

## 短時間豪雨分布の推定に関する二変数ガンマ分布の応用

長 尾 正 志

土木工学教室

(1973年9月13日受理)

Estimation of a Probable Amount of a Short Rainfall by  
Application of Bi-variate Gamma Distribution Theory

Masashi NAGAO

*Department of Civil Engineering*

(Received September 13, 1973)

In designing regional river works for flood control in Japan, it is very important to evaluate an amount of heavy rainfall during a short time, for example, 12 hour, 6 hour, 3 hour and the shorter period, on a basis of the observed data during a standard time, for example, one day. This study aims at the estimation of a probable amount of such short time rainfall by application of bi-variate gamma distribution theory which has recently been studied by us.

The development of the theory is on the empirical experiences that the occurrence of each component of a short time rainfall is subject to the gamma distribution, and also that of the arbitrary sums of each component to the same distribution family approximately. That is, the exact distribution function is deduced analytically and that function is approximately converted into the gamma distribution function for the convenience of the engineering use. And by checking the degree of approximation, it is proved to be practical.

To build a stochastic model of rainfall sequences, following two factors are considered. The one is a probability factor of distribution function as mentioned above. The other is an auto-correlation factor of successive rainfall sequences. For the latter, the first-order autoregressive linear model is adopted, and the problems by using the gamma distribution are discussed. At last, by using the observed data in some stations, the applicability of such theory is examined for various shorter time periods.

## 1. 概 要

近年、わが国における河川災害の実情を概観すると、大河川のはんらん被害は比較的少なくなってきたのに反し、山腹崩壊や土石流を伴った、いわゆる中小河川災害の比重が激増してきたようで、とくに集中豪雨災害がその主役の座を占めたかの感さえある。このような局地的災害の治水対策には従来以上にきめの細かい配慮が要求され、とくにその根底となる計画降雨基準の合理的な策定が不可欠であることはいまでもあるまい。しかし、

その場合、計画基本量とされる短時間豪雨の資料は一般に入手困難な場合が多く、比較的入手の容易な日雨量などから経験的に外挿されるのが通例である。

そこで、本研究は、たとえば1日間といった基準期間内の豪雨量を、12時間、6時間、3時間、…、といった短時間に分割していった場合に、どのような確率分布形に移行するかを理論的に明らかにしようとしたものである。前提として、短時間雨量がガンマ分布に従い、かつその和もガンマ分布で近似しようという立場から解析を進めている。なお、日単位以上の水水量に対して同様な

考えを適用した手法が、室田・江藤らによって提案されている<sup>1)</sup>が、その推論の基礎は“独立な変量の和”としての取扱いであり、ここでは筆者らが研究を進めてきた二変数ガンマ分布の理論を応用して、“相関のある変量の和”として、できるだけ厳密に問題を取扱い、短時間における豪雨分布の特性を明らかにするように努めた。

2. 理論的考察

いま、時刻  $t$  における降雨強度を  $x(t)$  とすると、通常観測されるのは、 $t$  までのある時間間隔  $T$  にわたる積算値で、これを  $X(T, t)$  と記すと、

$$X(T, t) = \int_{t-T}^t x(s) ds \tag{1}$$

である。さて、災害の原因となるような集中豪雨の時間スケール  $T$  は、小さいもので10分間位、極端にはさらに短時間の例も報告されているが、夏期雷雨などを除外したメソ低気圧のスケール、降雨より流出に至る平滑化、雨量観測の精度などを考えると、実用的には普通数時間程度、精々で1時間位までを考えておけばよいであろう。<sup>2)</sup>

つぎに、降雨量時系列  $X(T, t)$  を理論モデルで表現する場合の問題点を考慮すると、ほぼ2つに大別されよう。まず、その1つは  $X(T, t)$  の確率分布の形状に関する問題であり、他は、 $X(T, t)$  と  $X(T, t+T)$  の関連性、すなわち自己相関性に関する問題である。以下、それぞれについて具体的に考察してみよう。

2.1 分布形状のモデル化

(i) ガンマ型2変量の和分布

いま、 $t$  を離散的に、 $t=T, 2T, \dots$  と採ることにし、

$$f(v, \sigma, \rho; z) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(v)\sigma^{\nu+\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{2\nu-1}{4}}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{z}{\sigma(1-\rho)}\right\} \cdot I_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sigma(1-\rho)}z\right) \tag{5}$$

その累積分布は、一般には簡単な表示が困難であるが、 $\nu$  が自然数および半奇数についてはつぎのように表わす

イ  $\nu$  が自然数の場合 ( $\nu=n+1, 2, \dots$ )

$$F(n, \sigma, \rho; z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ a_k \cdot \gamma\left(n-k, \frac{z}{\sigma(1+\sqrt{\rho})}\right) + a_{-k} \cdot \gamma\left(n-k, \frac{z}{\sigma(1-\sqrt{\rho})}\right) \right] \tag{6}$$

ただし

$$a_k = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! k! (n-1-k)!} \frac{(1-\rho)^k (1+\sqrt{\rho})^{n-k}}{(2\sqrt{\rho})^{n+k}}$$

$$a_{-k} = (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! k! (n-1-k)!} \frac{(1-\rho)^k (1-\sqrt{\rho})^{n-k}}{(2\sqrt{\rho})^{n+k}}$$

ロ  $\nu$  が半奇数の場合 ( $\nu=n+1/2, n=0, 1, \dots$ )

$$F\left(n+\frac{1}{2}, \sigma, \rho; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \gamma\left(2n+2k+1, \frac{z}{\sigma(1-\rho)}\right) \tag{7}$$

ただし

$$b_k = \frac{n!(1-\rho)^{n+\frac{1}{2}}\rho^k}{(2n)! k! (n+k)! 2^{2k}}$$

$i \equiv t/T, X(T, t) \equiv \xi_i$ 、と略記し、 $\xi_1$  と  $\xi_2$  の和分布を考える。筆者らのこれまでの研究<sup>3)</sup>によって、 $\xi_1, \xi_2$  がそれぞれ周辺分布が共通のガンマ分布に従うものとしておく。簡単に  $i=1, 2$  と記すと、 $\xi_i$  の密度分布は次式

$$f(\xi_i) d\xi_i = \frac{1}{\Gamma(v)} \left(\frac{\xi_i}{\sigma}\right)^{\nu-1} \exp\left(-\frac{\xi_i}{\sigma}\right) d\left(\frac{\xi_i}{\sigma}\right) \tag{2}$$

あるいは、その累積分布は次式

$$F(\xi_i) = \frac{1}{\Gamma(v)} \cdot \gamma\left(v, \frac{\xi_i}{\sigma}\right) \tag{3}$$

で表現できる。ここに、 $\nu$ : 形状母数、 $\sigma$ : 尺度母数、かつ  $\gamma(v, x)$  は第1種不完全ガンマ関数で

$$\gamma(v, x) = \int_0^x e^{-t} t^{\nu-1} dt$$

である。さらに、 $\xi_1$  と  $\xi_2$  の同時生起の密度分布は

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\Gamma(v)\sigma^{\nu+1}(1-\rho)^{\frac{\nu-1}{2}}} \times (\xi_1 \xi_2)^{\frac{\nu-1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{\xi_1+\xi_2}{\sigma(1-\rho)}\right\} \cdot I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{\xi_1 \xi_2}\right) \tag{4}$$

で与えられる。ここに、 $\rho$  は相関母数、かつ、 $\Gamma(v)$  はガンマ関数および  $I_\nu(x)$  は変形ベッセル関数で、それぞれ

$$\Gamma(v) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\nu-1} dt,$$

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+2n}}{2^{\nu+2n} n! \Gamma(v+n+1)}$$

である。なお、後の記述の便宜上、 $\xi_i$  が上記のようなガンマ分布に従うことを、 $\xi_i \in G(v, \sigma; \rho)$  と表記することにしよう。

a) 厳密解

さて、 $\xi_1, \xi_2$  の和  $z$  の密度分布は次式で与えられる。

ことができ、和分布の特性を理解するには、これでは十分であろう。

さらに、一般に  $\rho$  が 0 あるいは 1 に漸近した極限状態では、累積分布は以下のように簡単になる。

$$F(\nu, \sigma, \rho; z) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(2\nu)} \cdot \gamma\left(2\nu, \frac{z}{\sigma}\right) \quad (\rho \rightarrow 0) \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \gamma\left(\nu, \frac{z}{2\sigma}\right) \quad (\rho \rightarrow 1) \end{array} \right\} \quad (8)$$

**b) 近似解**

さて、上述の式(5)あるいは、(6), (7)より明らかなように、相関を持ったガンマ分布に従う変量の和分布はもはやガンマ分布ではなく、すなわち再生性は厳密には成立しない。しかし、経験的に任意の期間降雨量もほぼガンマ分布に従うことが種々報告されている<sup>4)</sup>ので、こうした事実に適応するような近似解を得るために、厳密解から平均値や分散などの統計量を求めよう。

そのために、まず、特性関数  $Q(\theta)$  は式(5)から次式

$$Q(\theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta z} f(\nu, \sigma, \rho; z) dz = \left[ \frac{1-\rho}{\{1-i\sigma(1-\rho)\theta\}^2 - \rho} \right]^\nu \quad (9)$$

で求められる。これより、和  $z$  の平均値  $m$ , 分散  $d^2$  およびひずみ係数  $C_s$  に添字(2)を付して記すと、以下のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} m(2) = 2\nu\sigma, \quad d^2(2) = 2\nu\sigma^2(1+\rho), \\ C_s(2) = \frac{2\{4-3(1-\rho)\}}{(2\nu)^{\frac{1}{2}}(1+\rho)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right\} \quad (10)$$

以上の結果を利用し、 $z$  の分布もガンマ分布で近似し得るものとして、近似分布の母数を求めよう。まず和分布の尺度母数  $\sigma(2)'$  (dash は近似値を意味する)を、式(8)を考慮して、次式の無限級数による表示が可能であるとする。

$$\sigma(2)' = \sigma(1 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots), \quad a_1 + a_2 + \dots = 1 \quad (11)$$

そこで、式(10)により、平均値が厳密解と近似解で一致するという条件

$$\nu(2)' \cdot \sigma(2)' = \nu(2)' \cdot \sigma(1 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots) = 2\nu\sigma$$

から、形状母数  $\nu(2)'$  はつぎのようになる。

$$\nu(2)' = 2\nu / (1 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots) \quad (12)$$

さらに、分散が一致するという条件

$$\begin{aligned} \nu(2)' \{ \sigma(2)' \}^2 &= 2\nu\sigma^2(1 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots) \\ &= 2\nu\sigma^2(1 + \rho) \end{aligned}$$

から次式が成立つ。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = \dots = 0 \quad (13)$$

結局、和  $z$  の累積分布の近似式  $F(\nu', \sigma', \rho; z)$  として、次式が得られたことになる。

$$F(\nu', \sigma', \rho; z) = \left. \begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(\nu(2)')} \cdot \gamma\left(\nu(2)', \frac{z}{\sigma(2)'}\right) \\ \text{ただし } \nu(2)' = \frac{2\nu}{1+\rho}, \quad \sigma(2)' = \sigma(1+\rho) \end{array} \right\} \quad (14)$$

**c) 誤差評価**

**イ ひずみ係数の近似度**

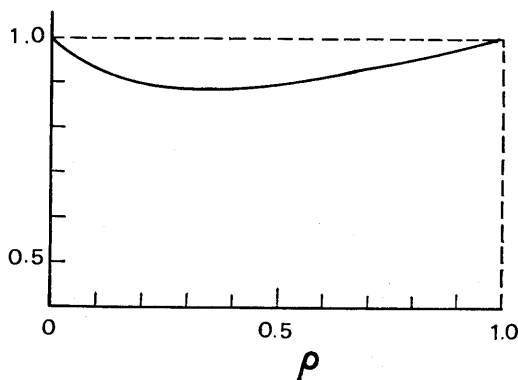
近似解では2次以下の積率に関しては完全な一致が計られたが、当然3次以上の積率を用いる統計量には誤差を生じることになる。これを実用的に3次の積率を使ったひずみ係数の近似度として表現しておく。すなわち、ひずみ係数  $C_s(2)$  の近似度  $\alpha[C_s(2)]$  は、式(10), (14)より次式

$$\begin{aligned} \alpha[C_s(2)] &= \frac{C_s(2)'}{C_s(2)} \\ &= \frac{2/\sqrt{\nu(2)'}}{2\{4-3(1-\rho)\} / \{(2\nu)^{\frac{1}{2}}(1+\rho)^{\frac{3}{2}}\}} \\ &= \frac{(1+\rho)^2}{1+3\rho} \end{aligned} \quad (15)$$

で求められる。

したがって、ひずみ係数の近似度  $\alpha[C_s(2)]$  は相関母数  $\rho$  のみの関数で、その関係は Fig. 1 に示すとおりである。図でわかるように、 $\alpha[C_s(2)]$  は一般に1に近く

**$\alpha[C_s(2)]$**



**Fig. 1** Relation the degree of approximation of skewness coefficient and the correlation coefficient.

最小値でも  $\alpha[C_s(2)] = 0.889$  ( $\rho = 0.33$ ) で、十分近似度が高い。また  $\rho$  が 0 あるいは 1 に漸近するにつれて  $\alpha[C_s(2)]$  は 1 に、すなわち近似解は厳密解に漸近する。

**ロ 累積分布の誤差**

累積分布に関して、式(14)の近似解と式(6), (7)の厳密解とを比較し誤差を評価することによって、実用性を検討してみる。具体的な計算は、 $\sigma = 1$  とし、 $\nu = 1/2, 1, 2$  および  $\rho = 0.1, 0.1, 0.9$  について行なっている。誤差の大きくする1例として、 $\rho = 0.4, \nu = 1/2, 1, 2$  に対する厳密解と近似解の対比を Fig. 2 に示す。すでに、Fig. 1 で明らかなように、近似解のひずみ係数は厳密解のそれに比較してやや小さくなる、すなわち近似解の密

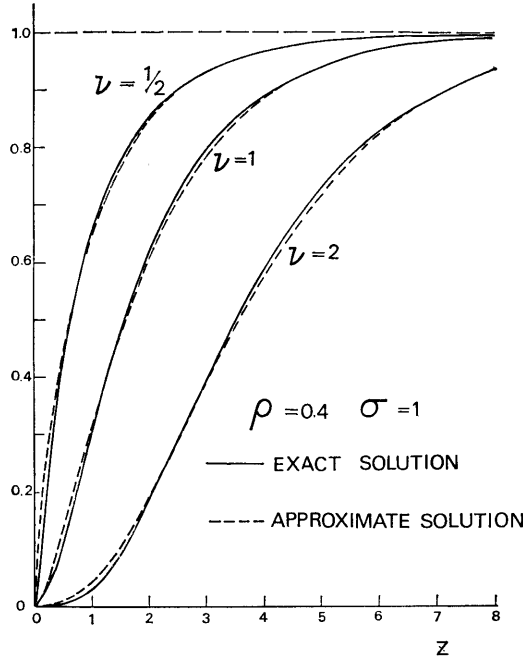


Fig. 2 Exact solution and approximate solution of the cumulative distribution function.

度分布は厳密解より若干平滑化される傾向はあるが、近似解は十分な実用性を有するといえよう。

計算結果は、絶対誤差  $\Delta F = F(v', \sigma', \rho; z) - F(v, \sigma, \rho; z)$  や次式の相対誤差

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{F(v', \sigma', \rho; z) - F(v, \sigma, \rho; z)}{F(v, \sigma, \rho; z)} \quad (16)$$

で整理したが、紙数の関係上、相対誤差のごく概要を Table 1, 2, 3 に示すに止める。とくに、防災計画対象となるのは、 $z$  の大きい、あるいは  $F$  が 1 に近い、領域であるが、その場合の近似の精度は非常に高いといえよう。

(ii) ガンマ型多変量の和分布

まず、最小単位に分割された期間ごとの降雨量系列を、新たに、 $\{\xi(i)\}$  と記し、これが前述 2.1 の表記によって、次式のガンマ分布

$$\xi(i) \in G(v(1), \sigma(1); \rho(1))$$

に従うものとしておく。つぎに、あい継続する単位降雨量の和  $\xi(1) + \xi(2)$  が、同様にガンマ分布族に従うとすれば、それを

$$\xi(1) + \xi(2) \in G(v(2)', \sigma(2)'; \rho(2))$$

と記せば、前出の式 (14) より、次式の関係

$$v(2)' = \frac{2v(1)}{1 + \rho(1)}, \quad \sigma(2)' = \sigma(1)\{1 + \rho(1)\} \quad (17)$$

が成立つはずである。

さらに、 $\{\xi(1) + \xi(2)\} + \{\xi(3) + \xi(4)\}$  が

$$\xi(1) + \xi(2) + \xi(3) + \xi(4) \in G(v(4)', \sigma(4)'; \rho(4))$$

であれば、全く同様にして、

$$v(4)' = \frac{2v(2)'}{1 + \rho(2)}, \quad \sigma(4)' = \sigma(2)'\{1 + \rho(2)\}$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} v(4)' &= \frac{2^2 \cdot v(1)}{\{1 + \rho(1)\}\{1 + \rho(2)\}}, \\ \sigma(4)' &= \sigma(1)\{1 + \rho(1)\}\{1 + \rho(2)\} \end{aligned} \right\} (18)$$

が成立つ。以下、同様に、一般に  $2^n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) の単位降雨量の和、 $\xi(1) + \xi(2) + \dots + \xi(2^{n-1})$  が

$$\xi(1) + \xi(2) + \dots + \xi(2^{n-1}) \in G(v(2^n)', \sigma(2^n)'; \rho(2^n))$$

であれば、この分布の形状母数および尺度母数は次式

$$\left. \begin{aligned} v(2^n)' &= \frac{2^n \cdot v(1)}{\prod_{i=1}^n \{1 + \rho(2^{i-1})\}}, \\ \sigma(2^n)' &= \sigma(1) \prod_{i=1}^n \{1 + \rho(2^{i-1})\} \end{aligned} \right\} (19)$$

で与えられる。また、この場合、ひずみ係数  $C_s(2^n)'$  は、

$$\left. \begin{aligned} C_s(2^n)' &= \frac{2}{\sqrt{v(2^n)'}} = \frac{C_s(1)}{\sqrt{\prod_{i=1}^n \{[1 + \rho(2^{i-1})]/2\}}} \\ \text{ただし } C_s(1) &= \frac{2}{\sqrt{v(1)}} \end{aligned} \right\} (20)$$

となる。

つぎに、 $\rho(2^{i-1})$  の特殊な場合を考えておく。まず、 $\rho(2^{i-1}) \rightarrow 1$  なら、式 (19) (20) より  $v(2^n)' \rightarrow v(1)$ ,  $C_s(2^n)' \rightarrow C_s(1)$ , すなわち、相関が非常に強い場合には和分布

**Table 1** Relative error of approximate solution of the cumulative distribution function ( $\sigma=1, \nu=1/2$ ).

$z \backslash p$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.5	0.0146	0.0223	0.0243	0.0215	0.0151	0.0066	-0.0017	-0.0066	-0.0055
1.0	-0.0045	-0.0090	-0.0130	-0.0161	-0.0178	-0.0176	-0.0153	-0.0111	-0.0058
1.5	-0.0065	-0.0112	-0.0141	-0.0154	-0.0151	-0.0134	-0.0107	-0.0074	-0.0038
2.0	-0.0048	-0.0080	-0.0097	-0.0101	-0.0095	-0.0082	-0.0065	-0.0044	-0.0023
2.5	-0.0029	-0.0046	-0.0054	-0.0055	-0.0051	-0.0044	-0.0035	-0.0025	-0.0013
3.0	-0.0013	-0.0021	-0.0024	-0.0025	-0.0023	-0.0020	-0.0017	-0.0012	-0.0006
3.5	-0.0003	-0.0005	-0.0006	-0.0006	-0.0006	-0.0006	-0.0005	-0.0005	-0.0002
4.0	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
4.5	0.0005	0.0008	0.0008	0.0009	0.0008	0.0007	0.0005	0.0002	0.0001
5.0	0.0006	0.0009	0.0011	0.0011	0.0010	0.0008	0.0006	0.0003	0.0002
6.0	0.0005	0.0008	0.0010	0.0010	0.0008	0.0008	0.0007	0.0004	0.0002
7.0	0.0003	0.0006	0.0007	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0004	0.0002

**Table 2** Relative error of approximate solution of the cumulative distribution function ( $\sigma=1, \nu=1$ ).

$z \backslash p$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.5	0.0841	0.1428	0.1767	0.1872	0.1765	0.1478	0.1062	0.0603	0.0226
1.0	0.0176	0.0262	0.0270	0.0224	0.0146	0.0061	-0.0008	-0.0040	-0.0034
1.5	-0.0015	-0.0045	-0.0088	-0.0126	-0.0151	-0.0158	-0.0142	-0.0106	-0.0057
2.0	-0.0068	-0.0122	-0.0160	-0.0180	-0.0181	-0.0165	-0.0134	-0.0095	-0.0049
2.5	-0.0070	-0.0117	-0.0144	-0.0153	-0.0147	-0.0129	-0.0102	-0.0071	-0.0037
3.0	-0.0055	-0.0089	-0.0106	-0.0110	-0.0103	-0.0089	-0.0071	-0.0049	-0.0025
3.5	-0.0037	-0.0058	-0.0068	-0.0070	-0.0065	-0.0059	-0.0045	-0.0034	-0.0017
4.0	-0.0021	-0.0033	-0.0038	-0.0039	-0.0037	-0.0032	-0.0026	-0.0019	-0.0010
4.5	-0.0009	-0.0014	-0.0016	-0.0017	-0.0017	-0.0015	-0.0013	-0.0009	-0.0005
5.0	-0.0001	-0.0001	-0.0002	-0.0002	-0.0003	-0.0003	-0.0004	-0.0003	-0.0002
6.0	0.0007	0.0011	0.0012	0.0011	0.0011	0.0008	0.0006	0.0004	0.0002
7.0	0.0007	0.0012	0.0014	0.0014	0.0013	0.0011	0.0009	0.0006	0.0003

**Table 3** Relative error of approximate solution of the cumulative distribution function ( $\sigma=1, \nu=2$ ).

$z \backslash p$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.5	0.3664	0.7032	0.9643	1.1145	1.1385	1.0312	0.8120	0.5212	0.2251
1.0	0.1492	0.2558	0.3162	0.3337	0.3119	0.2599	0.1896	0.1153	0.0501
1.5	0.0668	0.1064	0.1227	0.1202	0.1041	0.0803	0.0543	0.0310	0.0129
2.0	0.0277	0.0407	0.0429	0.0377	0.0287	0.0187	0.0101	0.0042	0.0009
2.5	0.0081	0.0096	0.0071	0.0029	-0.0014	-0.0045	-0.0058	-0.0053	-0.0032
3.0	-0.0015	-0.0048	-0.0083	-0.0112	-0.0127	-0.0126	-0.0110	-0.0081	-0.0044
3.5	-0.0057	-0.0105	-0.0138	-0.0155	-0.0156	-0.0142	-0.0117	-0.0083	-0.0044
4.0	-0.0069	-0.0117	-0.0144	-0.0154	-0.0148	-0.0131	-0.0105	-0.0074	-0.0038
4.5	-0.0065	-0.0106	-0.0127	-0.0132	-0.0125	-0.0109	-0.0087	-0.0061	-0.0031
5.0	-0.0054	-0.0086	-0.0101	-0.0104	-0.0098	-0.0085	-0.0068	-0.0047	-0.0024
6.0	-0.0027	-0.0043	-0.0050	-0.0052	-0.0049	-0.0043	-0.0035	-0.0022	-0.0013
7.0	-0.0007	-0.0012	-0.0014	-0.0015	-0.0015	-0.0014	-0.0012	-0.0009	-0.0005
8.0	0.0004	0.0005	0.0006	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
9.0	0.0008	0.0012	0.0014	0.0013	0.0012	0.0010	0.0007	0.0005	0.0002
10.0	0.0008	0.0013	0.0016	0.0015	0.0014	0.0012	0.0009	0.0006	0.0003
12.0	0.0005	0.0008	0.0010	0.0011	0.0011	0.0010	0.0008	0.0006	0.0003
14.0	0.0002	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0004	0.0002

はもとの分布型と変わらないことは当然であろう。一方、 $\rho(2^{i-1}) \rightarrow 0$  なら  $v(2^n)' \rightarrow 2^n \cdot v(1)$ ,  $C_s(2^n)' \rightarrow C_s(1)/\sqrt{2^n}$ , したがって  $n$  が十分大きければ、 $v(2^n)' \rightarrow \infty$ ,  $C_s(2^n)' \rightarrow 0$ , すなわち相関が非常に弱い場合には、ガンマ型多変数の和は正規分布に漸近する。

結局、ある基準期間における豪雨量を短期間に分割していった際の分布形状の移行は、以上の諸関係を逆に辿ることによって、明らかにされる。しかし、それには、相関母数  $\{\rho(i)\}$  の相互依存の関係、換言すれば、単位期間降雨量の時系列  $\{\xi(i)\}$  に関する自己相関の特性を把握しておかねばならない。

2.2 自己相関性のモデル化

いうまでもなく、このモデル化には豪雨時系列の実態の解明が基礎にならねばならない。しかし、この方面の研究が十分でない現段階では、まず簡単な理論モデルから出発して、その後に実際の資料でその妥当性を検討してみることにしよう。

(i) 基礎仮定

a) 定常性

降雨量時系列  $\{\xi(i)\}$  に関する 2 次以下の積率についての統計量を求めよう。すなわち、まず

$$\left. \begin{aligned} \text{平均値: } m &= E[\xi(i)] = v(1) \cdot \sigma(1) \\ \text{分散: } d^2 &= E\{[\xi(i) - m]^2\} = v(1) \{\sigma(1)\}^2 \end{aligned} \right\} (21)$$

さらに、筆者らの研究で、相関母数  $\rho$  は、積率解では通常の標本相関係数と合致することが分っている<sup>4)</sup> ので、

$$E_r = \frac{1}{d} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \frac{\xi(i+2) - m}{d} - \rho \frac{\xi(i+1) - m}{d} \right\} \cdot \xi(i) \times f(\xi(i+2), \xi(i+1), \xi(i)) d\xi(i+2) d\xi(i+1) d\xi(i) \quad (27)$$

ところで、 $f = f(\xi(i+2), \xi(i+1), \xi(i))$  は、いま 1 次の自己回帰モデルを仮定しているから、 $\xi(i)$  の生起

$$f = f(\xi(i)) \cdot f(\xi(i+1)|\xi(i)) \cdot f(\xi(i+2)|\xi(i+1), \xi(i)) = f(\xi(i)) \cdot f(\xi(i+1)|\xi(i)) \cdot f(\xi(i+2)|\xi(i+1)) \quad (28)$$

一方、二変数ガンマ分布の基礎式(4)にたつて

$$\left. \begin{aligned} f(\xi(i)) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\sigma^\nu} \{\xi(i)\}^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{\xi(i)}{\sigma}\right\} \\ f(\xi(j+1)|\xi(j)) &= \frac{1}{\sigma(1-\rho)\rho^{\frac{\nu-1}{2}}} \left\{ \frac{\xi(j+1)}{\xi(j)} \right\}^{\frac{\nu-1}{2}} \exp\left\{-\frac{\xi(j+1) + \rho\xi(j)}{\sigma(1-\rho)}\right\} \\ &\quad \times I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{\sigma(1-\rho)}\sqrt{\xi(j+1) \cdot \xi(j)}\right), \quad (j=i, i+1) \end{aligned} \right\} (29)$$

である。したがって、式(28)、(29)を式(27)に用いて積分を行えば、 $E_r$  の厳密な評価が可能になるはずである。しかしながら、この積分は非常に複雑な関数となり、解析的な方法だけでは誘導は困難なようである。そこで、

$$\begin{aligned} E_r &= E\left[\omega(i+1) \cdot \left\{ \frac{\xi(i) - m}{d} \right\}\right] = \frac{1}{\rho} E\left[\omega(i+1) \cdot \left\{ \frac{\xi(i+1) - m}{d} \right\}\right] - \frac{1}{\rho} E[\omega(i+1) \cdot \omega(i)] \\ &= \frac{1}{\rho} E\left[\left\{ \frac{\xi(i+2) - m}{d} \right\} \left\{ \frac{\xi(i+1) - m}{d} \right\}\right] - E\left[\left\{ \frac{\xi(i+1) - m}{d} \right\}^2\right] - \frac{1}{\rho} E[\omega(i+1) \cdot \omega(i)] \end{aligned}$$

単位ずれの自己相関係数:

$$\rho = \frac{E\{[\xi(i) - m][\xi(i+1) - m]\}}{d^2} \quad (22)$$

そこで、以下、これらの諸量が時点  $i$  に無関係な定数と仮定して考察を進めよう。

b) 線型 1 次の自己回帰モデル

時系列  $\xi(i)$  と  $\xi(i+1)$  の関係として、二変数ガンマ分布の場合に回帰曲線が回帰直線となる<sup>5)</sup> ことに着目し、最も単純に、次式のような線型 1 次の自己回帰モデルを仮定する。

$$\frac{\xi(i+1) - m}{d} = \rho \frac{\xi(i) - m}{d} + \omega(i) \quad (23)$$

当然、 $E[\omega(i)] = 0$  である。式(23)、(22)より次式

$$\begin{aligned} E[\xi(i+2) \cdot \xi(i)] &= m^2 + d^2\rho + dE[\omega(i+1) \cdot \xi(i)] \quad (24) \end{aligned}$$

が成立つ。また、 $\xi(i)$  に関するずれ  $\tau$  の自己相関係数を

$$\rho[\tau] = \frac{E\{[\xi(i) - m][\xi(i+\tau) - m]\}}{d^2} \quad (25)$$

と記す。式(25)を(24)に代入すれば、ずれ 2 の自己相関係数は次式で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \rho[2] &= \rho^2 + E_r \\ \rho &= \rho[1] = \rho(1), \quad E_r = E[\omega(i+1) \cdot \xi(i)]/d \end{aligned} \right\} (26)$$

上式中の  $E_r$  は、 $\xi(i)$  が正規分布に従えば当然 0 となるがいまの場合その保証はないので、以下この評価を行なってみよう。

(i) 厳密な評価

時系列  $\{\xi(i)\}$  が二変数ガンマ分布に従う変量として、 $E_r$  の厳密な表示を行なってみる。まず、式(26)は式(23)より、次式のように表わせる。

下における  $\xi(i+1)$  の条件付分布を  $f(\xi(i+1)|\xi(i))$  と記すと、つぎのように書き直せる。

現在、具体的な  $\rho, \nu$  などに対する数値積分を検討中であるが、その結果は別の機会に報告したい。

(ii) 近似的な評価

前出の式(26)、(23)より、

さらに、式 (21), (22) を用いると、結局  $E_r$  は次式で表わせる。

$$E_r = -\frac{1}{\rho} E[\omega(i+1) \cdot \omega(i)] \quad (30)$$

さて、 $\omega(i+1)$ ,  $\omega(i)$  は、定義より明らかなように、規準化変量

$$\eta(j) = \frac{\xi(j) - m}{d} \quad (j=i, i+1, i+2) \quad (31)$$

を用いて、 $\xi(i)$  から  $\xi(i+1)$ 、および  $\xi(i+1)$  から  $\xi(i+2)$  を、回帰特性より推定しようとした場合の誤差項に相当する。この説明を Fig. 3 で示す。一方、 $\rho$  は、式 (25) より、何ら推定を行わずに、規準化変量  $\eta(i)$  と

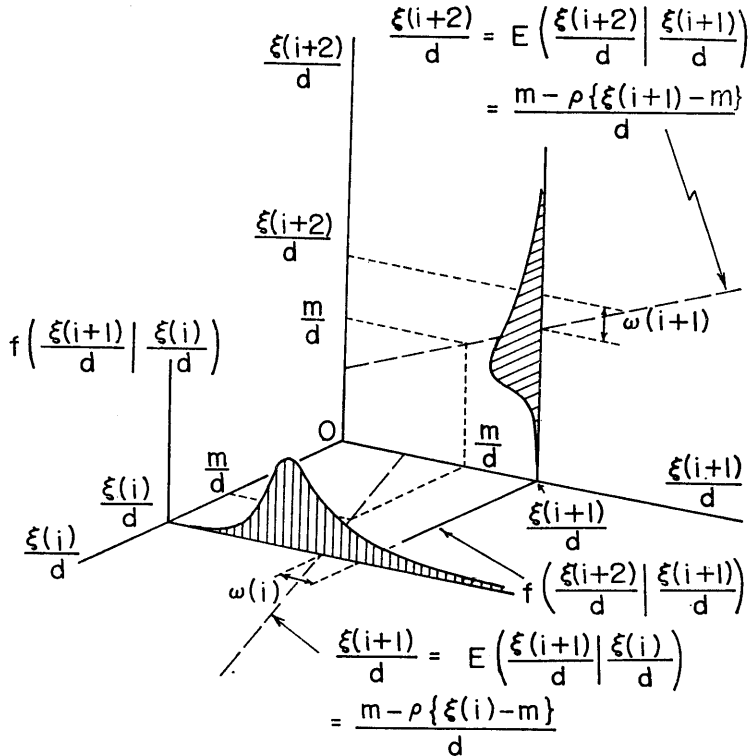


Fig. 3 Explanation of the error terms  $\omega(i)$  and  $\omega(i+1)$  by the estimation of a regression line.

$\eta(i+1)$  の相関の程度を量的に示したものを、すなわち  $\rho = E[\eta(i) \cdot \eta(i+1)]$  で表現したものである。

したがって、その近似の程度は当然回帰直線による推定の有効性に依存するであろうが、一般的な回帰直線の有効性を考えれば、 $|E[\omega(i+1) \cdot \omega(i)]| \ll \rho$ 、すなわち式 (26) で  $E_r$  が無視できて、 $\rho(2) \approx \rho^2$  となるものと考えられる。さらに、一般的には

$$\rho[\tau] \approx E\left[\left\{\frac{\xi(i) - m}{d}\right\} \left\{\frac{\xi(i+\tau) - m}{d}\right\}\right] \approx \rho^\tau \quad (32)$$

の近似が予想される。そこで、以下では上式を用いて考察を進める。

上式と式 (14) より、 $\{\xi(1) + \xi(2)\}$  と  $\{\xi(3) + \xi(4)\}$  のように、あいとなる 2 単位期間の降雨量の相関係数  $\rho(2)$  は、次式で表わされる。

$$\rho(2) = \frac{\{\nu(1)\} \{\sigma(1)\}^2 \{[\rho(1)]^2 + 2[\rho(1)] + 1\} \rho(1)}{2\{\nu(1)\} \{\sigma(1)\}^2 \{1 + \rho(1)\}}$$

$$= \frac{\rho(1) \{1 + \rho(1)\}}{2}$$

したがって、一般に  $2^i$  単位期間の降雨量に対して、

$$\rho(2^i) = \frac{\rho(2^{i-1}) \{1 + \rho(2^{i-1})\}}{2} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (33)$$

が成立つ。ここで、 $2^n = S$  と記し、 $\rho(1)$  と  $\rho(2^n) = \rho(S)$  の関係を、各  $n$ ,  $S$  について Fig. 4 に示す。

さて、以上の諸関係を用いると、ある期間  $S$  における降雨量分布が  $G(\nu(S), \sigma(S); \rho(S))$  として既知であれば、それを任意の単位期間に分割した場合の分布は、 $G(\nu(1), \sigma(1); \rho(1))$  として容易に求められる。すなわち、任意の  $S$  に対して、式 (33) あるいは Fig. 4 より内挿によって、 $\rho(S)$  から  $\rho(1)$  が分る。ついで、式 (19) より得られる次式の関係

$$\frac{\nu(1)}{\nu(S)} = \frac{\sigma(S)}{s\{\sigma(1)\}} = \frac{\rho(S)}{\rho(1)} \quad (34)$$

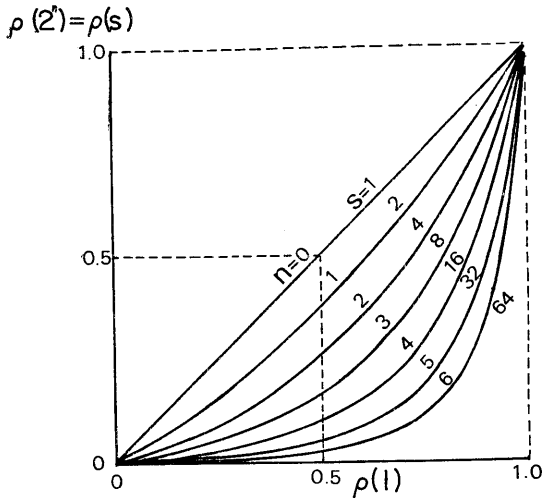


Fig. 4 Relation  $\rho(1)$  and  $\rho(2^n)=\rho(S)$  in which  $\rho(2^i)=\rho(2^{i-1})\{\rho(2^{i-1})+1\}/2$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) and  $S=2^n$ .

を使えば、単位期間における降雨分布の形状母数  $\nu(1)$ 、尺度母数  $\sigma(1)$  が求められる。なお、その場合のひずみ係数  $C_s(1)$  は次式によればよい。

$$C_s(1) = \frac{2}{\sqrt{\nu(1)}} = 2\sqrt{\frac{\rho(1)}{\{\rho(S)\}\{\nu(S)\}}} \quad (35)$$

3. 資料による理論の検討

式(34)より、期間の細分化に伴う降雨量分布の形状変化は、降雨量時系列の自己相関特性  $\{\rho(i)\}$  によって支配されることとなる。そこで、この自己相関性という面から実際の豪雨資料に基づいて理論の有用性を検討してみる。

3.1 豪雨資料の選定

上述の理論は、2.2 (i) に述べたように、豪雨時系列の定常性が基礎になっている。したがって、この条件が満足されるような豪雨資料を選ぶ必要がある。しかし、これは厳密にはかなり難しい面もあるが、実用的見地からすると、ほぼつぎの2つの方向が考えられる。

- (i) 上位標本の選定
- (ii) 極値標本の選定

まず、(i) は、たとえば単位時間当り 10mm 以上というような下限値を設定して、それ以上の標本をすべて選ぶという考えである。この場合、各観測点で豪雨を指示する適切な下限値を選ぶことはかなり工夫を要するであろう。また、自己相関係数という点からみると、一連豪雨の中で、たとえば 24時間といった大きなずれ時間を含む標本数は著しく限定されるし、たとえ含まれている場合でも、豪雨系列の初期と末期の降雨強度の弱い部分の相関値をも平均した値となることが多く、あまり適切と

はいえまい。

つぎに、(ii) は、(i) と同様に、上位から何番目までの極値を選定すべきかという問題もあるが、各観測点ごとやずれ時間ごとに共通した標本の抽出が可能だという利点がある。そこで、ここでは、主として (ii) の立場から資料を選んでみる。

さて、資料として気象台の毎時雨量観測値や建設省河川局調による年間極値雨量表を利用した。後者は愛知県を中心とした各観測所における 24, 12, 6時間、…などの 1, 2, 3 位、…などの各年極値雨量を整理したものである。

計算には、たとえば年間 1 位の 1 時間雨量の自己相関係数の値には、つぎのような標本相関係数を採用している。まず、各年ごとに最大 1 時間雨量とその前後の 1 時間雨量を選出しておく。つぎに、最大値を含んだ前あるいは後 2 時間雨量のうちどちらか大きい方を選び、これを、たとえば  $i$  年について  $(x_i, y_i)$  ( $i=1, 3, \dots, n$ ) とする。したがって、全標本年間  $n$  について  $n$  本の標本対が得られるから、それから標本相関係数  $r(1)$  を求め、これを自己相関係数  $\rho(1)$  の値として使用した。

3.2 計算結果

年間極値として、1 位のみ、1~2 位、1~3 位をとった平均値で表示した。Fig. 5, Fig. 6 は豊川、豊橋の例である。一般に、プロット点はかなりばらつくが、期間の細分化に伴う増加傾向は地点ごとにほぼ類似するようであった。図中の曲線は、1~3 位の平均値を用いた

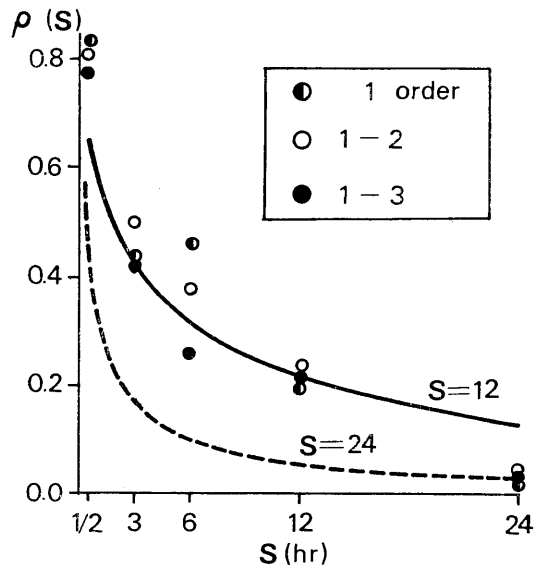


Fig. 5 Auto-correlation coefficient of a short rainfall by using the annual extreme samples (Toyokawa, 1953-70).



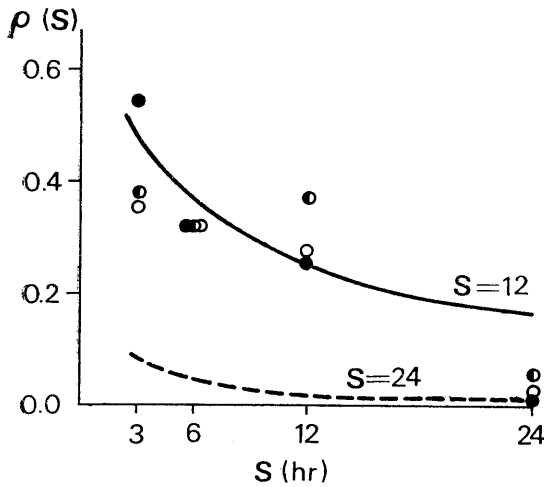


Fig. 6 Auto-correlation coefficient of a short rainfall by using the extreme samples (Toyohashi, 1955-69).

式(3)による  $\rho(i)$  の表記で、破線は24時間、実線は12時間を基準期間  $S$  に採っている。この例のように、基準期間を24時間に選ぶとかなり理論値と実測値の違いが出るが、12時間程度が基準であれば、3時間位までの推定はほぼ可能という例が多くみられた。なお、Fig. 7 は岐阜における上位標本（1時間最大 10mm 以上、一連豪雨 80mm 以上、12年間で40コ）による計算結果で、ほぼ同様な傾向が認められる。

ところで、このように自己相関係数のてい減傾向が12, 24時間の間で顕著な差違を示すかについては、恐らくこの時間スケールの前後で豪雨気象の物理的機構そのものが大きく相異していることが考えられるが、詳細は今後の研究に待たねばならない。

最後に、研究を進めるに当って、資料収集に中部地建河川局の方々の御世話になったし、図面作成には助手松本博成君、計算には前学生高橋和夫君の助力を受けたことを記して、感謝しておきたい。

付記：本文の投稿後、式(28), (30)の誤差項  $E_r$  が、定義した二変数ガンマ分布のように一般に回帰曲線が回帰直線となる場合には、0 になることが理論的に導けた。したがって、2.2 (ii) は厳密に成立つことになる。詳細な説明は別の機会に譲りたい。

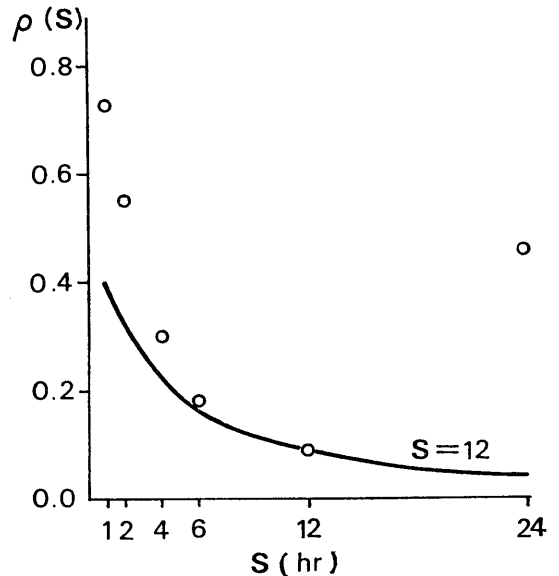


Fig. 7 Auto-correlation coefficient of a short rainfall by using the censored upper samples (Gifu, 1961-72).

参考文献

- 1) 室田明・江藤剛治・田中剛：水資源計画における時間単位に関する研究（第1報）——水文資料の確率分布との関係——，土木学会 27 回年次講演概要集 2，pp. 317~320, 1972. 10.
- 2) 齊藤鍊一・奥田節夫・齊藤亮平：集中豪雨，新しい災害と防災，日本放送出版協会，pp. 100~110, 1973. 5.
- 3) 長尾正志・角屋睦：二変数ガンマ分布とその適用に関する研究 (1), (2)，京大防災研究所年報，第13号 B，第14号 B, 1970, 1971.
- 4) たとえば，小林康江・石部幽香子：雨量の度数の分布について，気象と統計，第8巻，第3~4号，pp. 51~53.
- 5) 前出 3) の文献，第14号 B，p. 47, 1971.