

接地極周辺の地表面電位 (II)

武 藤 三 郎・新 美 吉 彦*

Surface Potential Distribution of the Earth by the Earth Electrode

Saburo MUTO Yoshihiko NIIMI

It is the second report, which contents succeed the first report of the same title SURFACE POTENTIAL DISTRIBUTION OF THE EARTH BY EARTH ELECTRODE.

In the case of protecting high voltage transmission line with arestor, it is very important consideration that men and animals are not put in the dangerous condition for the potential gradient producing by the lightning or fault current. We did the experiment with the sloped electrolytic tank for the studying of the surface potential distribution of the earth, which consist of the two different conductive layers, using the method of field mapping. And further, we reduced the practical formulas to be useful for this object.

1 緒 論

高圧配電線をアレスターによって保護する場合, その接地点附近に流入する故障電流又は, 雷サージによる大

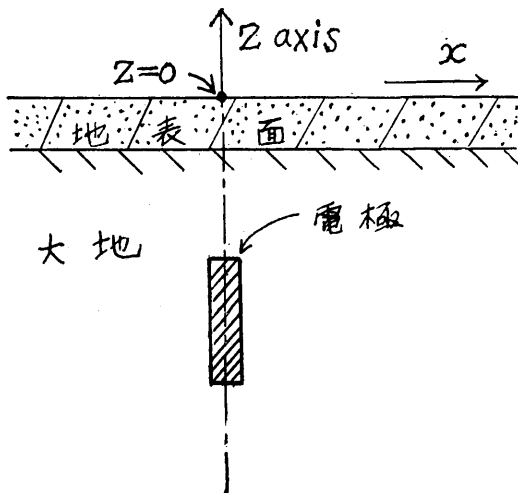


図 - 1

地表面電位傾度が, 直接又は低圧線の電位上昇を介して間接に人畜に危険にならない様に考慮する必要がある。

(1) 此の実験は大地と異なる導電率の層がある場合, その層の地表面電位傾度に及ぼす効果について, 傾斜した水槽を使用して, field mapping⁽²⁾法による実験を行いそれと同時に, 実用的近似式を誘導し両者の比較検討を行ったものである。

2 近似式の誘導及び計算結果

2-(1) 界方程式より導出される微分方程式

電荷保存則より

$$\text{div } J + \partial \rho / \partial t = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

Maxwellの方程式より

$$\text{rote} = -\partial B / \partial t \quad \dots\dots\dots (2)$$

定常状態であると仮定すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。故に(1), (2)式は次の如くなる。

$$\text{div } J = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{rote} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

(5)式より ϵ はポテンシャル E によって表わされる。即ち

$$\epsilon = -\text{grad } E \quad \dots\dots\dots (6)$$

又, 導電率は深さによってのみ変化するとすれば,

* 愛知工業大学

* Aichi Cogyo Daigaku

$$\sigma = \sigma(z) \dots\dots\dots (7)$$

但し σ は導電率、 z は深さ方向の座標とする。又、オームの法則により

$$J = \sigma E \dots\dots\dots (8)$$

(4), (6), (7), (8)式より

$$\text{div } J = -\sigma \nabla^2 E - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \cdot \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

但し、 ∇^2 を円柱座標で表わせば次の演算子である。

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots\dots\dots (10)$$

今、解を

$$E = R(r) \cdot Z(z) \dots\dots\dots (11)$$

と置いて(9)式に代入すると

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{rR} \cdot \frac{dR}{dx} = -\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma} \cdot \frac{dZ}{dz} \dots\dots\dots (12)$$

となる。但し $\sigma' = d\sigma/dz$ である。此処で左辺は r のみの函数であり、右辺は z のみの函数であるから、この式の値を λ^2 と置けば(12)式は次の二個の式に分離される。即ち

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} - \lambda^2 R = 0 ;$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{\sigma'}{\sigma} \cdot \frac{dZ}{dz} + \lambda^2 Z = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$w = \sigma^{\frac{1}{2}} Z \dots\dots\dots (14)$$

と置くと、(13)式の後半の式は次の如くなる。即ち

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + g(z)w = 0 \dots\dots\dots (15)$$

但し、

$$g(z) = \lambda^2 + \frac{(\sigma^2 - 4\sigma\sigma')}{4\sigma^2} \dots\dots\dots (16)$$

一般的には、(13)式又は(15)式よりポテンシャルを求める事が出来るのであるが、実際に得られる解は無限級数により表わされ、しかもその級数の収束が遅いので数値計算する上には不適當である。その為、静電界との類似性により近似式を誘導した。次下にてそれを示す。

2-(2) 近似式の誘導

以下述べる諸式の記号は次の如くである。

σ_1, σ_2 : 夫々上層部及び大地の導電率

h_1, h_2 : 夫々上層部より大地表面迄、及び大地表面より電極棒迄の深さ、

L : 電極棒の長さ

x, z : 夫々地表面に沿った方向及び大地に垂直な方向の座標

λ : 真電荷の線密度

$-\lambda', \lambda''$: 夫々仮想電荷の線密度

E_1, E_2 : 上層部及び大地中のポテンシャル

E_1 を求める場合には線電荷(密度) λ'' が、地表面に対して対称の位置にあるものとして、又 E_2 を求めるには真電荷線密度 λ によるポテンシャルと、誘導電荷密度 $-\lambda'$

によるポテンシャルの和として求めた。又境界条件として、

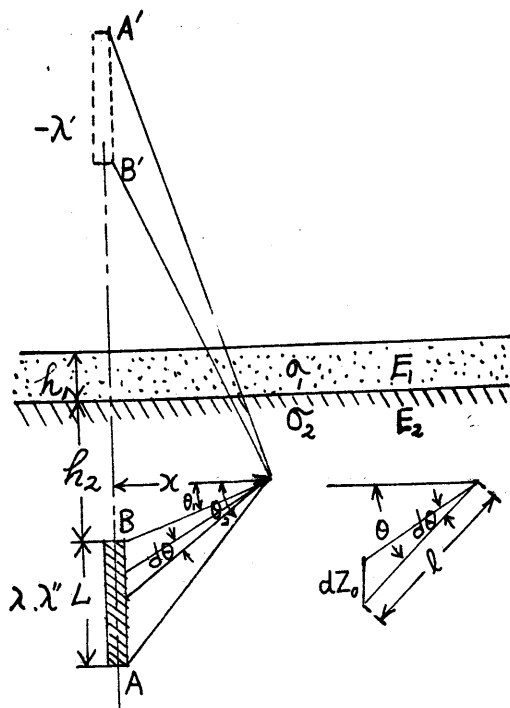


図 2

$\text{div } J = 0$ より

$$\left(\sigma_1 \frac{dE_1}{dz} \right)_{z=-h_1} = \left(\sigma_2 \frac{dE_2}{dz} \right)_{z=-h_1} \dots\dots\dots (17)$$

及び

$$(E_1)_{z=-h_1} = (E_2)_{z=-h_1} \dots\dots\dots (18)$$

又、次の如き置換えを行う。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \rightarrow \varepsilon_1, \lambda L = I \text{ (全電流)} \\ \sigma_2 \rightarrow \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

図より

$$dz_0 = \frac{l^2}{x} d\theta ; \frac{l}{x} = \frac{1}{\cos \theta} \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} E_2(x, z) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda'' dz_0}{l} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda'' dz_0}{l} \\ &= -\frac{\lambda''}{4\pi\varepsilon_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos \theta} + \frac{\lambda''}{4\pi\varepsilon_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\lambda''}{4\pi\varepsilon_1} \left\{ \ln \frac{1+\tan \theta/2}{1-\tan \theta/2} \right\}_{\theta_1}^{\theta_2} \\ &\quad + \left\{ \ln \frac{1+\tan \theta/2}{1-\tan \theta/2} \right\}_{\theta_1}^{\theta_2} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{今、} \ln \frac{1+x}{1-x} &= 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right] \doteq 2x \\ |x| &< 1 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

なる近似式を用いる。又、次の各々の場合において夫々別々の近似式を作る。即ち

2-(2)-(a) $2x > h_1 + h_2 + L$ なる場合

此の場合には次の関係式が近似的に成立する。

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\theta_1}{2} &\doteq \frac{1}{2x} (D+z) ; \tan \frac{\theta_1'}{2} \doteq \frac{1}{2x} (D-z) \\ \tan \frac{\theta_2}{2} &\doteq \frac{1}{2x} (D+L+z) ; \tan \frac{\theta_2'}{2} \doteq \frac{1}{2x} (D+L-z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

但し, $D = h_1 + h_2$

(23)式を用いると(21)式は次の如くなる。

$$E_1(x, z) \doteq -\frac{(\lambda''L)}{4\pi\epsilon_1} \cdot \frac{2}{x} \dots\dots\dots (24)$$

又, 同様にして,

$$E_2(x, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda dz_0}{l} - \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \int_{\theta_1'}^{\theta_2'} \frac{\lambda' dz_0}{l} \dots\dots\dots (25)$$

この式に(23)式の関係式を代入して整理すると,

$$\begin{aligned} E_2(x, z) &\doteq \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{12x^3} \left\{ 3(D+L+z)(D+z) + L^2 \right\} \right\} \\ &\quad - \frac{\lambda' L}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{12x^3} \left\{ 3(D+L+z)(D-z) + L^2 \right\} \right\} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

となる。 λ'' を決定する為に境界条件(17)式を用いると,

$$\lambda'' = -\frac{\lambda}{4h_1} (2h_2 + L) - \frac{\lambda'}{4h_1} (4h_1 + 2h_2 + L) \dots\dots\dots (27)$$

となる。次に境界条件(18)式を用いて

$$\lambda'' = \epsilon'(\lambda - \lambda') \quad \text{但し, } \epsilon' = \epsilon_1/\epsilon_2 (= \sigma_1/\sigma_2) \dots\dots\dots (28)$$

が得られる。(27)式及び(28)式より λ'' を求めると次の様になる。即ち

$$\lambda'' = \frac{2\epsilon'(2D+L)\lambda}{2(1-\epsilon')(h_1+2D+L)} = k_1\lambda \dots\dots\dots (29)$$

但し,

$$k_1 = \frac{2\epsilon'(2D+L)}{2(1-\epsilon')h_1+2D+L} \dots\dots\dots (30)$$

故に(24)式は

$$E_1(x, z) = -\frac{k_1(\lambda L)}{4\pi\epsilon_1} \cdot \frac{2}{x} \dots\dots\dots (31)$$

となる。(31)式に(19)式の逆置換を行へば求める E_1 が得られる。地表面電位を E_{01} とすれば,

$$E_{01}(x) = E_1(x, 0) = -\frac{I \cdot k_1}{4\pi\sigma_1} \cdot \frac{2}{x} \dots\dots\dots (32)$$

2-(2)-b $h_1 + h_2 + L > 2x$ の場合

此の場合には近似的に次の諸関係式が成り立つ。即ち

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{\theta_1}{2} &\doteq \frac{D+z}{x+D+z} ; \tan \frac{\theta_1'}{2} \doteq \frac{D-z}{x+D-z} \\ \tan \frac{\theta_2}{2} &\doteq \frac{D+L+z}{x+D+L+z} ; \tan \frac{\theta_2'}{2} \doteq \frac{D+L-z}{x+D+L-z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

これらの関係式を(21), (25)式に夫々代入すれば,

$$E_1(x, z) = \frac{\lambda''}{4\pi\epsilon_1} \left\{ \ln \frac{x+2(D+L+z)}{x+2(D+z)} + \ln \frac{x+2(D+L-z)}{x+2(D-z)} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

$$E_2(x, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \left\{ \lambda \ln \frac{x+2(D+L+z)}{x+2(D+z)} - \lambda' \ln \frac{x+2(D+L-z)}{x+2(D-z)} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

(34), (35)式と境界条件(17)式から

$$\left(\frac{1}{(2D+L)(2h_1+h_2)} - \frac{1}{(h_2+L)h_2} \right) \cdot \lambda'' = \frac{-\lambda}{(h_2+L)h_2} + \frac{-\lambda'}{(2D+L)(2h_1+h_2)} \dots\dots\dots (36)$$

又, 境界条件, $E_1(0, -h_1) = E_2(0, -h_2)$ を用いれば,

$$\left(\ln \frac{h_2 + L}{h_2} + \ln \frac{2h_1 + h_2 + L}{2h_1 + h_2} \right) \cdot \lambda'' = \epsilon' \left(\lambda \ln \frac{h_2 + L}{h_2} - \lambda' \ln \frac{2h_1 + h_2 + L}{2h_1 + h_2} \right) \quad (37)$$

(37)式は近似展開式を用いて簡単にすることが出来る。

$$\ln \frac{a+Z}{a} = 2 \left\{ \frac{Z}{2a+Z} + \frac{1}{3} \frac{Z^3}{(2a+Z)^3} + \dots \right\} \approx \frac{2Z}{2a+Z} \quad (38)$$

を用いれば、

$$\left(\frac{1}{2h_2 + L} + \frac{1}{2(2h_1 + h_2) + L} \right) \cdot \lambda'' = \frac{\epsilon' \lambda}{2h_2 + L} - \frac{\epsilon' \lambda'}{4h_1 + 2h_2 + L} \quad (39)$$

(39)と(36)式とを聯立させて解けば、 λ'' を求める事が出来る。即ち

$$\lambda'' = k_2 \lambda \quad (40)$$

但し、

$$k_2 = \frac{(2h_1 + h_2 + L)(2h_1 + h_2)(2h_2 + L) + h_2(h_2 + L)(4h_1 + 2h_2 + L)}{2L(2h_1 + 2h_2 + L)\{h_1 h_2(2\sigma' + 1) + L(\sigma' h_1 + h_2)\}} \quad (42)$$

よって

$$E_2(x, z) \approx \left(-\frac{I}{4\pi\sigma_2} \right) k_2 \left\{ \ln \frac{x + 2(D + L + z)}{x + 2(D + z)} + \ln \frac{x + 2(D + L - z)}{x + 2(D - z)} \right\} \quad (42)$$

従って地表面電位 E_{02} は $z=0$ と置を事により

$$E_{02}(x) = E_1(x, 0) = \left(-\frac{I}{2\pi\sigma_2} \right) \cdot k_2 \cdot \ln \frac{x + 2(D + L)}{x + 2D} \quad (43)$$

(今 x が非常に大なる点の地表面電位を E_{01} , 直上のそれを 0_2 とし)

又, $h_1 = 0$ と置けば上層部のない場合の式となる。

$$E_{01}(x) = \left(-\frac{I}{2\pi\sigma_2} \right) \cdot \frac{1}{x} \quad (44)$$

$$E_{02}(x) = \left(-\frac{I}{2\pi\sigma_2} \right) \frac{h_2 + L}{L^2} \ln \frac{x + 2h_2 + 2L}{x + 2h_2} \quad (45)$$

計算結果は下記の如くである。

第 1 表 計算結果

x	$a=552$	$a=712$
	$b=152$	$b=312$
	$k_2=29.13$	$k_2=33.47$
	曲線 (3)	曲線 (4)
0	37.58	
5	36.85	27.11
10	36.27	27.0
20	34.37	26.44
30	33.94	25.87
40	32.83	25.38
50	31.75	24.94
70	30.00	24.0
80	29.25	23.66
100	27.67	22.76

計 算 結 果

3 実験方法並びに実験と計算結果との比較

実験は傾斜した水槽を使用して下図の如き回路接続を行い、Field-mapping法により測定した。

第 2 表 実験結果

カーブ 番 号	1	2	3	4
h_1 cm	36	12	36	36
h_2 cm	80	74.4	40	120
σ_1/σ_2	0.1	0.1	0.5	0.5
	% 距離 電圧 xcm	% 距離 電圧	% 距離 電圧	% 距離 電圧
地表面 上(電極 を100% とする)	40	0	40	0
	35	89.6	30	89.0
	30	138.4	25	117.6
	25	181.6	20	182.4
	20	258.4	15	252.0
	15	332.8	10	365.6
	10	471.2	40	584.0
境	50	0	30	122.4
界	40	50.4	25	168.8
面	30	144.0	20	232.0
上	10	373.6	15	312

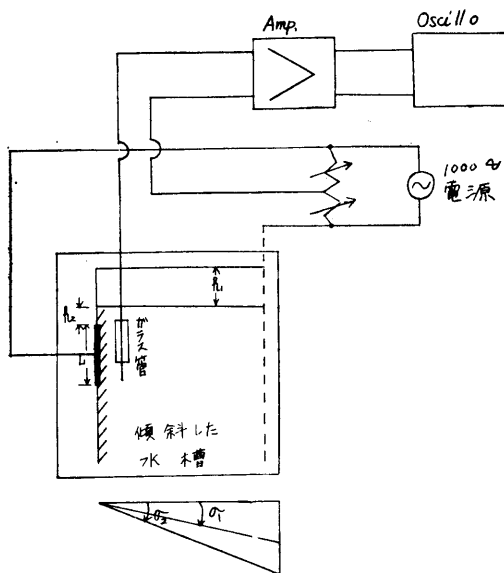


図-3 実験装置

又、実験結果は第2表の如くである。

以上の結果を図にしてまとめたものが図-4である。

第3表 係数の実験と理論の比較

カーブ 番号	h_1 cm	h_2 cm	$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$	実験	1式の k_1	$x=0$ での E_{02}
1	36	80	0.1	1	0.87	1.78×10^{-2}
2	12	74.4	0.1	2	0.945	1.78×10^{-2}
3	36	40	0.5	3	0.908	1.75×10^{-2}
4	36	120	0.5	4	0.935	1.23×10^{-2}

4 結 言

以上の結果から次の如き事が言へると思はれる。

(1) 計算式は近似式であるが実際現場等で概略の目安をつけるには十分役立つものと思はれる。

(2) 地表面の電位は地表面に敷く物質の導電率が大地の導電率の2倍又は3倍程度ではあまり効果は顕著で

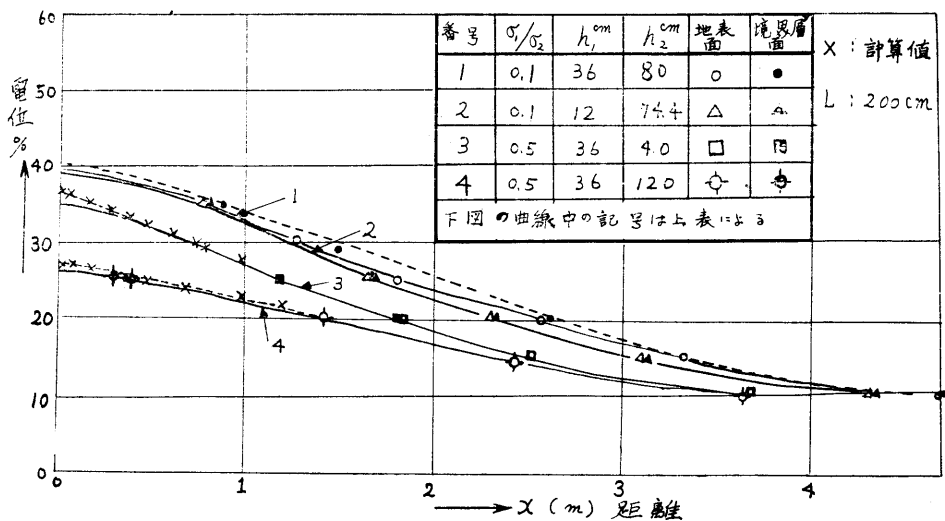


図-4 地表面及び境界層面上の電位変化 (図-2 参照)

ない。むしろその厚さと電極の深さが大きく影響する。

尚今後に残された問題としては3層の場合の解及び導電率が深さの一般的任意函数である場合の公式の誘導、及び過渡状態における補正項の計算等である。

最後に本研究に協力していただいた名工大津田一男氏及び卒研生近藤慎男等に深謝する次第である。

(以 上)

文 献

- (1) E. D. Sunde ; Eearth conduction effects in transmission system
- (2) 武 藤 ; 名古屋工業大学学報13号 (昭36. 12. 20)