained are as follows. Coefficient of frictional moment C_M is proportional to $Re^{-1/2}$ and $(R_2/R_1)^{3/2}$ in the laminar flow. In the turbulent flow C_M is proportional to $Re^{-1/5}$ and $(R_2/R_1)^{9/5}$, where Re is Reynolds number, and R_1 and R_2 are the outer radius of the inner sphere and the inner one of the outer sphere, respectively.

1. はじめに

同心状態に置かれた大小2個の球が形成する球かく状すきまにおいて，一方の球が軸のまわりに回転し，他方が静止している場合の流れの問題は流体工学上興味のある問題である。また工業的にも応用される所が多い。外球が回転し，内球が静止している場合の摩擦抵抗の実験[1]によれば，すきま比βが極めて小さい場合を除いて，層流の摩擦モーメント係数C_Mがレイノルズ数R_eの増加に対し，R_eの約1/2乗に反比例して減少する。また乱流ではR_eの1/5乗に反比例することが知られた。しかし，すきま比βと摩擦モーメント係数C_Mとの関係については定量的に明確な形で結論が得られていない。本報では上記の場合に対し，実験で得たC_MとR_eの関係に理論的説明を与えるとともに，C_Mとβの関係を理論的に導出する。

おもな記号

C_M; 摩擦モーメント係数（摩擦抵抗係数）$=M/(\rho R_1^5 \omega^2)$

K; 係数

M; 摩擦モーメント

P; 圧力

R_1, R_2; 内球と外球半径

R_e; レイノルズ数$=R_1^2\omega/\nu$

S; すきま$=R_2-R_1$

U; ポテンシャル・コアのφ方向速度

y; 外球壁から内球中心に向う座標 (Fig. 2)

z; 内球壁から垂直，外向きの座標 (Fig. 2)

(r,θ,φ); 球座標 (Fig. 1)

(u,v,w); 座標系(r,θ,φ)に対する速度成分

β; すきま比$=S/R_1$

δ, ε; 外球内面および内球外面に沿う境界層厚さ (Fig.2)

η; 無次元座標$=y/\delta$またはz/ε

μ; 粘性係数

ν; 動粘性係数

ρ; 密度

τ; せん断応力

ω; 外球回転の角速度

添字 i; 内球

　0; 外球

　θ; θ方向

　φ; φ方向

2. 運動量積分方程式

レイノルズ数R_eのごく小さい，いわゆるクリーピング流動では摩擦抵抗モーメントMが比較的簡単な計算から$M=8\pi\mu\omega R_1^3 R_2^3/(R_2^3-R_1^3)$と求めうることは周知のとおりである。これも摩擦モーメント係数C_Mで表わせば

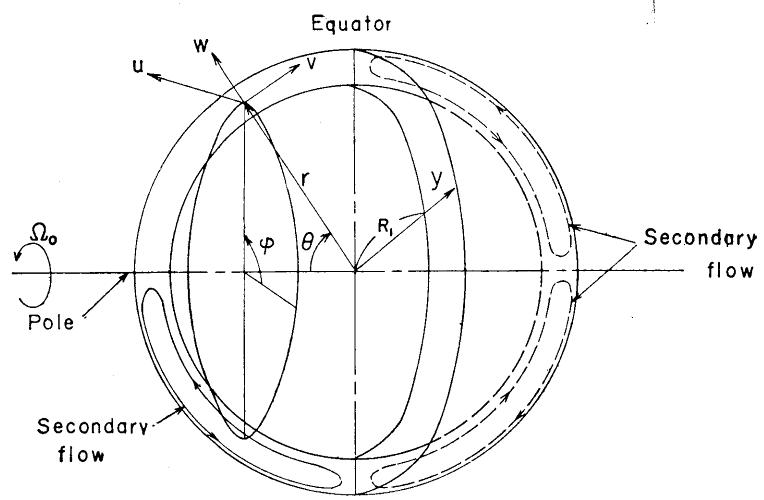

Fig. 1 Spherical coordinate

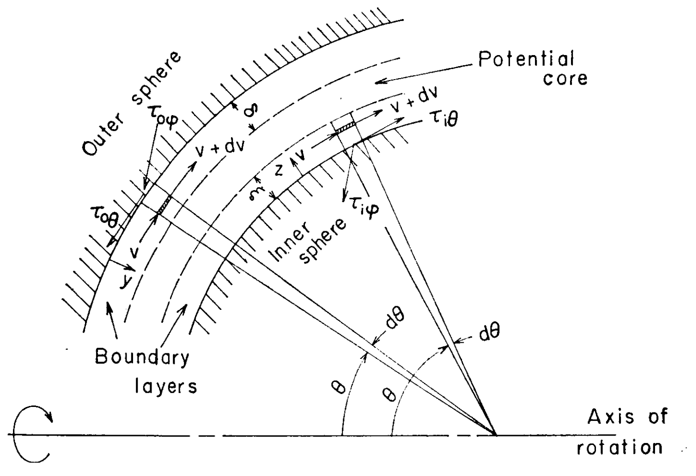

Fig. 2 Schematic picture of boundary layers produced in the spacing between two concentric spheres.

$$C_M=\frac{8\pi}{3}\ \frac{(1+\beta)^3}{\beta(1+\beta+\frac{1}{3}\beta^2)R_e}$$

となる。上式の適用範囲は理論的予測から$R_e \ll \beta^{-2}$で与えられるが，実験によれば上式がこの適用限界の約10倍のR_eまで実験値と一致する。しかし，この限界値以上のレイノルズ数においては流れが層流であっても上式は適用できない。その理由はFig. 1に示すような二次流れの発生によって，φ方向速度成分uが著しい影響を受けるからである。実験によればたとえば，すきま比βが0.06のとき$R_e=10^4 \sim 10^5$においてC_MがR_eの約1/2乗に反比例して与えられる。さらにR_eが増大すれば流れが乱流となるがその場合はC_MがR_eの1/5乗に反比例して減少する。このような高レイノルズ数流れについて以下の仮定を用いて計算しよう。

今，すきま流れをFig. 2に示すように外球内壁および内球壁に沿う境界層流れと，両者の中間のポテンシャル・コア部に分離して考えよう。境界層内の速度分布形がθ方向に相似性を保ち，速度成分uに対してはFig. 3—a，また速度成分vに対してはFig. 3—bのように与えられるものとする。また圧力Pはθ方向にのみ変化すると仮定すれば運動量積分方程式は以下のように与えられる。

外球表面に作用するせん断応力のθ方向成分$\tau_{o\theta}$は外球

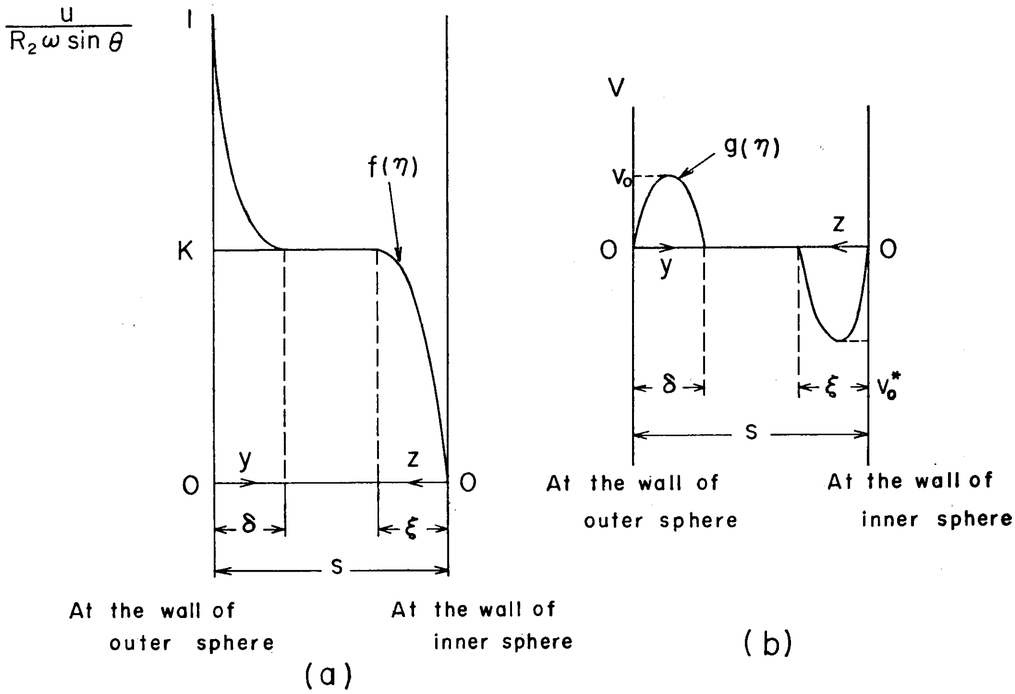

Fig. 3 Assumption of velocity distribution, u and v.

側の境界層δにおけるθ方向の運動量の関係から

$$\tau_{o\theta}=-\frac{\rho}{R_2^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\int_0^\delta(R_2-y)v^2dy\right]+\frac{\rho\cot\theta}{R_2^2}\int_0^\delta u^2(R_2-y)\,dy-\frac{\delta}{R_2}\frac{dP}{d\theta}\quad\cdots\cdots(1)$$

同じくφ方向成分$\tau_{o\varphi}$はφ方向の角運動量の関係からつぎのように求められる。

$$\tau_{o\varphi}=\frac{\rho}{R_2^3\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int_0^\delta r^2uv\sin^2\theta dy\right)+U(R_2-\delta)\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^\delta rv\sin\theta dy)\right]\quad\cdots\cdots(2)$$

ただし　$r=R_2-y$.

外球に作用する摩擦モーメントM_oは

$$M_o=4\pi R_2^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tau_{o\varphi}\sin^2\theta d\theta\quad\cdots\cdots(3)$$

一方，内球表面のせん断応力のθ方向成分$\tau_{i\theta}$は

$$\tau_{i\theta}=-\frac{\rho}{R_1^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\int_o^\varepsilon(R_1+z)v^2dz\right)+\frac{\rho\cot\theta}{R_1^2}\int_o^\varepsilon u^2rdz-\frac{\varepsilon}{R_1}\frac{dP}{d\theta}\quad\cdots\cdots(4)$$

同じくφ方向成分$\tau_{i\varphi}$は次式で与えられる。

$$\tau_{i\varphi}=\frac{\rho}{R_1^3\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta\int_o^\varepsilon r^2uvdz\right)+U(R_1+\varepsilon)\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\int_o^\varepsilon rvdz\right)\right]\quad\cdots\cdots(5)$$

ただし　$r=R_1+z$. ゆえに内球に作用する摩擦モーメントM_iはつぎのように求められる。

$$M_i=-4\pi R_1^3\int_o^{\frac{\pi}{2}}\tau_{i\varphi}\sin^2\theta d\theta\quad\cdots\cdots(6)$$

ここで明らかに$M_o=M_i$でなければならない。

ポテンシャル・コアにおいては$u=U, v=w=0$と仮定できるので球座標を用いたN.S 運動方程式からPに対しつぎの関係式がえられる。

$$U^2\cot\theta=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial\theta}\quad\cdots\cdots(7)$$

ただし上式のUは$U=K\omega R_2\sin\theta$で与えられるものとする。

以上の式(1)〜(7)を用いて次節のように摩擦モーメント$M_o=M_i$を求めることができる。

3. 層流の摩擦モーメント係数

内球側と外球側の境界層内の速度分布は相似であり，u,vはそれぞれ次式で与えられるものと仮定する (Fig. 3)．

外球側境界層 ($0<y<\delta$) では

$$\left.\begin{aligned}u&=K\omega R_2\sin\theta\cdot f(\eta)\\ v&=v_og(\eta)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(8\text{—a})$$

内球側境界層 ($0<z<\varepsilon$) では

$$\left.\begin{aligned}u&=R_2\omega\sin\theta\{1-(1-K)f(\eta)\}\\ v&=-v_o{}^*g(\eta)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(8\text{—b})$$

ただし $f(\eta)$, $g(\eta)$はηのみの関数である。

ゆえに内，外球壁に作用するせん断応力の θ,φ方向成

分は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\tau_{o\theta}&=\mu\left.\frac{dv}{dy}\right|_{y=o}=\frac{\mu v_o}{\delta}g'(0)\\ \tau_{o\varphi}&=-\mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=o}=-\frac{\mu}{\delta}R_2\sin\theta\cdot\omega(K-1)f'(0)\\ \tau_{i\theta}&=\mu\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=o}=-\frac{uv_o^*}{\varepsilon}g'(0)\\ \tau_{i\varphi}&=-\mu\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=o}=-\frac{\mu}{\varepsilon}K\omega R_2\sin\theta\cdot f'(0)\end{aligned}\right\}\cdots(9)$$

ここで$f(\eta)$, $g(\eta)$をDaily & Nece[2]が円板摩擦の計算に用いたと同様，境界条件を満足するように仮定すれば次式がえられる。

$$\left.\begin{aligned}f(\eta)&=2\eta-\eta^2\\ g(\eta)&=(2\eta-\eta^2)(1-\eta)^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(10)$$

式(7), (8—a), (9)を式(1), (2)に代入し，v_oを消去すれば，外球側境界層においてつぎの微分方程式が得られる。

$$\sin\theta\frac{dX}{d\theta}+A_1X\cos\theta=A_2\cos\theta\left\{\sin\theta\frac{dX}{d\theta}+A_3X\cos\theta\right\}^2X^3\cdots\cdots(11)$$

ここで

$$X=R_e^{\frac{1}{2}}\delta/R_1$$

$$A_1=\frac{31+53K}{13+29K}$$

$$A_2=\frac{(3+4K-7K^2)(3+11K)^2}{1050(1-K)(13+29K)}$$

$$A_3=\frac{9+19K}{3+11K}$$

内球側境界層については式(7), (8—a), (9)を式(4), (5)に代入してv_o^*を消去すればつぎの微分方程式が得られる。

$$\sin\theta\frac{dY}{d\theta}+B_1Y\cos\theta=B_2Y^3\cos\theta\left\{\sin\theta\frac{dY}{d\theta}+B_3Y\cos\theta\right\}^2\cdots\cdots(12)$$

ここで $B_1=53/29$, $B_2=121/2250$, $B_3=19/11$,

$Y=\frac{\varepsilon}{R_1}K^{\frac{1}{2}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}}R_e^{\frac{1}{2}}$ である。

また式(3)および(6)で与えられるM_o, M_iにおいて，$M_o=M_i$の関係が成立しなければならないから，つぎの関係式が導出される。

$$\frac{1-K}{K^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{5}{2}}=\frac{\int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\theta}{Y}d\theta}{\int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\theta}{X}d\theta}\cdots\cdots(13)$$

いま簡単のため式(11), (12)における微分項 $dX/d\theta$, $dY/d\theta$を無視して計算すれば

$$X=\left(\frac{A_1}{A_2A_3^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta}}\cdots\cdots(14\text{—a})$$

または

$$\delta=R_1R_e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{A_1}{A_2A_3^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta}}\cdots\cdots(14\text{—b})$$

$$Y=\left(\frac{B_1}{B_2B_3^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta}}\cdots\cdots(15\text{—a})$$

または

$$\varepsilon=R_1R_e^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{B_1}{B_2B_3^2}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta}}\cdots(15\text{—b})$$

式(14—a), (15—a)を式(13)に代入し，$R_2/R_1=(1+\beta)$ に対するKの値K_oを求める。このK_oを用いて摩擦モーメント係数C_Mがつぎのように求められる。

$$C_M=6K_o^{\frac{3}{2}}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}}R_e^{-\frac{1}{2}}=6K_o^{\frac{3}{2}}(1+\beta)^{\frac{3}{2}}R_e^{-\frac{1}{2}}\cdots\cdots(16)$$

Fig. 4にK_oの数値計算結果を示す。またFig.5は$C_MR_e^{\frac{1}{2}}(1+\beta)^{-\frac{3}{2}}$と$\beta$の関係である。

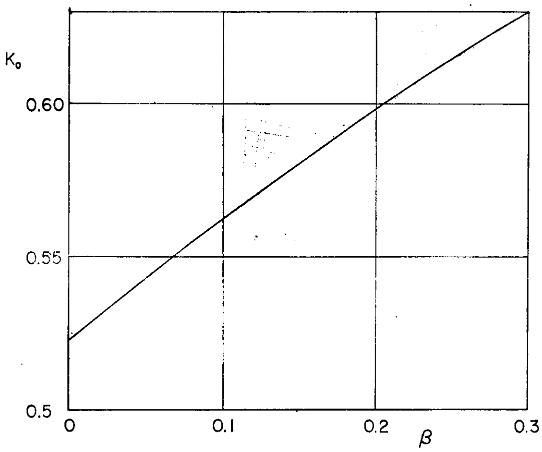

Fig. 4 Relationship between K_0 and β.

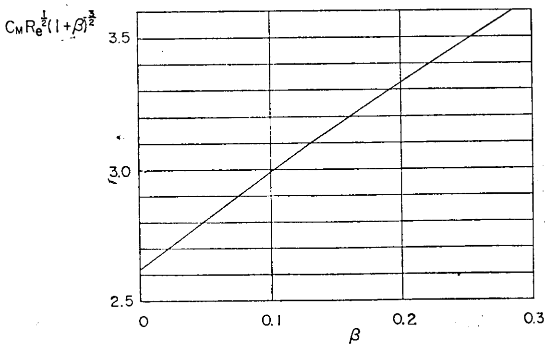

Fig. 5 Relationship between $C_MR_e^{\frac{1}{2}}(1+\beta)^{-\frac{3}{2}}$ and β.

4. 乱流の摩擦モーメント係数

式(8)における$f(\eta)$および$g(\eta)$をDaily & Nece[2]と同様に$f(\eta)=\eta^{1/7}$, $g(\eta)=\eta^{1/7}(1-\eta)^4$とおき，式(8)を式(1), (2), (4), (5)に代入する。せん断応力は1/7乗則で与えられるものと仮定すれば次式で表わすことができる[3]。

内球側のせん断応力 $\tau_{i\varphi}$, $\tau_{i\theta}$は

$$\left.\begin{aligned}\tau_{i\varphi}&=0.0225\,\rho\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}KR_2\omega\sin\theta\\&\qquad\{K^2R_2{}^2\omega^2\sin^2\theta+v_o{}^{*2}\}^{\frac{3}{8}}\\\tau_{i\theta}&=0.0225\,\rho\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}v_o{}^*\,\{K^2R_2{}^2\omega^2\sin^2\theta+v_o{}^{*2}\}^{\frac{3}{8}}\end{aligned}\right\}\cdots(17\text{—a})$$

外球側のせん断応力$\tau_{o\varphi}$，$\tau_{o\theta}$，

$$\left.\begin{aligned}\tau_{o\varphi}&=0.0225\,\rho\left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}(1-K)\,R_2\omega\\&\qquad\{R_2{}^2\omega^2\sin^2\theta\,(1-K)^2+v_o{}^2\}^{\frac{3}{8}}\sin\theta\\\tau_{o\theta}&=0.0225\rho\left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{\frac{1}{4}}v_o\,\{R_2{}^2\omega^2\sin^2\theta\,(1-K)^2+v_o{}^2\}^{\frac{3}{8}}\end{aligned}\right\}\cdots(17\text{—b})$$

簡単のため，δおよびεのθに関する微分項を無視し，前節と同じ方法によって計算すれば乱流における摩擦モーメント係数として次式を得る。

$$C_M=C_t\,R_e{}^{-\frac{1}{5}}(R_2/R_1)^{\frac{9}{5}}=C_tR_e{}^{-\frac{1}{5}}(1+\beta)^{\frac{9}{5}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

ただしC_tはKを含む係数で，KはR_eによって変化するパラメータである。

5. おわりに

流れ状態のモデルを仮定して摩擦モーメント係数を計算することができた。その結果によれば層流では摩擦モーメント係数C_Mとレイノルズ数R_e,半径比R_2/R_1の間に

$$C_M\propto(R_2/R_1)^{\frac{2}{3}}R_e{}^{-\frac{1}{2}}$$

の関係が成立する。

また乱流では

$$C_M\propto(R_2/R_1)^{\frac{9}{5}}\,R_e{}^{-\frac{1}{5}}$$

の関係が成立する。

文　　献

(1) 中林，機講論，No. 740—14 (1974—11)，203.
(2) Daily, J.W. & Nece, R.E., Trans. ASME, Ser. D, Vol. 82, No. 1 (1960), 217.
(3) Schlichting, H., Boundary Layer Theory, (1968), 566, McGraw-Hill.