二次元熱伝導系の Direct Analog Simulator について

中島豊四郎・南里孝行・石野幸三

電 気 工 学 教 室

（1971年9月13日受理）

Direct Analog Simulator of Two-Dimensional Heat Conduction System

Toyoshiro NAKASHIMA, Takayuki NANRI and Kozo ISHINO

Department of Electrical Engineering

(Received September 13, 1971)

Various methods are known for finding the numerical solution of unsteady heat conduction problems. These methods use digital and universal analog computers and analog simulators.

The direct analog simulator of the heat conduction system is superior to the others because the size of the simulator is easily enlarged and the computational time is made rapid. As an example, an imaginary resistance furnace was analyzed by our direct analog simulator. This furnace was assumed to be empty, long and either rectangular or cylindrical. The outer surface was assumed to be perfectly insulated, and the inner surface, to be supplied with a constant heat flow. Then we examined in detail the lumping error and the errors of the value of the C and R established from the direct analog simulator by a digital computer.

1. まえがき

一般に非定常熱伝導問題の数値解法には種々あり，ディジタル計算機によるExplicit, Implicit, Predictor-Corrector, Runge-Kutta-Gill, Runge-Kutta-Merson[1], Digital Beuken Model 法[2]，および汎用アナグロ計算機，熱伝導系 Simulator によるものなどがある。これらの数値解法は，それぞれ長所，短所を有するが，ディジタル計算機による数値解法に限定した場合，多大の計算時間を必要とする。従って，頻繁に熱伝導問題を解く必要のある産業分野において，非常に経済的，時間的制約をうける。

熱伝導系 Simulator は単能ではあるが，製作費が比較的安価で，換算係数を適当に選定することにより，容易に計算時間を短縮できるから大型化，高速化が可能であり，熱定数が温度の任意関数である場合も模擬でき，更に試行錯誤法的使用可能など種々の利点がある。

筆者等は，一定加熱電力密度供給で，外壁面完全熱絶縁状態の無限長角柱抵抗炉の加熱過度問題を想定し，この熱伝導問題を筆者等の考案した Direct Analog Simulator[3] によって解析している。その際，Direct Analog Simulator の集中定数化誤差および C, R 回路素子値の設定値誤差問題を，ディジタル計算機を用いて詳細に検討し，さらに，熱定数が温度に依存する場合の非定常温度解について考察している。

2. 熱系の電気系への変換

一般的な熱伝導方程式と分布定数回路方程式は，それぞれ，

$$\nabla(K\nabla\theta)=s\rho\partial\theta/\partial t_t \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\nabla(1/R_d\nabla v)=C_d\partial v/\partial t_e \quad\cdots\cdots(2)$$

と与えられている。ここで，

＜熱系＞	＜電気系＞
θ：温　度	v：電　圧

s：比　熱　　C_d：単位長当りの容量

ρ：密　度　　R_d：単位長当りの抵抗

K：熱伝導率　　t_e：電気系時間

t_t：熱系時間

であり，∇ はベクトル演算子である。

(1), (2)式において，$\theta\to v$, $K\to 1/R_d$, $s\rho\to C_d$, $t_t\to t_e$ とすれば，熱系は電気系に変換できる。本論文では二次元熱伝導問題について論じるから，(1), (2)式は次式のように書きかえられる。

$$\partial/\partial x(K\partial\theta/\partial x)+\partial/\partial y(K\partial\theta/\partial y)=s\rho\partial\theta/\partial t_t \cdots\cdots (3)$$

$$\partial/\partial x(1/R_d\partial v/\partial x)+\partial/\partial y(1/R_d\partial v/\partial y)=C_d\partial v/\partial t_e \cdots\cdots (4)$$

ここで，$\theta=\theta(x,y,t_t)$, $v=v(x,y,t_e)$ である。

一方，熱流密度方程式と電流方程式はそれぞれ，

$$K\partial\theta/\partial x=-Q \quad (Q\text{: 熱流密度}) \cdots\cdots (5)$$

$$1/R_d\partial v/\partial x=-i \quad (i\text{: 電流}) \cdots\cdots (6)$$

であり，(4), (6)式に換算係数 m, n, p を導入すると，

$$\partial/\partial x\{1/mR_d\partial(v/p)/\partial x\}+\partial/\partial y\{1/mR_d\partial(v/p)/\partial y\}=nC_d\partial(v/p)/\partial(mnt_e) \cdots\cdots (7)$$

$$1/mR_d\partial(v/p)/\partial x=-i/mp \cdots\cdots (8)$$

となり，(3), (5), (7), (8)式において

$$\left.\begin{array}{l}\theta=v/p,\ Q=i/mp,\ K=1/mR_d,\ s\rho=nC_d\\ t_t=mnt_e\end{array}\right\} \cdots\cdots (9)$$

とおけば，熱系は電気系に完全に変換され，m, n, p は任意に選定できる。

3. 熱定数が温度に依存しない場合

熱定数一定とすれば(3)式，内壁面一定熱流密度 Q_0 供給，外壁面完全熱絶縁の境界条件と初期条件から次式をうる。

$$\left.\begin{array}{ll}\partial^2\theta/\partial t_t=K/s\rho(\partial^2\theta/\partial x^2+\partial^2\theta/\partial y^2) & \\ \quad\begin{pmatrix}0\leqq x\leqq l_1\\ 0\leqq y\leqq l_1+l_2\end{pmatrix} & \\ K\partial\theta/\partial x=-Q_0 & at\quad x=0\\ \partial\theta/\partial x=0 & at\quad x=l_1\\ \theta(x,y,0)=0 & \end{array}\right\} \cdots\cdots (10)$$

いま，

$$\phi=\theta/\theta_r,\ \theta_r=Q_0l_1/K,\ \tau=t_t/t_r,\ t_r=s\rho l_1{}^2/K,$$

$$X=x/l_1,\ Y=y/l_1,\ l_2/l_1=5/3$$

とおけば，(10)式の熱伝導問題は無次元化され，次式をうる。

$$\partial\phi/\partial\tau=\partial^2\phi/\partial X^2+\partial^2\phi/\partial Y^2 \cdots\cdots (11)$$

$$\begin{pmatrix}0\leqq X\leqq 1\\ 0\leqq Y\leqq 8/3\end{pmatrix}$$

$$\partial\phi/\partial X=-1 \quad at\quad X=0 \cdots\cdots (12)$$

$$\partial\phi/\partial X=0 \quad at\quad X=1 \cdots\cdots (13)$$

$$\phi(X,Y,0)=0 \cdots\cdots (14)$$

(11)式を差分方程式化すると，

$$\begin{aligned}&(\phi_{i,\ j,\ k+1}-\phi_{i,\ j,\ k})/\Delta\tau+0(\Delta\tau)\\ &=(\phi_{i+1,\ j,\ k}+\phi_{i-1,\ j,k}-2\phi_{i,\ j,\ k})/(\Delta X)^2\\ &\quad+(\phi_{i,\ j+1,\ k}+\phi_{i,\ j-1,\ k}-2\phi_{i,\ j,\ k})/(\Delta Y)^2\\ &\quad+Er_i(\Delta X)+Er_i(\Delta Y) \cdots\cdots (15)\end{aligned}$$

となる（第1図参照）。

ここで，$\Delta X=1/N$, $\Delta Y=5/3M$, ただし，N は X 方向の等分割数，M は Y 方向の等分割数である。

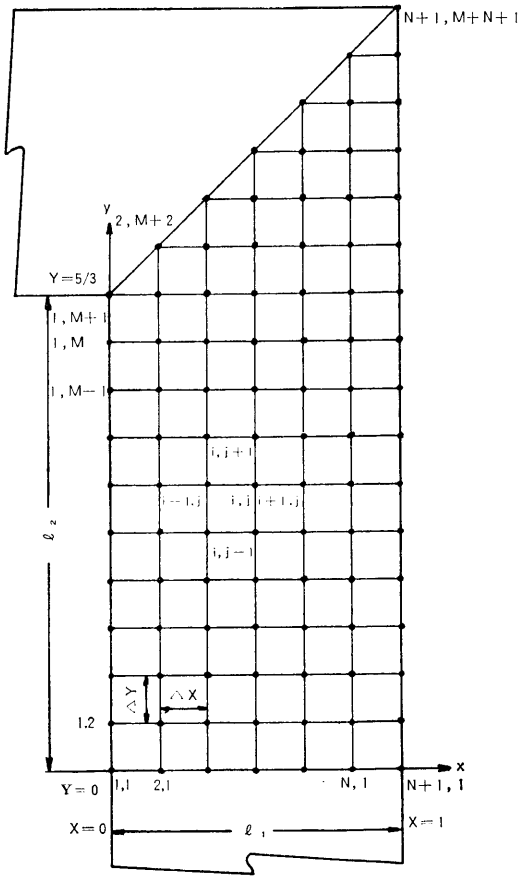

Fig. 1 Cross section of rectangular cylindrical furnace.

(15)式において，微小項を無視し，$\Delta X=\Delta Y$ とすれば次式をうる。

$$\begin{aligned}&\phi_{i,\ j,\ k+1}=(1-4\lambda)\phi_{i,\ j,\ k}+\lambda(\phi_{i+1,\ j,k}\\ &\quad+\phi_{i-1,\ j,\ k}+\phi_{i,\ j+1,\ k}+\phi_{i,\ j-1,\ k}) \cdots\cdots (16)\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}i=1, & 1\leqq j\leqq M+1\\ i=2, & 1\leqq j\leqq M+2\\ \vdots & \vdots\\ i=N+1, & 1\leqq j\leqq N+M+1\end{pmatrix}$$

ここで，$\lambda=\Delta\tau/(\Delta X)^2$ である。

(12)，(13)式を差分方程式化し，微小項を無視すると，(17)，(18)式をうる。

$$\phi_{0,\ j,\ k}=\phi_{2,\ j,\ k}+2\Delta X \quad at \quad X=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$
$$(1\leqq j\leqq N+1)$$

$$\phi_{N+2,\ j,\ k}=\phi_{N,\ j,\ k} \quad at \quad X=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$
$$(1\leqq j\leqq N+M+1)$$

さらに，炉内壁温度分布の対称性から，

$$\phi_{i,\ 2,\ k}=\phi_{i,\ 0,\ k} \quad at \quad Y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$
$$(1\leqq i\leqq N+1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\phi_{1,\ M+2,\ k}=\phi_{2,\ M+1,\ k}\\ \phi_{2,\ M+3,\ k}=\phi_{3,\ M+2,\ k}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ \phi_{N+M+1,\ k}=\phi_{N+1,\ N+M,\ k}\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

をうる。

4. 集中定数化誤差

熱伝導問題を解く場合，等分割数を増すと解の精度が良くなることは，もちろんであるが，解の収束性によりある値以上に等分割数を増加させても，解の精度はそう良くならず，ディジタル計算機を用いて解く場合の計算時間と CR 回路網で模擬する場合の C, R の素子数が非常に増大する。それ故，熱伝導方程式の差分方程式化における最適な等分割数を決定することは，非常に重要である。

(16)～(20)式，第1図とディジタル計算機を用いて，$\phi_{1,1}$（炉内壁中心部）と $\phi_{1,\ M+1}$（炉内壁隅部）の過渡解を算出し，それぞれの昇温特性を等分割数 N, M をパラメーターとして図示すると，第2図，第3図がえられる。

$\phi_{1,1}^{M,N}$について$N=\infty$，$M=\infty$（Explicit 法による数値解，$\Delta X=\Delta Y=1/24$，$\Delta\tau=0.00042$）の場合の $\phi_{1,1}^{\infty,\infty}$ を基準にし，これに対する $\phi_{1,1}^{M,N}$の集中定数化誤差曲線を図示すると，第4図をうる。第2図，第4図より，内壁中心部の過渡解を求める場合，$N=6$，$M=10$ で充分であることが知られる。内壁隅部においては，幾分収束性が悪いが，これは第6章で述べるように，隅部において，適当に差分方程式を修正すれば，内壁中心部の収束性と同様な傾向を有し，$N=6$，$M=10$ で充分になる。なお，隅部において修正差分方程式をもちいたディジタル解を一点鎖線（$N=3$，$M=5$）および破線（$N=9$，$M=15$）で示している。

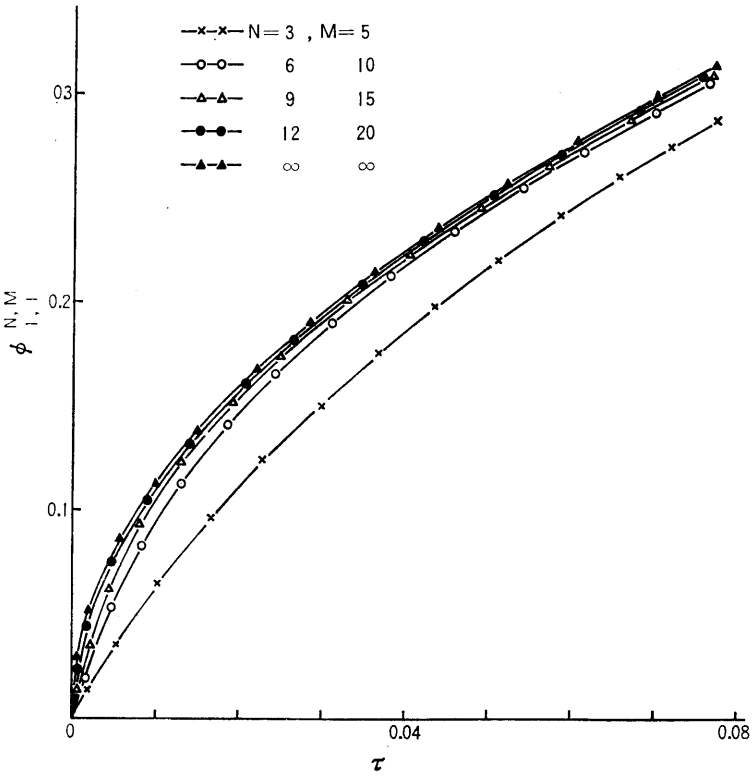

Fig. 2 Dimensionless temperature vs. time curves computed by digital computer for node (1, 1) as parameters of N and M.

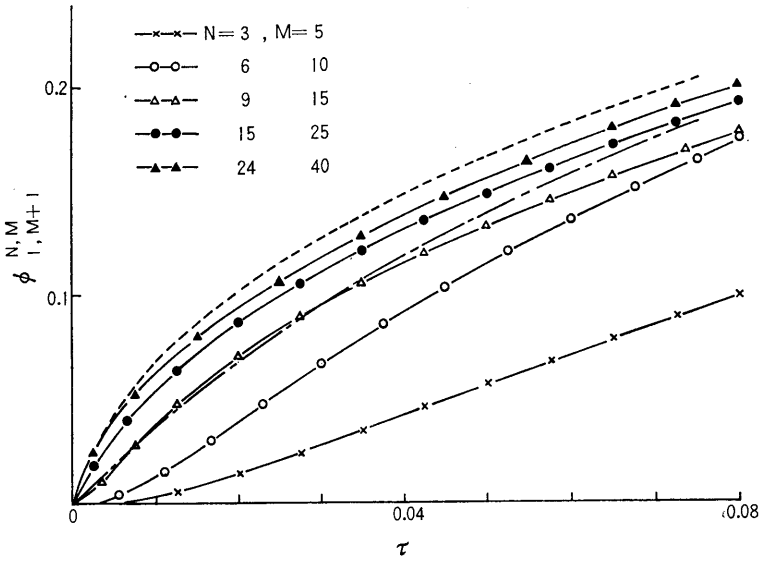

Fig. 3 Dimensionless temperature vs. time curves computed by digital computer for node (1, $M+1$) as parameters of N and M.

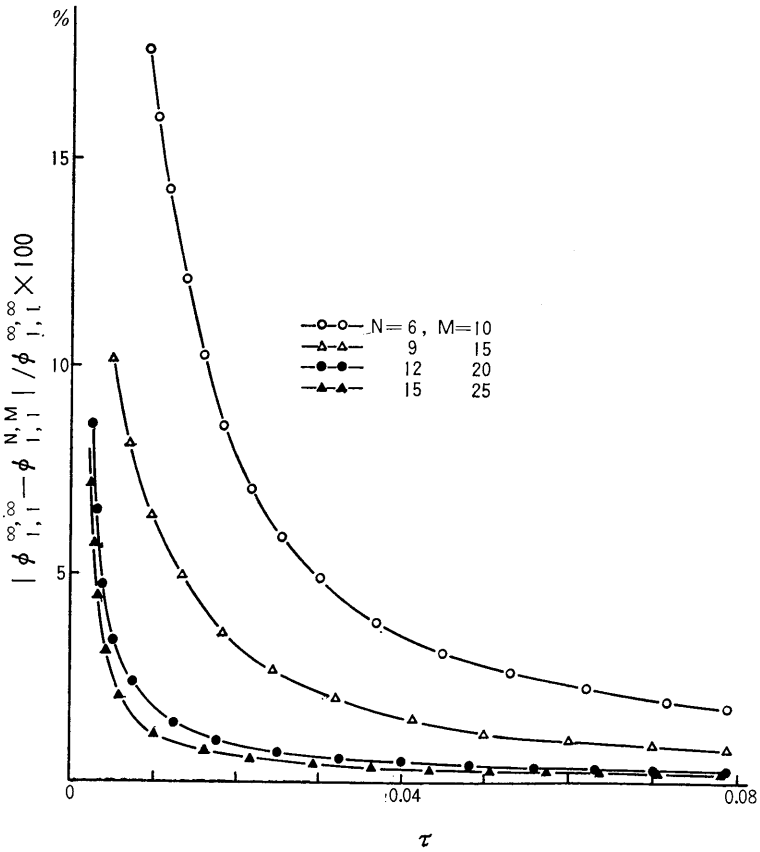

Fig. 4 Lumping error at node (1, 1) as parameters of N and M.

5. C, R の設定値誤差

CR回路網において，正しく設定されなければならないC, R の値が，若干の誤差を含んで設定された場合，解にどの程度の影響をおよぼすかを，ディジタル計算機を用いて検討した。

等分割数 $N=6$, $M=10$, のCR 回路網において，$C=C_0$, $R=1.05R_0$ と設定された場合と正しく設定（$C=C_0$, $R=R_0$）された場合の内壁中心部の昇温特性を，まとめて図示すると第5図をうる。この図より，温度誤差はτが 0.02 以上で3パーセント以下であることが知られる。この傾向は一次元熱伝導問題と，ほぼ同じである。それ故，すでに筆者等が報告したようにC, Rの設定値誤差を高々（$|\Delta R_0|+|\Delta C_0|\times 100\%$）と評価しておけば，まず充分である。ここで，$|\Delta R_0|$, $|\Delta C_0|$ は R, C の設定値誤差である。

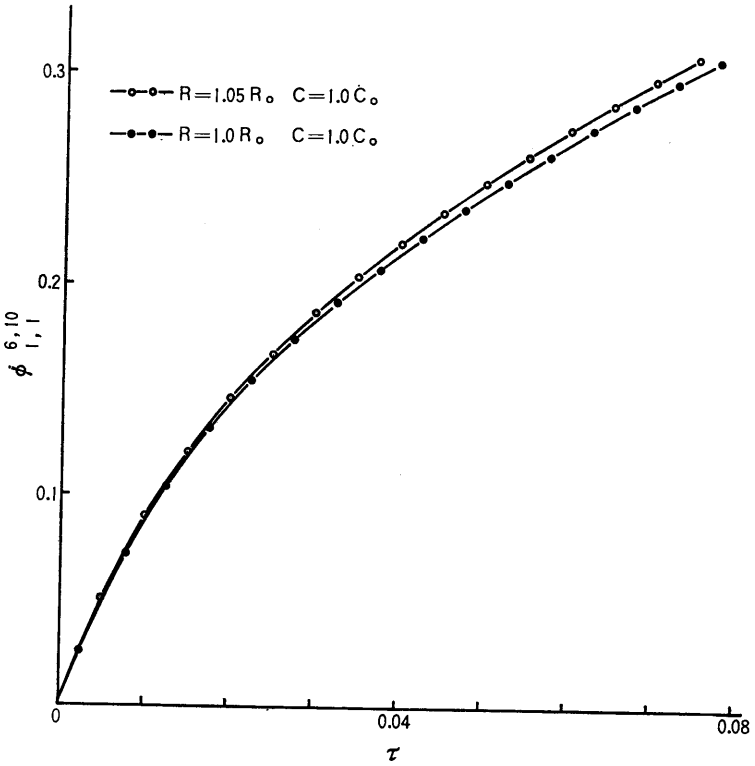

Fig. 5 Influence upon solution produced by percent error of R established, ΔR.

6. Direct Analog Simulator の回路構成

二次元熱伝導問題を電気系に変換すると次式をうる。

$$\partial/\partial X(1/R_d\partial v/\partial X)+\partial/\partial Y(1/R_d\partial v/\partial Y)=C_d\partial v/\partial t_e \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

$$\begin{pmatrix} 0\leqq X\leqq 1 \\ 0\leqq Y\leqq 8/3 \end{pmatrix}$$

$$1/R_d\partial v/\partial X=-i_0 \quad at \quad X=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

$$\partial v/\partial x=0 \quad at \quad X=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

$$v(X,Y,0)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

(21)式を差分方程式化すると

$$C_{i,j}dv_{i,j}/\partial t_e=(v_{i,j+1}-v_{i,j})/(R_{i,j}+R_{i,j+1})+(v_{i+1,j}-v_{i,j})/(R_{i,j}+R_{i+1,j})+(v_{i,j-1}-v_{i,j})/(R_{i,j}+R_{i,j-1})+(v_{i-1,j}-v_{i,j})/(R_{i,j}+R_{i-1,j}) \cdots\cdots (25)$$

となる（第6図参照）。

ただし，微小項$Er_i(\Delta_X)$, $Er_i(\Delta_Y)$は省略している。

熱定数を一定とすれば(25)式は，次式のように書きかえられる。

$$Cdv_{i,j}/dt_e=(v_{i,j+1}-v_{i,j})/R+(v_{i+1,j}-v_{i,j})/R+(v_{i,j-1}-v_{i,j})/R+(v_{i-1,j}-v_{i,j})/R \cdots\cdots (26)$$

$$\begin{pmatrix} 2\leqq i\leqq N & 2\leqq j\leqq M+1 \\ 3\leqq i\leqq N & j=M+2 \\ 4\leqq i\leqq N & j=M+3 \\ \vdots & \vdots \\ i=N & j=M+N-1 \end{pmatrix}$$

ここで，$R=R_d\Delta X$, $C=C_d\Delta X$ である。

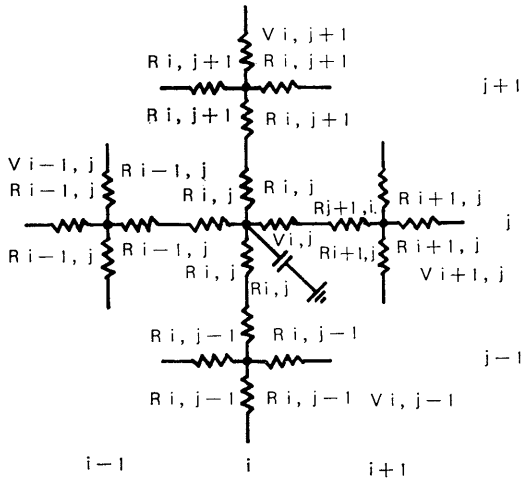

Fig. 6 Mesh points of *CR* networks.

(26)式から，境界を除くノードのすべてのノード間の抵抗及びノードの容量値は容易に求められる。

ノード（1，1）における，差分化熱流密度方程式は次式で示される（第7図参照）。

$$Q_0+K(\theta_3-\theta_1)/\Delta X+K(\theta_2-\theta_1)/\Delta X$$
$$=s\rho\Delta X/2\cdot d\theta_1/dt_t \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

ただし，$\theta_1=\theta(1,\ 1)$，$\theta_2=\theta(2,\ 1)$，$\theta_3=\theta(1,\ 2)$ であり，Z 軸方向は単位長である。

(27)式を電気系に変換すると次式をうる。

$$i_0+(v_3-v_1)/R_d\Delta X+(v_2-v_1)/R_d\Delta X$$
$$=C_d\Delta X/2dv_1/dt_e \cdots\cdots\cdots(28)$$

さらに，$R=R_d\Delta X$ であるから(28)式は

$$i_0/2+(v_3-v_1)/2R+(v_2-v_1)/2R$$
$$=C/4dv_1/dt_e \cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

となり，第8図をうる。

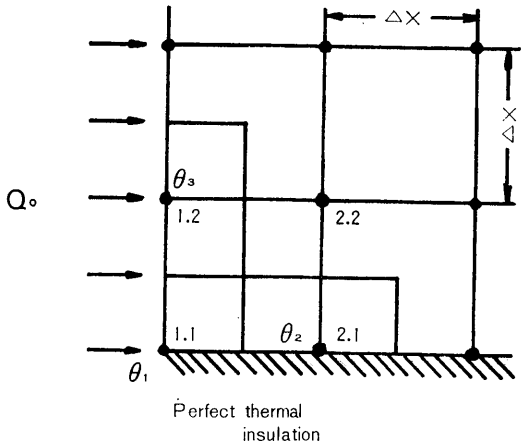

Fig. 7 Boundary condition of node (1, 1).

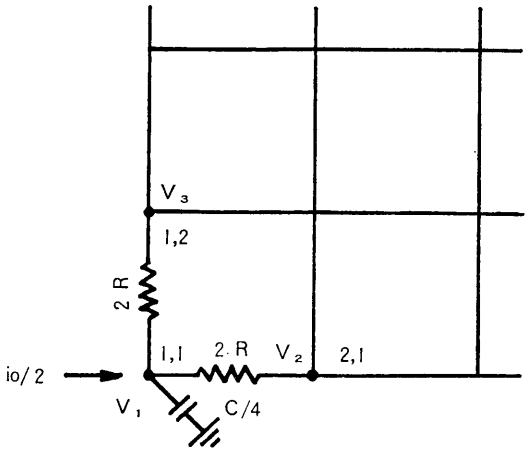

Fig. 8 *CR* networks of Fig. 7.

ただし，$v_1=v(1,\ 1)$，$v_2=v(2,\ 1)$，$v_3=v(1,\ 2)$ である。

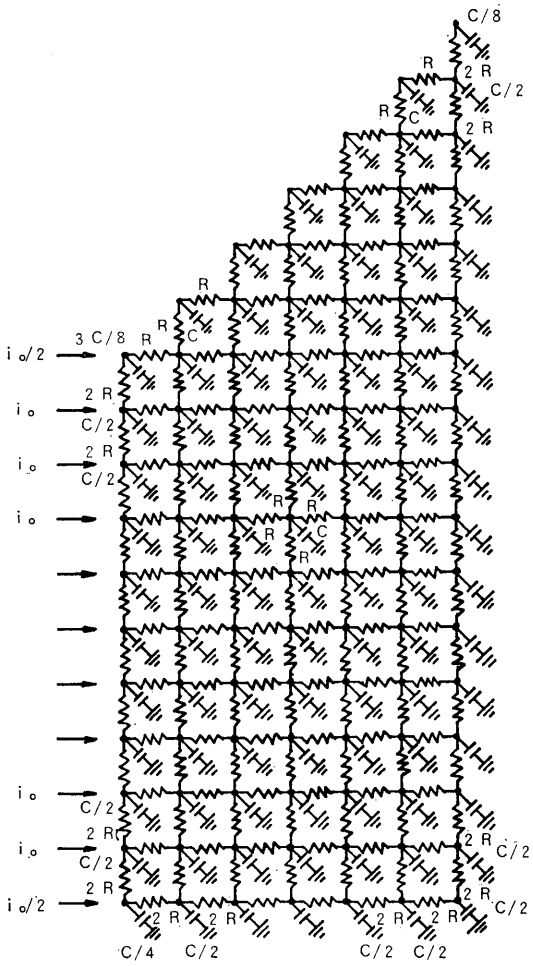

Fig. 9 Circuit of direct analog simulator.

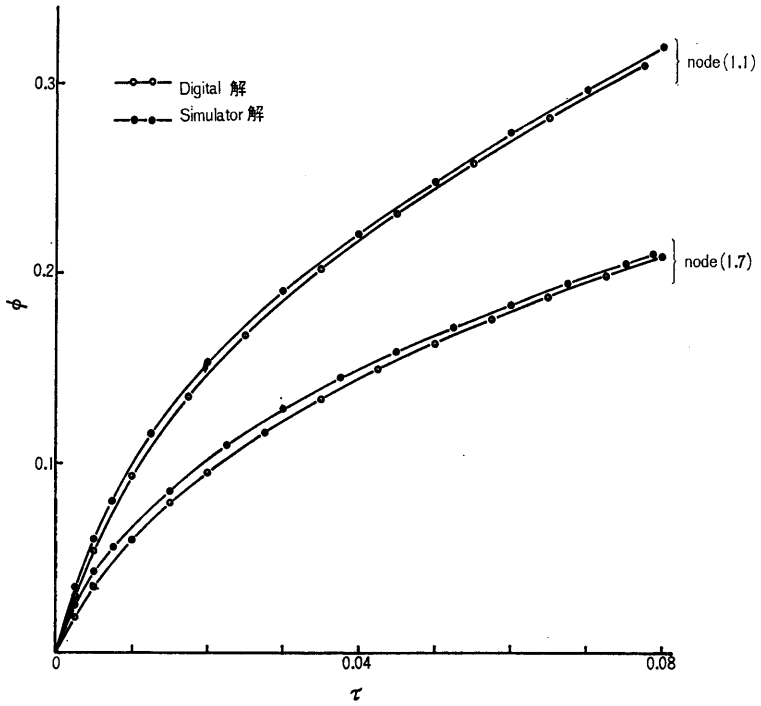

Fig. 10 Dimensionless temperature rising curves computed by digital computer and direct analog simulator.

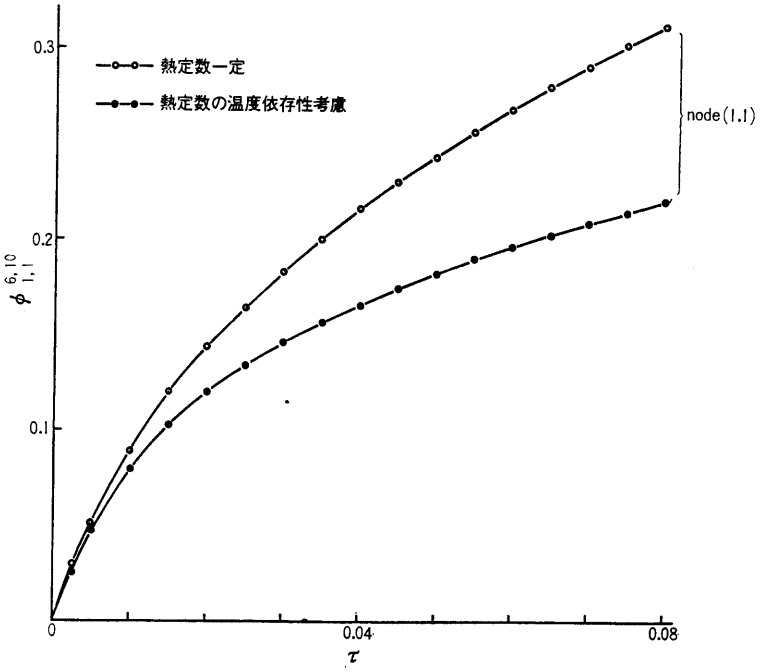

Fig. 11 Dimensionless temperature rising curves, here heat property is independent or depend upon temperature.

境界のすべてのノードにおけるノード間の抵抗およびノードの容量値は，ノード（1，1）の場合と同様な手順で容易に求められる。

(26)式と，すべての境界における差分化熱流密度方程式

により，CR 回路網が構成される。

等分割数 $N=6$，$M=10$ の CR 回路網（第9回参照）によって，炉内壁中心部と炉内壁隅部の昇温特性を算出し，ディジタル計算機解と比較検討するため，第10図に，いっしょに図示している。この図から，Simulator 解の精度は非常に良いことが知られる。

7. 熱定数が温度に依存する場合

熱定数すなわち，熱伝導率 K，体積比熱 $s\rho$ が温度に依存する二次元熱伝導問題は，すでに筆者等が一次元熱伝導問題の解法の際に報告したように，ノードの電圧変化に応じて，折れ線近似した C，R をそれぞれ変化させることにより，非定常温度解をえることができる。

参考までに，$N=6$，$M=10$ の場合について，熱定数一定の場合と熱定数が温度に依存する場合の内壁中心部のディジタル計算機解を第11図に示しておく。

8. あとがき

二次元熱伝導問題を，境界条件として，内壁面一定熱流密度供給，外壁面完全熱絶縁を想定して，Direct Analog Simulator により解き，良好な精度の非定常温度解をうることができた。他の二次元熱伝導問題も同様にして解きうる。

参考文献

(1) W. Ames: Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering 315, 345 (1965)
(2) 南里・石野：名工大学報 vol. 22 (1970)
(3) 〃 〃 ：電学誌 vol. 91 No. 9