

## コンピュータ法による Field 解法 (I)

武 藤 三 郎・水 野 公 博

電気工学教室  
(1971年9月13日受理)

## Computer Methods in Field Analysis I

Saburo MUTO and Kimihiro MIZUNO

Department of Electrical Engineering  
(Received September 13, 1971)

We often find examples of the solving of field problems in the basic theories in engineering. Hitherto those field problems could be settled by various experimental or analogue methods, but recently those numerical answers were obtained more rapidly and more exactly by the usage of an electronic high speed computer.

This paper states the outlines of an analytical way to solve the field problem. As an example it is supposed that two group conductors, which are both buried under the ground, have a given electric potential, respectively. The equipotential line, that is formed by the leakage current from those conductors, is calculated and the resultant distribution of the potential field is determined.

## I 緒 論

電気, 磁気に関する諸問題のみならず流体力学等, 工学においてプラス方程式およびポアソン方程式の形で示される Field を解く場合にコンピュータ法が便利である。以下その要点と応用例について述べてみよう。

## I-1 差分方程式

ラプラス方程式の数値解を求めるには微分係数を有限差分で近似することによって代数的に取り扱い得るように変形することが第1段階である。

そのため解を得ようとする領域において座標軸方向にそれぞれ一定間隔 (一般には一定間隔とした方が取り扱いが簡単になるが不規則にとってもよい) をもつ座標線群を作り, それらの交点を節点とする。

簡単な例として, 2次元での直交座標系 ( $x, y$ ) について考えると, その座標線群 (以後網目と称する) は第1図のようになり, その内の節点の1つ,  $O$ の座標を  $O(x_i, y_j)$  と書くと, これに隣接した左右上下の座標はそれぞれ  $P(x_{i-1}, y_j)$ ,  $R(x_{i+1}, y_j)$ ,  $Q(x_i, y_{j-1})$ ,  $S(x_i, y_{j+1})$  と書ける。

また,  $O$ 点における関数値を  $V_{i,j}$  と書けば他点の関数値は  $V_{i-1,j}, \dots, V_{i,j+1}$  等と書き表わされる。

このような表記方法を用いて  $O$ 点における偏導関数を

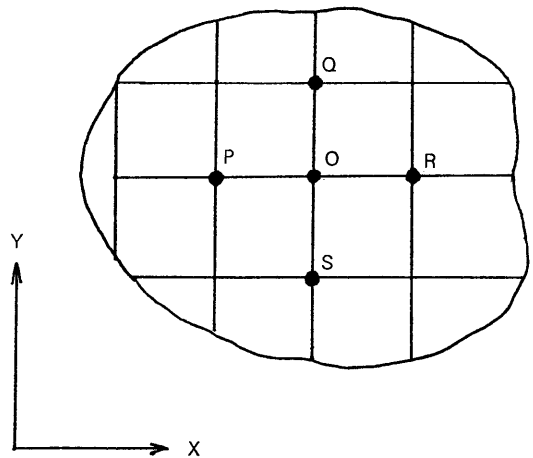


Fig. 1 Finite-difference mesh in 2-dimension.

差分で表わすことを考えればよい。そこで,

$$\nabla^2 V = 0 \quad \dots\dots(I-1)$$

上記 (I-1) 式に示すラプラス方程式の差分近似式 (以下差分方程式と称す) を各座標系について求めれば次章に述べるようである。

## I-2 直交座標表示での差分方程式

直交座標系 ( $x, y, z$ ) におけるラプラス方程式は次式

の形を有する。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (I-2)$$

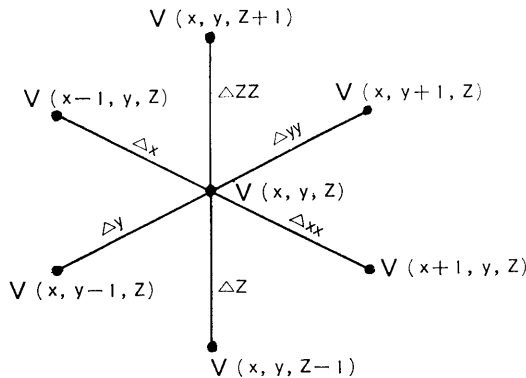


Fig. 2 Finite-difference mesh in 3-dimension.

第2図に示すような網目図形に対する差分方程式を求める。点  $(x, y, z)$  において  $x$  方向のテイラー展開を求める

$$V(x+1, y, z) = V(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \dots\dots\dots (I-3)$$

$$V(x-1, y, z) = V(x, y, z) - \Delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \dots\dots\dots (I-4)$$

となる。3次以上の微分項を無視し、式(I-3)に $\Delta x$ を掛けた式と式(I-4)に $\Delta x$ を掛けた式を加えれば次式が得られる。

$$\Delta x \cdot V(x+1, y, z) + \Delta x \cdot V(x-1, y, z) = (\Delta x + \Delta_{xx}) \cdot V(x, y, z) + \frac{\Delta x \cdot \Delta_{xx}}{2} (\Delta x + \Delta_{xx}) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \dots\dots\dots (I-5)$$

この式から  $\partial^2 V / \partial x^2$  を求めると、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2 \left\{ \frac{\Delta x \cdot V(x+1, y, z) + \Delta_{xx} \cdot V(x-1, y, z) - (\Delta x + \Delta_{xx}) \cdot V(x, y, z)}{\Delta x \cdot \Delta_{xx} \cdot (\Delta x + \Delta_{xx})} \right\} \dots\dots\dots (I-6)$$

同様に  $y$  方向,  $z$  方向に対するテイラー展開を行ない、

$\partial^2 V / \partial y^2$ ,  $\partial^2 V / \partial z^2$  を求めれば、

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2 \left\{ \frac{\Delta y \cdot V(x, y+1, z) + \Delta_{yy} \cdot V(x, y-1, z) - (\Delta y + \Delta_{yy}) \cdot V(x, y, z)}{\Delta y \cdot \Delta_{yy} \cdot (\Delta y + \Delta_{yy})} \right\} \dots\dots\dots (I-7)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2 \left\{ \frac{\Delta z \cdot V(x, y, z+1) + \Delta_{zz} \cdot V(x, y, z-1) - (\Delta z + \Delta_{zz}) \cdot V(x, y, z)}{\Delta z \cdot \Delta_{zz} \cdot (\Delta z + \Delta_{zz})} \right\} \dots\dots\dots (I-8)$$

となる。式(I-6), ~式(I-8)を式(I-2)に代入して整理すれば次式が得られる。

$$\left( \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta_{xx}} + \frac{1}{\Delta y \cdot \Delta_{yy}} + \frac{1}{\Delta z \cdot \Delta_{zz}} \right) V(x, y, z) = \frac{\Delta x \cdot V(x+1, y, z) + \Delta_{xx} \cdot V(x-1, y, z)}{\Delta x \cdot \Delta_{xx} (\Delta x + \Delta_{xx})} + \frac{\Delta y \cdot V(x, y+1, z) + \Delta_{yy} \cdot V(x, y-1, z)}{\Delta y \cdot \Delta_{yy} (\Delta y + \Delta_{yy})} + \frac{\Delta z \cdot V(x, y, z+1) + \Delta_{zz} \cdot V(x, y, z-1)}{\Delta z \cdot \Delta_{zz} (\Delta z + \Delta_{zz})} \dots\dots\dots (I-9)$$

式(I-9)が3次元直交座標表示に対するラプラス方程式の差分方程式である。

等間隔を有する網目を用いれば、 $\Delta x = \Delta_{xx} = \Delta y = \Delta_{yy} = \Delta z = \Delta_{zz}$ であり式(I-9)は次式のように変えられる。

$$V(x, y, z) = \frac{1}{6} \left\{ V(x+1, y, z) + V(x-1, y, z) + V(x, y+1, z) + V(x, y-1, z) + V(x, y, z+1) + V(x, y, z-1) \right\} \dots\dots\dots (I-10)$$

## I-3 円筒座標表示での差分方程式

円筒座標系  $(r, z, \phi)$  における3次元ラプラス方程式は次式のように書ける。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{..... (I-11)}$$

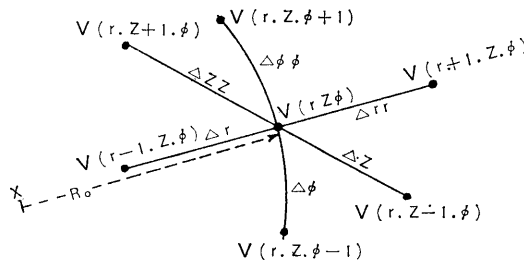


Fig. 3 Irregular-star in circular cylindrical co-ordinates

第3図のような網目図形に対する差分方程式を求める。前節で行なったと同様に点  $V(r, z, \phi)$  においてテイラー展開を求め  $\partial^2 V / \partial r^2$ ,  $\partial^2 V / \partial z^2$ ,  $\partial^2 V / \partial \phi^2$  を計算すれば

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = 2 \left\{ \frac{\Delta_r V(r+1, z, \phi) + \Delta_{rr} V(r-1, z, \phi) - (\Delta_r + \Delta_{rr}) V(r, z, \phi)}{\Delta_r \Delta_{rr} (\Delta_r + \Delta_{rr})} \right\} \quad \text{..... (I-12)}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 2 \left\{ \frac{\Delta_z \cdot V(r, z+1, \phi) + \Delta_{zz} \cdot V(r, z-1, \phi) - (\Delta_z + \Delta_{zz}) V(r, z, \phi)}{\Delta_z \cdot \Delta_{zz} (\Delta_z + \Delta_{zz})} \right\} \quad \text{..... (I-13)}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 2 \left\{ \frac{\Delta_\phi V(r, z, \phi+1) + \Delta_{\phi\phi} V(r, z, \phi-1) - (\Delta_\phi + \Delta_{\phi\phi}) V(r, z, \phi)}{\Delta_\phi \cdot \Delta_{\phi\phi} (\Delta_\phi + \Delta_{\phi\phi})} \right\} \quad \text{..... (I-14)}$$

となる。更に  $\frac{\partial V}{\partial r}$  を求めるため  $r$  方向に対するテイラー展開式を再び書けば

$$V(r+1, z, \phi) = V(r, z, \phi) + \Delta_r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\Delta_r^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\Delta_r^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial r^3} + \quad \text{..... (I-15)}$$

$$V(r-1, z, \phi) = V(r, z, \phi) - \Delta_r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\Delta_r^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{\Delta_r^3}{3!} \frac{\partial^3 V}{\partial r^3} + \quad \text{..... (I-16)}$$

となり、3次微分項以上を無視し、式 (I-15) に  $\Delta_r^2$  を掛けた式から式 (I-16) に  $\Delta_{rr}^2$  を掛けた式を引くと次式が得られる。

$$\Delta_r^2 \cdot V(r+1, z, \phi) - \Delta_{rr}^2 \cdot V(r-1, z, \phi) = (\Delta_r^2 - \Delta_{rr}^2) V(r, z, \phi) + \Delta_r \cdot \Delta_{rr} (\Delta_r + \Delta_{rr}) \cdot \frac{\partial V}{\partial r}$$

故に

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\Delta_r^2 \cdot V(r+1, z, \phi) - \Delta_{rr}^2 V(r-1, z, \phi) - (\Delta_r^2 - \Delta_{rr}^2) V(r, z, \phi)}{\Delta_r \cdot \Delta_{rr} (\Delta_r + \Delta_{rr})} \quad \text{..... (I-17)}$$

式 (I-12)~式 (I-14) および式 (I-17) を式 (I-11) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} V(r, z, \phi) & \left( \frac{1}{\Delta_r \cdot \Delta_{rr}} + \frac{1}{\Delta_z \cdot \Delta_{zz}} + \frac{1}{R_0^2 \cdot \Delta_\phi \Delta_{\phi\phi}} \right) = \frac{V(r+1, z, \phi) \left( \frac{1}{\Delta_{rr}} + \frac{1}{2R_0} \right) + V(r-1, z, \phi) \left( \frac{1}{\Delta_{rr}} - \frac{1}{2R_0} \right)}{\Delta_{rr} + \Delta_r} \\ & + \frac{V(r, z+1, \phi) \left( \frac{1}{\Delta_{zz}} \right) + V(r, z-1, \phi) \left( \frac{1}{\Delta_z} \right)}{\Delta_{zz} + \Delta_z} + \frac{V(r, z, \phi+1) \left( \frac{1}{\Delta_{\phi\phi}} \right) + V(r, z, \phi-1) \left( \frac{1}{\Delta_\phi} \right)}{R_0^2 (\Delta_{\phi\phi} + \Delta_\phi)} \quad \text{..... (I-18)} \end{aligned}$$

この式が円筒座標表示における3次元ラプラス方程式に対する差分方程式である。

なお電界問題等にしばしば使用される軸対称形に対しては次式が得られる。(第4図に示す irregular-star 配置の場合

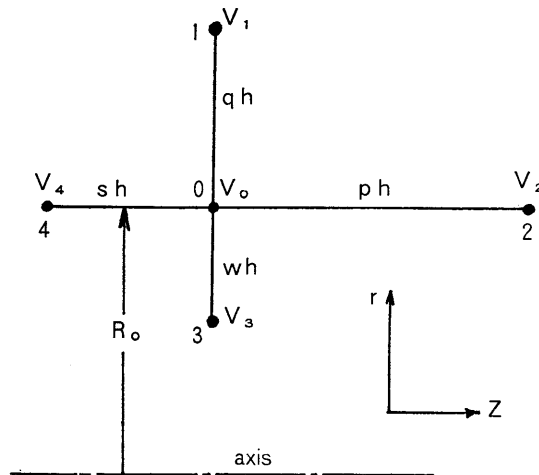


Fig. 4 Finite-difference mesh for a irregular-star configuration.

$$\left( \frac{1}{wq} + \frac{1}{SP} + \frac{h(w-q)}{2wqR_0} \right) \cdot V_0 = V_1 \frac{(1+wh/2R_0)}{q(w+q)} + V_2 \frac{1}{P(P+S)} + V_3 \frac{(1-qh/2R_0)}{w(w+q)} + V_4 \frac{1}{S(P+S)} \quad \text{..... (I-19)}$$

#### I-4 極座標表示 (2次元) での差分方程式

極座標系  $(r, \phi)$  でのラプラス方程式は,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{..... (I-20)}$$

と表わされる。この式に対する差分方程式は前節と同じようにテイラー展開を応用することにより求められるが,

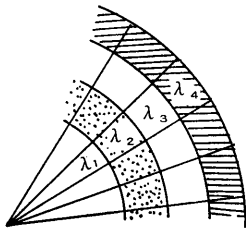


Fig. 5 Cylindrical model of complex conductivities.

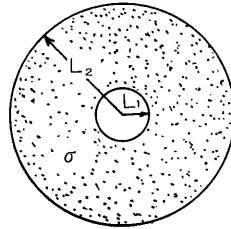


Fig. 6 Concentric cylinder.

ここでは第5図に示されるように各円筒の媒質が異なるような場合についてアナログ的な考え方で求める。

今第6図のような半径  $L_1, L_2$  の単位長同心円筒電極間に導電率  $\sigma$  なる物質を満たした場合の電極間の抵抗  $R_{es}$  を求めれば次式のようになる。

$$R_{es} = \frac{1}{2\pi\sigma} \log \frac{L_2}{L_1} \quad \text{..... (I-21)}$$

この円筒を中心角  $\phi$  なる  $2\pi/\phi$  個 (整数個になるような  $\phi$  を選ぶ) の素方に分割すれば、各素方当りの抵抗  $R_{es\phi}$  は

$$R_{es\phi} = \frac{\log \frac{L_1}{L_2}}{\phi\sigma} = \frac{R \log \frac{L_1}{L_2}}{\phi}, \quad \left( \text{ただし } R = \frac{1}{\sigma} \right) \quad \text{..... (I-22)}$$

となる。

従って第7(a)図のような場合に対しては式 (I-22) を利用することにより等価的に第7(b)図に変換して考えることができる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} G_a &= \frac{R_a \log r_3/r_2}{\phi} \\ G_b &= \frac{R_b \log r_2/r_1}{\phi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I-23)$$

$G_c$ については第8図のように放射状電極間に $R_1, R_2$ なる抵抗が並列に入っていると考えればよい。まず $R_1$ を求める。 $V_c, V_0$ を各々の電極の電位とすれば中心から $r(r=r_2+\Delta r)$ の距離における電極間の電界は

$$E = \frac{V_c - V_0}{\phi(r_2 + \Delta r)} = \frac{V}{\phi \cdot r}, \quad (V = V_c - V_0)$$

この場合の電流密度 $i$ は $i = (1/R_a) \cdot E$ しかるに面積 $S$ なる面に流れる電流は $I = i \cdot S$  故に

$$I = \int_{r_2}^{r_2 + r_3} \frac{V}{\phi R_a r} dr = \frac{V}{\phi R_a} \log \frac{r_2 + r_3}{2r_2}$$

$$\therefore R_1 = \frac{V}{I} = \frac{\phi R_a}{\log \frac{r_2 + r_3}{2r_2}}$$

同様に

$$R_2 = \frac{\phi R_b}{\log \frac{r_1 + r_2}{2r_1}}$$

$$G_c = \frac{\phi R_a R_b}{R_a \log \frac{r_1 + r_2}{2r_1} + R_b \log \frac{r_2 + r_3}{2r_2}} \dots (I-24)$$

第7(b)図よりキルヒホッフの法則を用いて $V_0$ を求めれば、

$$\begin{aligned} \frac{V_a - V_0}{G_a} + \frac{V_b - V_0}{G_b} + \frac{V_c - V_0}{G_c} + \frac{V_d - V_0}{G_c} &= 0 \\ \therefore \left( \frac{1}{G_a} + \frac{1}{G_b} + \frac{2}{G_c} \right) V_0 &= \frac{V_a}{G_a} + \frac{V_b}{G_b} + \frac{V_c + V_d}{G_c} \\ &\dots\dots\dots (I-25) \end{aligned}$$

この式が第5図の場合の差分方程式である。

## II 差分方程式の解法

前節までに各座標系における一つの節点に対する差分方程式を導出した。従ってある解領域に対しては1-2-1節に述べたように、その領域を覆った網目の節点の数だけ同じ形の差分方程式が得られる。すなわちこれらの式は網目の節点数の未知数(境界条件等により多少異なる)を有する連立一次方程式を形成する。

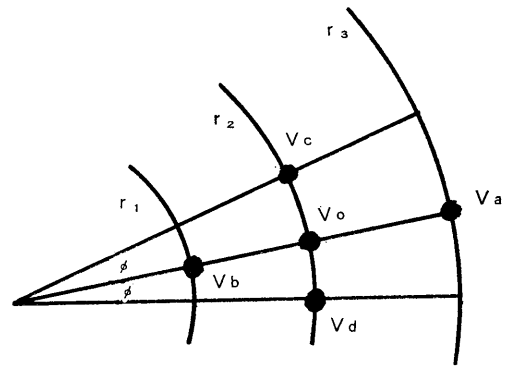
連立一次方程式の解法には次に挙げるようなものがある。

### (1) 消去法

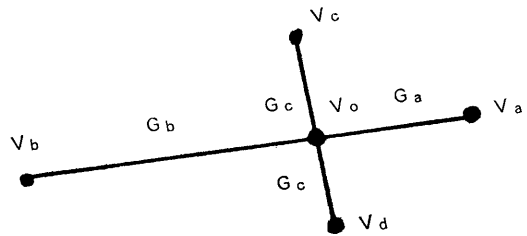
Gauss の消去法

Gauss-Jordan の方法

Crout の方法



(a)



(b)

Fig. 7 Relaxation coefficients of radial meshes.

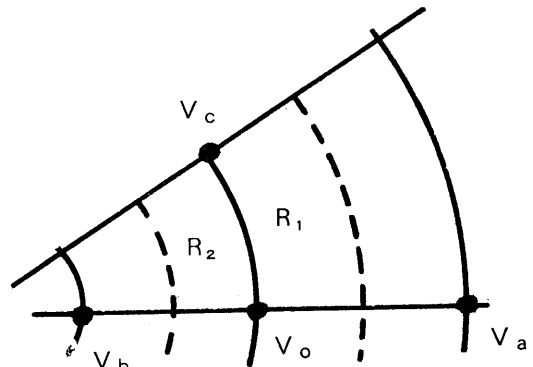


Fig. 8 Parallel resistance of radial meshes.

### (2) 反復法 (Iterative methods)

Gauss-Seidel の反復法 (Liebmann method)

サウスウェルの緩和法 (Southwell's over-relaxation)

### (3) 共役傾斜法

各々の方法の詳細については各文献を参考にして戴きたいが、ここでは基本的な解法であるサウスウェルの緩和法にふれておく。

サウスウェルの緩和法は連立方程式の近似根  $x_1, x_2, \dots, x_n$  がわかっているとき、この値を原方程式に代入した際の残差（左辺より右辺を差引いた値）のうち、その絶対値の最大のものを逐次打消すように近似値を修正する方法である。次節で述べる加速リーブマンの方法は上記の手法を電子計算機向きに改良したものである。

### Ⅲ 加速リーブマン法(extrapolated Liebmann's method)

電子計算機によって差分方程式を解くには反復法が適している。それは反復法によれば未知数の数のみの記憶容量（その他プログラム等のために記憶容量が必要であるが、一般には未知数の数に比べれば非常に少ない）があればよく、更に簡単な手順のくり返しによって解を求める得る、という理由による。

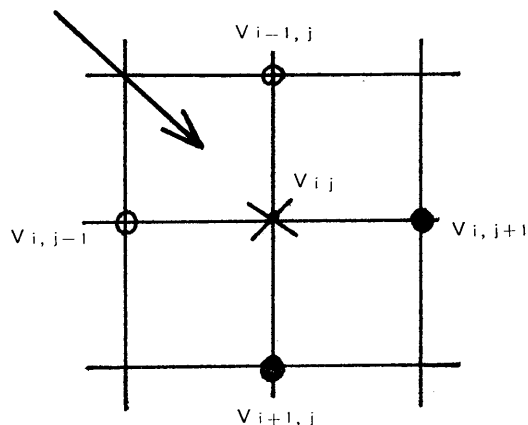


Fig. 9 Computing direction of mesh points.

反復法には前述のサウスウェルの緩和法の他に同時反復法、逐次反復法、加速リーブマン法がある。いま第9図のような2次元直交座標系の網目に対してそれぞれの代表的な反復式の形を書けば、

同時反復法

$$V_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} \left\{ V_{i-1,j}^n + V_{i,j-1}^n + V_{i+1,j}^n + V_{i,j+1}^n \right\} \dots\dots\dots (III-1)$$

逐次反復法

$$V_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} \left\{ V_{i-1,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1} + V_{i+1,j}^n + V_{i,j+1}^n \right\} \dots\dots\dots (III-2)$$

加速リーブマン法

$$V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n + \frac{\alpha}{4} \left\{ V_{i-1,j}^{n+1} + V_{i,j-1}^{n+1} + V_{i+1,j}^n + V_{i,j+1}^n - 4 \cdot V_{i,j}^n \right\} \dots\dots (III-3)$$

である。以上の3式を比較してみる。逐次反復法は同時反復法に比べ各  $V_{i,j}$  の計算に際して、すでに新しく計算された  $V_{i-1,j}$ ,  $V_{i,j-1}$  の値を用いるという点で優れていることがわかるであろう。また加速リーブマン法は更に  $\alpha (1 < \alpha < 2)$  なる加速係数を掛けることにより収斂性を加速するようにした方法である。収斂速度はこの加速係数の値に大きく依存するが、その最適値を見出すことは容易でない。ちなみに文献<sup>(1)</sup>によれば  $n \times y$  個の節点を有する直交網目 ( $n, y$  は大きな値とする) に対して

$$\alpha = 2 \left[ 1 - \pi \sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(y-1)^2}} \right] \dots\dots (III-4)$$

なる式が与えられている。しかし実際の問題においては境界の形状、網目の形状等により上式の値をそのまま用いても最適値とは成り得ない。本論文では数回計算を行なったうえ、適当であろうと思われる値を選択して用いた。

### Ⅳ 電子計算機による解析例

#### Ⅳ-1 計算に使用したモデル

計算に使用した導体群のモデルは第10図に示すように

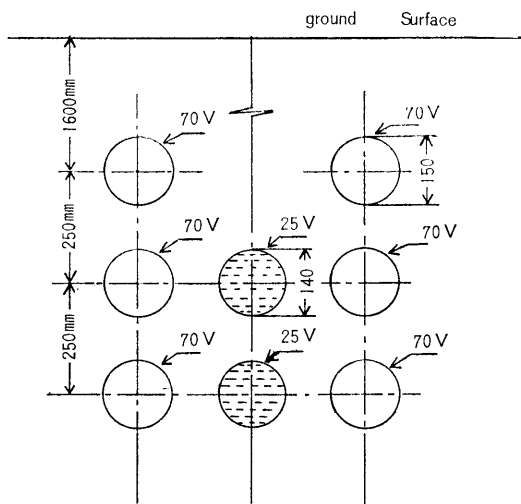


Fig. 10 Model of grouped conductors.

8 導体の内、内側の下2 導体を 25[V] として使用し、外側6 導体を70[V] として使用したものである。

このモデルは図から明らかなように左右対称であるため、その電位分布は片側を計算すれば十分である。従っ

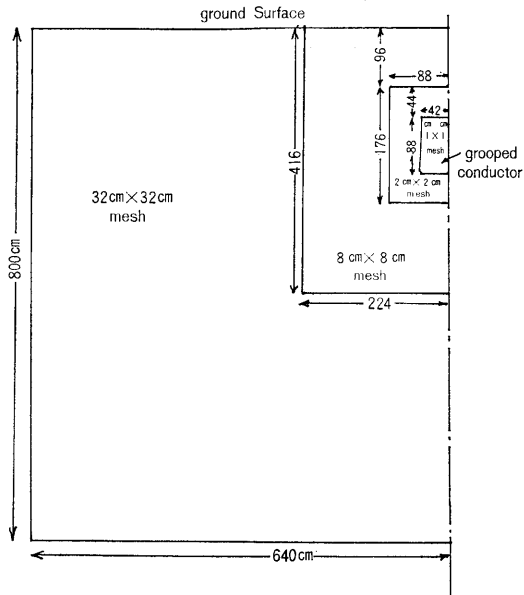


Fig. 11 Mesh size.

て計算用の網目としては第11図に示したものをを用いた。この場合計算に必要な時間をより短くし、かつ導体近傍での計算精度をできるだけ高くするために、各領域での網目の大きさは導体群より最も離れた部分で32[cm]とし、順次導体に近づくに従って8[cm]、2[cm]と小さくし、導体群の存在する領域では1[cm]の網目で覆ってある。導体群の円形状境界はいずれも1[cm]の網目に合うよう、折れ線近似を行なっている。

各領域間の接続は第12図に示すような階差網を用いて接続している。

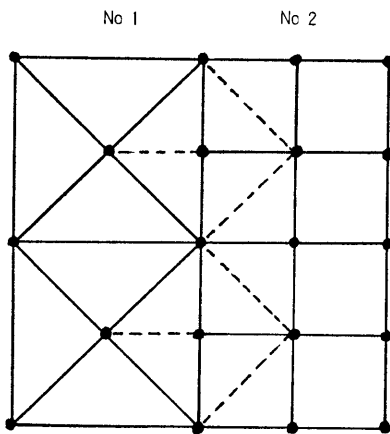


Fig. 12 Connection of two difference meshes.

#### IV-2 プログラムおよび計算例

節点数が非常に多くなったのと、第11図に示すように

計算領域を $\square$ , 田等の形に分割する必要があったため、の処理によってプログラムはかなり長いものとなった。

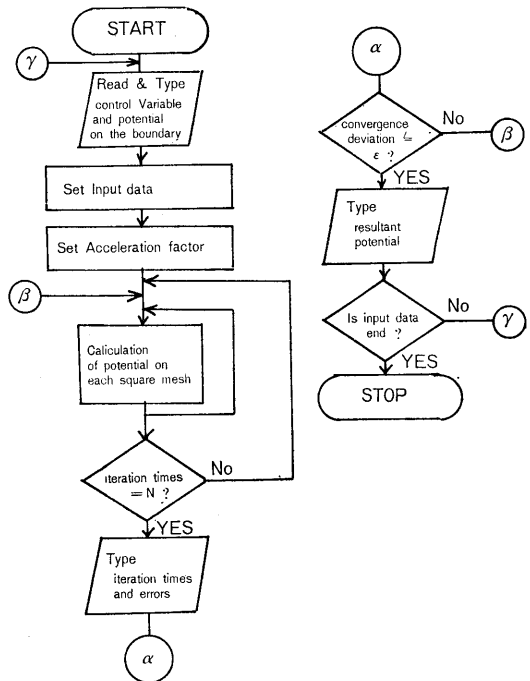


Fig. 13 Flow diagram of main routine of the digital program.

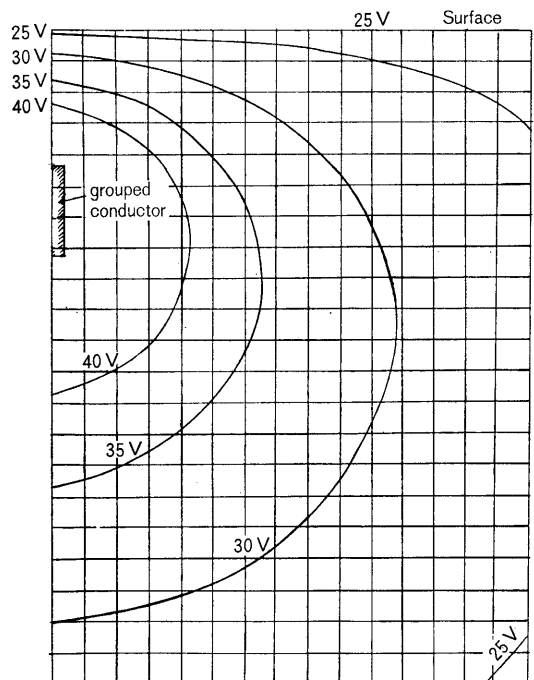


Fig. 14 Field distribution of the model, Fig. 10

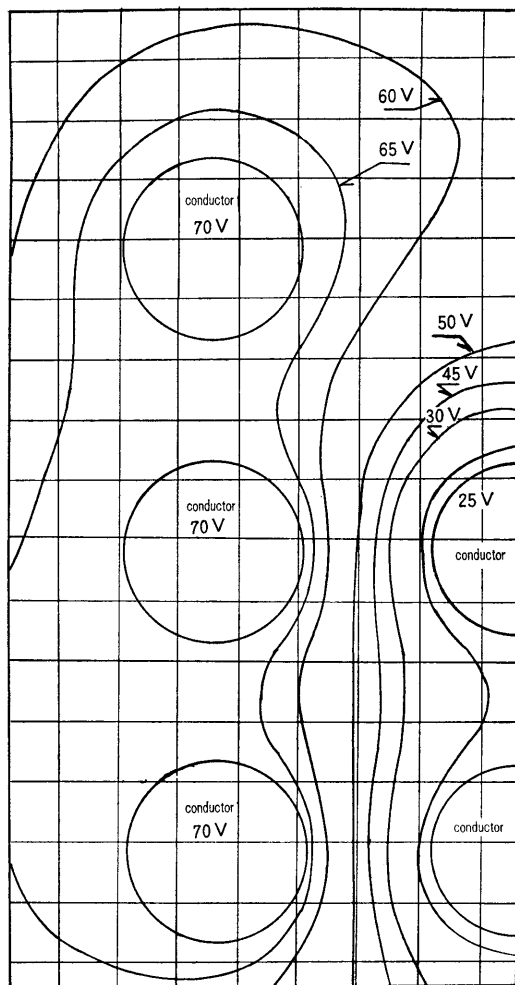


Fig. 15 Field distribution of the model,  
Fig. 10. area of interest.

基本的に用いられている式は各分割領域とも同じである。第13図にプログラムのブロックフローチャートの例を示す。演算停止は、収斂誤差が許容値以下になった時行なった。

第14図はコンピュータによって得られた結果をもとに導体群（第10図のモデル，第11図のメッシュ）についてその周囲の等電位点を連続曲線として描いた等電位曲線図である。

また第15図は同じく導体群に近接した空間において導体群相互間に漏洩する電流による等電位線をさらに詳しく計算した結果を図示したものである。

以上の結果は従来用いられて来た電解槽法等に比較して誤差は少なく，またかなり詳細な結果を求めうることを示すものである。

更に本例におけるモデル（第10図，11図）において地

表面の境界条件として，(A)地表面は完全絶縁体で表面から外部へは全く漏洩電流がない場合か(B)，(C)，(D)のように表面近くに漏洩電流を吸い上げるブースター（負電供導体）があり表面より第16図〔A〕のように一定の分布形回路抵抗 $r$ により接続されている場合とに分けて4つのケースについて計算した結果，地表面における電位分布変化を第16図〔B〕のA，B，C，D曲線のように求めることができた。

#### IV-3 計算結果の検討

上例によって得られた計算結果は従来他の実験的諸方法に比較して精度は高く充分に機器の絶縁設計，電食等の迷走電流の解析，電力ケーブルおよび電気炉等の熱流解析等の実用面に使用できるものと考えられる。

しかし更に Field の解析に関して複雑・困難な問題も



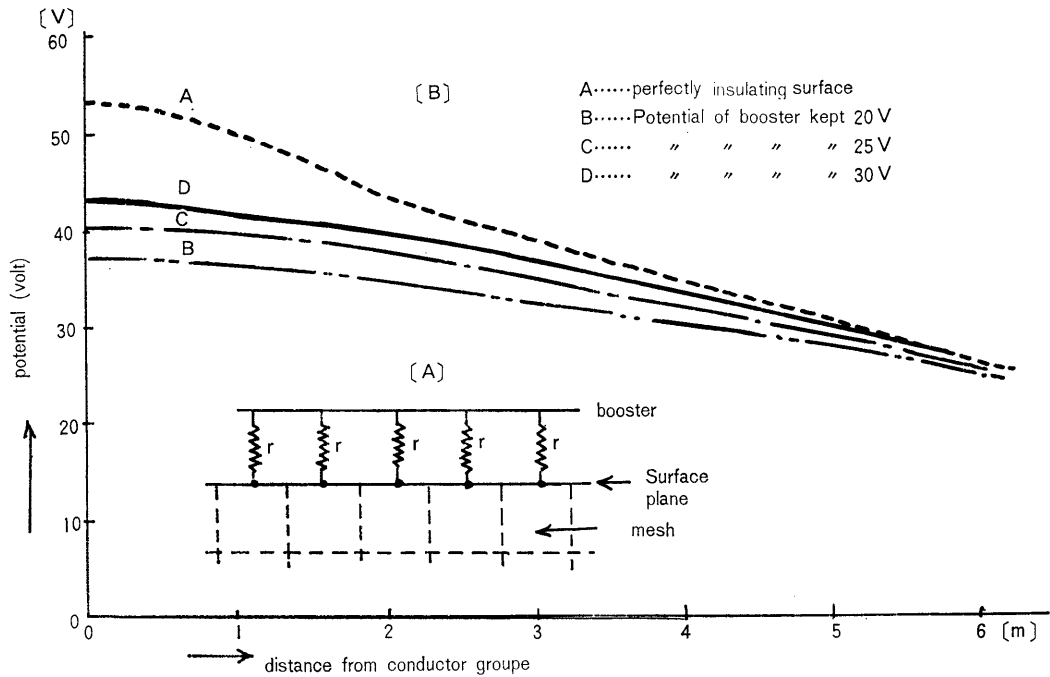


Fig. 16 Showing potential distribution on the ground surface.

多く、それらの計算方法については次号に述べてみることにした。

#### 参考文献

- (1) J. T. Storey and M. J. Billingo; PEE 114 No. 10 (1967 oct.)
- (2) J. T. Storey and M. J. Billingo; PEE 116 No. 4 (1969 APR.)
- (3) C. C. Barnes; Power Cables, Chapman and Hall 1966
- (4) Moon and Spencer; "Field Theory for Engineers", Van Nostrand 1961
- (5) Warren B. Boot; "Vector Field", Harper & Row 1964