時系列情報のマルコフ次数の推定について

石井直宏・鈴村宣夫
情報工学科
（1975年9月11日受理）

On the Estimation of the Order of Markov Process from the Random Data of Time Series

Naohiro Ishii　Nobuo Suzumura
Department of Information Engineering
(Received September 11, 1975)

It is important in the fields of data analysis of information science, biological science and behavioral science, whether the successive events of the time series are independent or whether the probabilities of the different outcomes depend on one or more immediately preceding ones. A statistically independent and dependent classes are refined according to the order of Markov process. Relatively little attension has been paid to the estimation of the order of Markov process, whereas the probability theory of Markov process has been extensively developed.

In this paper, an approach based on information theory has been made to tackle the problem of the estimation of the order of Markov process. The order of Markov process is estimated by the conditional entropy which is derived from the joint entropy. Here the joint entropy in the case of Gaussian process is directly related with the covariance matrix which is substituted for the matrix of the serial correlation coefficients. Many researchers are often confronted with difficulties to get sufficient number of samples from the time series with stationality condition. It is highly desirable to estimate the statistical properties of the random data with small number of samples. The serial correlation coefficients of the random data are able to be computed with relatively small number of samples. It has been shown that the order of Markov process is determined from matrix of serial correlation coefficients, that is, correlation matrix. The number of samples needed in the estimation of correlation matrix is almost equal to that of serial correlation coefficients. Thus the order of Markov process can be estimated also with small number of samples by the method developed here.

1. まえがき

時系列的に生起する事象がランダムに生起するか，あるいは先行する事象に従属して生起するかという問題はマルコフ連鎖モデルとして取り扱うことができる。この種の問題は行動計量学，気象の分野，生体工学，および乱数の検定の際などにも現われる。また，ある系がマルコフ過程として表現される場合，その系の次数を推定すること，あるいは音声の分析・合成の際に用いられる線形予測式の次数を推定することなども重要な問題である。

シャノンによって導入された情報量の概念は，情報伝送系における情報の定量化と伝送速度，および信頼性の評価にきわめて重要な役割を果している。また最近，情報量の概念が統計量として有効な量で，統計的問題に本質的な役割を果すことが，指摘されてきている。[1)]

本論文では，情報量の概念を導入することによって，与えられた時系列のマルコフ性の次数を推定するための検定統計量を導いた。この統計量は系列相関行列式から構成されることから，遷移確率行列を構成してマルコフ性の次数を推定するという方法[2)]より，推定の際に必要とするサンプル個数が，はるかに少なくてすむことになる。

2. 情報量の導入

はじめに定常確率過程を

$$\{X_n,\ n\epsilon I\} \tag{2.1}$$

と定義する。X_n は時刻 n での確率変数，I は整数の集合を表わし，$-\infty$から$+\infty$の整数$\cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$をとる。また確率変数のとる値は実数値とする。

定常確率過程 $\{X_n,\ n\epsilon I\}$ が m 重マルコフ過程であるとは，実数λに対して

$$p(X_{m+1}\leq\lambda | X_1, X_2, \cdots, X_m)$$
$$\fallingdotseq p(X_{m+1}\leq\lambda | X_2, X_3, \cdots, X_m)$$

でかつ

$$p(X_{m+1}\leq\lambda | X_{-i}, X_{-i+1}, \cdots, X_m) \tag{2.2}$$
$$=p(X_{m+1}\leq\lambda | X_{-i+1}, X_{-i+2}, \cdots, X_m)\quad (i=1,\cdots 2,)$$

が確率１で成立することである。ここで $p(a|b)$ は b の条件のもとでの a の生起確率を意味する。さて次の不等式が以下の展開に重要である。

$p_1, p_2, \cdots, p_n$ ，$q_1, q_2, \cdots q_n$ のおのおのが正数で

$$\sum_{i=1}^{n} p_i=\sum_{i=1}^{n} q_i=1$$

の条件を満足しているものとする。このとき以下に示すような算術平均と幾何平均の不等式[3] が成立する。

$$\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{p_1}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{p_2}\cdots\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{p_n}\leq p_1\left(\frac{q_1}{p_1}\right)$$
$$+p_2\left(\frac{q_2}{p_2}\right)+\cdots+p_n\left(\frac{q_n}{p_n}\right)=1 \tag{2.3}$$

この不等式の等号は $p_i=q_i$ $(i=1, 2, \cdots n)$ のときのみ成立する。(2.3) 式の両辺の対数をとると

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$$

となる。(2.4) 式の等号は (2.4) $p_i=q_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ のときのみ成立する。(2.4) 式において p_i を $p(i, j, k)$，q_i を $p(i, j)$ $p(k|j)$ でおきかえると

$$-\sum_i \sum_j \sum_k p(i, j, k) \log p(i, j, k)$$
$$\leq -\sum_i \sum_j \sum_k p(i, j, k) \log p(i, j) p(k|j) \tag{2.5}$$

となる。(2.5) 式で等号は

$$p(k|i, j)=p(k|j),\quad (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{2.6}$$

のときのみ成立する。

与えられた分布の変量間が統計的独立であるか，統計的従属であるかという問題が情報量の立場から述べることができる。次にその例を示す。

(2.4) 式を２変量の正規分布の場合に適用する。２変量正規確率密度は

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{1/2}}\ \exp$$
$$\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}-2\rho\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right]$$

と定義され，$f(x, y)$ の周辺確率密度関数は

$$g(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right),$$

$$h(y)=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

となる。ただし σ_x^2, σ_y^2はおのおの $g(x)$，$h(y)$ の分散を表わす。２変量 x, y が密度関数 $f(x, y)$ を有するような従属関係にある場合をh_1，x, y がおのおの独立であり，従って密度関数がおのおの $g(x)$，$h(y)$ で与えられる場合を h_2 とすれば，仮設 h_1 と h_2 を区別する平均情報量 $I(h_1 : h_2)$ は

$$I(h_1 : h_2)=\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\log\frac{f(x, y)}{g(x)h(y)}dx\,dy$$

と定義され，計算の結果

$$I(h_1 : h_2)=-\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)$$

で与えられる。x, y 変量間に相関がない，すなわち $\rho=0$ のとき，$I(h_1 : h_2)=0$ となる。また逆も成立する。さらに正規分布の場合，$\rho=0$ は統計的独立に等しい。

Kullbackはh_1とh_2を区別する情報量としてdivergence $J(h_1 : h_2)$[4]を

$$J(h_1 : h_2)=\int\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x, y)$$
$$-g(x)h(y))\log\frac{f(x, y)}{g(x)\cdot h(y)}dxdy$$

と定義しており，上の例では

$$\rho^2/(1-\rho^2)$$

で与えられる。$\rho=0$ のとき $J(h_1 : h_2)=0$ となる。また逆も成立する。さて (2.4) 式の関係は

$$-\sum_i \sum_j \sum_k p(i, j, k)\log p(k|ij)$$
$$\leq -\sum_j \sum_k p(i, k)\log p(k|j) \tag{2.7}$$

となり左辺は２次の条件付情報量であり，右辺は１次の条件付情報量となる。(2.4)，(2.5) 式の関係式は帰納的に高次の条件付情報量の関係式

n 次条件付情報量 $\leq(n-1)$ 次条件付情報量 (2.8)

に拡張できる。

m 重マルコフ性を有するための必要十分条件は定義 (2.2) 式より

$$H_0\geq H_1\geq H_2\geq H_3\geq\cdots\geq H_{m-1}>H_m=H_{m+1}=\cdots \tag{2.9}$$

で与えられる。ここで H_i は　次の条件付情報量で，

$$H_i=-\sum_{l_1}\sum_{l_2}\cdots\sum_{l_{i+1}} p(l_1, l_2, \cdots, l_{i+1})\log$$
$$p(l_{i+1}|l_1, l_2, \cdots, l_i)\quad (i=0, 1, 2\cdots)$$

で与えられる。条件付情報量 H_i と結合情報量 Z_{i+1}

$$Z_{i+1}=-\sum_{l_1}\sum_{l_2}\cdots\sum_{l_{i+1}} p(l_1, l_2, \cdots, l_{i+1})\log p(l_1, l_2, \cdots, l_{i+1})$$

の間に

$$H_i=Z_{i+1}-Z_i \tag{2.10}$$

の関係が成立する。

(2.9), (2.10) 式よりm重マルコフ性を有するための必要十分条件は

$$\left.\begin{array}{l} \text{すべての正整数 } n<m \text{ に対して} \\ \quad Z_n-Z_{n-1}\geq Z_{n+1}-Z_n \\ \text{正整数}\quad n=m \text{ に対して} \\ \quad Z_n-Z_{n-1}>Z_{n+1}-Z_n \\ \text{すべての正整数}\quad n>m \text{ に対して} \\ \quad Z_n-Z_{n-1}=Z_{n+1}-Z_n \end{array}\right\} \tag{2.11}$$

が成立することである。

(2.11) 式は定常確率過程 $\{X_n,\ n\epsilon I\}$ の分布型には関係のない，すなわちノンパラメトリックな場合の条件式である。

3.　正規過程のマルコフ性

定常確率過程 $\{X_n,\ n\epsilon I\}$ が正規過程である場合の m 重マルコフ性を有するための必要十分条件を求める。

n 変量正規過程の確率密度関数は

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{|a_{ij}^n|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum a_n^{ij}x_ix_j\right) \tag{3.1}$$

で与えられる。ここで$|a_{ij}^n|$はn変量の共分散行列(a_{ij}^n)の行列式である。a_n^{ij} は (a_{ij}^n) の逆行列を表わす。(3.1) 式の確率密度関数で表わされる場合の情報量は Shannon[5]により，

$$Z_n=\log(2\pi e)^{n/2}|a_{ij}^n|^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

で与えられる。(3.2) 式を (2.11) 式に代入すると，

定常正規過程 $\{X_n,\ n\epsilon I\}$が m 重マルコフ性を有するための必要十分条件は

$$\left.\begin{array}{l} \text{すべての正整数 } n<m \text{ に対して} \\ \quad |a_{ij}^n|\geq|a_{ij}^{n-1}|^{\frac{1}{2}}|a_{ij}^{n+1}|^{\frac{1}{2}} \\ \text{正整数}\quad n=m \text{ に対して} \\ \quad |a_{ij}^n|>|a_{ij}^{n-1}|^{\frac{1}{2}}|a_{ij}^{n+1}|^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

すべての正整数 $n>m$ に対して

$$|a_{ij}^n|=|a_{ij}^{n-1}|^{\frac{1}{2}}|a_{ij}^{n+1}|^{\frac{1}{2}}$$

が成立することである。

共分散行列の要素 a_{ij} は

$$a_{ij}=\frac{\sum(x_{il}-m_i)(x_{jl}-m_j)}{N} \tag{3.4}$$

である。ここで m_i と m_j はおのおの x_i 変量，x_j 変量の平均値であり，Nはサンプル個数を表わす。(3.1) 式で定義されるn変量 $x_1, x_2, x_3, \cdots$を 1 変量 $\{x_i,\ i\epsilon I\}$ の過程へx_iを x_i へ，x_2 を x_{i+1} へ，x_3 を x_{i+2} へと対応させることにより，(3.4) 式は

$$a_{xi}, x_{i+j}=\sigma_x^2\left\{\sum_{i=1}^{N-j}(x_1-\mu)(x_{i+j}-\mu)/(N-j+i)\sigma_x^2\right\}$$
$$=\sigma_x^2\rho_{|j-i|} \tag{3.5}$$

のようになる。ここで $\rho_{|j-i|}$ はオーダー$|j-i|$の系列相関係数である。

共分散行列式$|a_{ij}^n|$を (3.5) 式で表わせば，

$$|a_{ij}^n|=\sigma^{2n}\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2\cdots\rho_{n-1}\rightarrow \\ \rho_1 & 1 & \rho_1\cdots\rho_{n-2}\rightarrow \\ \vdots & & \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3}\cdots 1 \end{vmatrix}\equiv\sigma^{2n}|S^n| \tag{3.6}$$

と表わすことができる。ここで $|S^n|$ は系列相関係数からなる相関行列式である。

(3.3) 式に (3.6) 式を代入すると，正規過程が m 重マルコフ性を有する条件が系列相関行列式で書き表わすことができる。

定常正規過程 $\{X_n,\ n\epsilon I\}$ がm重マルコフ性を有するための必要十分条件は，

$$\left.\begin{array}{l} \text{すべての正整数 } n<m \text{ に対して} \\ \quad |S^n|\geq|S^{n-1}|^{\frac{1}{2}}|S^{n+1}|^{\frac{1}{2}} \\ \text{正整数}\quad n=m \text{ に対して} \\ \quad |S^n|>|S^{n-1}|^{\frac{1}{2}}|S^{n+1}|^{\frac{1}{2}} \\ \text{すべての正整数 } n>m \text{ に対して} \\ \quad |S^n|=|S^{n-1}|^{\frac{1}{2}}|S^{n+1}|^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

が成立することである。

(3.7) 式の相関行列式の条件より単純正規マルコフ過程となるための必要十分条件を求める。

$$|S^1|=1,\ |S^2|=\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix},\quad |S^3|=\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix},\ \cdots$$

となるから，(3.7) 式より

$$|S^1|>|S^2|^{\frac{1}{2}}|S^0|^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

ここで$|S^0|=1$ である。さらに

$$|S^2|^2=|S^1||S^3|,$$
$$|S^3|^2=|S^2||S^4|,\cdots \tag{3.9}$$

を満足しなければならない。(3.9) 式より

$$(1-\rho_1^2)^2=1\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}=1+2\rho_1^2(\rho_2-1)-\rho_2^2 \tag{3.10}$$

(3.10) 式は $(\rho_1^2-\rho_2)^2=0$ となる。したがって $\rho_2=\rho_1^2$ を (3.9) 式に代入すると

$$\rho_3=\rho_1^3, \cdots, \rho_k=\rho_1^k \tag{3.11}$$

が得られる。ここで $\rho_1\neq 0$ である (3.11) 式は Yule-Walker 方程式[6] から得られた単純正規マルコフ過程の結果と一致する。

4.　シャフリング・プロセス

前節まで述べた多重マルコフ性の条件を実際に適用す

る場合は，有限個のサンプルから推定しなければならない。そこで本節では確率変数に作用するシャフリング・プロセスを導入する。シャフリングという概念は，Doob[7] のカード・ミキシングの中に述べられており，ここではシャフリングの新しい適用法を示すものである。

シャフリングの作用素をSで表わす。確率変数X_nへSを作用させることを SX_n で表わし

$$SX_n \equiv X_{[r\times N+1]} \tag{4.1}$$

で定義する。ここでNはサンプル個数を表わし，rは実数 (0.1) 上の一様乱数の値を表わす。$[y]$はyの整数部分のみを表わす Gauss の記号である。(4.1)式の定義から SX_n はN個の確率変数の列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots, X_N$ の中からランダムに1個の変数を指定することを示している。確率変数の系列の中でSを作用させることは，確率過程の時間構造をランダムにこわすことになる。

定常確率過程 $\{X_n,\ n\epsilon I_N\}$ を新たに定義する。ここで $I_N\subset I$が成立し，$n\epsilon I_N$ の n は $n=1,2,3,\cdots,N$ までとする。確率過程 $\{X_n, n\epsilon I_N\}$ と $\{SX_N,\ n\epsilon I_N\}$ の分布関数をおのおの $F(x)$ および $F_s(x)$ で表わすと

$$F(x)=P(X_i\leq x)$$

であることから，任意のxに対して

$$F(x)=F_s(x) \tag{4.2}$$

が成立する。(4.2) 式は確率過程 $\{X_n,\ n\epsilon I_N\}$ のシャフリングした過程でも分布関数が変らないことを示している。

次に定常確率過程 $\{X_n,\ n\epsilon I\}$ がm重マルコフ性を有していれば，条件付確率

$$p(X_k|SX_{k-m-1}, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})$$
$$=p(X_k|X_{k-m}, X_{k-m+1}, \cdots, X_{k-1}) \tag{4.3}$$

はNが十分大であれば確率1で成立することを示す。このことは以下のように2つにわけて証明される。

はじめに SX_{k-m-1} が X_k を中心にして，前後個 mの変数のいずれかと一致する確率を求める，すなわち

$$p(SX_{k-m-1}\epsilon\{X_{k-m}, X_{k-m+1}, \cdots, X_k, \cdots X_{k+m}\})$$
$$=\frac{2m}{N} \tag{4.4}$$

(4.4) 式のNを十分大にとれば確率が0に近づく。したがってNを十分大にとれば

$$\lim_{N\leftarrow t} p(SX_{k-m-1}\notin\{X_{k-m}, X_{k-m+1}, \cdots, X_k, \cdots X_{k+m}\})=1 \tag{4.5}$$

となる。

次にm重マルコフ性の定義から

$$p(X_k|\cdots X_{k-m-2}, X_{k-m-1}, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})$$
$$=p(X_k|X_{k-m-1}, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})$$
$$=p(X_k|X_{k-m}, \cdots, X_{k-1}) \tag{4.6}$$

である。$SX_{k-m-1}=X_{k-m-2}$ として証明する。(4.6) 式の前半，後半2つの式より，

$$\frac{p(X_k, X_{k-m-2}, X_{k-m-1}, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})}{p(X_{k-m-2}, X_{k-m-1}, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})}$$
$$=\frac{p(X_k, X_{k-m}, \cdots X_{k-1})}{p(X_{k-m}, \cdots X_{k-1})} \tag{4.7}$$

(4.7) 式の左辺は分解できて，

$$\frac{p(X_k, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})\,p(X_{k-m-2}, X_{k-m-1}|X_k, X_{k-m}, \cdots, {}_{k-1})}{p(X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})\,p(X_{k-m-2}, X_{k-m-1}|X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})}$$
$$=\frac{p(X_k, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})}{p(X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})} \tag{4.8}$$

が成立する。(4.8) 式より

$$p(X_{k-m-2}, X_{k-m-1}|X_k, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})$$
$$=p(X_{k-m-2}, X_{k-m-1}|X_{k-m}, \cdots, X_{k-1}) \tag{4.9}$$

が成立する。(4.9) 式の両辺を X_{k-m-1} の添字 k-m-1 で和をとれば

$$\sum_{k-m-1} p(X_{k-m-2}, X_{k-m-1}|X_k, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})$$
$$=\sum_{k-m-1} p(X_{k-m-2}, X_{k-m-1}|X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})$$

すなわち

$$p(X_{k-m-2}|X_k, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})$$
$$p(X_{k-m-2}|X_{k-m-2}, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1}) \tag{4.10}$$

したがって (4.10) 式を次式に代入すると，

$$\frac{p(X_k, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})}{p(X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})}$$
$$=\frac{p(X_k, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})\,p(X_{k-m-2}|X_k, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})}{p(X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})\,p(X_{k-m-2}|X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})}$$
$$=\frac{p(X_k, X_{k-m-2}, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})}{p(X_{k-m-2}, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})}$$
$$=p(X_k|X_{k-m-2}, X_{k-m}, \cdots, X_{k-1})$$

となり，$SX_{k-m-1}=X_{k-m-2}$ の場合が証明された。同様に SX_{k-m-1} が $X_{k-m-i}(i\geq 1)$ である場合も (4.3) 式が成立する。

条件付情報量を $H(X_{m+1}|X_1, X_2, \cdots, X_m)$ のように定義すれば，(2.6) 式と (4.3) 式より

定常確率過程 $\{X_n,\ n\epsilon I\}$ がm重マルコつ性を有するための必要十分条件は，Nが十分大のとき，

$$H(X_{m+1}|X_1, X_2, \cdots, X_m)<H(X_{m+1}|SX_1, X_2, \cdots, X_m)$$

および

$$H(X_{m+1}|X_{-i}, X_{-i+1}, \cdots, X_m)$$
$$=H(X_{m+1}|SX_{-i+1}, X_{-i+2}, \cdots, X_m) \tag{4.11}$$

ただし $i=0, 1, 2, \cdots$ が成立することである。

(4.11) 式の関係は $\{X_n,\ n\epsilon I\}$ が正規過程の場合，次のように展開される。すなわち

$$H(X_n|X_1, X_2, \cdots, X_{n-1})=H(X_n|SX_1, X_2, \cdots, X_n)$$

が成立することは，n 変量の結合情報量を $Z(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ とすれば，

$$Z(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1})=Z(SX_1, X_2, \cdots, X_{n-1})$$

かつ

$$Z(X_1, X_2, \cdots, X_n)=Z(SX_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{4.12}$$

が成立することである。$\{X_n,\ n\epsilon I\}$ が正規過程の場合，

(3.2)，(3.6) 式より

$$Z(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \log(2\pi e)^{n/2} r^n |S^n|^{\frac{1}{2}}$$

$$Z(SX_1, X_2, \cdots, X_n) = \log(2\pi e)^{n/2} r^n |S_{shuff}{}^n|^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

である。(4.13) 式の右辺の $|S^n|$ は (3.6) 式で定義した系列相関行列式であるが，$|S_{shuff}{}^n|$ は (3.4)，(3.5)，(3.6) 式より

$$|S^n{}_{shuff}| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \cdots \rho_{n-2} & \rho_{n-1}{}^s \\ \rho_1 & 1 \cdots \rho_{n-3} & \rho_{n-2}{}^s \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_{n-2} & \rho_{n-3} \cdots 1 & \rho_1{}^s \\ \rho_{n-1}{}^s & \rho_{n-2}{}^s \cdots \rho_1{}^s & 1 \end{vmatrix} \quad (4.14)$$

で与えられる。ここで

$$\rho_l{}^s = \lim_{N\to t} \frac{\sum_i (SX_i - \mu)(X_{i+l} - \mu)}{(N-l)\rho^2} \quad (l = 1, 2, \cdots n-1) \quad (4.15)$$

である。

定常正規過程 $\{X_n,\ n\epsilon I\}$ が重マルコフ性を有するための条件は

$$|S^m| \fallingdotseq |S^m{}_{shuff}|$$

かつ

$$|S^{m+i}| = |S^{m+i}{}_{shuff}| \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots) \quad (4.16)$$

が成立することである。

$\{SX_i\}$ と $\{X_i,\ i\epsilon I_N\}$ はシャフリング・プロセスの意味から独立となり，

$$\rho_l{}^s = 0 \quad (l = 1, 2, \cdots n-1) \quad (4.17)$$

となる。

$\widehat{\rho_l}$ を標本相関行列の要素とすれば，$\widehat{\rho_l}$ の漸近分布は多変量解析論[8] により

$$\widehat{\rho_l} \sim N\left(\rho_l,\ \frac{(1-\rho_l)^2}{N-1}\right) \quad (4.18)$$

で与えられる。ここで $N(a, b)$ は平均 a，分散 b の正規分布を意味する。(4.17) 式を (4.18) 式に代入すれば，

$$\widehat{\rho_l{}^s} \sim N\left(0,\ \frac{1}{N-1}\right) \quad (l = 1, 2, \cdots n-1) \quad (4.19)$$

が得られる。

次にシャフリング・プロセスを (4.16) 式に適用する場合，次の２通りの場合分けが考えられる。(4.14) 式の $\rho_l{}^s$ を確率変数と見なし，y_l と表わすと，

$$|S^n{}_{shuff}| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \cdots \rho_{n-2} & y_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \cdots \rho_{n-3} & y_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \rho_{n-4} \cdots 1 & y_1 \\ y_{n-1} & y_{n-2} & y_{n-3} \quad y_1 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.20)$$

となる。

(a) $E(y_i y_j) \fallingdotseq 0$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n-1$ で $i \fallingdotseq j)$ 場合

m 重マルコフ性を仮定して，SX_l の後に m 個の変数 $\{X_{l+1},\ X_{l+2}, \cdots, X_{l+m}\}$，$(i = 1, 2, \cdots, N : m = 1, 2, \cdots)$ を付加する。(4.15) 式より

$$y_i \fallingdotseq \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} (SX_l - \mu)(X_{l+i} - \mu)/\sigma^2$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

とおけば，(4.19) 式より

$$E(y_i) \fallingdotseq 0$$

$$E(SX_l - \mu)^2 = \sigma^2$$

である。さらに $\{SX_l\}$ と $\{X_{l+1},\ X_{l+2}, \cdots, X_{l+m}\}$ は独立となることがら

$$E\{y_i y_j\} = \frac{1}{N^2\sigma^4} E(SX_l - \mu)^2 E\{(X_{l+i} - \mu)(X_{lj} - \mu)\}$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{l=1}^{N} (X_{l+i} - \mu)(X_{l+j} - \mu)$$

$$= \frac{1}{N} \rho_{|i-j|} \quad (4.21)$$

(4.21) 式の $\rho_{|i-j|}$ はオーダー $|i-j|$ の系列相関係数で，次式のように定義される。

$$\rho_{|i-j|} = \begin{cases} \rho_{i-j}, & (i > j) \\ \rho_{j-i}, & (j > i) \\ 1, & (i = j) \end{cases} \quad (4.22)$$

また

$$|S^{n-1}| = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \cdots \rho_{n-2} \\ \rho_1 & 1 \cdots \rho_{n-3} \\ \vdots & \vdots \\ \rho_{n-2} & \rho_{n-3} \cdots 1 \end{vmatrix}$$

の (i, j) 要素の余因子を A_{ij} とすれば，

$$|S^n{}_{shuff}| = |S^{n-1}| - \sum_{i,j=1}^{n-1} A_{ij} y_i y_j \quad (4.23)$$

さらに $(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})$ の共分散行列は

$$\left(\frac{1}{N}\rho_{|i-j|}\right) = \frac{1}{N}(S^{n-1})$$

であるから

$$\left(\frac{1}{N}\rho_{|i-j|}\right)^{-1} = N(S^{n-1})^{-1} = N\left(\frac{A_{ij}}{|S^{n-1}|}\right) \equiv N(A^{ij})$$

であることがわかる。すはわち $(A_{ij}) = (S^{n-1})^{-1}$ である。

$$|S^n{}_{shuff}| = |S^{n-1}| - \frac{|S^{n-1}|}{N} \sum_{i,j=1}^{n-1} N A^{ij} y_i y_j \quad (4.24)$$

ここで

$$y_i = \frac{1}{\sqrt{N}} Z_i \quad (4.25)$$

と変換し，確率ベクトル（列ベクトル）

$$Z = (Z_1, Z_2, \cdots, Z_{n-1})^t$$

と表わす。ここで添字 t は転置を意味する。Z 平均値は

$$E(Z) = \boldsymbol{0}$$

ここで $\boldsymbol{0}$ はゼロベクトルを表わす。また

$$E(ZZ^t) = (S^{n-1})$$

で与えられる。

(4.24) 式は

$$|S^n{}_{shuff}|=|S^{n-1}|-\frac{|S^{n-1}|}{N}\sum_{i,j=1}^{n-1}A^{ij}Z_iZ_j$$

$$=|S^{n-1}|\ \{1-\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{n-1}A^{ij}Z_iZ_j\} \qquad (4.26)$$

となる。

ここで述べた (a) の方法は (4.21) 式からわかるように確率変数列

$$\{SX_l, X_{l+1}, X_{l+2}, \cdots, X_{l+m}\}$$
$$(l=1, 2, \cdots, N : m=1, 2, \cdots) \qquad (4.27)$$

から $\rho_1{}^s, \rho_2{}^s, \cdots \rho_{n-1}{}^s$ の計算をする。このとき (4.27) 式で用いられるシャフリング・プロセスの系列

$$\{SX_1, SX_2, \cdots, SX_N\}$$

は (4.21) 式からわかるように $\rho_1{}^s, \rho_2{}^s, \cdots, \rho^s{}_{n-1}$ のおのおのの計算に共通に使用される系列となる。

(b) $E(y_iy_j)=0$ $(i, j=1, 2, \cdots, n-1$ で $j\neq i)$ の場合

(4.23) 式はそのまま成立するから

$$|S^n{}_{shuff}|=|S^{n-1}|-\sum_{i,j=1}^{n-1}A_{ij}y_iy_j$$

から (4.26) 式と同じ形

$$|S^n{}_{shuff}|=|S^{n-1}|\{1-\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{n-1}A^{ij}Z_iZ_j\} \qquad (4.26)'$$

が導かれる。

ただし (4.25) 式の変換により,

$$E(Z)=0$$
$$E(ZZ^t)=I$$

ここで I は単位行列を表わす。(4.26), (4.26)' 式は行列の計算より次のようにしても求められる。

(4.20) 式は行列の分解により,

$$|S^n{}_{shuff}|=|S^{n-1}|\,|1-Y^t(S^{n-1})^{-1}Y|$$

で表わされる。ここで Y は $y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_1$ を成分とする列ベクトルである。(4.25) 式を適用すると

$$|S^n{}_{shuff}|=|S^{n-1}|\,|1-Z^t\frac{(S^{n-1})^{-1}}{N}Z| \qquad (4.28)$$

(4.28) 式の $(1-Z^t\frac{(S^{n-1})^{-1}}{N}Z)$ はスカラー量であるから

$$|S^n{}_{shuff}|=|S^{n-1}|\left(1-Z^t\frac{(S^{n-1})^{-1}}{N}Z\right) \qquad (4.29)$$

となる。(4.29) 式は (4.26), (4.26)' 式と等しい。

次に (a), (b) の場合について, $|S^n{}_{shuff}|$ の分布を求める問題は $\widehat{\rho_i}$ を定数とすれば, (4.26), (4.26)', (4.29) 式で, $Z=(Z_1, Z_2, \cdots, Z_{n-1})^t$ のみが確率変数となる。したがって

$$\frac{1}{N}Z^t(S^{n-1})^{-1}Z \qquad (4.30)$$

の分布を求める問題に帰着する。

(4.30) 式を確率ベクトル Z の2次形式[6]として

$$Q(Z)=Z^tA'Z=\sum_{i,j=1}^{n-1}a_{ij}Z_iZ_j \qquad (4.31)$$

と表わして以下の展開をする。ここで A' は $(n-1)$ 次の対称行列とする。Z の平均値は (a), (b) のいずれも 0 (ゼロベクトル) である。Z の共分散行列を, 一般に V とすると, Z の確率密度関数は

$$p(Z)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}(n-1)}|V|^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{epx}\left(-\frac{1}{2}Z^tV^{-1}Z\right)$$

で与えられる。$Q(Z)$ の分布を $P[Q(Z)\leq\lambda]$ (実数 λ) とすると

$$P[Q(Z)\leq\lambda]=\int_{Z^tA'Z\leq\lambda}p(Z)\,dZ$$

の $(n-1)$ 次元積分をすること, すなわち $dZ=dZ_1, dZ_2, dZ_3\cdots dZ_{n-1}$ である。共分散行列 V は正値定符号でかつ対称であるから

$$V=LL^t$$

と書ける正則な三角行列 L が存在する。L の正則性より

$$Z'=L^{-1}Z$$

と変換することによって

$$Z'^tZ'=Z^tV^{-1}Z,\quad |V|=|L|^2$$

したがって

$$P[Q(Z)\leq\lambda]=(2\pi)^{-\frac{1}{2}(n-1)}\int_{Z'^t(L^tA'L)Z'\leq\lambda}\exp\left(-\frac{1}{2}Z'^tZ'\right)dZ'$$

行列 $L^tA'L$ の固有値の対角成分からなる行列を Λ とし, Λ をつくる固有ベクトルからなる行列を P とおく。このとき

$$P^tL^tA'LP=\Lambda$$

が成立する。ここで変数変換

$$W=PZ'$$

とすると

$$P[Q(Z)\leq\lambda]-(2\pi)^{-\frac{1}{2}(n-1)}\int_{W^t\Lambda W\leq\lambda}\exp\left(-\frac{1}{2}W^tW\right)dW \qquad (4.32)$$

となるから, $Q(Z)$ の分布は $Q(W)$, すなわち

$$Q(W)=W^t\Lambda W=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_iW_i^2 \qquad (4.33)$$

となる。

ここで W_i は独立な正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数である。$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}$ は行列 L^tAL, すなわち VA' の固有値と等しい。上述までの結果を (a) の場合, すなわち $E(Z_iZ_j)\neq 0$ の場合に適用すると,

$$V=E(Z^tZ)=(S^{n-1}) \qquad (4.34)$$

であり, (4.26) 式で

$$A'=(S^{n-1})^{-1} \qquad (4.35)$$

となることから, (4.33) 式の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\lambda_{n-1}$ を求

めるため，(4.34) と (4.35) 式の積を計算する。その結果

$$VA'=I \text{ (単位行列)} \tag{4.36}$$

となり，(4.36) 式の固有値は

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_{n-1}=1 \tag{4.37}$$

となる。したがって (4.30) 式は

$$\frac{1}{N}Z^t(S^{n-1})^{-1}Z=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n-1}W_i^2 \tag{4.38}$$

となる。W_i は独立な正規分布 $N(0,1)$ の変数であるから自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布となり

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n-1}W_i^2=\frac{1}{N}\chi_{n-1}^2 \tag{4.39}$$

が得られる。

次に (b) の場合，すなわち $E(Z_iZ_j)=0$ の場合に適用すると

$$V=E(ZZ^t)=I \text{ (単位行列)} \tag{4.40}$$

であり，(4.26)' 式で

$$A'=(S^{n-1})^{-1} \tag{4.41}$$

となることから (4.40) と (4.41) 式の積は

$$VA'=(S^{n-1})^{-1} \tag{4.42}$$

となる。(4.42) 式は (S^{n-1}) が正値定符号であることから

$$(S^{n-1})=B^tB$$

の行列の積に分解される。したがって

$$(S^{n-1})^{-1}=(B^tB)^{-1}=B^{-1}(B^t)^{-1}$$

さらに B がエルミート行列であることから

$$B^t=B$$

$$(S^{n-1})^{-1}=(B^{-1})^2$$

となり，$(S^{n-1})^{-1}$ も正値定符号となる。また (S^{n-1}) が対称行列なら $(S^{n-1})^{-1}$ も対称行列であることが容易に示されることから $(S^{n-1})^{-1}$ の固有値 λ_i は

$$\lambda_i>0,\quad (i=1\sim n-1)$$

となる。したがって (4.33) 式より

$$Q(W)=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_iW_i^2,\quad \lambda_i>0\quad (i=1\sim n-1) \tag{4.43}$$

の分布を求める問題に帰着する。(4.43) 式の分布を求める問題は Robbins 等[5]によって解を求める1方法が述べられているが，ここでは(4.43)式の分布をガンマ分布を基礎とし Laguerre 多項式による展開を行う。[10] 上述までの展開から (4.43) 式の値が正の値のみをとる分布である。このような分布は，一般に確率密度関数を $f(x)$ とすると，

$$f(x)=f_p(x,1)\{a_0+a_1g_1(x)+a_2g_2(x)+\cdots+a_kg_k(x)+\cdots\} \tag{4.44}$$

と表わすことができる。ここで $f_p(x,1)$ はガンマ関数に母数 θ を導入し

$$f_p(x,\theta)=\frac{1}{\theta^pP(p)}x^{p-1}e^{-x/\theta}$$

の関数 $f_p(x,\theta)$ に $\theta=1$ を代入したものである。また a_j は

$$a^j=\frac{(p-1)!}{j!(p+j-1)!}E\{g_j(x)\} \tag{4.45}$$

であり，$g_j(x)$ は Laguerre 多項式で，次式のように与えられる。

$$g_0(x)=1$$
$$g_1(x)=x-p$$
$$g_2(x)=(x-p)^2-(x-p)-x$$
$$g_3(x)=(x-p)(x^2-2(p+1)(p+2)-2(x^2-2(p+1)x+p)-x(2x-2(p+1))$$

一般に

$$g_j(x)=x^j-j(p+j-1)x^{j-1}+\frac{j(j-1)(p+j-1)(p+j-2)}{2}x^{j-2}$$

である。(4.44) 式で与えられる分布の上側確率は，

$$P(X\geq x)=\int_x^\infty f(x)\,dx \tag{4.46}$$

である。しかるに

$$\int_x^\infty g_j(t)f_p(t,1)\,dt=pg_{j-1}^{(p+1)}(x)f_{p+1}(x,1)$$

で与えられるから，(4.44) 式の右辺の項数を $(k+1)$ 個もでとると，(4.45) 式は

$$P(X\geq x)\sim a_0\int_x^\infty f_p(t,1)\,dt+pf_{p+1}(x,1)(a_1+a_2g_1^{(p+1)}(x)+\cdots+a_kg_{k-1}^{(p+1)}(x)) \tag{4.47}$$

となる。以上の展開を (4.43) 式に適用する。(4.43)式の $Q\equiv\sum\lambda_iW_i^2$ において，$T=Q/C$ を自由度 f の χ^2 分布で近似する。まずTのキュミュラントを求めると

$$K_j=2^{j-1}(j-1)!\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i/C)^j,\quad (j=1,2,\cdots)$$

となる。T の 1次と2次のモーメントが χ^2 分布のおのおののモーメントに等しくなるように次式をつくる。

$$E(T)=K_1=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i/C=f$$
$$V(T)=K_2=2\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^2/C^2=2f$$

より

$$f=(\sum\lambda_j)^2/(\sum\lambda_j^2),\quad c=\sum\lambda_j^2/\sum\lambda_j$$

が成立する。さらに

$$E(T-f)^3=8\sum\lambda_j^3/c^3=8f\delta$$

となるように δ を決める。

次に変数 X がパラメータ P の ガンマ分布に従うと $2X$ が自由度 $2k$ の χ^2 分布に従うことから，

$p=f/2$, $T/2$ をガンマ分布で展開する。

展開式は (4.47) 式であるから，係数 a_0, a_1, a_2, a_3 を (4.45) 式から計算すると，

$$a_0=1,\quad a_1=0,\quad a_2=0$$

$$a_3=\frac{1}{6p(p+1)p+2)}E\left(\left(\frac{T}{2}-p\right)^3-2p\right)$$
$$=\frac{4(\delta-1)}{3(f+2)(f+4)}$$

これら式 (4.47) に代入すれば,

$$P\left\{\frac{T}{2}>x\right\}\sim\int_x^\infty\frac{1}{P(p)}t^{p-1}e^{-t}dt$$
$$+\frac{(\delta-1)}{3(f+2)(f+4)}\cdot\frac{1}{P(p)}x^pe^{-x}\{x^2-2(p+2)x$$
$$+(p+1)(p+2)\}$$

これより T の分布の上側 α 点を T_α とすれば,

$$T_\alpha\sim2\left\{1+\frac{4(\delta-1)}{3(f+2)(f+4)}(\gamma^2_\alpha-2(p+2)\gamma_\alpha\right.$$
$$\left.+(p+1)(p+2))\right\}\gamma_\alpha$$

$\gamma_\alpha=\chi_\alpha^2/2$, $p=f/2$ を代入すれば

$$T_\alpha\sim\left\{1+\frac{\delta-1}{3(f+2)(p+4)}(\chi_\alpha^4-2(f+4)\chi_\alpha^2\right.$$
$$\left.+(f+2)(f+4))\right\}\chi_\alpha^2 \qquad (4.48)$$

となる。

5. 統計的検定

定常正規過程 $\{X_n, n\epsilon I\}$ が m 重マルコフ性を有するための条件は, (4.16) 式で与えられている。実際の時系列から, 標本相関行初 (S^n), $(n=1,2,\cdots)$ をつくり, その行列式を求める。$(\widehat{S^n})$ の要素である標本相関係数 $\widehat{\rho_1},\widehat{\rho_2},\cdots,\widehat{\rho_{n-1}}$ を定数とみなせば, $|\widehat{S^n}|$ は定数となる。すなわち実際上は与えられた時系列から唯一に決定される。情報と見なされる。(4.16) 式の右辺すなわち, (4.17) 式の要素 $\widehat{\rho_1},\widehat{\rho_2},\cdots,\widehat{\rho_{n-2}}$ までは, 同様に定数となり, (4.17) 式は変数 y_i の2次形式となる。この2次形式の分布は *4.* シャフリング・プロセスの範で, (*a*), (*b*) の場合わけで示した。ここでは前節まで展開してきた理論をもとに m 重マルコフ性の統計的検定法を示すものである。

(*a*) $E(y_iy_j)\fallingdotseq0$ $(i\fallingdotseq j)$ の場合

(4.26), (4.39) 式より自由度 $n-1$ の χ^2 分布を χ_{n-1}^2 と表わすと,

$$|\widehat{S}_{shuff}{}^n|=|\widehat{S}^{n-1}|\left\{1-\frac{1}{N}\chi_{n-1}{}^2\right\} \qquad (5.1)$$

で与えられる。しかるに実際の時系列からm重マルコフ性を推定する場合

$$|\widehat{S^m}|\fallingdotseq|\widehat{S}_{shuff}{}^m|,\quad |\widehat{S^{m+i}}|=|\widehat{S}_{shuff}{}^{m+i}|\quad (i=1,2,) \qquad (5.2)$$

が成立するかどうかを検定しなければならない。

(5.2) 式の後半の式に (5.1) 式を代入すれば

$$|\widehat{S^{m+i}}|=|\widehat{S^{m+i-1}}|\left\{1-\frac{1}{N}\chi_{m+i-1}{}^2\right\}\quad(i=1,2,\cdots) \qquad (5.3)$$

したがって

$$\chi_{m+i-1}{}^2=\left(1-\frac{|\widehat{S^{m+i}}|}{|\widehat{S^{m+i-1}}|}\right)N \qquad (5.4)$$

となり, 有意水準 α の χ^2 分布の値を $\chi_{m+i-1,\alpha}{}^2$ とすれば, m 重マルコフ性を有するという帰無仮説に対し

$$\chi_{m+i-1,\alpha}{}^2<\left(1-\frac{|\widehat{S^{m+i}}|}{|\widehat{S^{m+i-1}}|}\right)N \qquad (5.5)$$
$$(i=1,2,\cdots)$$

であれ, ばこの仮説は棄却される。このときマルコフ性の次数は $(m+1)$ 重ないしはそれ以上と見なされる。

(b) $E(y_iy_j)=0$ $(i\fallingdotseq j)$ の場合

(4.43) 式のQの上側確率のα点をQ_αとおくと, (4.48) 式より

$$Q_\alpha=C\chi_{f,\alpha}^2\left\{1+\frac{\delta-1}{3(f+2)(f+4)}(\chi_{f,\alpha}{}^4\right.$$
$$\left.-2(f+4)\chi_{f,\alpha}{}^2+(f+2)(f+4))\right\} \qquad (5.6)$$

で与えられる。ここで $\chi_{f,\alpha}^2$ は自由度 f の χ^2 分布の有意水準の値である。(5.6) 式を (5.2) 式の後半の式に代入すると

$$|\widehat{S^{m+i}}|=|\widehat{S^{m+i-1}}|\left\{1-\frac{1}{N}Q_\alpha\right\} \qquad (5.7)$$

となる。(5.7) 式より有意水準 α の (5.6) 式の値 Q_α が, m 重マルコフ性を有するという帰無仮説に対し

$$Q_\alpha<\left(1-\frac{|\widehat{S^{m+i}}|}{|\widehat{S^{m+i-1}}|}\right)N \qquad (5.8)$$

であれば, この仮説は棄却される。このときマルコフ性の次数は $(m+1)$ 重ないしはそれ以上と見なされる。

6. むすび

マルコフ過程の研究は多くの人によってなされている。しかしながらマルコフ過程の基礎の概念であるマルコフ次数の推定は遷移確率行列を構成する方法と自己回帰系列等の次数の推定法が発表されているにすぎない。ここではマルコフ性の次数推定の問題が情報量の導入によって解かれることを示した。Kullback 情報量および Fisher 情報量等[4]も確率変数の分布の微少な変動に対して, きわめて感度の高い量であることが指摘されており, 情報量の考え方は, 一般的統計問題に対して, 役割が大きいと思われる

文　献

1) H. Akaike, Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle, 2nd International Symposium onInformation Theory (1973) Akademia Kiado, Budapest

2) T.W. Anderson and L.A. Goodman, Statistical

Inference about Markov Chains, Ann Math. Statist., 28, pp.89—110, (1957)

3) 三根久，情報理論入門，朝倉書店，(1964)
4) S.Kullback, Information Theory and Statistics, John Wiley (1959)
5) C.E. Shannon, and W. Weaver, The Mathematical Theory of Communication, Univ. of Illinois Press (1949)
6) M.G. Kendall and A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics, Charles Griffin & Co. (1963)
7) J.L. Doob, Stochastic Processes, John Wiley (1953)
8) 塩谷実，浅野長一郎，多変量解析論，共立出版 (1970)
9) H. Robbins and E.J.G. Pitman, Application of the Method of Mixtures to Quadratic Forms in Normal Variates, Ann. Math. Statist, 20, pp.552—560, (1949)
10) 竹内啓，確率分布の近似，教育出版 (1975)