内圧を受ける両端支持薄肉円筒における塑性域出現の解析

大河内 禎 一

機械工学教室
(1969年9月11日受理)

On the Initial Yield of Thin Cylindrical Shell with Supported Ends under Pressure.

Tei-ichi OKOUCHI

Department of Mechanical Engineering
(Received September 11, 1969)

The fundamental equations in this paper including a parameter showing the initial yield of thin finite cylinder under internal pressure are obtained by using Mises' yield condition. A cylinder of mild steel, 210 mm in radius and 7 mm in wall-thickness, is taken to apply the equations. Two cases are considered about the cylinder : (1) the axial tension is equal to zero, (2) the axial tension is equal to Pa/2 where "P" represents the internal pressure and "a" the radius of the cylinder.

1. 緒言

内圧を受ける円筒容器の問題は，従来弾性的に取扱われて来ているが，弾塑性変形に対する解析は未だ余り行なわれていないようで，現在では主として極限解析による結果[1]および硬化材料よりなる円筒の研究結果[2]が得られているにすぎない。本研究では軟鋼のように降伏点を有する材料でできた両端支持薄肉円筒が内圧によって変型するとき，塑性域がはじめて出現するときの問題を考えた。

2. 塑性域出現の変数を含む基礎方程式の誘導

薄肉円筒について 図1に示す座標z，θ，およびxを考え，zは板厚 $2h$ の中央面から同筒中心軸向きに正値をとり，xは同筒中心軸長さの中央を原点とする。xおよびθ方向の曲率およびひずみ成分をα_x，α_θ，e_xおよびe_θとし，xおよびz方向の変位をuおよびwとすると次のような関係式が成立する[3]。

$$\alpha_x=-\frac{d^2w}{dx^2} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$e_x=\frac{du}{dx} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$e_\theta=-\frac{w}{a} \quad \cdots\cdots(3)$$

またxおよびθ方向の応力成分をσ_xおよびσ_θとすると，これらは次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2G\{e_x+z\alpha_x+\nu(e_\theta+z\alpha_\theta)\}/(1-\nu)\\ \sigma_\theta&=2G\{e_\theta+z\alpha_\theta+\nu(e_x+z\alpha_x)\}/(1-\nu)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

ここでα_x，α_θ，e_xおよびe_θにソコロフスキイの表示

$$\begin{matrix}\alpha_x\\ \alpha_\theta\end{matrix}=\begin{matrix}-\\ +\end{matrix}A_0\frac{\sin(\psi_0\mp\mu)}{\cos\mu} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$\begin{matrix}e_x\\ e_\theta\end{matrix}=\begin{matrix}-\\ +\end{matrix}A_1\frac{\sin(\psi_1\mp\mu)}{\cos\mu} \quad \cdots\cdots(6)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}\sin\mu&=\frac{\sqrt{3}(1-\nu)}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}}\\ \cos\mu&=\frac{1+\nu}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

νはポアソン比

を用いれば相当応力$\bar{\sigma}$は次のように表わされる[4]。

$$\bar{\sigma}=2\sqrt{3}\,G\sqrt{A_0{}^2z^2+2A_1A_0z\cos(\psi_1-\psi_0)+A_1{}^2} \quad \cdots(8)$$

ここにGは横弾性係数である。

A_1，A_0，ψ_1 および ψ_0 は (5)，(6) および (7)式により α_x，α_θ，e_x，e_θ および ν と関係づけられる量である。

円筒の材料はミーゼスの塑性条件 $\bar{\sigma}=\sqrt{3}k$ ($k=\sigma_s/\sqrt{3}$，σ_s：単軸引張りの降伏応力）にて塑性状態に移るものとすれば，断面における弾塑性境界の位置は式(8)から得られる次の式の2根として求められる。

$$\alpha^2\chi^2+2\alpha\chi\cos(\psi_1-\psi_0)+1=\left(\frac{k}{2GA_1}\right)^2 \quad \cdots\cdots(9)$$

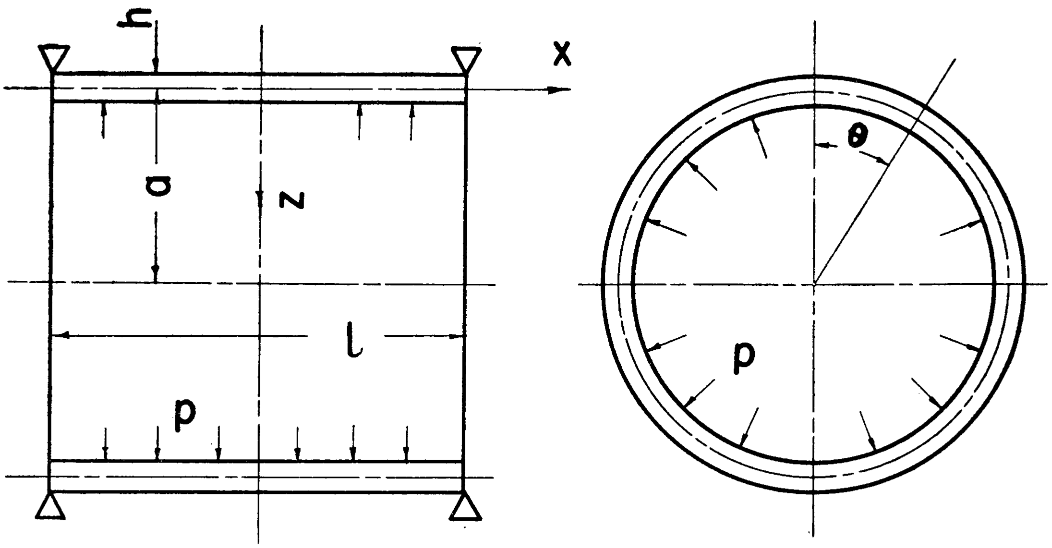


Fig. 1 Cylindrical shell with supported ends and its co-ordinate

ここに　$\chi=z/h,\ \alpha=h\cdot A_0/A_1$

したがって，この式をχについて解いた2実根のうち絶対値の小さい方が1に等しくなったとき，断面に始めて塑性域が出現することになる。また，$\overline{\sigma}=\sqrt{3}k$ にて弾性域が塑性域に移行するから，純弾性域内で表面$\chi=\pm1$において $\overline{\sigma}=\sqrt{3}kS$ $(1\geq S\geq O)$ とおけば，Sが1に達するとき板の表面に塑性域が出現することになる。ゆえに

$$\overline{F}(\pm1)=\sqrt{\alpha^2\pm2\alpha\cos(\psi_1-\psi_0)+1} \quad\cdots\cdots(10)$$

とおき，さらに円筒の内外表面 $\chi=\pm1$ の S の値をそれぞれ S_{+1} および S_{-1} とおけば，(9) 式から板の表面における塑性域の出現を示すパラメータSを含んだ次のような関係式で A_1 と A_0 を表わすことができる。

$$A_1=\frac{kS_{+1}}{2G\overline{F}(+1)}=\frac{kS_{-1}}{2G\overline{F}(-1)} \quad\cdots\cdots(11)$$

$$A_0=\frac{k\alpha S_{+1}}{2Gk\overline{F}(+1)}=\frac{k\alpha S_{-1}}{2Gh\overline{F}(-1)} \quad\cdots\cdots(12)$$

肉厚 $2h$ の円筒の断面にはたらくxおよびθ方向の単位長さ当りの張力および曲げモーメントを T_x, T_θ, M_x および M_θ とすれば

$$\left.\begin{aligned}
T_x&=4hG(e_x+\nu e_\theta)/(1-\nu)\\
T_\theta&=4hG(e_\theta+\nu e_x)/(1-\nu)\\
M_x&=\frac{4Gh^3}{3(1-\nu)}\ (\alpha_x+\nu\alpha_\theta)\\
M_\theta&=\frac{4Gh^3}{3(1-\nu)}\ (\alpha_\theta+\nu\alpha_x)
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(13)$$

であるから，式(13)に (5), (6), (11) および(12)を入れると，次の式がえられる。

$$T_x=4kh\ \cos(\psi_1+\pi/6)\ S_{+1}/\overline{F}(+1) \quad\cdots\cdots(14)$$

$$T_\theta=4kh\ \cos(\psi_1-\pi/6)\ S_{+1}/\overline{F}(+1) \quad\cdots\cdots(15)$$

$$M_x=4kh^2\ \cos(\psi_0+\pi/6)\ S_{+1}\alpha/\{3\overline{F}(+1)\} \quad\cdots\cdots(16)$$

$$M_\theta=4kh^2\ \cos(\psi_0-\pi/6)\ S_{+1}\alpha/\{3\overline{F}(+1)\} \quad\cdots\cdots(17)$$

内圧Pをうける半径aの薄肉円筒の微小変形を考えるとき，その鏡板にかかる内圧が軸方向張力に転化されると考えられる場合，およびこの張力がない場合は次の式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
T_x&=P\pi a^2/2\pi a=Pa/2\\
T_x&=0
\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(18)$$

薄肉円筒の平衡方程式およびひずみの適合条件式は次のように表わされる[2)]。

$$\frac{dT_x}{dx}=0 \quad\cdots\cdots(19)$$

$$\frac{d^2M_x}{dx^2}+\frac{T_\theta}{a}=P \quad\cdots\cdots(20)$$

$$\frac{d^2e_\theta}{dx^2}=\frac{\alpha_x}{a} \quad\cdots\cdots(21)$$

式(19)に式(14)を，式(20)に式(15)および(16)を，また式(21)に式(5), (6), (11) および(12)を代入し，さらに $X=\sqrt{p/k}\cdot x/h$ によってxを無次元化すればそれぞれ次のような式をうる。

$$\frac{d}{dX}\left\{\cos(\psi_1+\frac{\pi}{6})\ \frac{S_{+1}}{\overline{F}(+1)}\right\}=0 \quad\cdots\cdots(22)$$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left\{\frac{S_{+1}\cdot\alpha}{\overline{F}(+1)}\right\}+3\,\frac{kh}{Pa}\ \frac{\cos(\psi_1-\pi/6)}{\cos(\psi_0+\pi/6)}\ \frac{S_{+1}}{\overline{F}(1+)}=\frac{3}{4\cos(\psi_0+\pi/6)} \quad\cdots\cdots(23)$$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left\{\sin(\psi_1+\mu)\frac{S_{+1}}{\overline{F}(+1)}\right\}=-\frac{kh}{Pa}\cdot\sin(\psi_0-\mu)\frac{S_{+1}\alpha}{\overline{F}(+1)} \quad\cdots\cdots(24)$$

これらの式は塑性域出現のパラメータSを含む純弾性状態の基礎式である。

内圧をうける薄肉円筒の微小変形を取扱う場合は，

$\alpha_\theta=0$ とおくことができ，また z は中心軸向きを正にとるゆえ，$\alpha_x=\dfrac{d^2w}{dx^2}<0$ と考えられる。したがって，式(5)より

$$\psi_0=(2n_0+1)\pi-\mu,\quad n_0：整数 \cdots\cdots(25)$$

となり，ψ_0 は常数となる。

ゆえに式(22), (23)および(24)の3式をパラメータ S，α および ψ_1 について適当な境界条件の下に解けば，式(5), (6), (11)および(12)よりひずみおよび曲率成分が求められ，式(4), (14), (15), (16)および(17)により断面にはたらく応力，張力および曲げモーメントの成分を求めることができ，またひずみ成分より式(2)および(3)を用いて x および z 方向の変位を求めることができる。

3. 両端で単純支持され，内圧をうける薄肉円筒の解析

基礎式(22), (23)および(24)は無次元化された軸方向の長さ X に関する S，α および ψ_1 の2階連立微分方程式である。これらの基礎式は解析的には解けないので，R.K.G. 法を用い電子計算機 HIPAC 103 によって数値的に解いた。

塑性域出現荷重を求めるためには，中心軸の中央にある X の原点よりはじめてこれらの方程式を解き，内外表面のどこかで S がちょうど1に達するような場合の解を求めればよい。数値解析にあたっては，式中の材料に関する定数 G，k および ν に対し軟鋼の場合を考えて，$G=8.\times10^5\mathrm{kg/cm^2}$，$k=2.\times10^3\mathrm{kg/cm^2}$，$\nu=0.28$ を用い，また円筒は肉厚 $2h=7\mathrm{mm}$，半径 $a=210\mathrm{mm}$ のものを考えた。

この計算例としては $T_x=0$ および $T_x=Pa/2$ の2つの場合につき，軸方向の全長 ℓ が板厚の10倍以上について考えた。

この場合には円筒の壁の内圧による曲げ作用に対し，せん断力の影響が小さいものと考えられるからである。

3・1 $T_x=0$ の場合 ここでは内圧により，$x=0$ においては，$T_\theta>0$ と考えられるから，式(14)および(15)より，$\cos(\psi_1+\pi/6)=0$ および $\cos(\psi_1-\pi/6)>0$ なる条件がえられ，これから次の値をうる。

$$\psi_1=2n_1\pi+\pi/3\qquad n_1：整数 \cdots\cdots(26)$$

したがって，求めるパラメータは S および α の2個のみとなり，また式(22)は恒等的に満足されるから，式(23)および(24)の2基礎式を解けばよい。式(11)は次のように表されるから

$$S_{+1}/\{\alpha^2+2\alpha\cos(\psi_1-\psi_0)+1\}^{\frac{1}{2}}=S_{-1}/\{\alpha^2-2\alpha\cos(\psi_1-\psi_0)+1\}^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots(27)$$

この式を変形すれば，$m=S_{-1}/S_{+1}$ とおいて，

$$(1-m^2)\alpha^2-2\cos(\psi_1-\psi_0)(1+m^2)\alpha+(1-m^2)=0 \cdots\cdots(28)$$

ここで ψ_1 と ψ_0 は定数であるから，この式により α は m の値によって定められる。

この α はまた常に実数であるから，式(28)の判別式 D は零または正，すなわち次のようになる。

$$D=\cos^2(\psi_1-\psi_0)(1+m^2)^2-(1-m^2)^2\geqq0 \cdots\cdots(29)$$

この式に式(25)および(26)を考慮すれば，m は次のようになるべきである。

$$m\geqq\sqrt{\{1+\cos(\psi_1-\psi_0)\}/\{1-\cos(\psi_1-\psi_0)\}}\fallingdotseq0.778 \cdots(30)$$

したがって $X=0$ における m の範囲は次のように定められる。

$$1>m\geqq0.778 \cdots\cdots(31)$$

同じ m の値に対し α は2つの値

$$\alpha=\{\cos(\psi_1-\psi_0)(1+m^2)\pm\sqrt{\cos^2(\psi_1-\psi_0)(1+m^2)^2-(1-m^2)^2}\}/(1-m^2) \cdots(32)$$

がえられるが，根号の前で正符号をとる場合には得られる全長が板厚に比し短かいので，例としては取扱わないで，それが負号をとる場合のみ計算を行なった。

$S_{+1}=S_{-1}$ のときは特別の場合であって $\alpha=0$ となる。一般には，$X=0$ にて最初に塑性域が出現するから，ここで，$S_{+1}=1$ とおいて解くことができるが，α が0に近くなると必ずしもそうでなくなり，$S_{+1}=1$ は X の0以外のある値にて1となる。したがってこの場合には $X=0$ における S_{+1} の値は試探法により定めなければならない。

次に支持端においては $M_x=w=0$ なる条件を満足すべきであるから，$M_x=0$ となるとき $w=0$ となるようにするためには，式(22)および(23)中にある $k\cdot h/P\cdot a$ の値を適当に定める必要がある。更に $k\cdot h/P\cdot a$ の値が求まれば k，h および a が与えられているから対応すを塑性域出現の内圧 p_s の値をうることができる。

3・2 $T_x=Pa/2$ の場合。この場合は式(14)において ψ_1 は一定値となりえないので，基礎式(22), (23)および(24)の3式を解かねばならない。$n=S_{+1}/S_{-1}$ とおけば式(27)より

$$(1-n^2)\alpha^2+2\cos(\psi_1-\psi_0)(1+n^2)\alpha+(1-n^2)=0 \cdots(33)$$

を得ることができ，これから α の値は n と ψ_1 によって表わされる。この α も常に実数をとるべきであり，n と ψ_1 の値の関係は次の様になる。

$$1\geqq n\geqq\sqrt{\frac{1+\cos(\psi_1-\psi_0)}{1-\cos(\psi_1-\psi_0)}} \cdots\cdots(34)$$

よって(35)を満す様な n と ψ_1 に対し，α は式(34)の根として次の様に与えられる。

$$\left.\begin{array}{l} n=1\ の場合，\ \alpha=0 \\ n\neq1\ の場合， \\ \alpha=\{-\cos(\psi_1-\psi_0)(1+n^2)\pm \\ \sqrt{\cos^2(\psi_1-\psi_0)(1+n^2)^2-(1-n^2)^2}\}/(1-n^2) \end{array}\right\} \cdots(35)$$

ここでも根号の前が正符号の時は $T_x=0$ の場合と同じく得られる全長が小さいので，これは取扱わないで負号の時のみ計算を行なった。

軸方向張力のあるこの場合，一般に全長が短い時は中央多側表面から塑性域が現われるので，$X=0$ にて $S_{-1}=1$ とおくことができるが，全長が長くなれば $X=0$ 以外の点で $S_{-1}=1$ となる。ゆえに $X=0$ の S_{-1} の値は試探法により求めなければならない。

次に円筒の支持端において $M_x=w=0$ となり，また先に得られた S_{+1} および S_{-1} に対し条件式(34)が満足されるよう $X=0$ における ψ_1 の値も試探法にて定めなければならない。

ここに求められた S_{+1}，S_{-1} および ψ_1 により，式(14)および(18)を用いて，kh/Pa の値が定められるから，k，h，および a が与えられているので，この場合の塑性域出現の内圧 P_s を知ることができる。

4. 計算結果および考察

数値計算の結果は2種類の軸方向張力に対応して，$T_x=0$ の場合には全長85.4mm，117.0mm，134.6mm 155.1mm および 186.9mm に対し，$T_x=pa/2$ の場合には全長 99.8mm，113.2mm，130.0mm，152.2mm および 186.9mmに対して求められた。

これらの計算結果を次の表1および図2ないし図12に示す。この図においては横軸 x は全長の中央を原点とする軸方向長さを示す。

Table 1 Results of calculation for $T_x=O$ and $T_x=pa/2$

$T_x=O$

Pressure p_s kg/cm²		84.6	90.1	94.5	99.4	102.7
Axial length mm		85.4	117.0	134.6	155.1	186.9
Values of S at center of axial length	s_{+1}	1	1	1	1	0.9663
	s_{-1}	0.78	0.85	0.9	0.95	0.9663

$T_x=pa/2$

Pressure P kg/cm		100.1	104.7	110.0	116.0	117.8
Axial length mm		99.8	113.2	130.0	152.2	186.9
Values of S at center of axial length	s_{+1}	0.8	0.85	0.9	0.95	0.950
	s_{-1}	1	1	1	1	0.950

Radius : 210 mm, Thickness : 7mm.

図2および3は $T_x=0$ および $Pa/2$ のおのおのに対する塑性域出現パラメータ $S_{\pm1}$ の分布を示す。

図2によれば $T_x=0$ の場合は全長が短い時は塑性域は中央内側表面に現われるが，全長が長くなると塑性域は中央でない点の内側表面に現われる様になり，例えば全長 186.9mm の時には中央から 42mm 離れた点の内側表面で塑性域が現われる。このとき中央の S は内外表面共 $S=0.9663$ となり，内圧は計算結果より 102.7 kg/cm² となる。

$T_x=Pa/2$ の場合には，図3からわかるように全長が短いときには塑性域は中央外側表面に現われるが，長くなると中央でない点の外側表面にこれが現われる様になり，全長 186.9mm となると中央から 53mm 離れた点で塑性域が現われる。このときの中央の S の値は内外表面共 0.950 となり，このときの内圧は計算結果より 117.8 kg/cm² となる。

一方無限長の薄肉円筒がフープテンションにより降伏する場合を考えると，このための応力が降伏応力に到達する場合の内圧は通常の取扱いでは

$T_x=0$ の場合は

$\sigma_\theta=P_s a/2h$, ゆえに

$P_s=2h\cdot\sqrt{3}k/a=115.5\text{kg/cm}^2$

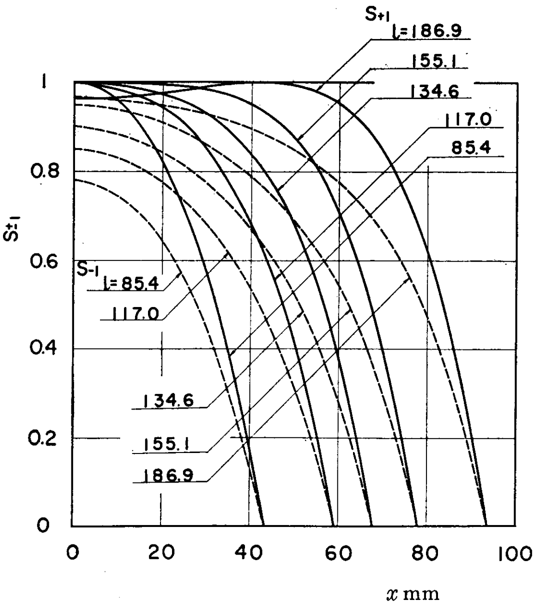


Fig. 2 Distributions of parameter s_{+1}(inner surface) and s_{-1}(outer surface). ($T_x=O$)

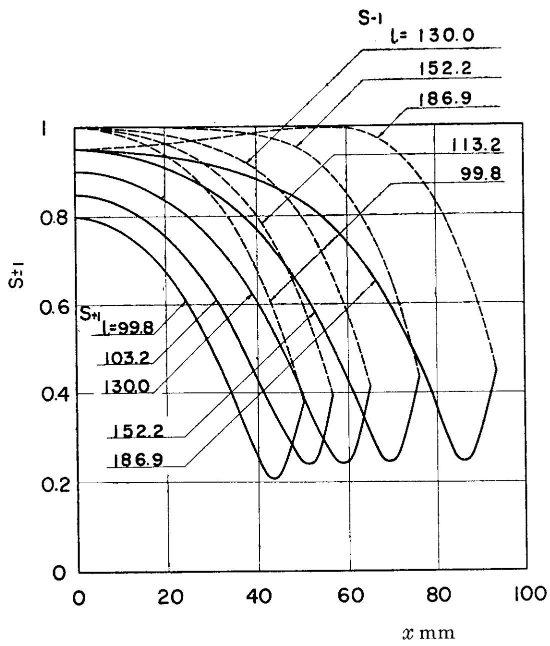


Fig. 3 Distributions of parameter s_{+1} (inner surface) and s_{-1} (outer surface). ($T_x=pa/2$)

また $T_x=Pa/2$ のときは

$\bar{\sigma}_\theta=P_s a/2h$, および $\sigma_x=\sigma_\theta/2$, ゆえに

$\bar{\sigma}=(\sigma_x{}^2-\sigma_x\sigma_\theta+\sigma_\theta{}^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\,\sigma_\theta/2$

ここに $\bar{\sigma}=\sqrt{3}k$ であるから

$\bar{\sigma}_\theta=2k$

$P_s=2h\sigma_\theta/a=133.3\mathrm{kg/cm^2}$

となる。これらを上述の有限長さ両端単純支持円筒の塑性域出現内圧の値と比較すれば

$T_x=0$ の場合 $102.7\mathrm{kg/cm^2}/115.5\mathrm{kg/cm^2}=0.889$

$T_x=Pa/2$ の場合 $117.8\mathrm{kg/cm^2}/133.3\mathrm{kg/cm^2}=0.784$

となり，$T_x=0$ の場合には約11%，$T_x=Pa/2$ の場合には約22%低い内圧で塑性域が現われる。かような傾向は端が単純支持されたとき，その近くの曲げモーメントの作用でおこる端効果を表わすので，内圧をうける薄肉円筒の強度設計上注目すべき点である。

図4は円筒の全長とそれに対応する塑性域出現の内圧 P_s の関係を示したものである。

図においては，同じ全長の値に対応する塑性域出現の内圧 P_s の値は $T_x=0$ の場合より $T_x=Pa/2$ の場合の方が大きく，またいづれの場合も全長が大きくなるにつれて大きくなり，全長が186.9mmのとき $T_x=0$ では $102.7\mathrm{kg/cm^2}$，$T_x=Pa/2$ では $117.8\mathrm{kg/cm^2}$ となる。

図5および6は $T_x=0$ および $T_x=Pa/2$ のおのおのの場合について曲げモーメント M_x の分布を示す。

図5により $T_x=0$ の場合，全長 85.4mm で中央の

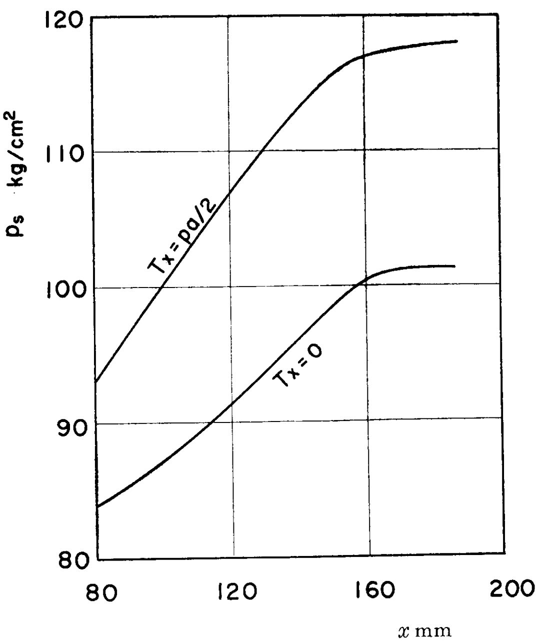


Fig. 4 Relations between the lengthof cylinder and internal pressure p_s at initial yield.

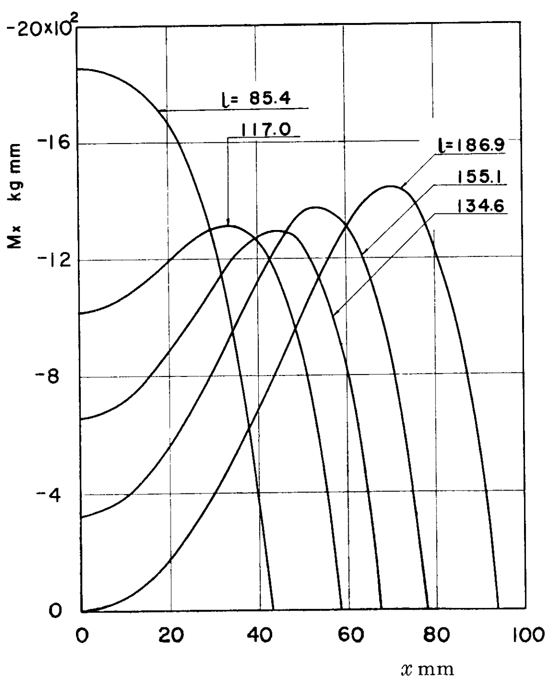


Fig. 5 Distributions of bending moment M_x at initial yield. ($T_x=0$)

S_{+1} が1，mが(31)式の限界値に近い0.78のとき曲げモーメント M_x は中央で絶対値が最大となれけれども，全長がこれより長くなるにつれて曲げモーメントが最大となる点は中央から次第にはなれる。全長が 186.9mm の

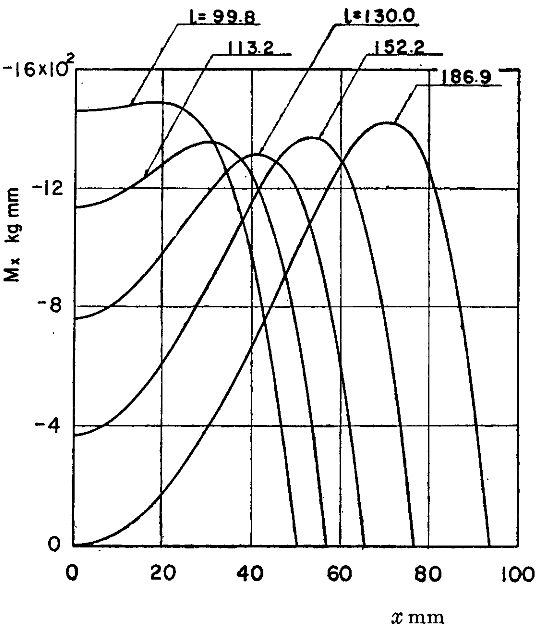


Fig. 6 Distributions of bending moment M_x at initial yield. (T_x=pa/2)

ときには中央において $M_x=0$ したがって $M_\theta=0$ となる。図6から考えられた例においては $T_x=Pa/2$ の場合には M_x の絶対値はいずれも中央から離れた点で最大となる。$T_x=0$ の場合と同様全長が長くなると共にその絶対値の最大となる点は中央から遠くなり，また全長が 186.9mm のとき中央で $M_x=0$ および $M_\theta=0$ となる。

図7および8は $T_x=0$ および $T_x=Pa/2$ の場合の

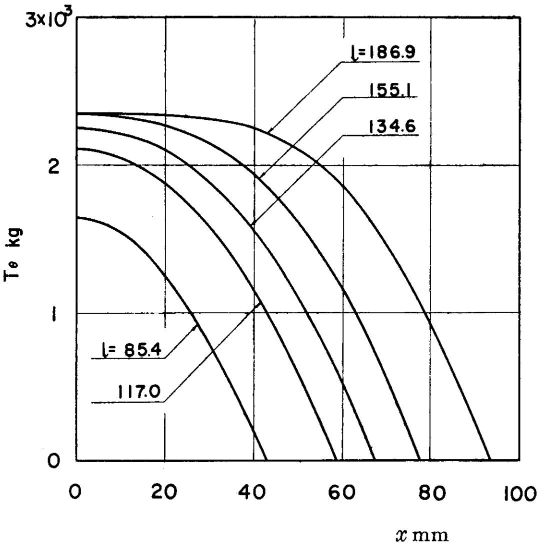


Fig. 7 Distributions of tension T_θ at initial yield. (T_x=0)

T_θ の分布を示す。T_θ は $T_x=0$ の場合，常に中央で最大，端で零になっているが，$T_x=Pa/2$ の場合は中央

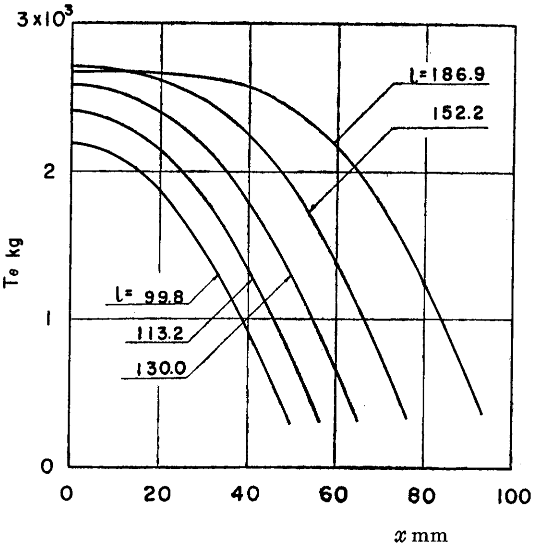


Fig. 8 Distributions of tension T_θ at initial yield. (T_x=pa/2)

では同様に最大値をとるけれども，この軸方向張力があるため端において零にはならない。

図9および10は $T_x=0$ および $T_x=Pa/2$ の場合における円筒表面に塑性域が出現する時，板厚中央面の半径方向たわみを示す。いずれの場合も円筒の全長が長くなるにつれ，円筒全長の中央に塑性域が出現する内圧

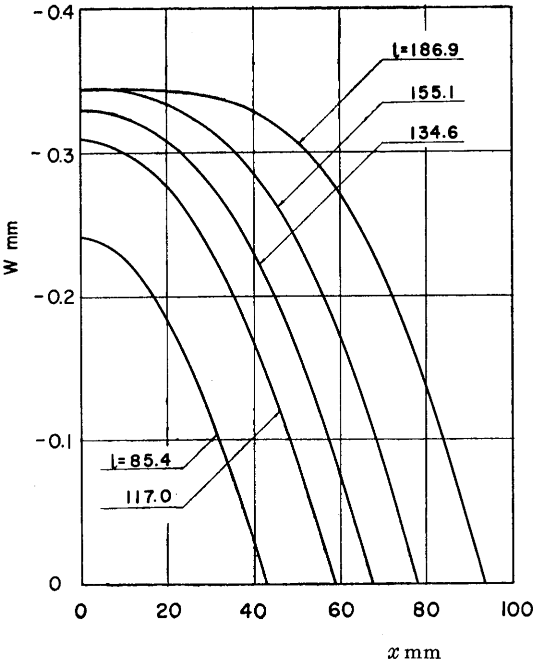


Fig. 9 Deflection w of the middle layer of wall at initial yield. (T_x=0)

は大きくなるので，全長の中央におけるたわみの最大値も大きくなる。しかし全長が大きくなると中央で塑性域

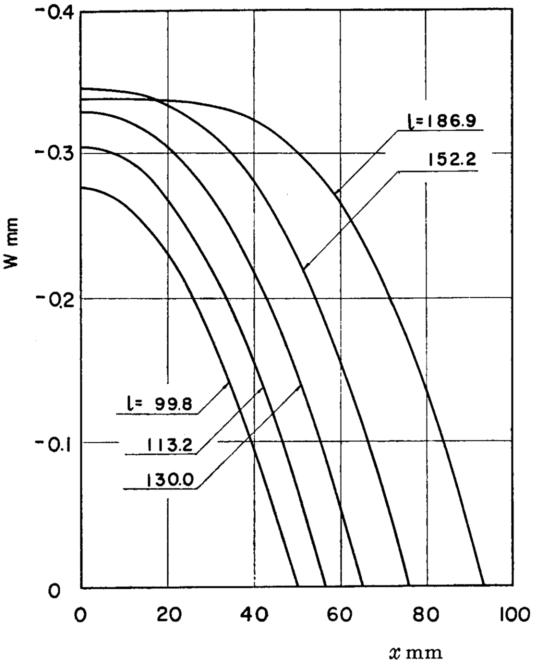


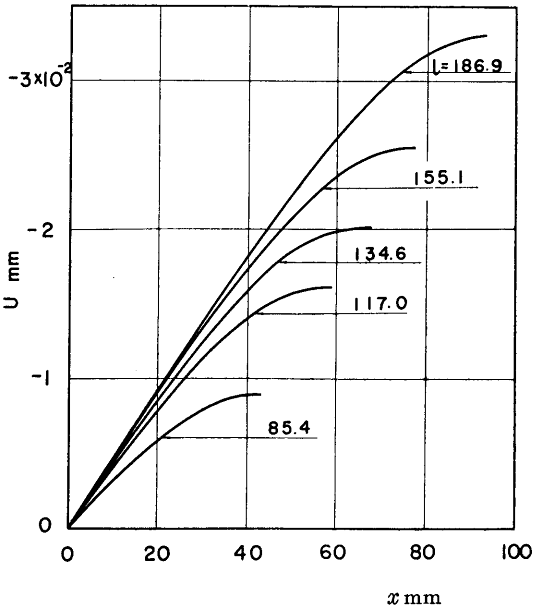
Fig.10 Deflection w of the middle layer of wall at initial yield. ($T_x=pa/2$)

が出現する前に中央より離れた点で塑性域が出現する様になり，全長の中央におけるたわみの最大値は，例えば $T_x=0$ の場合 全長 186.9mm，内圧 102.7kg/cm² で中央から42mm 離れた点で塑性域が出現する時の中央のたわみは 0.343mmで，全長 155.1mm，内圧 99.4kg/cm² の時の値 0.345mm とほぼ等しい値を示す。$T_x=Pa/2$ の場合には全長 186.9mm 内圧 117.8kg/cm² で中央から 53mm 離れて塑性域が出現する時の中央のたわみは 0.339mm で全長 152.2mm，内圧116.0kg/cm² の時の値 0.347mm より小さい値を示す。

図11および12は $T_x=0$ および $T_x=Pa/2$ に対する軸方向の変位を示す。ここで $T_x=0$ の場合この変位は負で全長の短縮を示すが，$T_x=Pa/2$ の場合は正で伸張を示している。

5. 結 言

(1) 内圧をうける薄肉円筒において，ミーゼスの条件で塑性域が現れると考え，円周方向と軸方向のひずみ成分と曲率成分にソコロフスキイの表示を用いて，両方向の張力および曲げモーメントを塑性域出現のパラメータ S，パラメータψ_1およびαで表わし，これらによって応力の平衡およびひずみの適合条件式を表わして，軸方向座標xに関する，塑性域出現のパラメータSを含んだ連立微分方程式を得た。この式を電子計算機により，R.K.G.法を用い数値的に積分して，内圧をける両端単純支持薄肉円筒の塑性域が出現する場合を解いた。



F.g.11 Axial displacement u at initial yield. ($T_x=0$)

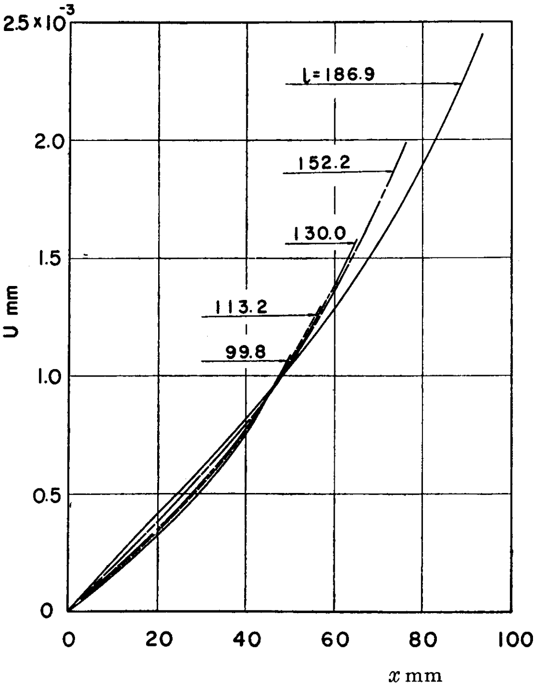


Fig.12 Axial displacement u at initial yield. ($T_x=pa/2$)

計算例においては，円筒の肉厚は半径の 1/30 とし，また軸方向の長さは肉厚の10倍より大きい場合を取扱った。

(2) 軸方向の張力 $T_x=0$ の場合，全長が比較的短か

い時には，円筒全長の中央内側表面に塑性域が出現するが，全長 186.9mm の時は内圧 102.7kg/cm^2 にて中央から 42mm 離れた内側表面に塑性域が出現する。

(3) 軸方向の張力$T_x=Pa/2$の場合，全長が比較的短かい時には，円筒全長の中央外側表面に塑性域が出現するが，全長186.9mmの時は内圧 117.8kg/cm^2 にて中央から53mm離れた外側表面に塑性域が出現する。

(4) 上述の結果から，曲げモーメントの作用は端を支持するために生ずるもので，本研究からは又長い薄肉円筒に対する端効果についての知識も得られることがわかる。

端効果のため，無限長の場合従来の方法で計算された内圧の対応する値よりも，$T_x=0$ の場合約11%，$T_x=Pa/2$ の場合約22%低い内圧の値にて塑性域が出現することがわかった。この結果は薄肉円筒の強度計算において注意する必要がある。

本稿を終るに当り終始御指導戴いた名大工学部大橋義夫教授に厚く御礼申し中げます。

文　　献

1) P. G. Hodge, Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells. (Prentis Hall) 1963
2) 大橋・神谷，機械学会講演論文集 No.204 ('69－4)
3) S. Timoshenko and W. Krieger, Theory of Plates and Shells. (Mc.Graw Hill)1959
4) 大橋・村上，機械学会論文集，31－224 (昭40－4)