半楕円切欠きを有する半無限板の応力解析

長 谷 部 宣 男

土 木 工 学 教 室

（1972年9月5日受理）

Stress Analyses of a Semi-Infinite Plate with a Semi-Elliptic Notch

Norio HASEBE

Department of Civil Engineering

(Received Sept. 5. 1972)

In a semi-infinite plate with a semi-elliptic notch, stress analyses are carried out as a plane elastic problem and as a problem of the transverse flexture of a thin elastic plate.

The stress distributions and stress concentrations are discussed for several notch depths.

The rational mapping function and Muskhelishvili's method are used for the stress analyses.

1. 緒　　言

半楕円切欠きを有する半無限弾性体の平面問題の解析解は，樋口，鈴木[1]のだ円座標を用いた級数解，複素変数および摂動法を用いてU型（その特別な場合として半楕円切欠き）切欠きを解いた清家の解[2]がある。

また薄板の面外曲げの問題の解には，複素変数および摂動法を用いた塩谷の解[3]がある。

本論文は，文献—4）と同じく有理型の等角写像関数を用いて，平面弾性問題や薄板の面外曲げの閉じた解を求め，応力分布や応力集中に関して考察したものである。

2. 有理型等角写像関数

図—1に示す半楕円切欠きを有する半無限領域の内部を単位円内部に等角写像する関数は

$$Z=-i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}-i\sqrt{2}\,\frac{b}{a}\,\frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{1-\zeta} \qquad (2.1)$$

である。ここでは，楕円形の横軸を1・0とし，縦軸すなわち半楕円切欠きの深さは，b/aで与えられる。従って$0<b/a<1$のとき偏平な半楕円切欠きを，$b/a=1$のとき半円切欠きを，$b/a>1$のとき深い半楕円切欠きを表わす。

式（2．1）に対する有理型写像関数は，文献—4)の表—1の値を用いて

$$\sqrt{1+\zeta^2}\doteqdot\sum_{j=1}^{10}\left\{\frac{-A_j}{1+\alpha_j\zeta^2}+A_j\right\}+1$$

従って

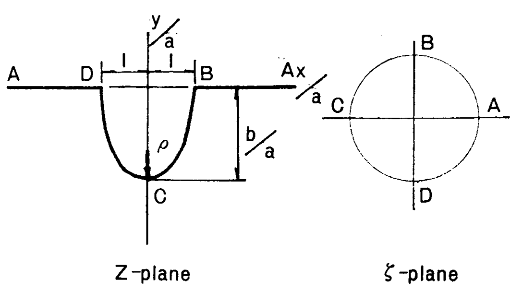

Fig. 1

$$Z=\omega(\zeta)=-i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}-i\frac{b\sqrt{2}}{a(1-\zeta)}\left[\sum_{j=1}^{10}\left\{\frac{-A_j}{1+\alpha_j\zeta^2}+A_j\right\}+1\right] \qquad (2.2)$$

となる。

表—1には，$b/a=1$ 即ち半円切欠きの場合の座標値およびその点での曲率半径の値が示してある。有理写像関数のため角点であるべき B，D 点に小さな丸味がついているが，切欠部は，B，D 点付近を除いてほぼ円弧に近いこと，半無限に伸びる境界縁もほぼ直線に近いことより，式（2．1）の表わす形状にかなり近いことがわかる。

Table 1 The stress distributions of a semi-infinite plate with a semi-circle notch(b/a=1) under a uniform tension.
* The upper values are when the poisson's ratio is 0.0 and the lower values are when the poisson's ratio is 0.5.

Distribution of stresses on the boundary contour

θ radian	radius of curvature ρ/a	coordinate x/a	y/a	σ_θ	M_θ*
π	− 1.0000	0.0	− 1.0	3.065	1.669 1.858
2.9	− 1.0000	0.1214	− 0.9926	3.011	1.649 1.832
2.5	− 0.9999	0.3323	− 0.9432	2.657	1.520 1.667
2.1	− 0.9995	0.5736	− 0.8191	1.861	1.223 1.289
1.8	− 0.9961	0.7936	− 0.6085	0.822	0.807 0.766
1.65	− 1.0160	0.9238	− 0.3829	0.153	0.481 0.368
1.6	− 1.0594	0.9711	− 0.2383	− 0.027	0.326 0.195
1.59	− 1.1479	0.9809	− 0.1940	− 0.044	0.287 0.158
1.574	− 3.0440	0.9969	− 0.0800	− 0.023	0.174 0.072
$\pi/2$	0.0180	1.0051	− 0.0051	0.0002	0.074 0.031
1.5705	0.2832	1.0249	0.0001	− 0.0009	0.102 0.058
1.56	− 1.22×10^2	1.1585	− 0.0001	− 0.040	0.383 0.301
1.53	− 2.36×10	1.3333	− 0.0000	− 0.003	0.574 0.493
1.4	7.02×10^2	1.8272	0.0000	0.279	0.802 0.745
1.0	− 5.76×10^4	3.3637	〃	0.740	0.948 0.928
0.6	− 2.15×10^6	6.3069	〃	0.922	0.986 0.980
0.2	− 2.89×10^8	19.8830	〃	0.992	0.999 0.998

Distribution of stresses on the symmetric axis

ζ	y/a	σ_x	σ_y	M_x	M_y
− 1	− 1.0000	3.065	0.000	1.669 1.858	0.000 0.000
− 0.85	− 1.0844	2.581	0.198	1.634 1.757	− 0.067 − 0.028
− 0.7	− 1.1919	2.165	0.330	1.578 1.649	− 0.110 − 0.047
− 0.3	− 1.6742	1.410	0.397	1.356 1.356	− 0.123 − 0.053
0.001	− 2.4176	1.141	0.275	1.187 1.177	− 0.077 − 0.033
0.4	− 4.8719	1.019	0.096	1.048 1.045	− 0.022 − 0.010
0.7	− 11.4208	1.002	0.021	1.009 1.008	− 0.004 − 0.002

Table 2 The stress distributions of a semi-infinite plate with a semi-elliptic (b/a=0.4) notch under a uniform tension. (Fig. 2, 4)
* The upper values are when the poisson's ratio is 0.0 and the lower values are when the poisson's ratio is 0.5.

	θ radian	radius of curvature ρ/a	coordinate x/a	y/a	σ_θ	M_θ*
Distribution of stress on the boundary contour	π	− 2.5001	0.0000	− 0.4000	1.810	1.267 1.343
	2.9	− 2.4537	0.1214	− 0.3970	1.804	1.265 1.340
	2.5	− 2.1603	0.3323	− 0.3773	1.760	1.249 1.319
	2.1	− 1.5384	0.5736	− 0.3276	1.627	1.198 1.255
	1.8	− 0.8059	0.7936	− 0.2434	1.290	1.063 1.084
	1.65	− 0.3786	0.9238	− 0.1532	0.705	0.799 0.754
	1.578	− 0.1737	0.9929	− 0.0478	− 0.001	0.318 0.195
	1.574	− 0.2268	0.9968	− 0.0320	− 0.025	0.240 0.123
	$\pi/2$	0.0073	1.0021	− 0.0021	− 0.001	0.105 0.050
	1.57	0.9978	1.0168	− 0.0001	− 0.014	0.233 0.162
	1.56	− 8.71×10	1.0699	− 0.0000	0.011	0.516 0.430
	1.52	− 3.27×10	1.1830	− 0.0000	0.225	0.730 0.662
	1.2	8.39×10^{3}	1.8881	0.0000	0.763	0.940 0.920
	0.8	4.42×10^{5}	3.2226	0.0000	0.926	0.982 0.976
	0.4	1.84×10^{7}	6.8654	0.0000	0.984	0.996 0.995
	0.2	− 3.52×10^{8}	13.9332	− 0.0000	0.996	0.999 0.999
	0.1	− 1.68×10^{9}	27.9666	− 0.0000	0.999	1.000 1.000
Distribution of stress on the symmetric axis	ζ	y/a	σ_x	σ_y	M_x	M_y
	− 1	− 0.4000	1.810	0.000	1.267 1.343	0.000 0.000
	− 0.9	− 0.4532	1.719	0.036	1.260 1.323	− 0.012 − 0.005
	− 0.75	− 0.5469	1.582	0.085	1.245 1.291	− 0.029 − 0.012
	− 0.6	− 0.6623	1.447	0.125	1.226 1.254	− 0.042 − 0.018
	− 0.3	− 0.9928	1.216	0.161	1.169 1.173	− 0.053 − 0.023
	0.001	− 1.5683	1.073	0.130	1.099 1.094	− 0.040 − 0.017
	0.4	− 3.3488	1.008	0.048	1.028 1.026	− 0.013 − 0.006
	0.7	− 7.9684	1.001	0.010	1.005 1.005	− 0.003 − 0.001

Table 3 The stress distributions of a semi-infinite plate with a semi-elliptic (b/a=2) notch under a uniform tension. (Fig. 3, 5)
* The upper values are when the poisson's ratio is 0.0 and the lower values are when the poisson's ratio is 0.5.

	θ radian	radius of curvature ρ/a	coordinate		σ_θ	M_θ*
			x/a	y/a		
Distribution of stresses on the boundary contour	π	− 0.5000	0.0000	− 2.0000	5.220	2.341 2.716
	3.05	− 0.5047	0.0458	− 1.9979	5.172	2.324 2.694
	2.8	− 0.5684	0.1725	− 1.9700	4.585	2.119 2.434
	2.5	− 0.7679	0.3323	− 1.8864	3.296	1.667 1.858
	2.3	− 1.0129	0.4475	− 1.7885	2.326	1.324 1.421
	2.0	− 1.6737	0.6421	− 1.5333	0.994	0.838 0.805
	1.7	− 3.0072	0.8785	− 0.9555	0.033	0.420 0.292
	1.65	− 3.4722	0.9238	− 0.7659	− 0.054	0.350 0.213
	1.6	− 4.3423	0.9710	− 0.4765	− 0.078	0.260 0.128
	1.574	1.11×10	0.9970	− 0.1599	− 0.015	0.150 0.057
	$\pi/2$	0.0356	1.0103	− 0.0103	0.0004	0.061 0.025
	1.57	4.4485	1.0808	− 0.0005	− 0.002	0.128 0.077
	1.53	− 3.77×10	1.6250	− 0.0001	− 0.065	0.502 0.420
	1.5	1.48×10^{2}	1.8538	0.0000	− 0.040	0.595 0.516
	1.2	9.94×10^{3}	3.5939	0.0000	0.409	0.879 0.836
	0.6	− 2.46×10^{6}	9.3811	− 0.0000	0.882	0.982 0.974
	0.2	− 3.26×10^{8}	29.7993	− 0.0000	0.988	0.998 0.997
	0.08	− 3.40×10^{9}	74.9200	− 0.0000	0.998	1.000 1.000
Distribution of stresses on the symmetric axis	ζ	y/a	σ_x	σ_y	M_x	M_y
	− 1	− 2.0000	5.220	0.000	2.341 2.716	0.0 0.0
	− 0.9	− 2.0554	4.238	0.419	2.285 2.528	− 0.137 − 0.058
	− 0.75	− 2.1632	3.164	0.747	2.133 2.478	− 0.240 − 0.102
	− 0.5	− 2.4415	2.077	0.826	1.807 1.822	− 0.253 − 0.108
	− 0.1	− 3.4023	1.305	0.513	1.345 1.332	− 0.138 − 0.060
	0.2	− 5.1056	1.092	0.262	1.138 1.131	− 0.060 − 0.027
	0.5	− 9.3246	1.017	0.094	1.039 1.037	− 0.018 − 0.008
	0.7	− 17.1751	1.003	0.031	1.011 1.011	− 0.005 − 0.003

3. 平面弾性問題としての解析

（1）解法および境界条件

解法の一般論は，文献－5)に，その概略は文献－6）に述べてあるのでここでは割愛する。

作用する外力としては，最も基本的と思われる一様引張力の作用する場合を考える。[4)]

（2）計　算　例

表－1には，$b/a=1$すなわち半円切欠きを有する半無限板に一様引張力の作用する場合の縁応力および対称軸上の応力値を示す。

この形状の解析解は，多くの人々[7)]によって得られ，鵜戸口[8)]によれば最大応力は，3.0655である。

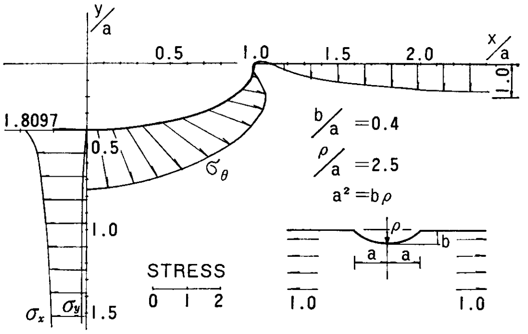

Fig. 2

図－2，表－2および図－3，表－3には，それぞれ切欠き深さ$b/a=0.4$および2の場合の応力分布を示す。

（3）応力集中係数と曲率半径と切欠き深さ

著者は，先に文献－4）で応力集中係数と曲率半径と隅角部の開角との関係を考察した。今の場合は隅角部の開角は360°の場合に相当するので応力集中係数 S.C.F.

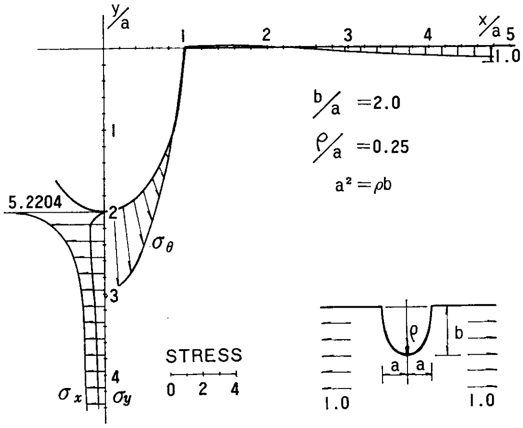

Fig. 3

は曲率半径ρをもって

$$\text{S.C.F.}=\sum_{j=1}^{\infty}k_j(\rho/b)^{0.5j-1} \qquad (3.1)$$

の形に表わされる。

なお楕円形の幾何学的性質により$a^2=b\rho$である。

表－4には，いくつかの切欠き深さに対する応力集中係数の値を示す。また式（3・1）の第3項まで採った場合，すなわち

$$\text{S.C.F.}=k_1\sqrt{\frac{b}{\rho}}+k_2+k_3\sqrt{\frac{\rho}{b}} \qquad (3.2)$$

および第4項まで採った場合

$$\text{S.C.F.}=k_1\sqrt{\frac{b}{\rho}}+k_2+k_3\sqrt{\frac{\rho}{b}}+k_4\frac{\rho}{b} \qquad (3.3)$$

のそれぞれのS.C.F.の誤差をも示す。ほぼ1％以内で十分よい近以で表わされていることがわかる。ρ/bが大きくなるほど高次の項まで採る必要がある。

表－5には式（3・2），（3・3）のk_1～k_4の値を

Table 4　Stress concentration factors under a uniform tension. (S.C.F.)

b/a	ρ/a	ρ/b	S.C.F. (1)	Eq. (3.1) (2)	Error (1)−(2)/100	Eq. (3.2) (3)	Error (1)−(3)/100
					%		%
0.2	5.00	25	1.402	1.424	− 1.58	1.405	0.18
0.4	2.50	6.25	1.810	1.783	1.46	1.794	− 0.91
0.6	1.6667	2.7778	2.224	2.198	1.16	2.228	0.17
0.8	1.25	1.5625	2.642	2.626	0.06	2.630	0.45
1.0	1.00	1	3.065	3.060	0.18	3.052	0.43
2	0.50	0.25	5.220	5.253	− 0.64	5.223	− 0.06
4	0.25	0.0625	9.622	9.666	− 0.46	9.642	− 0.21
8	0.125	0.015625	18.530	18.505	0.14	18.522	0.05

Table 5 The coefficients of Eq. (3.1) and Eq. (3.2).

	k_1	k_2	k_3	k_4
Eq. (3.1)	2.2105	0.8161	0.0332	/
Eq. (3.2)	2.2237	0.7160	0.1288	− 0.0162

示す。なおこの係数の値は最小二乗法によって決めたものである。

4. 薄板の面外曲げの解析

(1) 解法および境界条件

数学的には，平面弾性問題の場合と全く同じ考え方でできるので，ここでは述べることを割愛したい。[6]

作用外力として，最も基本的な外力と考えられる一様面外曲げを考える。[4]

(2) 計 算 例

表一1には，半円切欠きを有する半無限薄板に一様曲げモーメントの作用した場合の境界縁に沿う曲げモーメントおよび対称軸上の曲げモーメントの値を示す。

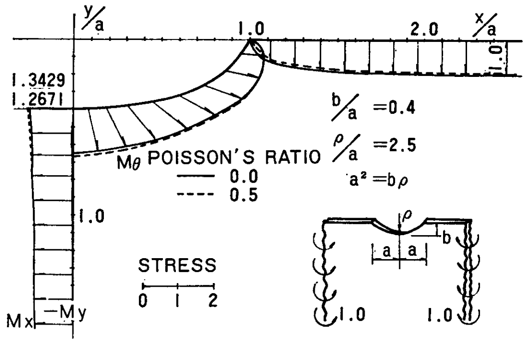

Fig. 4

表一2，図一4および表一3，図一5にはそれぞれ切欠き深さ $b/a=0.4$，および $b/a=2$の場合の曲げモーメントの分布を示す。

また図一6には，いくつかの切欠き深さについて，応力集中係数とポアソン比の関係を示す。緩やかな上向き凸の曲線を示し，応力集中要素の厳しいほど凸形は大きいが，ほぼ直線とみなしても十分であろう。

$b/a=8$ のとき，ポアソン比 0.0 と 0.5 の間を直線とみなしたときのポアソン比 0.3 の応力集中係数の誤差は 0.7 %程度である。

(3) 応力集中係数と曲率半径と切欠き深さ

薄板の面外曲げの場合の応力集中係数も式(3・1)と

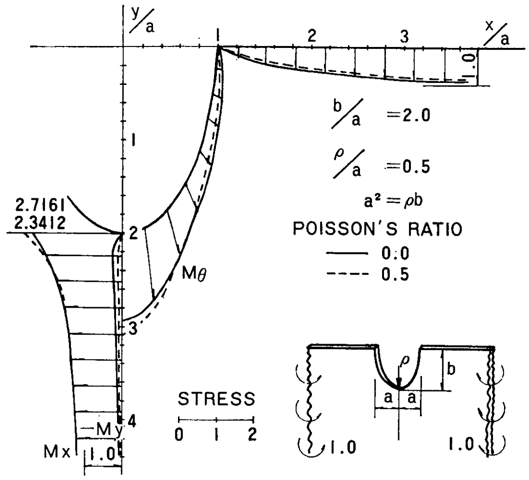

Fig. 5

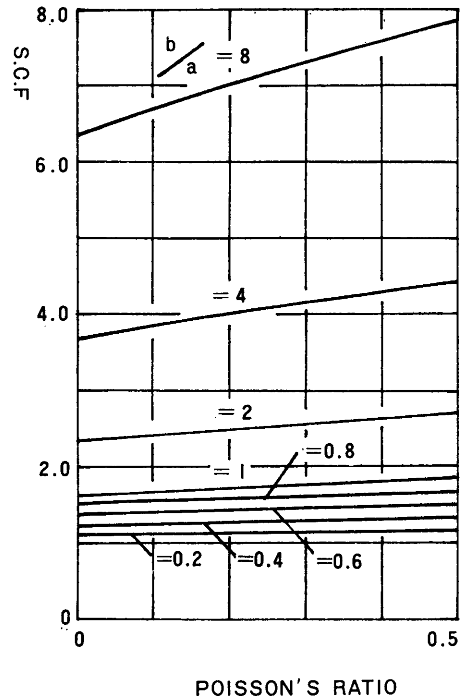

Fig. 6

同形の式で表わされる。[4]

表一6には，種々の切欠き深さでポアソン比 0.0 および 0.5 の場合の係数および応力集中係数を式，

$$S.C.F. = k_1\sqrt{\frac{b}{\rho}} + k_2 + k_3\sqrt{\frac{\rho}{b}} \qquad (4.1)$$

Table 6 Stress concentration factors under a uniform bending moment.
* The upper values are when the poisson's ratio is 0.0 and the lower values are when the poisson's ratio is 0.5.

b/a	ρ/a	ρ/b	S. C. F.* (1)	Eq. (4.1)* (2)	Error * (1)−(2) /100
0.2	5	25	1.133 1.171	1.134 1.172	− 0.04% − 0.01
0.4	2.5	6.25	1.267 1.343	1.266 1.343	0.05 0.01
0.6	1.6667	2.7778	1.401 1.515	1.400 1.514	0.04 0.009
0.8	1.25	1.5625	1.535 1.686	1.535 1.686	0.02 0.004
1.0	1	1	1.669 1.858	1.669 1.858	0.004 0.001
2	0.5	0.25	2.341 2.716	2.342 2.716	− 0.03 − 0.006
4	0.25	0.0625	3.687 4.433	3.688 4.434	− 0.02 − 0.005
8	0.125	0.015625	6.382 7.868	6.381 7.868	0.008 0.002

で表わしたときの S. C. F. の値およびその誤差を示す。

誤差は 0.05 %以下で式（4・1）の3項までで十分な近似である。

表ー7にはポアソン比 0.0 および 0.5 の場合の式（4・1）の係数を最小二乗法によって決めた値を示す。

その他のポアソン比のときの応力集中係数は，前節の考察より比例配分して求めればよい。

Table 7 The coefficients of Eq. (4.1).

Poisson's Ratio	k_1	k_2	k_3
0.0	0.6733	0.9950	0.0009
0.5	0.8587	0.9988	0.0002

5. 結　語

半楕円切欠きを有する半無限領域を単位円に等角写像する有理関数を作り，それを用いて平面弾性問題や薄板の曲げの閉じた解を求め，応力分布や応力集中係数の表示式を求めた。

直線切欠きを有する半無限板の場合の解析は，切欠き深さを b として，式（2・2）の第2項の式

$$Z=\omega(\zeta)=-i\frac{\sqrt{2}\,b}{1-\zeta}\left[\sum_{j=1}^{10}\left\{\frac{-A_j}{1+\alpha_j\zeta^2}+A_j\right\}+1\right]$$

を用いればよい。しかし切欠き先端には有理写像関数のため小さな丸味がついている。

参 考 文 献

1) S. Higuchi and M. Suzuki, "Distribution of Stresses in the Semi-infinite Plate having an Elliptic notch under Uniform Tension" Technol. Rep. Tohoku Univ. 14 (1949) PP. 95
2) M. Seika, "Stresses in a Semi-Infinite Plate Containing a U-type Notch Under Uniform Tension" Ingenieur-Archiv XXVIII (1960) PP. 20
3) S. Shioya, "On the Transverse Flexure of a Semi-Infinite Plate with an Elliptic Notch" Ingenieur-Archiv XXIX (1960) PP. 93
4) 長谷部，三角形切欠きおよび突起を有する半無限板の応力解析　土木学会論文報告集　第 194 号 1971-10 PP. 29
5) Muskhelishvili, N. I., "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity" P. Noordhoff Ltd. 1963
6) 長谷部，十字形板の応力解析　土木学会論文報告集 第 185 号　1971-1　PP. 9
7) 前掲　4）まえがき
8) 鵜戸口英善，円弧形の切欠きまたは盛上げを持つ半無限板の応力　日本機械学会論文集　16巻55号（昭25） PP. 44