

十字形弾性体の縦せん断応力解析

長谷部 宣男

土木工学教室

(1973年9月14日受理)

Analysis of a Longitudinal Shear Stress of Cross-Shaped Elastic Bodies

Norio HASEBE

Department of Civil Engineering

(Received September 14, 1973)

On cross-shaped elastic bodies with curved corners, stress analysis is carried out as a problem of longitudinal shear stress.

A mapping function which maps a cross-shaped region on a unit circle is used for the stress analysis.

The stress distributions and the relation between the radius of curvature and the stress concentration are discussed.

The stress distributions of seven cases are shown in figures.

The expressions of the stress concentration are made for some boundary conditions.

The expressions are with maximum error of two percents.

1. まえがき

十字形弾性体の形状は、基本的な構造要素の1つとして構造物の接合部や機械部分に多く見られ、その弾性応力分布に関する知見は、工学的にも必要と思われる。

平面弾性問題および薄板の面外曲げの問題として、十字形板の応力解析は先に報告した¹⁾。本報告はそのとき使用した十字形領域を単位円に等角写像する写像関数を用いて、十字形の帯の先端に各種の縦方向せん断荷重が作用する場合の応力解析を行なうものである。そして特に隅角部付近の応力分布、隅角部の曲率半径と応力集中との関係等について考察する。

縦せん断の問題は、線形破壊力学における応力拡大係数の応用とともに、弾性体の内部き裂の問題として多く解析されている^{2)~4)}。

平面弾塑性問題に比しての数学的容易さから弾塑性問題としても解析されている^{5)~8)}。

著者も切欠きを有する半無限の等方性および直交異方性弾性体の場合の解析を行なった⁹⁾。

2. 解法

その解法はねじりの問題の特別な場合として得られ、文献—9)でも述べたのでその詳細はここでは割愛する。

図—1に示す隅角部に曲線を有する十字形領域を単位円内部に等角写像する有理写像関数を文献—1)で作った。本論文においてもこの写像関数を用いる。

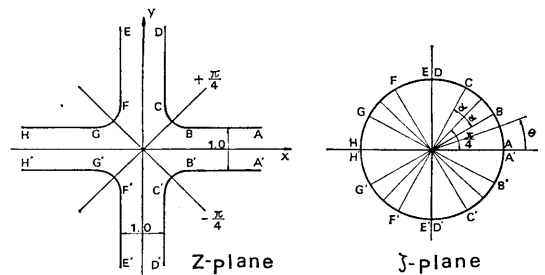


Fig. 1 The cross-shaped region on the Z-plane and the unit circle on the ζ -plane

写像関数にはパラメーター α を含み、 α を変えることによって曲線の大きさを変えることができる。

写像関数を $z=\omega(\zeta)$, 引数 ζ で表わした応力関数を $\phi(\zeta)$ とすると応力を求める式は

$$\tau_{xt} - i\tau_{yt} = G\phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)$$

$$\tau_{rt} - i\tau_{\theta t} = \zeta\omega'(\zeta)/|\zeta\omega'(\zeta)| \cdot (\tau_{xt} - i\tau_{yt})$$

である。 t は x, y 面に垂直な座標軸を表わし、 G はせん断弾性係数である。第2式は曲線座標応力成分を求める式で、境界線に沿う応力成分を求めるにはこの式を用いればよい。

3. 計算例

十字形の帯の先端に集中荷重が作用した場合の隅角部付近の境界線に沿う応力分布を図-2~8に示す。

図-2~8は、 $\alpha=0.45$, 対称軸 $\pm\pi/4$ 軸上の最小曲率半径 $\rho=-0.222$ (寸法の基準として帯の幅を1.0としている) の場合の十字形である。

図-2の荷重に対する応力関数は次のようにして求められる。

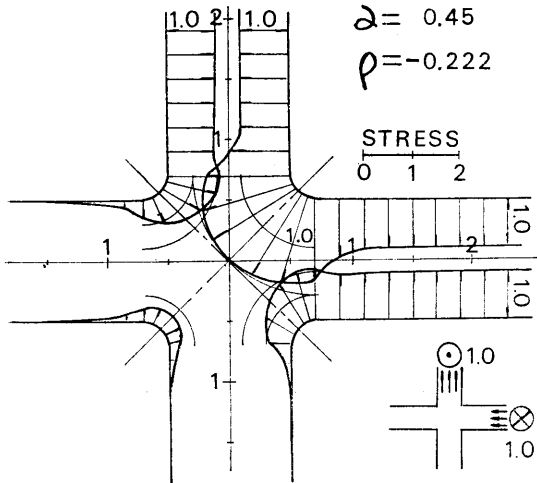


Fig. 2 The shearing stress distribution along the contour

境界条件式は荷重の大きさを P , 単位円周上の ζ を $\sigma = e^{i\theta}$ として

$$G\{\phi(\sigma) - \overline{\phi(\overline{\sigma})}\} = 2i \begin{cases} -P & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \pi/2 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

上式に $1/2\pi i \cdot d\sigma/(\sigma-\zeta)$ を乗じ、 $\phi(\zeta)$ が単位円内で正則であることを考慮して単位円周上で積分すると

$$\begin{aligned} G\{\phi(\zeta) - \overline{\phi(0)}\} &= \frac{2i}{2\pi i} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{-P}{\sigma-\zeta} d\sigma \\ &= -\frac{P}{\pi} \log \frac{\sigma_2-\zeta}{\sigma_1-\zeta} \end{aligned}$$

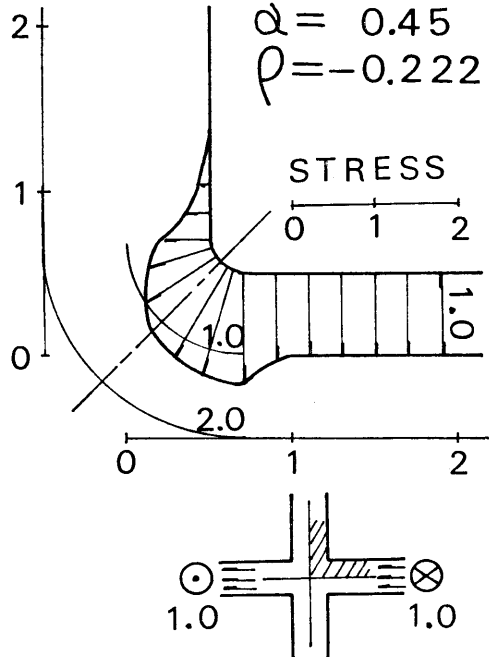


Fig. 3 The shearing stress distribution along the contour

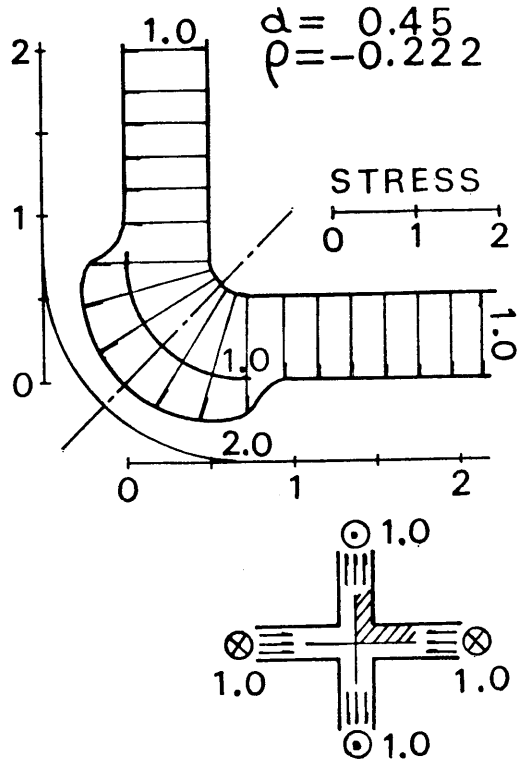


Fig. 4 The shearing stress distribution along the contour

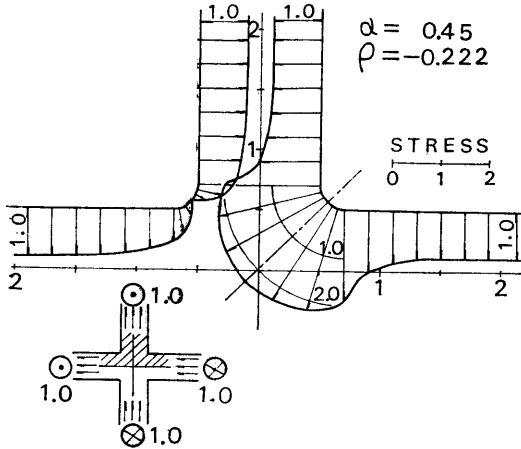


Fig. 5 The shearing stress distribution along the contour

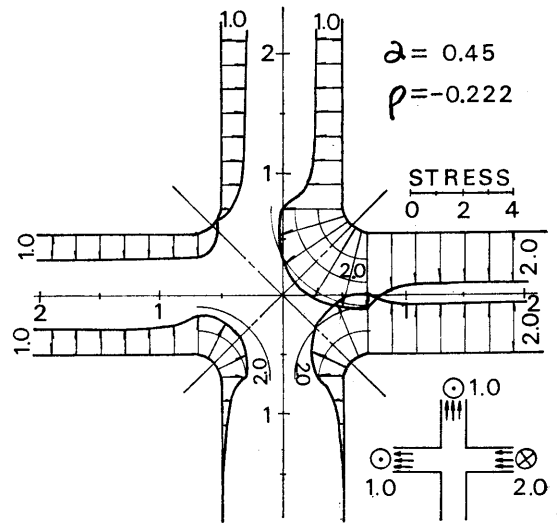


Fig. 6 The shearing stress distribution along the contour

となる。ここに σ_1, σ_2 は荷重点を表わし、今の場合 $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = i$ である。

上式の応力関数の1次導関数は

$$G\pi\phi'(\zeta) = -P\{1/(1-\zeta) - i/(i-\zeta)\}$$

となる。

図-3 の応力関数の1次導関数は

$$G\pi\phi'(\zeta) = -2P/(1-\zeta^2)$$

図-4 のそれは

$$G\pi\phi'(\zeta) = -4P\zeta/(1-\zeta^4)$$

図-5 のそれは

$$G\pi\phi'(\zeta) = -2P\{1/(1-\zeta^2) + i/(1+\zeta^2)\}$$

図-6 のそれは

$$G\pi\phi'(\zeta) = -P\{2/(1-\zeta) + 1/(1+\zeta) - 1/(i-\zeta)\}$$

図-7 のそれは

$$G\pi\phi'(\zeta) = P\{2\zeta/(1+\zeta^2) - 1/(1-\zeta) - 3/(1+\zeta)\}$$

図-8 のそれは

$$G\pi\phi'(\zeta) = P\{1/(i-\zeta) - 1/(i+\zeta) - 2/(1-\zeta)\}$$

である。

図-2, 3 の荷重が基本的な荷重で、図4~8の各々の場合は、図-2, 3 の荷重の重ね合わせによって得られる。

4. 応力集中係数

表-1には、図-2, 4, 5 の荷重が作用した場合の隅角部の $\pi/4$ 軸上の応力集中係数の値をいく通りかの α に対して最小曲率半径の値と共に示す。

図-9には図-2, 4, 5 の荷重の他に図-3の荷重の応力集中係数と応力集中点の曲率半径との関係を両対数グラフに示す。

隅角部の応力集中係数 S. C. F. (stress concentration factor) は、曲率半径 ρ をもって次式で表わされ

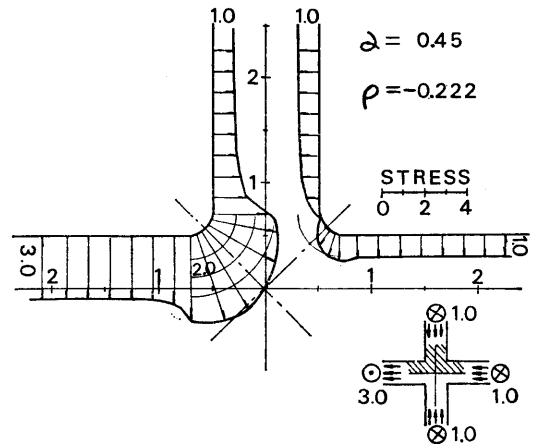


Fig. 7 The shearing stress distribution along the contour

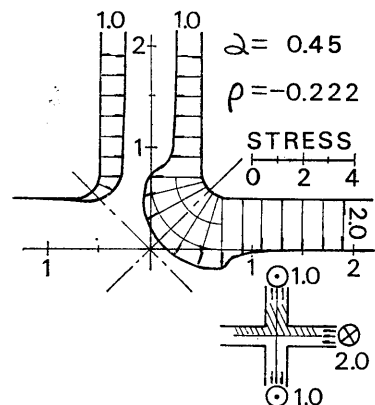


Fig. 8 The shearing stress distribution along the contour

Table I The concentration's factors and Eq. (4, 2), (4, 3) and (4, 4) and their errors

α	radius of cavature ρ	the loads of Fig.(2)			the loads of Fig.(4)			the loads of Fig.(5)		
		S. C. F.	Eq. (4.2) (4.3) (4.4)	Error %	S. C. F.	Eq. (4.2) (4.3) (4.4)	Error %	S. C. F.	Eq. (4.2) (4.3) (4.4)	Error %
0	0.00057	14.358	14.241	0.82	11.894	11.797	0.81	16.821	16.684	0.81
			14.262	0.67		11.815	0.67		16.709	0.67
			14.290	0.47		11.838	0.47		16.742	0.47
0.02	0.00123	10.923	11.017	-0.85	9.049	9.127	-0.85	12.798	12.907	-0.85
			11.018	-0.87		9.128	-0.87		12.908	-0.87
			11.015	-0.84		9.125	-0.84		12.905	-0.84
0.035	0.00276	8.344	8.411	-0.81	6.912	6.968	-0.81	9.775	9.854	-0.81
			8.394	-0.61		6.954	-0.61		9.835	-0.61
			8.367	-0.28		6.932	-0.28		9.803	-0.28
0.05	0.00485	6.931	6.968	-0.53	5.742	5.772	-0.53	8.120	8.163	-0.53
			6.941	-0.15		5.750	-0.15		8.132	-0.15
			6.905	0.38		5.720	0.38		8.089	0.38
0.15	0.03462	3.667	3.626	1.12	3.038	3.004	1.12	4.296	4.248	1.12
			3.608	1.61		2.989	1.61		4.227	1.61
			3.640	0.72		3.016	0.71		4.265	0.71
0.35	0.14976	2.308	2.269	1.68	1.912	1.880	1.68	2.704	2.658	1.68
			2.306	0.07		1.910	0.07		2.702	0.08
			2.334	-1.15		1.934	-1.15		2.735	-1.15
0.45	0.22248	1.992	2.000	-0.39	1.650	1.657	-0.39	2.334	2.343	-0.39
			2.022	-1.52		1.675	-1.52		2.369	-1.52
			1.981	0.53		1.641	0.53		2.321	0.53
0.65	0.41898	1.533	1.567	-2.27	1.270	1.298	-2.27	1.796	1.836	-2.27
			1.523	0.65		1.261	0.65		1.784	0.65
			1.514	1.18		1.255	1.18		1.774	1.18
0.73	0.52938	1.362	1.370	-0.56	1.128	1.135	-0.56	1.596	1.605	-0.56
			1.346	1.21		1.115	1.21		1.577	1.21
			1.388	-1.89		1.150	-1.89		1.626	-1.89
0.77	0.60266	1.262	1.239	1.78	1.045	1.027	1.78	1.478	1.452	1.78
			1.275	-1.08		1.057	-1.08		1.494	-1.08
			1.250	0.89		1.036	0.89		1.465	0.89

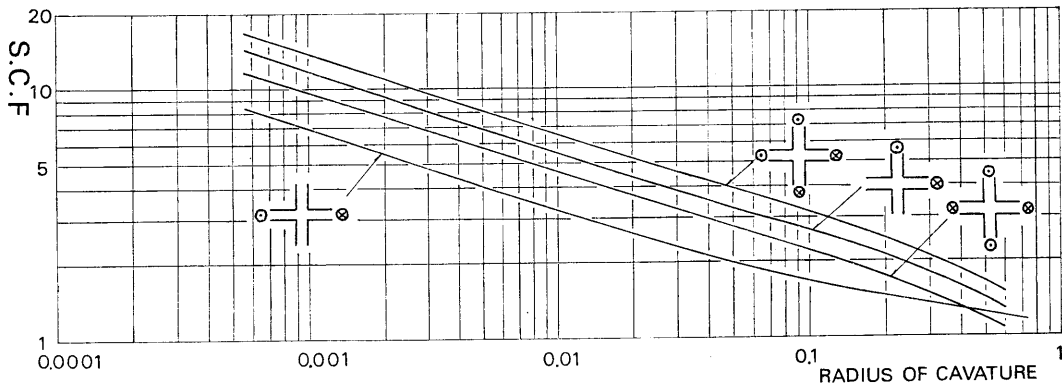


Fig. 9 The relations between the stress concentration factor and the radius of cavature on the logarithmic paper

Table II The values of m_j and k_j of Eq. (4, 2), (4, 3) and (4, 4) for the loads of Fig.(2), (4) and (5)

	Eq.	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
		k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
the loads of Fig.(2)	(4. 2)	1.1814	-0.0997	1.1544	-1.7928	—	—
	(4. 3)	1.1859	-0.5246	5.3431	-13.1576	8.9709	—
	(4. 4)	1.1931	-1.3309	18.8452	-77.3235	123.1266	-68.1666
the loads of Fig.(4)	(4. 2)	0.9787	-0.0826	0.9566	-1.4857	—	—
	(4. 3)	0.9824	-0.4344	4.4246	-10.8950	7.4273	—
	(4. 4)	0.9884	-1.1018	15.6023	-64.0146	101.9307	-56.4315
the loads of Fig.(5)	(4. 2)	1.3840	-0.1166	1.3524	-2.1007	—	—
	(4. 3)	1.3893	-0.6145	6.2600	-15.4162	10.5106	—
	(4. 4)	1.3978	-1.5587	22.0732	-90.5648	144.2055	-79.8341

る⁹⁾。

$$S. C. F. = \sum_{j=1}^{\infty} k_j \rho^{m_j} \quad (4.1)$$

ここに m_j は、隅角部の角度より決められる値である。今の場合に隅角部角度(領域側) 270° で、 $m_j (j=1\sim 6)$ の値は表-2に示す。

k_j は弾性領域の形状や、境界条件から決められる値である。

図-2, 4, 5 に示す各々の荷重に対する応力集中係数の表示式として式(4.1)の始めの第4項, 5項, 6項を採った場合、すなわち

$$S. C. F. = \sum_{j=1}^4 k_j \rho^{m_j} \quad (4.2)$$

$$S. C. F. = \sum_{j=1}^5 k_j \rho^{m_j} \quad (4.3)$$

$$S. C. F. = \sum_{j=1}^6 k_j \rho^{m_j} \quad (4.4)$$

のそれぞれの場合の k_j の値を表-2に示す。

各式の係数 k_j は表-1の値をデーターとして誤差の最小二乗法により求めたものである。

表-1には式(4.2), (4.3), (4.4)の表わす値およびその誤差をも示す。

大きい誤差で2%程度で十分良い近似で表わされているのがわかる。

曲率半径が大きい程誤差も大きくなり、式(4.1)の項数も多く採る必要がある。

図-3, 6~8に示す荷重の対称軸 $\pi/4$ 軸上の応力の値は、さきに求めた図-2, 4, 5の応力集中係数の表示式から簡単に計算される。

5. あとがき

解析すべき形状を単位円に写像する関数さえ得られれば解析は容易である。

隅角部の曲率半径と応力集中の関係はわかっている

が、隅角部の曲線形と応力分布、応力集中の関係を知ることがさらに必要と思われる。

本論文中の数値計算には名古屋大学大型計算機センターを利用した。

参 考 文 献

- 1) 長谷部：“十字形板の応力解析” 土木学会論文報告集 第185号 1971-1 pp.9~20.
- 2) G. C. SIH：“Stress Distribution Near Internal Crack Tips for Longitudinal Shear Problems” Jour. App. Mech. 1965-3 pp.51~58.
- 3) 玉手統・山田哲義：“2直線割れを有する弾性体の縦せん断応力” 日本機械学会論文集 37巻 303号 昭46-11 pp.2107~2113.
- 4) 中山孝之：“縦せん断問題の内部き裂先端における応力拡大係数” 日本機械学会論文集 39巻 322号 昭48-6 pp.1779~1785.
- 5) H. Neuber：“Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies with Arbitrary Nonlinear Stress-Strained Law” Jour. App. Mech. 1961-12 pp.544~550.
- 6) 中山孝之・石田瑞穂：“縦せん断をうける場合の穴のまわりの弾塑性応力分布” 日本機械学会論文集 33巻 252号 (昭42-8) pp.1175~1182.
- 7) J. R. RICE：“Stresses Due to a Sharp Notch in a Work-Hardening Elastic-Plastic Material Loaded by Longitudinal Shear” Jour. App. Mech. 1967-6 pp.287-298.
- 8) A. D. CHITALEY・F. A. HcCLINTOCK：“Elastic-Plastic Mechanics of Steady Crack Growth Under Anti-Plane Shear” J. Mech. Phys. Solids. 1971 Vol.19 pp.147~163.
- 9) 長谷部：“切欠きを有する半無限弾性体の縦せん断応力” 土木学会論文報告集 第211号 1973-3.