推動殻の曲げ応力の近似的解法について

深 津 鋼 次
機 械 工 学 教 室

(1967年9月7日受理)

On an Approximate Calculation for Arbitray Shells under Pure Bending

Kōji FUKATSU
Department of Mechanical Engineering

(Received September 7, 1967)

The pure ebending problems of thin walled tubes have usually analyzed by Ritz's direct method in variational problems.

But in this case if we adopt Fourier series as the camparison functions which mean the displacement of a section, these series are not always constricted, because these have no physical meaning except to satisfy the boundary conditions.

As the comparison functions if we use the functions which satisfy mechanical conditions as well as boundary conditions, these functions will be correcter than the comparison functions which satisfy only boundary conditions.

We have considered the substantial force, which flatten a shell, to define the form of displacement functions, used the displacement functions as the comparison functions, and determined easily the bending stress of shells by the method of strength of materials.

1. 緒 言

薄肉管の純曲げ問題には，Karman[1]，Timoshenko[2] Brazier[3]，Wood[4]，Rimrott[5] 等によって研究された例があるが，円管あるいは長方形断面の管以外の断面形の少々複雑な一般推動殻に対しては，これらの方法は適用できない。こういった問題は普通，変分問題としてリッツの直接法で解析される。すなわち比較函数として断面の変位函数（フーリェ級数など）をとり，汎函数としてポテンシャル・エネルギーをとれば，エネルギー最小条件から変位函数は求められる。が，この場合この変位函数は必ずしも収束性のよい函数であるとは限らない。それは変位函数としてとったフーリェ級数には境界条件を満たしているということ以外，物理的意味がないため，そのフーリェ級数が真の停留函数に近いという保障が無いことに起因する。もしわれわれが境界条件を満たすばかりでなく，力学的条件をも満たす比較函数を用いるならば，その函数は境界条件だけを満たした比較函数よりも正確な変位函数であるはずである。

そこで筆者らは推動殻を偏平化する力の大きさは中立軸からの距離に比例する（仮定）という物理的意味から変位函数の形を決定し，これを変分問題における比較函数とした。

次に一般推動殻においては応力分布が複雑なため中立軸の位置を求めることは困難であるが，それにはまず中立軸の位置を仮定し，エネルギー最小条件から応力の大きさを求め，その応力分布が力の釣合条件を満足しているかどうかを確かめる，というように try and error によって電子計算機で容易に求めることができる。

以上の考え方で断面形の複雑な推動殻について材料力学的方法で比較的簡単に曲げ応力を求めることを試みた。

2. 円弧形断面の推動殻

まず殻の最も基本的な断面形態として Fig.1 のような円弧形断面の推動殻に曲げモーメントMが作用した場合の曲げ応力を求める。断面の半径方向の変位をu（中心方向を正とする），接線方向の変位をv（時計回り方向

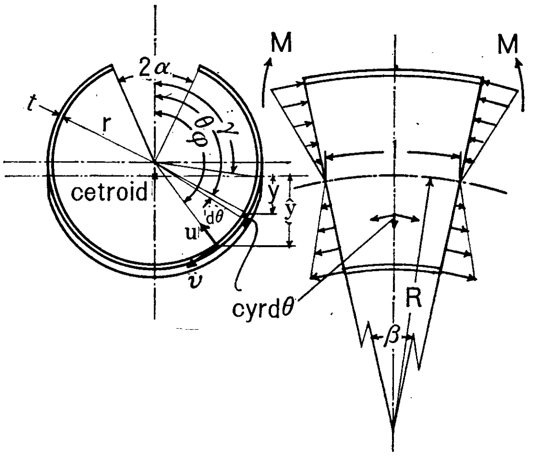

Fig. 1 Circular section shell.

を正）とする。いま中立軸が図心を通り，中立軸からの距離yに比例する偏平化力 $cyrd\theta$ が Fig 1 のように動くと仮定すれば，中立軸からの距離yおよびこの偏平化力によって生じる曲げモーメントmとは，それぞれ

$$y=r(\cos\gamma-\cos\theta) \qquad \cdots\cdots(1)$$

（ここにγは図心の位置を表わす角度で $\cos\gamma=\sin\alpha/(\alpha-\pi)$ である）

$$\begin{aligned} m(\varphi)&=\int_\alpha^\varphi cyrd\theta\cdot r(\sin\theta-\sin\varphi)\\ &=cr^3\left\{f(\alpha)-\frac{\cos2\varphi}{4}-\cos\gamma(\cos\varphi+\pi\sin\varphi-\varphi\sin\varphi)\right\}\\ &=c\hat{m}(\varphi) \qquad \cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

ここに　$f(\alpha)=\frac{1}{2}(1+\sin2\alpha/(\alpha-\pi)-\cos2\alpha/2)$

(2)式を円輪の半径方向の変位uと曲げモーメントmとの関係式

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=-r^2\frac{m(\varphi)}{D} \qquad \cdots\cdots(3)$$

（ここにDは板の剛性率で　$D=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$，　ν：ポアソン比）に代入すれば，その一般解は

$$u(\varphi)=-\frac{cr^5}{D}\left\{A\cos\varphi+B\sin\varphi+f(\alpha)+\frac{\cos2\varphi}{12}-\frac{\cos\gamma}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi\sin\varphi-\pi\varphi\cos\varphi-\frac{\varphi^2}{2}\cos\varphi\right)\right\}=-\frac{C}{D}\hat{u}(\varphi) \qquad \cdots\cdots(4)$$

断面の中心線の不伸長条件 $u=dv/d\varphi$ より

$$\begin{aligned} v(\varphi)&=-\frac{cr^5}{D}\left\{A\sin\varphi-B\cos\varphi+f(\alpha)\varphi+\frac{\sin2\varphi}{24}-\frac{\cos\gamma}{2}\left(\frac{5}{2}\sin\varphi+\pi\cos\varphi+\pi\varphi\sin\varphi-\frac{5}{2}\varphi\cos\varphi-\frac{\varphi^2}{2}\sin\varphi\right)+F\right\}\\ &=-\frac{C}{D}\hat{v}(\varphi) \qquad \cdots\cdots(5)\end{aligned}$$

また，y軸方向の変位w（殻の中心方向を正とする）は

$$w(\varphi)=u(\varphi)\cos\varphi+v(\varphi)\sin\varphi=-\frac{C}{D}(\hat{u}(\varphi)\cos\varphi+\hat{v}(\varphi)\sin\varphi)=-\frac{C}{D}\hat{w}(\varphi) \qquad \cdots\cdots(6)$$

積分定数A，BおよびFは境界条件　$v(\pi)=0$，$w(\gamma)=0$，$[du/d\varphi]_{\varphi=\pi}=0$ より次のように求まる。

$$A=-f(\alpha)(\cos\gamma+\gamma\sin\gamma-\pi\sin\gamma)-\frac{1}{12}\cos\gamma\cos2\gamma-\frac{1}{24}\sin\gamma\sin2\gamma+\frac{\cos\gamma}{2}\left\{\frac{\sin2\gamma}{2}(\pi-\gamma)+\frac{5}{2}\sin^2\gamma+\pi\gamma-\frac{\gamma^2}{2}\right\}$$

$$B=\frac{3}{4}\pi\cos\gamma, \qquad F=-\pi f(\alpha)$$

さて，曲げモーメントM（曲率を減少させるものを正とする）によって，R，β，γ はそれぞれ R'，$\beta'=\beta+\Delta\beta$，γ' に変化し，または断面は半径方向の変位u（中心方向を正とする），接線方向の変位v（時計回り方向を正）を生じたとすれば，繊維方向のひずみ ε_β は管の中心線の不伸長条件 $R\beta=R'\beta'=1$ および $r\ll R;u,v\ll r$ の仮定のもとに

$$\varepsilon_\beta=-(u\cos\varphi+v\sin\varphi)/R-\Delta\beta\cdot\hat{y} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここに$\hat{y}$は(1)式に準じ $\hat{y}=r(\cos\gamma-\cos\varphi)$ である。

また，板厚の中心からの距離zにおける断面の接線方向のひずみ ε_φ は

$$\begin{aligned}\varepsilon_\varphi&=-z\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)=\frac{z}{r^2}\left(u+\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)=-\frac{z}{D}m(\varphi)\\ &=-\frac{z}{D}c\hat{m}(\varphi) \qquad \cdots\cdots(8)\end{aligned}$$

したがってこの場合殻の単位長さに貯えられるひずみエネルギーUは

$$U=\frac{rE}{1-\nu^2}\int_\alpha^\pi\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}(\varepsilon^2{}_\beta+\varepsilon^2{}_\varphi)\,d\varphi\,dz \qquad \cdots\cdots(9)$$

上(9)式に(1)，(2)，(4)，(5)および(6)式を用いて(7)，(8)式を代入すれば，

$$U=\frac{rEt}{1-\nu^2}\left[\Delta\beta^2\int_\alpha^\pi\hat{y}^2(\varphi)d\varphi-2\Delta\beta\frac{c}{DR^2}\int_\alpha^\pi\hat{y}(\varphi)\hat{w}(\varphi)d\varphi+\left(\frac{c}{D}\right)^2\int_\alpha^\pi\left\{\frac{\hat{w}^2(\varphi)}{R^2}+\frac{t^2}{12}\hat{m}^2(\varphi)\right\}d\varphi\right] \qquad \cdots\cdots(10)$$

となる。

無荷重状態に対するポテンシャル・エネルギーIは

$$I=U-(-\Delta\beta\cdot M) \qquad \cdots\cdots(11)$$

であり，Reyleigh-Ritz の方法によるポテンシャル・エネルギー最小条件　$\partial I/\partial\Delta\beta=0$，　$\partial I/\partial c=0$ より

$$\Delta\beta\cdot R\int_\alpha^\pi\hat{y}^2(\varphi)\,d\varphi-\frac{c}{D}\int_\alpha^\pi\hat{w}(\varphi)\hat{y}(\varphi)d\varphi=-\frac{MR(1-\nu^2)}{2trE} \qquad \cdots\cdots(12)$$

$$\Delta\beta\cdot R\int_\alpha^\pi\hat{w}(\varphi)\hat{y}(\varphi)d\varphi-\frac{c}{D}\int_\alpha^\pi\left\{\hat{w}^2(\varphi)+\frac{(Rt)^2}{12}\hat{m}^2(\varphi)\right\}d\varphi=0 \qquad \cdots\cdots(13)$$

をうる。したがって

$$\varDelta\beta=-\frac{MR(1-\nu^2)}{2trE}\Bigg/\left[\int_\alpha^\pi\hat{y}^2(\varphi)\,d\varphi-\frac{\left\{\int_\alpha^\pi\hat{y}(\varphi)\hat{w}(\varphi)\,d\varphi\right\}^2}{\int_\alpha^\pi\left\{\hat{w}^2(\varphi)+\frac{(tR)^2}{12}\hat{m}^2(\varphi)\right\}d\varphi}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$c=-\frac{MRt^2}{24r}\Bigg/\left[\int_\alpha^\pi\hat{y}(\varphi)w(\hat{\varphi})\,d\varphi-\int_\alpha^\pi\hat{y}^2(\varphi)\,d\varphi\cdot\frac{\int_\alpha^\pi\left\{\hat{w}^2(\varphi)+\frac{(tR)^2}{12}\hat{m}^2(\varphi)\right\}d\varphi}{\int_\alpha^\pi\hat{y}(\varphi)\hat{m}(\varphi)\,d\varphi}\right] \cdots(15)$$

以上で未知数はすべて決定されたから曲げ応力 σ_β, σ_φ は $\sigma_\beta=E\varepsilon_\beta$, $\sigma_\varphi=E\varepsilon_\varphi$ から求められる。

3.　直線断面の推動殻

次に Fig. 2 のような断面の形が直接状の推動殻についてその曲げ応力を求める。R：図心線上の半径，$2l$：板巾，t：板厚，α：傾斜角，その他前節で用いられた記号は前節と同じ意味を持つ。座標は板に沿って x 軸，板に垂直で中心方向を正方向に y 軸をとる。前と同様の仮定にもとづき中立軸からの距離 $y(x')=x'\sin\alpha$,（$\alpha\fallingdotseq 0$）に比例する偏平化力 $cy(x')$ を考え，この偏平化力による曲げモーメント m は

$$m(x)=\frac{c}{12}\sin 2\alpha(x^3-3l^2x+2l^3)=c\hat{m}(x)\cdots(16)$$

はりの y 軸方向の変位 $\delta(x)$ は上(16)式を $d^2\delta(x)/dx^2+m(x)/D=0$ に代入することによってえられる。その一般解は

$$\delta(x)=-\frac{c}{12D}\sin 2\alpha(x^5/20-l^2x^3/2+l^3x^2+Ax+B)$$

境界条件から $A=0$, $B=0$ をうるので

$$\delta(x)=-\frac{c}{12D}\sin 2\alpha\cdot x^2(x^3/20-l^2x/2+l^3)$$

$$=-\frac{c}{D}\hat{\delta}(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

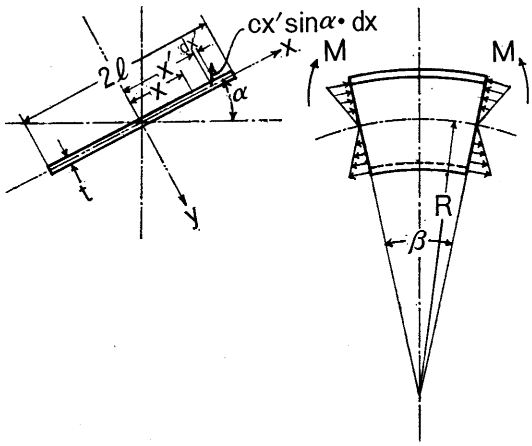

Fig. 2　Straight section shell.

この部材に加えられた曲げモーメント M による繊維方向のひずみ ε_β および x 軸方向のひずみ ε_x は，それぞれ

$$\varepsilon_\beta=\frac{y}{R}\cdot\frac{\varDelta\beta}{\beta}-\frac{\delta(x)}{R}\cos\alpha=y\cdot\varDelta\beta+\frac{c}{RC}\hat{\delta}(x)\cos\alpha\cdots(18)$$

$$\varepsilon_x=\frac{z}{D}\hat{m}(x)=\frac{c}{D}z\hat{m}(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

この場合，殻の単位長さに貯えられる歪エネルギー U は

$$U=\frac{E}{1-\nu^2}\int_0^l\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}(\varepsilon^2{}_\beta+\varepsilon^2{}_x)\,dx\,dz$$

$$=\frac{Et}{1-\nu^2}\int_0^l\left[\varDelta\beta^2y^2(x)+2\cos\alpha\cdot\frac{\varDelta\beta c}{RD}y(x)\hat{\delta}(x)+\left(\frac{c}{RD}\right)^2\left\{\cos^2\alpha\cdot\hat{\delta}^2(x)+\frac{(tR)^2}{12}\hat{m}^2(x)\right\}\right]dx \cdots\cdots\cdots(20)$$

無荷重状態に対するポテンシャル・エネルギー $I=U+\varDelta\beta M$ について $\partial I/\partial\varDelta\beta=0$, $\partial I/\partial c=0$ から

$$\varDelta\beta=-\frac{M(1-\nu^2)}{2Etk}\int_0^l\left\{\cos^2\alpha\cdot\hat{\delta}^2(x)+\frac{(tR)^2}{12}\hat{m}^2(x)\right\}dx \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

$$c=\frac{MR}{24k}t^2\cos\alpha\int_0^l y(x)\hat{\delta}(x)\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

ここに

$$k=\int_0^l y^2(x)\,dx\int_0^l\left\{\cos^2\alpha\cdot\hat{\delta}^2(x)+\frac{(tR)^2}{12}\hat{m}^2(x)\right\}dx-\left\{\cos\alpha\int_0^l y(x)\hat{\delta}(x)\,dx\right\}^2$$

をうる。したがって曲げ応力 σ_β, σ_x は(21), (22)式を(18), (19)式に代入して $\sigma_\beta=E\varepsilon_\beta$, $\sigma_x=E\varepsilon_x$ から求められる。

4.　誤差評価（比較関数としてフーリェ級数を用いた場合との比較）

本節では弾性体の変形問題を変分法で解く場合普通行われるように，その比較関係（変位）としてフーリェ級数を用いた場合と本報の材料力学的近似解法との差異の評価を曲り円管と半円形断面の推動殻を例にとって解析的に行った。

まず曲り円管についてその断面の変位関数 u として次のようなフーリェ級数を用いた場合を考える。

$$u(\varphi)=r\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\varphi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

また断面の中心線の不伸長条件 $u=dv/d\varphi$ および境界条件 $v=(0)=0$, $v(\pi)=0$ から

$$v(\varphi)=r\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin u\varphi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

なお記号はすべて前節までと同じ意味を持つ。そして，ひずみ成分として前(7), (8)式に相当するものを考えれば，この場合のひずみ成分を ε_β, ε_φ は次のようになる。

$$\varepsilon_\beta = r\left[\Delta\beta\cos\varphi - \frac{1}{2R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\left\{(n-1)\cos(n+1)\varphi + (n+1)\cos(n-1)\varphi\right\}\right] \quad\cdots\cdots\cdots(25)$$

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{z}{r}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1-n^2)\cos n\varphi \quad\cdots\cdots\cdots(26)$$

よって曲り円管の単位長さにたくわえられるひずみエネルギーUは

$$U = \frac{rE}{1-\nu^2}\int_0^{\pi}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}(\varepsilon^2{}_\beta + \varepsilon^2{}_\varphi)\,d\varphi\,dz$$

$$= \frac{\pi t r^3 E}{1-\nu^2}\left[\frac{\Delta\beta^2}{2} + \frac{a^2{}_1}{R^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\Delta\beta}{R}a_2 + \frac{1}{R^2}\left\{\frac{5}{16}a^2{}_2 + \frac{5}{18}a^2{}_3 + \frac{17}{64}a^2{}_4 + \frac{13}{50}a^2{}_5 + \frac{37}{144}a^2{}_6 + \frac{5}{32}a_2a_4 + \right.\right.$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=7}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)a^2{}_n + \frac{1}{5}a_3a_5 + \frac{7}{32}a_4a_6 + \frac{1}{4}\sum_{n=7}^{\infty}\frac{(n-3)(n+1)}{n(n-2)}a_{n-2}a_n + \frac{\lambda^2}{24}\Big(9a^2{}_2 + 64a^2{}_3 +$$

$$\left.\left.225a^2{}_4 + 576a^2{}_5 + 1225a^2{}_6 + \sum_{n=7}^{\infty}(1-n^2)a^2{}_n\Big)\right\}\right] \quad\cdots\cdots\cdots(27)$$

ここに　　$\lambda = tR/r^2$ ……………(28)

無荷重状態に対するポテンシャル・エネルギーIについて $\partial I/\partial\Delta\beta = 0$, $\partial I/\partial c = 0$ ($m=1,\ 2,\ \cdots\cdots 6$), $\partial I/\partial a_n = 0$ から $\Delta\beta$, a_1, a_2, ………a_n を解けば

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 = 0,\quad a_2 = -\frac{MR}{EI_x}(1-\nu^2)\frac{1}{\frac{1}{12}+\lambda^2}\left(1-\frac{175}{512}\cdot\frac{1}{k}\right)\\
&a_4 = \frac{MR}{EI_x}(1-\nu^2)\frac{5}{8}\left(\frac{37}{6}+1225\lambda^2\right)\frac{1}{k}\\
&a_{2m+1} = 0\quad (m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)\\
&a_{2n+4} = -\frac{\{(n-3)(n+1)/2n(n-2)\}}{\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{\lambda^2}{6}(1-n^2)^2\right\}}a_{2n+2},\quad (n=1,\ 2\cdots\cdots)\\
&\text{ここに}\\
&k = \left(\frac{1}{12}+\lambda^2\right)\left(\frac{17}{8}+75\lambda^2\right)\left(\frac{37}{6}+1225\lambda^2\right)+\frac{21}{64}\left\{\frac{25}{24}-7\left(\frac{1}{12}+\lambda^2\right)\right.
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(29)$$

$$\Delta\beta = -\frac{M}{EI_x}(1-\nu^2)\left(\frac{10+12\lambda^2}{1+12\lambda^2} - \frac{3}{\frac{1}{12}+\lambda^2}\cdot\frac{175}{2048}\cdot\frac{1}{k}\right) \quad\cdots\cdots\cdots(30)$$

I_x は図心を通るx軸に対する断面二次モーメントで$\pi t r^3$ である。これでフーリェ級数の係数および曲り円管の角変位が求められたので変位u, vおよびひずみ成分 ε_β, ε_φ は決定された。

次にこの問題を本報の近似当解法によって求めれば変位u, vは

$$u(\varphi) = -c\cdot\frac{r^5}{3D}\cos 2\varphi \cdots\cdots\cdots(31)$$

$$v(\varphi) = -c\cdot\frac{r^5}{6D}\sin 2\varphi \cdots\cdots\cdots(32)$$

比例定数cは

$$c = \frac{MRt^2}{\pi t^7}\cdot\frac{3}{1+12\lambda^2} \cdots\cdots\cdots(33)$$

角変位量 $\Delta\beta$ は

$$\Delta\beta = -\frac{M(1-\nu^2)}{EI_x}\left(\frac{10+12\lambda^2}{1+12\lambda^2}\right) \cdots\cdots\cdots(34)$$

となる。

(33)式のcの意味はフーリェ級数 a_2 の第一項と一致し，近似解によればそれ以下の項が入ってこないが，この級数は(29)式の示すごとく収束性がよく十分無視できる。また(34)式の角変位量 $\Delta\beta$ は(30)式の括弧中の第一項と一致し，近似解によれば第二項が入っていない。結局，この近似解法と変位関数としてフーリェ級数を用いた場合の解との相違は曲り管の半径Rと断面のディメンションとの比を表わす値 $\lambda = Rt/r^2$ のみに関係し，λ があまり小さすぎない範囲，すなわち曲り管の曲率半径が断面の寸法に対してあまり小さくない場合には近似解の誤差は小さい。すなわち $\lambda = 0.05$ では15%であるが $\lambda = 0.1$ 以上では6%以下になる ($\lambda = 0.2$: 0.8%, $\lambda = 1$: 0.00013%)。

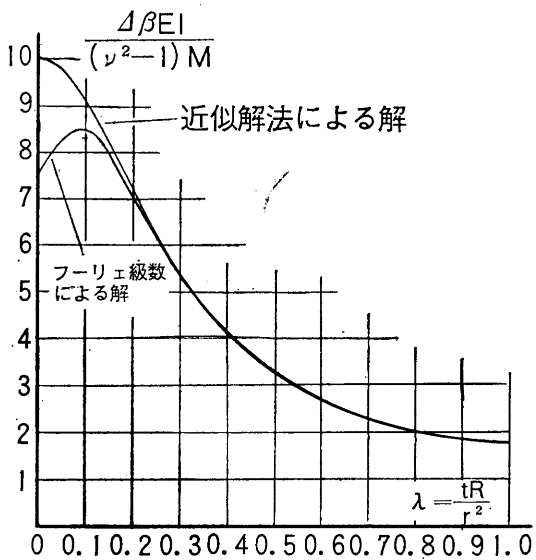

Fig. 3 Comparison with angle-displacement of tubes.

以上のように円管の場合には，フーリェ級数の係数の

一般項を(29)式のように求めることができたが，一般推動殻においてはこれは非常に困難になる。例えば半円形断面の場合についてその変位関数を

$$u(\varphi)=r\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\varphi\right) \quad \cdots\cdots\cdots(35)$$

とおけば前節と同様にして応力は次式で表わされる。

$$\sigma_\beta=\frac{Er}{R}\left[\Delta\beta R\left(\frac{2}{\pi}-\sin\varphi\right)-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left\{\frac{1}{n}\left(\sin n\varphi-\sin\frac{\pi}{2}n\right)\cos\varphi-\cos n\varphi\sin\varphi+\left(\sin\varphi-\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi\right)(1-n^2)\right\}\right] \cdots(36)$$

$$\sigma_\varphi=-\frac{Ez}{r}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1-n^2)(\cos n\varphi-1)$$

しかし，この級数の係数を求めるには前と同様に Rayleigh-Ritz の方法によって導かれた $\Delta\beta$, a_1, a_2…… に関する多元一次連立方程式を解かなければならない。

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\beta R\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(\varphi)d\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\varphi)\{(1-n^2)g(\varphi)-g(n,\ \varphi)\}\,d\varphi=-\frac{MR(1-\nu^2)}{2tr^3E}\\
&\Delta\beta R\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\varphi)\{(1-m^2)g(\varphi)-g(m,\ \varphi)\}\,d\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[\Big\{(1-n^2)g(\varphi)-g(n,\ \varphi)\Big\}\\
&\qquad\times\Big\{(1-m^2)g(\varphi)-g(m,\ \varphi)\Big\}+\frac{\lambda^2}{12}(1-n^2)(\cos n\varphi-1)(1-m^2)(\cos m\varphi-1)\Big]d\varphi=0\\
&\qquad(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\quad n=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots)
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(37)$$

ここに

$$f(\varphi)=\frac{2}{\pi}-\sin\varphi,\qquad g(\varphi)=\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi-\sin\varphi$$

$$g(n,\ \varphi)=\frac{1}{n}\left(\sin n\varphi-\sin\frac{\pi}{2}n\right)\cos\varphi$$

$g(m,\ \varphi)$ は $g(n,\ \varphi)$ の n の代りに m と置いたもの。

一方，本報の近似解法によれば $\Delta\beta$, c についての次の二元一次連立方程式を解けばよいことになる。

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\beta R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\hat{y}^2(\varphi)\,d\varphi-\frac{c}{D}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\hat{y}(\varphi)\hat{w}(\varphi)d\varphi=-\frac{MR(1-\nu^2)}{2\,trE}\\
&\Delta\beta R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\hat{y}(\varphi)\hat{w}(\varphi)d\varphi-\frac{c}{D}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\hat{w}^2(\varphi)+\frac{(tR)^2}{12}\hat{m}^2(\varphi)\right\}d\varphi=0
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(38)$$

ここに $\hat{y}(\varphi)=r(\sin\varphi-\sin\gamma)$, γ は図心の位置を表わす角度で

$$\gamma=\sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right),\quad \hat{m}(\varphi)=r^3\left\{-\frac{3}{4}+\cos\varphi-\frac{\cos 2\varphi}{4}+\frac{2}{\pi}(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\right\}$$

$$\hat{u}(\varphi)=r^5\left(f(\gamma)\sin\varphi-\frac{\cos 2\varphi}{12}+\frac{3}{2\pi}\varphi\cos\varphi-\frac{\varphi}{2}\sin\varphi+\frac{\varphi^2}{2\pi}\sin\varphi\right)$$

$$\hat{v}(\varphi)=r^5\left\{\frac{3}{4}(\varphi-\sin\varphi)+f(\gamma)\cos\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{24}+\frac{3}{2\pi}(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)-\frac{1}{2}(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)+\frac{1}{2\pi}(2\cos\varphi+2\varphi\sin\varphi-\varphi^2\cos\varphi)-\frac{3}{8}\pi\right\}$$

$$\hat{w}(\varphi)=\hat{v}(\varphi)\cos\varphi-\hat{u}(\varphi)\sin\varphi$$

$$f(\gamma)=\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma^2}{2\pi}-\frac{13}{6\pi}-\left(\frac{3}{8}\pi+\frac{1}{\pi}\right)\cos\gamma+\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{\pi^2}\right)\gamma\cos\gamma+\frac{5}{2\pi}\cos^2\gamma$$

応力は

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_\beta=E\left\{\frac{c}{D}\cdot\frac{\hat{w}(\varphi)}{R}-\Delta\beta\cdot\hat{y}(\varphi)\right\}\\
&\sigma_\varphi=E\frac{c}{D}z\hat{m}(\varphi)
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

で求められる。

5. 応用例

前2，3節の方法を組み合せれば，断面形が円弧と直接からなる任意の推動殻の曲げ応力を求めることができる。但し断面形が複雑になると中立軸が図心を通るという仮定は不適当になり，まず中立軸の位置を求めなければならない。以下この問題を中心にロードレーサー自転車車輪用リムを例にして解析する。

記号および座標を Fig 4 のようにとり，中立軸の位置を e で表現し，計算すれば Fig 5 の各応力成分は

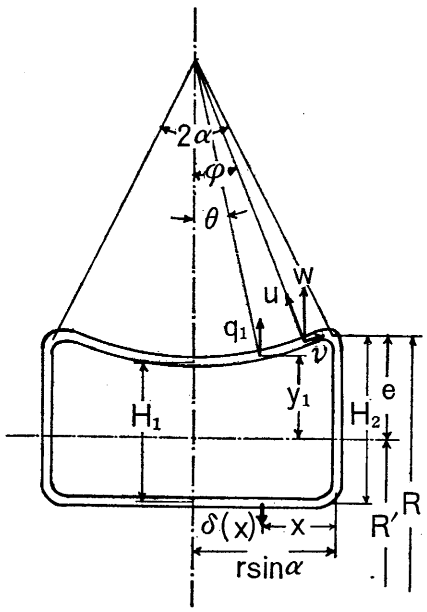

Fig. 4 Cross Section of rim for light bicycle.

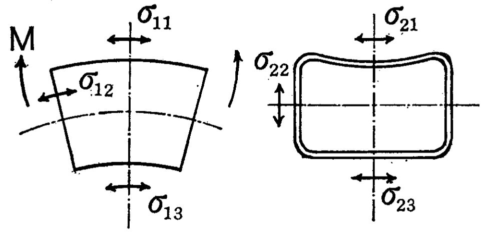

Fig. 5　Stress component.

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_{11}=E\left[\Delta\beta\{H_1-H_2+e+r(1-\cos\varphi)\}-c_1\frac{r^4}{DR'}\hat{w}(\varphi)\right]\\
&\sigma_{12}=E\Delta\beta y_2:\ -(H_2-e)\leqq y_2\leqq e\\
&\sigma_{13}=E\left\{\Delta\beta(e-H_2)+c_3\frac{\hat{\delta}(x)}{R'}\right\}\\
&\sigma_{21}=-E\frac{z}{D}c_1\hat{m}(\varphi),\quad \sigma_{22}=0,\quad \sigma_{23}=-E\frac{z}{D}c_3\hat{m}(x)
\end{aligned}
\right\}\cdots(40)
$$

で表わされ $\Delta\beta$, c_1 および c_3 は前と同様リッツの方法によって得られた次の $\Delta\beta$, c_1, c_3 に関する連立方程式を解くことによって得られる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Delta\beta R'\left[r\int_0^\alpha \hat{y}^2{}_1(\varphi)d\varphi+\frac{1}{3}\left\{e^3-(e-H_2)^3\right\}+\frac{r\sin\alpha}{R'}(R-H_2)^3\right]+c_1r\int_0^\alpha\hat{y}_1(\varphi)\hat{w}(\varphi)\,d\varphi\\
&\qquad-\frac{c_3}{R}(R-H_2)(e-H_2)\int_0^{r\sin\alpha}\hat{\delta}(x)dx=-\frac{MR'(1-\nu^2)}{2tE}\\
&\frac{\Delta\beta}{R'}\int_0^\alpha\hat{y}_1(\varphi)\hat{w}(\varphi)\,d\varphi+c_1\int_0^\alpha\left\{\frac{\hat{w}^2(\varphi)}{R'^2}+\frac{t^2\hat{m}^2(\varphi)}{12D^2}\right\}d\varphi=0\\
&-\frac{\Delta\beta}{R'}(e-H_2)\int_0^{r\sin\alpha}\hat{\delta}(x)\,dx+c_3\int_0^{r\sin\alpha}\left\{\frac{\hat{\delta}^2(x)}{R'^2}+\frac{t^2}{12D^2}\hat{m}^2(x)\right\}dx=0
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots\cdots(41)
$$

ここに

$$\hat{y}_1(\varphi)=H_1-H_2+e+r(1-\cos\varphi)$$

$$
\begin{aligned}
\hat{w}(\varphi)=&f(\alpha)+F_4(\varphi)(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)-F_3(\varphi)(\cos\varphi-\frac{\varphi}{4}\sin2\varphi+\varphi\sin\varphi+\frac{\varphi}{4}\sin\varphi\cos2\varphi-\frac{1}{8}\sin\varphi\sin2\varphi)\\
&-(H_2-H_1-e-\frac{5}{4}r)(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)-\frac{1}{4}(H_1-H_2+e+r)(5\sin^2\varphi-\varphi\sin\varphi-\varphi^2)+\frac{r}{12}(\cos\varphi\cos2\varphi\\
&+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin2\varphi)
\end{aligned}
$$

$$\hat{m}(\varphi)=r^2\{F_4(\alpha)+F_3(\alpha)(1-\cos\varphi)-(H_2-H_1-e-\frac{5}{4}r)-(H_1-H_2+e+r)(\varphi\sin\varphi+\cos\varphi)-\frac{r}{4}\cos2\varphi\}$$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)=&(H_2-H_1-e-\frac{5}{4}r-F_4(\alpha))(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha)+F_3(\alpha)(\cos\alpha-\frac{\alpha}{4}\sin2\alpha+\alpha\sin\alpha+\frac{\alpha}{4}\sin\alpha\cos2\alpha\\
&-\frac{1}{8}\sin\alpha\sin2\alpha)+\frac{1}{4}(H_1-H_2+e+r)(5\sin^2\alpha-\alpha\sin2\alpha-\alpha^2)-\frac{r}{12}(\cos\alpha\cos2\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\sin2\alpha)
\end{aligned}
$$

$$F_1(\alpha)=(H_2-H_1-e-\frac{5}{4}r)\alpha+(H_1-H_2+e+r)(2\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)+\frac{r}{8}\sin2\alpha$$

$$F_2(\alpha)=(H_2-H_1-e-\frac{5}{4}r)\sin\alpha+\frac{1}{2}(H_1-H_2+e+r)(\alpha+\frac{3}{4}\sin2\alpha-\alpha\,2\cos2\alpha)+\frac{r}{8}(\sin3\alpha/3+\sin\alpha)$$

$$F_3(\alpha)=\{\alpha F_2(\alpha)-F_1(\alpha)\sin\alpha\}/(\sin^2\alpha-\alpha^2/2-\frac{\alpha}{4}\sin2\alpha)$$

$$F_4(\alpha)=(\sin\alpha/\alpha-1)F_3(\alpha)+F_1(\alpha)/\alpha$$

$$\hat{\delta}(x)=\frac{(H_2-e)r^2\sin^2\alpha}{6D}\left(\frac{x^4}{4r^2\sin^2\alpha}-\frac{x^3}{r\sin\alpha}+x^2\right)$$

$$\hat{m}(x)=(e-H_2)r^2\sin^2\alpha\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{r\sin\alpha}+\frac{x^2}{2r^2\sin^2\alpha}\right)$$

これまでの計算式中に含まれる中立軸の位置を示す e は未知であったが応力の釣合いから次の条件を満足しなければならない。すなわち

$$\int_0^\alpha c_1\hat{y}_1(\varphi)d\varphi+c_3(H_2-e)r\sin\alpha=0$$

これから

$$e=\frac{c_1\{r\sin\alpha-(H_1-H_2+r)\alpha\}+c_3H_2r\sin\alpha}{c_1\alpha+c_3r\sin\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

したがって，まず e を適当に仮定し，数値計算して c_1, c_3 を求め，これらを(42)式に代入して e を求める。これと仮定した e と比較してもし相違していたならば改めて e を仮定しなおすというふうに try and error で e を探し求める。

6.　測定および数値計算

Table 1 のような4種の曲り円管について軸ひずみを抵抗線ひずみ計で測定し軸応力を求めた。Fig 6 はその結果と理論解析の結果とを比較し示してある。負荷モーメントは曲率を減少させる方向に加え，a は曲り円管の内側壁の軸応力，b, c, d は外側壁の軸応力を示している。測定値と理論値とはよく一致し，軸応力は負荷モーメントの大きさに比例するという結果を得た。

次に半円形断面の推動殻について本報の近似的解法による場合と変位函数にフーリェ級数を用いた場合とを計算し，比較検討した。Fig 7 は半円形断面の中央におけ

Table 1 〔mm〕

円管の種類	a	b	c	d
円管の曲率半径 R	146	174	215	313
断面円の半径 r	15.2	18.2	24.7	30.5
肉　厚　t	1.7	1.6	1.6	2.0

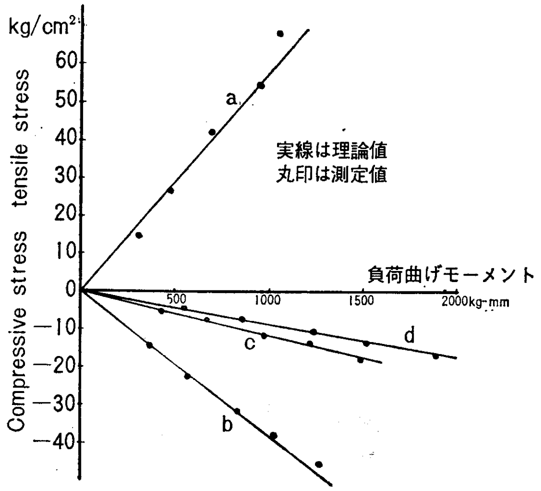

Fig. 6 Axial stress of tubes.

る軸応力をRおよびrをパラメータにとって負荷モーメント 1000kg-mm で計算した結果である。フーリェ級数による解はその項数が5項までであるため，本報の近似解法による結果より小さくなっており，その点でも近似解の結果は妥当なものと思われる。

Fig 8 は4節で応用例として導いた計算式に従って，Table 2 のような軽自転車車輪用リムについて軸応力を

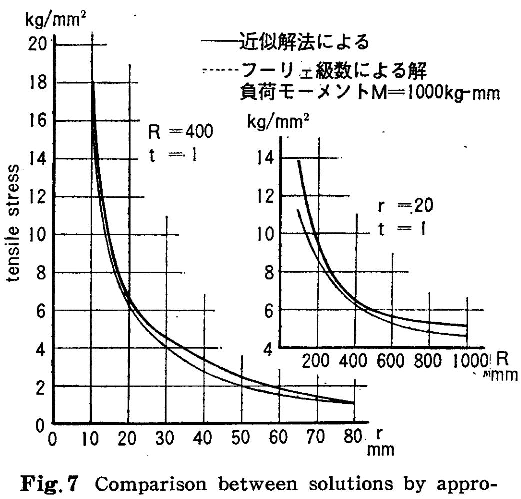

Fig. 7 Comparison between solutions by approximate method and by Fourier series.

Table 2 リム諸元 〔kg, mm〕

用途	材質	E	ν	R	r	α	H_2	t
a 普通用	steel	21000	0.28	316	11.55	50°	10	1.1
b レーサー用	steel	21000	0.28	316	11.58	45°	12	1.15
c レーサー用	arumi	7000	0.34	316	11.58	45°	12	2.0

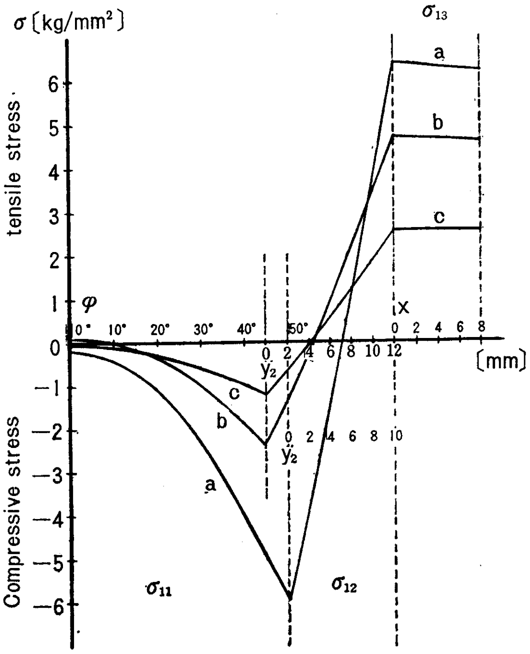

Fig. 8 Stress of rims for bicycles.

計算した結果を示したものである。

7. 結　　言

殻の弾性変形問題を変分法におけるリッツの方法で解くとき，一般に変位関数としてフーリェ級数や巾級数等が用いられるが，筆者らは比較関数として級数を用いる代りに殻を偏平化させる力の実体から変位関数の形を決定し，その定量的未知量をリッツの方法で求めた。

これによって計算は大変簡単になり，また数値計算の結果と実験値とはよく一致した。したがって一般に断面形が直線と円弧から成っている推動殻で，特に曲率があまり大きいというのでなければ，その変形と曲げ応力はこの近似的解法で十分な精度をもって解析できると思われる。

終りに本研究に当り種々御指導賜りました鈴鹿工業高等専門学校，岡田教授ならびに本学，織田教授に深く感謝の意を表します。

1) Th. von karman, Zeit des Verenes deutscher Ingenieure., vol. 55 (1911), 1889—1895
Aug. Föppl und Ludwig Föppl, Drang und Zwang, (1924), 70—87, R. Oldenbourg.: 上論文の概容
2) S. Timoshenko, Amer. Soc. Mech. Eng., vol. 45

(1923), 135

3) L. G. Brazier, Royal Society of Aeronautics, Reports and Memoranda, vol. 213, no, 1018, (1926), 187

4) J. D. Wood, Journal of Applied Mechanics, vol. 25, Trans. ASME, vol. 80, (1958), 453—458

5) F. P. J. Rimrott, Journal of Applied Mechanics, vol. 33, (1966), 75

6) E. Reissner, Journal of Applied Mechanics, vol, 26, Trans. ASME, vol. 81 (1959), 386—392