ピカール次元の変動

中井　三留，多田　俊政*
数学教室
（1996年9月6日受理）

Variations of Picard Dimensions

Mitsuru NAKAI and Toshimasa TADA*
Department of Mathematics
(Received September 6, 1996)

The Picard dimension $\dim(\mu,\Omega_a)$ $(0<a<\infty)$ of a signed Radon measure μ of Kato class on the d-dimensional $(d\geq 2)$ punctured Euclidean space $\mathbf{R}_0^d : 0<|x|<\infty$ at the origin $x=0$ relative to the punctured ball $\Omega_a : 0<|x|<a$ is the cardinal number of the set of extremal rays of the cone of all nonnegative continuous distributional solutions u of the stationary Schrödinger equation $(-\Delta+\mu)u=0$ on Ω_a with vanishing boundary values on the sphere $|x|=a$. The purpose of this paper is to study the dependence of the Picard dimension $\dim(\mu,\Omega_a)$ on a when a varies over the interval $(0,\infty)$. Let us denote by $\mathscr{K}$ the totality of signed Radon measures μ of Kato class on $\mathbf{R}_0^d$. We say that a $\mu\in\mathscr{K}$ is of type I if $\dim(\mu,\Omega_a)$ is a constant cardinal number ξ on $(0,\infty)$; type II if there exists an $a_0\in(0,\infty)$ such that $\dim(\mu,\Omega_a)=1$ on $(0,a_0]$ and $\dim(\mu,\Omega_a)=0$ on (a_0,∞) ; type III if there exists an $a_0\in(0,\infty)$ such that $\dim(\mu,\Omega_a)$ is a constant cardinal number $\xi\geq 2$ on $(0,a_0)$, $\dim(\mu,a_0)=1$, and $\dim(\mu,\Omega_a)=0$ on (a_0,∞) . We denote by $\mathscr{K}_{\mathrm{J}}$ the set of all $\mu\in\mathscr{K}$ of type J (J=I, II, III). It is shown that $\mathscr{K}=\mathscr{K}_{\mathrm{I}}\cup\mathscr{K}_{\mathrm{II}}\cup\mathscr{K}_{\mathrm{III}}$; $\mathscr{K}_{\mathrm{J}}\neq\emptyset$ (J=I,II,III); ξ can vary over all of Ξ for $\mu\in\mathscr{K}_{\mathrm{I}}$ and $\Xi\setminus\{0,1\}$ for $\mu\in\mathscr{K}_{\mathrm{III}}$, where $\Xi=\{0,1,2,\cdots,\aleph_0,\aleph\}$ with $\aleph_0$ ($\aleph$,resp.) being the cardinal number of countably infinite sets (nondegenerate continua, resp.).

d次元（$d\geq 2$）穴空きユークリッド空間 $\mathbf{R}_0^d : 0<|x|<\infty$ 上のカトー族の一般符号ラドン測度μの穴空き球$\Omega_a : 0<|x|<a$ に関する原点$x=0$のピカール次元 $\dim(\mu,\Omega_a)$ $(0<a<\infty)$ とは，球面 $|x|=a$ で境界値0をもつΩ_a上の定常シュレーディンガー方程式 $(-\Delta+\mu)u=0$ の非負連続超関数解u全体の作る錐の極値半直線全体の濃度のこととする。本論文の目的はaが$(0,\infty)$を変化するとき，ピカール次元 $\dim(\mu,\Omega_a)$ がいかにaに依存するかを研究することである。$\mathbf{R}_0^d$上のカトー族の一般符号ラドン測度μの全体を$\mathscr{K}$と記そう。ある$\mu\in\mathscr{K}$が type I であるとは $\dim(\mu,\Omega_a)$ が$(0,\infty)$上一定濃度ξのこととする；type II とは，ある$a_0\in(0,\infty)$があって$(0,a_0]$上 $\dim(\mu,\Omega_a)=1$，(a_0,∞)上 $\dim(\mu,\Omega_a)=0$ となることとする。type III とは，ある$a_0\in(0,\infty)$があって$(0,a_0)$上 $\dim(\mu,\Omega_a)$ は一定濃度$\xi\geq 2$，$\dim(\mu,\Omega_{a_0})=1$，(a_0,∞)上 $\dim(\mu,\Omega_a)=0$ となることとする。type J の$\mu\in\mathscr{K}$の全体を$\mathscr{K}_{\mathrm{J}}$と記す（J=I,II,III)。次のことが示される：$\mathscr{K}=\mathscr{K}_{\mathrm{I}}\cup\mathscr{K}_{\mathrm{II}}\cup\mathscr{K}_{\mathrm{III}}$; $\mathscr{K}_{\mathrm{J}}\neq\emptyset$ (J=I,II,III)；ξは$\mu\in\mathscr{K}_{\mathrm{I}}$に対しては$\Xi$全体，$\mu\in\mathscr{K}_{\mathrm{III}}$に対しては$\Xi\setminus\{0,1\}$全体を変わりうる，但し$\Xi=\{0,1,2,\cdots,\aleph_0,\aleph\}$で$\aleph_0$（又は$\aleph$）は可算無限集合（又は非退化連続体）の濃度である。

*大同工業大学・数学教室

1．定義と主要結果

1.1. 定義. 本論文では次元 $d\geq 2$ の穴空きユークリッド空間 $\mathbf{R}_0^d:=\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$（$\mathbf{R}_0^d$ は d 次元ユークリッド空間）を基礎位相空間とする。従ってすべての位相概念や記号は $\mathbf{R}_0^d$ に相対的に考える。だから，例えば原点 0 を中心半径 $a\in(0,\infty)$ の穴空き球 $\Omega_a:=\{0<|x|<a\}$ の閉被 $\overline{\Omega}_a$ は $\{0<|x|\leq a\}$ で，相対境界 $\partial\Omega_a$ は $\{|x|=a\}$ である。よって原点 0 及び無限遠点∞は $\mathbf{R}_0^d$ の理想境界と考える。

$\mathbf{R}_0^d$ 上の一般符号ラドン測度 μ が**カトー族**であるとは，すべての点 $x\in\mathbf{R}_0^d$ において

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(\sup_{y\in B(x,\varepsilon)}\int_{B(x,\varepsilon)}g(y-z)d|\mu|(z)\Big)=0 \tag{1.2}$$

となることであるとする。ただし，$|\mu|$ は μ の全変分測度，$B(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbf{R}^d:|y-x|<\varepsilon\}$ は x 中心半径 $\varepsilon>0$ の開球，そして g は**変形基本調和関数**とする：$g(x)=1/|x|^{d-2}$ $(d\geq 3)$，$g(x)=(\log(1/|x|))\cup 1$ $(d=2)$。ここで 2 数 $\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$（ただし $\mathbf{R}$ は実数体）に対し $\alpha\cup\beta=\max(\alpha,\beta)$, $\alpha\cap\beta=\min(\alpha,\beta)$ の記号を使う。$\mathbf{R}_0^d$ 上のカトー族の一般符号ラドン測度 μ は原点で特異点を持っても持たなくてもよい，即ち μ は $\mathbf{R}^d$ 上のカトー族の測度に拡張可能でなくても可能でもよいとする。

$\mathbf{R}_0^d$ 上のカトー族の一般符号ラドン測度 μ をポテンシャルとする $\mathbf{R}_0^d$ 上の定常シュレーディンガー方程式

$$(-\Delta+\mu)u=0\ \big(\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\cdots+\partial^2/\partial x_d^2\big) \tag{1.3}$$

を考える。$\mathbf{R}_0^d$ の開部分集合 U に対し，U 上（1.3）の連続な超関数解 u を U 上の $\boldsymbol{\mu}$ **－調和関数**と呼び，その全体を ${}_\mu H(U)$ と記す。$(\mathbf{R}_0^d,{}_\mu H)$ は**ブルロー空間**（[7],[11] 等参照）となることが知られている（[2],[3],[16] 等参照）。一般に関数族 $\mathscr{F}$ に対して $\mathscr{F}^+=\{u\in\mathscr{F}:u\geq 0\}$ と記す。Ω_a 上の正値 μ －調和関数で $\partial\Omega_a$ で境界値 0 をもつもの全体の空間 ${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^+$ を考える，即ち

$${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^+:=\{u\in{}_\mu H(\Omega_a)^+\cap C(\overline{\Omega}_a):u|\partial\Omega_a=0\}.$$

常に恒等関数 $0\in{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^+$ である。更に任意に固定された $y\in\Omega_a$ について

$${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+:=\{u\in{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^+:u(y)=1\}$$

も考える。${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^+=\{0\}$ となることは起こり得るが，その時かつその時にかぎり ${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+=\emptyset$（空集合）となる。$\Omega_a$ 上の広義一様収束位相で考えて ${}_\mu H(\Omega_a)$ は局所凸線形位相空間となり，ハルナック不等式により ${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^+$ は閉正錐となり，再びハルナック不等式から ${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+$ は完閉凸集合となる。だから素朴には，クライン・ミルマンの定理によれば

$${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+=\overline{\mathrm{co}}\big[\mathrm{ex}.{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+\big], \tag{1.4}$$

ただし ex.Y は凸集合 Y の端点全体で，$\overline{\mathrm{co}}[X]$ は X の閉凸包である。(1.4) をもっと詳細に言えば，ショッケの定理（例えば [19] 参照）によると ${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+$ と $\mathrm{ex}.{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+$ 上の確率測度全体の間の全単射 $u\leftrightarrow\nu$ が

$$u=\int_{\mathrm{ex}.{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+}v\,d\nu(v) \tag{1.5}$$

によって定まる。いずれにしろ ${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+$（従って ${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^+$）の構造は $\mathrm{ex}.{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+$ によって決定される。そこで $\mathrm{ex}.{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+$ の濃度 $\sharp(\mathrm{ex}.{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+)$ は，Ω_a に相対的に考えて，0 の所にどれ位多くの正値 μ －調和関数があるかを記述することになる。この様な意味合いを背景として，

$$\dim(\mu,\Omega_a):=\sharp\big(\mathrm{ex}.{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)_y^+\big) \tag{1.6}$$

を考えて，(μ,Ω_a) の（又は Ω_a に相対的に考えて μ の）原点 0 における**ピカール次元**（詳しくは相対ピカール次元）と呼ぶ（[4],[5] 参照）。$0\leq\dim(\mu,\Omega_a)\leq\aleph$（連続体濃度）である。定義（1.6）は $y\in\Omega_a$ の位置には関係しないことは直ちにわかる。$\dim(\mu,\Omega_a)=0$ は ${}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^+=\{0\}$ と同値であって，この場合 (μ,Ω_a) は**楕円型**であると言い，$\dim(\mu,\Omega_a)\neq 0$ 即ち $\dim(\mu,\Omega_a)\geq 1$ のとき**非楕円型**であると言う。$\dim(\mu,\Omega_a)\leq 1$ は，ある $u_0\in{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^+$ が存在して

$$ {}_{\mu}H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^+=\{\alpha u_0:\alpha\in\mathbf{R}^+\} $$

となることと同値である。このとき (μ,Ω_a) に対して0でピカール原理が成立すると言って特別の関心がはらわれる（[4],[5] 参照)。

1.7.　**主要結果.** $\dim(\mu,\Omega_a)$ は μ を固定するとき $a\in(0,\infty)$ を色々変化させると色々の濃度をとると考えられる。ただし，$\mu\geq 0$ のときは $\dim(\mu,\Omega_a)$ は $a\in(0,\infty)$ に関して一定であることが知られており（例えば［14］参照)，これが又 $\mu\geq 0$ の場合のピカール次元の研究のし易さの一因であった。一般符号の μ については状況はずっと複雑そうであるが，実は以下に見るごとく，3個のパターンにのみ分類される。

$\mathbf{R}_0^d$ 上のカトー族の一般符号ラドン測度 μ に対して，$(0,\infty)$ 上の濃度値関数 $a\mapsto\dim(\mu,\Omega_a)$ を考える。ある濃度 $0\leq\xi\leq\aleph$ があって，$(0,\infty)$ 上 $\dim(\mu,\Omega_a)\equiv\xi$ であるとき μ は **type I** であると言う。ある $a_0\in(0,\infty)$ があって，$(0,a_0]$ 上 $\dim(\mu,\Omega_a)\equiv 1$, (a_0,∞) 上 $\dim(\mu,\Omega_a)\equiv 0$ となるとき，μ は **type II** であると言う。最後にある $a_0\in(0,\infty)$ と濃度 $2\leq\xi\leq\aleph$ が存在して，$(0,a_0)$ 上 $\dim(\mu,\Omega_a)\equiv\xi$, $\dim(\mu,\Omega_{a_0})=1$, (a_0,∞) 上 $\dim(\mu,\Omega_a)\equiv 0$ となるとき，μ は **type III** であると言う。$\mathbf{R}_0^d=\mathbf{R}^d\backslash\{0\}$ 上のカトー族の一般符号ラドン測度 μ の全体を $\mathscr{K}$，type J の $\mu\in\mathscr{K}$ の全体を $\mathscr{K}_{\mathrm{J}}$（J=I,II,III）と記すと，次の結果が得られる：

1.8.　**主定理. $\mathbf{R}_0^d=\mathbf{R}^d\backslash\{0\}$ 上の任意のカトー族の一般符号ラドン測度は type I か type II か type III のいずれかであって，しかもいずれの場合も起こり得る：**

$$ \mathscr{K}=\mathscr{K}_{\mathrm{I}}\cup\mathscr{K}_{\mathrm{II}}\cup\mathscr{K}_{\mathrm{III}},\ \mathscr{K}_{\mathrm{J}}\neq\emptyset\ (\mathrm{J}=\mathrm{I,II,III}). $$

証明は第2，3，4の3つの章で準備をした後第5章で与える。ついでながら $\Sigma_\mu=\{\dim(\mu,\Omega_a):a\in(0,\infty)\}$ を関数 $a\mapsto\dim(\mu,\Omega_a)$ の値域とすると，μ が type I なら $\Sigma_\mu=\{\xi\}$, ξ は $0\leq\xi\leq\aleph$ である濃度；μ が type II なら $\Sigma_\mu=\{0,1\}$；μ が type III なら $\Sigma_\mu=\{0,1,\xi\}$, ξ は $2\leq\xi\leq\aleph$ である濃度となる。上のどの場合の ξ も，type I の場合には，任意の $\xi\in\Xi=\{0,1,2,\cdots,\aleph_0,\aleph\}$，type III の場合には，任意の $\xi\in\Xi\backslash\{0,1\}$ になり得ることも第5章で示される，ただし $\aleph_0$ は可算無限濃度である。

2．相対ピカール次元の単調性

2.1.　**第1の基本命題.** $(0,\infty)$ 上の濃度値関数 $a\mapsto\dim(\mu,\Omega_a)$ の変動について最も基本的なことは，その単調性である。これにかかわる所として，本章では先ず次の事実を明らかにする。

2.2.　**命題. ピカール次元　$\dim(\mu,\Omega_a)$ は $(0,\infty)$ 上 a の関数として単調減少な階段関数である：**

(a) $0<b<a<\infty$ に対して $\dim(\mu,\Omega_b)\geq\dim(\mu,\Omega_a)$ となる；

(b) ある $a\in(0,\infty)$ に対して $\dim(\mu,\Omega_a)=1$ ならば，開区間 $(0,a)$ 上の t の関数として $\dim(\mu,\Omega_t)$ は一定濃度値 $\xi\geq 1$ となる；

(c) ある $a\in(0,\infty)$ に対して $\dim(\mu,\Omega_a)\geq 2$ ならば半開区間 $(0,a]$ 上の t の関数として $\dim(\mu,\Omega_t)$ は一定値 $\dim(\mu,\Omega_a)$ となる。

証明は本章末2.12節で与える。以上のことから次の諸事実はすぐわかる：値域 $\Sigma_\mu=\{\dim(\mu,\Omega_t):0<t<\infty\}$ は1元，2元，又は3元集合のいずれかである；$\Sigma_\mu\backslash\{0,1\}$ は高々1つの濃度 $\xi\geq 2$ を含むのみである。又上の命題から

$$ \dim\mu:=\lim_{a\downarrow 0}\dim(\mu,\Omega_a) \tag{2.3} $$

が定義できる。これを $\mathbf{R}^d\backslash\{0\}$ 上のカトー族の測度 μ の原点0における**ピカール次元**（詳しくは絶対ピカール次元）と呼ぶ。前にも述べたように $\mu\geq 0$ ならば $\dim(\mu,\Omega_a)$ は $(0,\infty)$ 上一定であることは古くから知られていた所で（例えば［14］参照)，その故に $\mu\geq 0$ のときどの $\dim(\mu,\Omega_a)$ も単に0における μ のピカール次元と呼んだが，一般符号の μ については，$\boldsymbol{\Omega_a}$ **に関しての**0におけるピカール次元（相対ピカール次元）の如くに，$\dim(\mu,\Omega_a)$ については Ω_a

に常に言及せねばならぬ。特に $\dim \mu=1$ となるとき μ に対して原点で**ピカール原理**が成立すると言う。$\dim 0=1$ はBôcher [1] 及びPicard [20,21] による古典的結果で我々の研究の出発点である。$\xi\in\Sigma_\mu$ のとき，$\dim(\mu,\Omega_t)=\xi$ となる $t\in(0,\infty)$ の集合は区間（又は1点）であることも，(a),(b),(c) から直ちにわかる。不連続点での左右連続性は更に深い考慮が必要で，それらは第3及び第4章で扱われる。

2.4. グリーン関数. μ ーグリーン関数の局所的存在とその対角線挙動は周知である（[2],[3],[15],[6],[16] 等参照)。大局的存在については，次の Hervé の定理 [9]（又は [7],[11] 等も参照）を想起する：比例公理を満たすブルロー空間 X 上グリーン関数が存在するための必要十分条件は X 上正値ポテンシャルの存在することである。

2.5. 補題. ***ある $a\in(0,\infty)$ に対して $\dim(\mu,\Omega_a)\geq 2$ ならば，Ω_a 上 μ ーグリーン関数が存在する。***

証明：ある $r\in\Omega_a$ に対して $u_1\not\equiv u_2$ である $u_i\in{}_\mu H(\Omega_a\,;\partial\Omega_a)_r^+$ が存在する。$u:=\min(u_1,u_2)$ は Ω_a 上の μ ー優調和関数である。もし u が μ ー調和であると $u_i-u\in{}_\mu H(\Omega_a\,;\partial\Omega_a)^+$ は r で 0 であるから，Ω_a 上 $u_1\equiv u$ $(i=1,2)$ となり，$u_1\equiv u_2$ と言う矛盾がでる。X が滑らかな境界をもつ Ω_a の相対完閉領域とするとき，${}_\mu H_f^X$ で ∂X 上有界半連続な境界値 f をもつ一般化されたディリクレ問題の解である X 上の μ ー調和関数とする。その存在と f の連続点 y において境界値 $f(y)$ をもつことは，Ω_a 上正値 μ ー調和関数のあることからわかる。$0<t<a/4$ として $v_t:={}_\mu H_u^{\Omega_{a-t}\setminus\overline{\Omega}_t}$ とおく。最小値原理により $(v_t)_{t\downarrow 0}$ は減少列で u 以下である。よって $v:=\lim_{t\downarrow 0}v_t\in{}_\mu H(\Omega_a\,;\partial\Omega_a)^+$ で，u は μ ー調和でないから，$w:=u-v$ は Ω_a 上正値 μ ー優調和である。Ω_a 上 $w\geq h\geq 0$ となる μ ー調和関数 h をとる。$\Omega_{a-t}\setminus\overline{\Omega}_t$ 上

$$v_t-v={}_\mu H_w^{\Omega_{a-t}\setminus\overline{\Omega}_t}\geq{}_\mu H_h^{\Omega_{a-t}\setminus\overline{\Omega}_t}\geq 0$$

であり，Ω_a 上 $v_t\downarrow v$ だから，$h\equiv 0$ となり，w は Ω_a 上の正値 μ ーポテンシャルである。よって Hervé の定理で Ω_a 上 μ ーグリーン関数が存在する。 □

A をある $0<b<a<\infty$ に対し $\overline{\Omega}_b\subset A\subset\overline{A}\subset\Omega_a$ となる穴空き位相球で ∂A は滑らかとする。各 $0<t<b$ に対して，$e_t\in{}_\mu H(A\setminus\overline{\Omega}_t)^+\cap C(\overline{A}\setminus\Omega_t)$, $e_t|\partial A=1$, $e_t|\partial\Omega_t=0$ となるものがとれると（例えば $\dim(\mu,\Omega_a)\geq 1$ ならそうである）$(e_t)_{t\downarrow 0}$ は増加列である。これが収束するならば，その極限 $e={}_\mu e={}_\mu e^A\in{}_\mu H(A)^+\cap C(\overline{A})$ で $e|\partial A=1$ となることがわかる。e を A 上の **μ ー単位**と呼ぶ。

2.6. 補題. ***A 上に μ ーグリーン関数 ${}_\mu G={}_\mu G^A$ が存在することと，μ ー単位 ${}_\mu e={}_\mu e^A$ が存在することとは同等である。***

証明：A 上 $(-\Delta+\mu)_\mu G(\cdot,y)=\delta_y$（$y$ に台をもつディラック測度）と正規化された μ ーグリーン関数 ${}_\mu G$ の存在をまず仮定する。0 ーポテンシャルは $|\mu|$ ーポテンシャルだから，$|\mu|$ ーグリーン関数 ${}_{|\mu|}G(\cdot,y)$ で，A 上 $(-\Delta+|\mu|)_{|\mu|}G(\cdot,y)=\delta_y$ と正規化されたものが存在する。各 $0<t<b$ に対して $u_t\in{}_{|\mu|}H(A\setminus\overline{\Omega}_t)\cap C(\overline{A}\setminus\Omega_t)$, $u_t|\partial A=1$, $u_t|\partial\Omega_t=0$ をとると，$(u_t)_{t\downarrow 0}$ は有界（即ち $u_t\leq 1$）な増加列であるから $u:=\lim_{t\downarrow 0}u_t\in{}_{|\mu|}H(A)\cap C(\overline{A})$ かつ $u|\partial A=1$ となる。明らかに各 $y\in A$ に対して

$$u(x)=\mathcal{O}\left({}_{|\mu|}G(x,y)\right)\ (x\to 0) \tag{2.7}$$

となる。$A\times A$ 上レゾルベント方程式

$${}_{|\mu|}G(x,y)+\int_A{}_\mu G(x,z)\,{}_{|\mu|}G(z,y)\,d(|\mu|-\mu)(z)={}_\mu G(x,y)$$

の成り立つことは容易に示せるので，とくにすべての $x\in A\setminus\{y\}$ に対して

$$\int_A{}_\mu G(x,z)\,{}_{|\mu|}G(z,y)\,d(|\mu|-\mu)(z)<\infty$$

となる。ゆえに (2.7) により

$$\int_A{}_\mu G(x,z)u(z)\,d(|\mu|-\mu)(z)<\infty\ (x\in A)$$

となる。そこで A 上

$$e:=u+\int_{A}{}_{\mu}G(\cdot,z)u(z)d(|\mu|-\mu)(z)$$

とおくと，これが求める A 上の μ －単位であることは直ちに示せる。

逆に $e={}_{\mu}e^{A}$ の存在を仮定する。任意の $c\in(0,b)$ を固定して，Ω_c 上 $e_c\equiv 0$ と定めて $s:=e-e_c$ とおくと，これは A 上の正値 μ －優調和関数である。$0\leq h\leq s$ となる A 上の任意の μ －調和関数 h をとる。すると $h|\partial A=0$ となる。各 $0<t\leq c$ につき $A\backslash\overline{\Omega}_t$ 上その境界値の比較から $e_t\leq e-h$ となり，$t\downarrow 0$ により $e\leq e-h$ となって A 上 $h\equiv 0$ となる。ゆえに s は A 上の正値 μ －ポテンシャルで，再び Hervé の定理より A 上 μ －グリーン関数が存在する。 □

2.8. 主関数の方法. 学術書［22］に述べられている主関数構成に関する線形作用素の方法は，シュワルツの交代法の一形態である。次の結果の証明にこの方法を使う（[13],[12],[18]等参照）。

2.9. 補題. **$0<a<\infty$ とする。各 $0<t<a$ に対して $\inf_{\Omega_a\backslash\Omega_t}s>0$ となる $s\in{}_{\mu}H(\Omega_a)^{+}$ の存在を仮定する（例えば Ω_a が μ －グリーン関数をもつときは $s={}_{\mu}e^{\Omega_a}$ にとればよい）。するとどんな $0<b<a$ に対しても ${}_{\mu}H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^{+}$ から ${}_{\mu}H(\Omega_b;\partial\Omega_b)^{+}$ への順序を保ち正値斉次加法的な全単射が存在する。とくにすべての $0<b<a$ に対して $\dim(\mu,\Omega_a)=\dim(\mu,\Omega_b)$ 。**

証明：以下 $0<b<a$ となる b，ついで $0<c<b$ となる c を任意に固定する。正数倍すればよいから $\Omega_a\backslash\overline{\Omega}_c$ 上 $s>1$ と仮定してよい。各 $\varphi\in C(\partial\Omega_b)$ に対して $\partial\Omega_b$ 上 $\varphi_t=\varphi$, $\partial\Omega_t$ 上 $\varphi_t=0$ とおき（$0<t<c$), $D_t\varphi={}_{\mu}H_{\varphi_t}^{\Omega_b\backslash\overline{\Omega}_t}$ とおくと，$(D_t\varphi)_{t\downarrow 0}$ は $\overline{\Omega}_b$ 上局所一様収束することは容易にわかる。そこで $\overline{\Omega}_b$ 上

$$D\varphi=\lim_{t\downarrow 0}D_t\varphi\quad(\varphi\in C(\partial\Omega_b))$$

とおくと，$D\varphi\in{}_{\mu}H(\Omega_b)\cap C(\overline{\Omega}_b)$, $D\varphi|\partial\Omega_b=\varphi$ となり，$D:C(\partial\Omega_b)\to{}_{\mu}H(\Omega_b)\cap C(\overline{\Omega}_b)$ は順序を保つ線形作用素である。そこで各 $u\in{}_{\mu}H(\Omega_a;\partial\Omega_a)$ に対して

$$\tau u=u-Du$$

とおくと，$\tau u\in{}_{\mu}H(\Omega_b;\partial\Omega_b)$ である。τ は順序を保つ ${}_{\mu}H(\Omega_a;\partial\Omega_a)$ から ${}_{\mu}H(\Omega_b;\partial\Omega_b)$ への線形作用素となることも見易い。以下 τ は ${}_{\mu}H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^{+}$ から ${}_{\mu}H(\Omega_b;\partial\Omega_b)^{+}$ への**全単射**となることを示す；特にそれから $\dim(\mu,\Omega_a)=\dim(\mu,\Omega_b)$ が結論できる。

先ず τ が**単射**であることをみるために $u_i\in{}_{\mu}H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^{+}$ $(i=1,2)$ をとり Ω_b 上 $\tau u_1\equiv\tau u_2$ であるとする。Ω_a 上 $u_1\equiv u_2$ を示したいが，背理法で Ω_a 上 $u:=u_1-u_2\not\equiv 0$ と仮定する。Ω_b 上では $u=Du$ となる。もし $\partial\Omega_b$ 上 $u=0$ ならば Ω_b 上 $u=Du=\lim_{t\downarrow 0}D_tu\equiv 0$ である。又 $\partial(\Omega_a\backslash\overline{\Omega}_b)=\partial\Omega_a\cup\partial\Omega_b$ 上 $u=0$ だから $\Omega_a\backslash\Omega_b$ 上でも $u=0$ となり，Ω_a 上 $u\equiv 0$ と言う矛盾が出る。それ故 $\partial\Omega_b$ 上で $u\not\equiv 0$ だから，必要なら $u=u_2-u_1$ と定義しなおして，$\sup_{\partial\Omega_b}u>0$ と仮定出来る。順次

$$\alpha:=\inf\{\beta\in\mathbf{R}:\beta s>u\ (\partial\Omega_b\text{ 上})\}>0,$$

$\partial\Omega_b$ 上 $\alpha s-u\geq 0$，ついである $x_0\in\partial\Omega_b$ があって $\alpha s(x_0)-u(x_0)=0$ となる。$\partial(\Omega_b\backslash\overline{\Omega}_t)$ $(0<t<c)$ 上 $\alpha s\geq D_tu$ だから，$t\downarrow 0$ として，$\overline{\Omega}_b$ 上 $\alpha s\geq Du$ となる。明らかに $\partial\Omega_b$ 上 $\alpha s\geq u$ で Ω_a の $\partial\Omega_a$ の近くでは $\alpha s>u$ となる。かくして $\overline{\Omega}_a\backslash\Omega_b$ 上 $\alpha s\geq u$ だから Ω_a 上 $\alpha s-u\geq 0$ で $\alpha s(x_0)-u(x_0)=0$ となり，Ω_a 上 $\alpha s-u\equiv 0$ となる。他方 $\liminf_{x\to\partial\Omega_a}(\alpha s-u)\geq\alpha>0$ となり矛盾である。

最後に τ が**全射**となることを示す：任意の $v\in{}_{\mu}H(\Omega_b;\partial\Omega_b)^{+}$ に対して $\tau u=v$，又は Ω_b 上

$$u-Du=v \tag{2.10}$$

となる $u\in{}_{\mu}H(\Omega_a;\partial\Omega_a)^{+}$ が存在する。この為，各 $\varphi\in C(\partial\Omega_c)$ に対して $K\varphi\in{}_{\mu}H(\Omega_a\backslash\overline{\Omega}_c)\cap C(\overline{\Omega}_a\backslash\Omega_c)$, $K\varphi|\partial\Omega_c=\varphi$, $K\varphi|\partial\Omega_a=0$ となるものをとり，

$$T\varphi:=D(K\varphi|\partial\Omega_b)|\partial\Omega_c,$$

又はもっと略式で $T\varphi=DK\varphi$ とおく。すると T は $C(\partial\Omega_c)$ からそれ自身への順序を保つ線形作用素である。ここで

$C(\partial\Omega_c)$ はノルム $\|\varphi\|=\sup_{\partial\Omega_c}|\varphi|$ によるバナッハ空間と考える。$v|\partial\Omega_c$ の意味で v とかき，フレッドホルム方程式

$$(2.11)\qquad \varphi-T\varphi=v$$

を $\varphi\in C(\partial\Omega_c)$ に対して解く，もし (2.11) を満たす $\varphi\in C(\partial\Omega_c)^+$ が求まったら

$$u:=\begin{cases}K\varphi & (\overline{\Omega}_a\backslash\Omega_c \text{上})\\ DK\varphi+v & (\Omega_b \text{上})\end{cases}$$

により Ω_a 上の関数 u を考える。$(\overline{\Omega}_a\backslash\Omega_c)\cap\Omega_b=\Omega_b\backslash\Omega_c$ 上 $K\varphi=DK\varphi+v$ であることを注意せねばならぬ。その為には $\partial(\Omega_b\backslash\Omega_c)=\partial\Omega_b\cup\partial\Omega_c$ でこの等式を示せばよい。$\partial\Omega_b$ 上では $DK\varphi+v=K\varphi+0=K\varphi$; $\partial\Omega_c$ 上では (2.11) を使って $DK\varphi+v=T\varphi+v=\varphi=K\varphi$ である。次に $\varphi\geq 0$ だから Ω_a 上 $u\geq 0$ となり $u\in{}_\mu H(\Omega_a\,;\partial\Omega_a)^+$ となる。この u が (2.10) を満たすことは直ちにわかる。こうして (2.11) をある $\varphi\in(\partial\Omega_c)^+$ で解けばすべてが完了する。

Ks の定義から $\partial\Omega_b$ 上 $0<Ks<s$ となる。D の定義から $\partial\Omega_c$ 上 $Ts=DKs<Ds\leq s$ となる。よって $q:=\sup_{\partial\Omega_c}(Ts/s)$ とおくと $0<q<1$ である。$\partial\Omega_c$ 上 $0\leq Ts\leq qs$ から出発して，$\partial\Omega_c$ 上 $0\leq T^nv\leq\|v\|T^ns\leq\|v\|q^ns$ 又は $\|T^nv\|\leq q^n\|s\|\|v\|$ $(n=1,2,\cdots)$ となることがわかる。すると $\Sigma_{n=0}^\infty T^nv$ は $\|s\|\|v\|\Sigma_{n=0}^\infty q^n$ を優級数にもち

$$\varphi:=\sum_{n=0}^{\infty}T^nv$$

が $C(\partial\Omega_c)$ に入ることがわかる。T も，従って T^n $(n=1,2,\cdots)$ も順序を保つので，$v\geq 0$ より $\varphi\geq 0$ が出る。この φ が (2.11) の解となることは明白である。 □

2.12. 命題2.2の証明. (**a**)：2つの任意の $0<b<a<\infty$ を固定するとき，$\dim(\mu,\Omega_b)\geq\dim(\mu,\Omega_a)$ を示したい。もし $\dim(\mu,\Omega_a)=0$ なら何も証明することはない。次に $\dim(\mu,\Omega_a)=1$ とする。ゆえに $u\in{}_\mu H(\Omega_a\,;\partial\Omega_a)^+\backslash\{0\}$ がとれる。各 $0<t<b$ に対して u の存在から，$u_t\in{}_\mu H(\Omega_b\backslash\overline{\Omega}_t)$, $u_t|\partial\Omega_b=0$, $u_t|\partial\Omega_t=1$ となるものが作られる。$y\in\Omega_b$ を1つ固定して，$v_t:=u_t/u_t(y)$ $(0<t<|y|)$ とおく。ハルナック不等式により $(v_t)_{t\downarrow 0}$ は局所一様有界だから，$0<t_1<|y|$ かつ $(t_n)_{n\geq 1}\downarrow 0$ となる数列で，$w_n:=v_{t_n}$ とおくとき $(w_n)_{n\geq 1}$ が Ω_b 上ある $w\in{}_\mu H(\Omega_b)^+$ に局所一様収束するようなものがある。$\alpha=\sup_n(\sup_{\partial\Omega_{|y|}}w_n)<\infty$ である。再び u の存在から，$\overline{w}\in{}_\mu H(\Omega_b\backslash\overline{\Omega}_{|y|})\cap C(\overline{\Omega}_b\backslash\Omega_{|y|})$, $\overline{w}|\partial\Omega_b=0$, $\overline{w}|\partial\Omega_{|y|}=\alpha$ となる $\overline{w}$ がとれる。$\Omega_b\backslash\overline{\Omega}_{|y|}$ 上 $w_n\leq\overline{w}$ だから $w\leq\overline{w}$ となる。よって $w\in{}_\mu H(\Omega_b\,;\partial\Omega_b)^+$ であると共に $w(y)=1$ より $w>0$ である。こうして，$\dim(\mu,\Omega_b)\geq 1=\dim(\mu,\Omega_a)$ により $\dim(\mu,\Omega_b)\geq\dim(\mu,\Omega_a)$ が出る。最後に $\dim(\mu,\Omega_a)\geq 2$ とする。補題2.5により μ ーグリーン関数が Ω_a 上にあり，ついで補題2.6により μ ー単位 ${}_\mu e^{\Omega_a}$ が存在する。これにより，補題2.9が適用出来て，$\dim(\mu,\Omega_b)$ が $(0,a]$ 上 b の関数として一定値 $\dim(\mu,\Omega_a)$ であることがわかる。よって特に $\dim(\mu,\Omega_b)\geq\dim(\mu,\Omega_a)$ は正しい。

(**b**)：$0<c<b<a$ となる b と c を任意にとる。$\dim(\mu,\Omega_a)=1$ により $u\in{}_\mu H(\Omega_b\,;\partial\Omega_b)^+\backslash\{0\}$ が存在し，$\inf_{\Omega_b\backslash\overline{\Omega}_t}u>0$ がすべての $0<t<b$ で言えるから，補題2.9により $\dim(\mu,\Omega_b)=\dim(\mu,\Omega_c)$ となる。

(**c**)：$\dim(\mu,\Omega_a)\geq 2$ により，(a) の証明の最後の所でみた通り $\dim(\mu,\Omega_b)$ は $(0,a]$ 上一定値 $\dim(\mu,\Omega_a)$ となる。 □

3. 相対ピカール次元の左連続性

3.1. 第2の基本命題. ある $0<a<\infty$ があって，$(0,a)$ 上 $\dim(\mu,\Omega_t)\geq 1$ であるとき，$\dim(\mu,\Omega_a)$ について何が言えるか？ 実は $\dim(\mu,\Omega_a)\geq 1$ となることを本章で示す。従って特に $(0,a)$ 上 $\dim(\mu,\Omega_t)=1$ であるならば $\dim(\mu,\Omega_a)=1$ となると言う意味での $\dim(\mu,\Omega_t)$ の t に関する左連続性が出る。

3.2. 命題. **すべての $b\in(0,a)$ に対して $\dim(\mu,\Omega_b)\geq 1$ ならば，$\dim(\mu,\Omega_a)\geq 1$ となる。**

$0<c<a$ と $r\in\Omega_c$ を固定して，各 $b\in(c,a)$ に対して $u_b\in{}_\mu H(\Omega_b\,;\partial\Omega_b)^+$, $u_b(r)=1$，を1つづつ与えたら，適当に部分列 $c<b_n\uparrow a$ をとると u_{b_n} はある $u\in{}_\mu H(\Omega_a)^+$ に収束する。これが $u\in{}_\mu H(\Omega_a\,;\partial\Omega_a)^+$ に違いなくて，$\dim(\mu,\Omega_a)\geq 1$ が結論出来る筈であるが，証明は意外に難しい。証明は本章末3.21節で与える。

3.3.　3G 定数. $g(x)$ は $\mathbf{R}^d$ 上の変形基本調和関数であった。領域 $V\subset\mathbf{R}^d$ はグリーン関数（即ち 0－グリーン関数）$G^V(\cdot,\cdot)={}_0G^V(\cdot,\cdot)$ をもつとき，単に V（又は $(0,V)$）は双曲型であると言う。双曲型領域 $V\subset\mathbf{R}^d$ の**3G 定数** $\gamma(V)$ とは，次の**3G 不等式**を成立させせる最小定数 $\gamma(V)\in(0,\infty]$ である：すべての 3 つ揃 $(x,y,z)\in V^3=V\times V\times V$ に対して

$$\frac{G^V(x,z)G^V(z,y)}{G^V(x,y)}\leq\gamma(V)(g(x-z)+g(z-y)) \tag{3.4}$$

となる。すべての有界リプシッツ領域 $V\subset\mathbf{R}^d$ に対しては $\gamma(V)<\infty$ であると言うのは，Cranston-Fabes-Zhao [8] による深い結果である（[6] 参照)。命題3.2の証明の為に特別のリプシッツ領域

$$V(a,\zeta,r)=\Omega_a\cap B\left(\frac{1+4a^2r^2}{1-4a^2r^2}\zeta,\ \frac{4a^2r}{1-4a^2r^2}\right)\ \ (0<r<1/2a) \tag{3.5}$$

を考える。ここで $0<a<\infty$, $\zeta\in\partial\Omega_a$ である。ここで球

$$B:=B\left(\frac{1+4a^2r^2}{1-4a^2r^2}\zeta,\ \frac{4a^2r}{1-4a^2r^2}\right)$$

は $\overline{0\zeta}$ に関しても，$\partial\Omega_a$ に関しても対称となっていることは後程確認される。無論 ζ は B の内点である。領域 $V(a,\zeta,r)$ は，ζ 中心の球帽 $B\cap\partial\Omega_a$ と別の球帽 $\Omega_a\cap\partial B$ からなるジョルダン曲面 $\partial V(a,\zeta,r)$ により囲まれた位相球である。従って確かに $V(a,\zeta,r)$ はリプシッツ領域なので Cranston-Fabes-Zhao の定理により $\gamma(V(a,\zeta,r))<\infty$ は明かであるが，命題3.2の証明の為には

$$\gamma(V(a,\zeta,r))=\mathcal{O}(1)\ \ (r\downarrow 0) \tag{3.6}$$

が必要となる。以下これを示す。

まず準備的な議論をする。有界リプシッツ領域 $V\subset\mathbf{R}^d$ を固定しそのメビウス変換による像 V' を考える。$\gamma(V)$ と $\gamma(V')$ の関係を調べる。V' としては，ベクトル $\xi\in\mathbf{R}^d$ だけの平行移動 $V_\xi=V+\xi$，直交変換 $P\in O(d)$ による回転 PV，実数 $0<\lambda\leq 1$ だけの縮小 λV，及び単位球 S^{d-1} に関しての V の反転 V^*（ただし $0\notin\overline{V}$），即ち反転 $x\mapsto x^*=x/|x|^2$（但し $0^*=\infty$, $\infty^*=0$）による V の像，を考える。次の関数を示す：

$$\gamma(V+\xi)=\gamma(V)\ \ (\xi\in\mathbf{R}^d); \tag{3.7}$$

$$\gamma(PV)=\gamma(V)\ \ (P\in O(d)); \tag{3.8}$$

$$\gamma(\lambda V)\leq\gamma(V)\ \ (0<\lambda\leq 1); \tag{3.9}$$

$$\gamma(V^*)\leq\delta(V)\gamma(V)\ \ (0\notin\overline{V}), \tag{3.10}$$

但し $\delta(V)$ は次式で与える V の別の固有量である：

$$\delta(V)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sup_{x\in V}|x|}{\inf_{x\in V}|x|}\right)^{d-2} & (d\geq 3);\\ 1+(2\log(\sup_{x\in V}(1/|x|)))\cup 1 & (d=2).\end{cases} \tag{3.11}$$

等式 (3.7) 及び (3.8) は一つには

$$G^{V+\xi}(x,y)=G^V(x-\xi,y-\xi),\ g((x+\xi)-(y+\xi))=g(x-y)$$

と，又同じ様な今一つの

$$G^{PV}(x,y)=G^V(P^{-1}x,P^{-1}y),\ g(Px-Py)=g(x-y)$$

とから直ちに導かれる。(3.9) を示すのに，まず第 1 に $G^{\lambda V}(x,y)=\lambda^{2-d}G^V(\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}y)$ に注意する。他方 $d\geq 3$ ならば $g(\lambda^{-1}x-\lambda^{-1}y)=\lambda^{2-d}g(x-y)$ であるが，$d=2$ なら $0<\lambda\leq 1$ に対し $\log\lambda\leq 0$ であることにより

$$g(\lambda^{-1}x-\lambda^{-1}y)=\left(\log\frac{1}{|x-y|}+\log\lambda\right)\cup 1\leq\left(\log\frac{1}{|x-y|}\right)\cup 1=g(x-y)$$

である。それ故すべての 3 つ揃 $(x,y,z)\in(\lambda V)^3$ に対して

$$\frac{G^{\lambda V}(x,z)G^{\lambda V}(z,y)}{G^{\lambda V}(x,y)}=\lambda^{2-d}\frac{G^{V}(\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}z)G^{V}(\lambda^{-1}z,\lambda^{-1}y)}{G^{V}(\lambda^{-1}x,\lambda^{-1}y)}$$
$$\leq\lambda^{2-d}\gamma(V)\big(g(\lambda^{-1}x-\lambda^{-1}z)+g(\lambda^{-1}z-\lambda^{-1}y)\big)\leq\gamma(V)(g(x-z)+g(z-y))$$

となって (3.9) が導かれる。

等式 (3.10) の証明はずっと面倒である。まず対称補題

$$\big||x|^{-1}x-|x|y\big|=\big||y|^{-1}y-|y|x\big|\ \ \big((x,y)\in\big(\mathbf{R}^d\setminus\{0\}\big)^2\big) \tag{3.12}$$

を想起する。これから

$$|x^*-y^*|^{-1}=|x||y||x-y|^{-1}\ \ \big((x,y)\in\big(\mathbf{R}^d\setminus\{0\}\big)^2\big) \tag{3.13}$$

が出る。これにより

$$G^{V^*}(x,y)=|x|^{2-d}|y|^{2-d}G^V(x^*,y^*) \tag{3.14}$$

となることを示す。$x^{**}=x$ に注意する。$H(x,y)$ で上式の右辺を表すとき $G^{V^*}(x,y)=H(x,y)$ を言う。$H(x,y)$ は V^* 上対称である。$x\mapsto H(x,y)$ は ∂V で0となる $V\setminus\{y^*\}$ 上の調和関数 $\xi\mapsto|y|^{2-d}G^V(\xi,y^*)$ のケルビン変換なので，$x\mapsto H(x,y)$ は $\partial V^*=(\partial V)^*$ 上0となる $V^*\setminus\{y\}$ 上の調和関数である。

$$G^V(\xi,\eta)=\begin{cases}c_d^{-1}|\xi-\eta|^{2-d}+h(\xi,\eta) & (d\geq 3),\\ c_2^{-1}\log|\xi-\eta|^{-1}+h(\xi,\eta) & (d=2)\end{cases}$$

とかくと，$h(\cdot,\eta)$ はすべての $\eta\in V$ に対して V 上調和である。すると (3.13) により

$$H(x,y)=\begin{cases}c_d^{-1}|x-y|^{2-d}+|x|^{2-d}h(x^*,y^*)|y|^{2-d} & (d\geq 3),\\ c_2^{-1}\log|x-y|^{-1}+(\log|x|+h(x^*,y^*)+\log|y|) & (d=2)\end{cases}$$

となる。ここで，S^{d-1} の曲面積を σ_d とするとき，$c_2:=2\pi$, $c_d:=\sigma_d(d-2)$ $(d\geq 3)$ である。さて，調和関数 $\xi\mapsto h(\xi,y^*)|y|^{2-d}$ のケルビン変換として $d\geq 3$ のとき $x\mapsto|x|^{2-d}h(x^*,y^*)|y|^{2-d}$ は V^* 上の調和関数であり，$d=2$ のとき $x\mapsto\log|x|+h(x^*,y^*)+\log|y|$ は V^* 上調和となる。かくして $H(x,y)$ は V^* 上のグリーン関数となることがわかり (3.14) は示された。

再び (3.13) によれば

$$g(x^*-y^*)=|x|^{d-2}|y|^{d-2}g(x-y)\ \ (d\geq 3); \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}g(x^*-y^*)&=\big(\log|x-y|^{-1}+\log|x||y|\big)\cup 1\\ &\leq(1+(\log|x||y|)\cup 1)g(x-y)\end{aligned}\quad(d=2) \tag{3.16}$$

となることがわかる。

これで (3.10) の証明の準備は完了した。(3.14) によりすべての3つ揃 $(x,y,z)\in(V^*)^3$ に対して

$$\frac{G^{V^*}(x,z)G^{V^*}(z,y)}{G^{V^*}(x,y)}=\frac{|x|^{2-d}|z|^{2-d}G^V(x^*,z^*)|z|^{2-d}|y|^{2-d}G^V(z^*,y^*)}{|x|^{2-d}|y|^{2-d}G^V(x^*,y^*)}$$
$$=|z|^{4-2d}\frac{G^V(x^*,z^*)G^V(z^*,y^*)}{G^V(x^*,y^*)}\leq|z|^{4-2d}\gamma(V)(g(x^*-z^*)+g(z^*-y^*))$$

となる。$d\geq 3$ なら (3.15) により

$$\frac{G^{V^*}(x,z)G^{V^*}(z,y)}{G^{V^*}(x,y)}\leq\gamma(V)\Big(\frac{|x|^{d-2}}{|z|^{d-2}}g(x-z)+\frac{|y|^{d-2}}{|z|^{d-2}}g(z-y)\Big)$$
$$\leq\delta(V)\gamma(V)(g(x-z)+g(z-y));$$

$d=2$ なら (3.16) により

$$\frac{G^{V^*}(x,z)G^{V^*}(z,y)}{G^{V^*}(x,y)}$$
$$\leq \gamma(V)(1+(\log|x||z|)\cup 1)g(x-z)+(1+(\log|z||y|)\cup 1)g(z-y)$$
$$\leq \delta(V)\gamma(V)(g(x-z)+g(z-y)).$$

こうして（3.10）も示された。

本節の最後にいよいよ（3.6）を証明する。$\varepsilon=(1,0,\cdots,0)$ とおく。(3.7) と（3.8）により

(3.17) $$\gamma(V(a,\zeta,r))=\gamma(V(a,a\varepsilon,r)+a\varepsilon)$$

となる。$P(t):=\{x=(x^1,x')\in\mathbf{R}^d : x^1>t\}$ とおく。球の$*$による不変性（超平面は∞を通る球と考えて）により

(3.18) $$V(a,a\varepsilon,r)+a\varepsilon=(P(1/2a)\cap B(\varepsilon/2a,r))^*$$

となる。$0<r<1/2a$ により

$$\delta(P(1/2a)\cap B(\varepsilon/2a,r))\leq\begin{cases}2 & (d\geq 3);\\ 1+(2\log(2a))\cup 1 & (d=2)\end{cases}$$

がわかる。$C(a)=1+(2\log(2a))\cup 1$ とおく。すると（3.10）により，(3.17) と（3.18）から

(3.19) $$\gamma(V(a,\zeta,r))\leq C(a)\gamma(P(1/2a)\cap B(\varepsilon/2a,r))$$

がわかる。$P(1/2a)\cap B(\varepsilon/2a,r)-\varepsilon/2a=P(0)\cap B(0,r)$ だから（3.7）と（3.19）により

(3.20) $$\gamma(V(a,\zeta,r))\leq C(a)\gamma(P(0)\cap B(0,r))$$

となる。明らかに $P(0)\cap B(0,r)=r(P(0)\cap B(0,1))$ である。r を小さくとって $0<r<(1/2a)\cap 1$ とすると，(3.9) により $\gamma(P(0)\cap B(0,r))\leq\gamma(P(0)\cap B(0,1))=:K$ で K は r に依存せぬ定数である。よって（3.20）により $\gamma(V(a,\zeta,r))\leq KC(a)$ $(0<r<(1/2a)\cap 1)$ となって，(3.6) が示された。

3.21. 命題3.2の証明. $\mathbf{R}^d\backslash\{0\}$ の球 $B(x,\varepsilon)$ の μ に関するカトー定数を $\kappa(B(x,\varepsilon))=\kappa(B(x,\varepsilon),\mu)$ と記す：

$$\kappa(B(x,\varepsilon),\mu)=\sup_{y\in B(x,\varepsilon)}\int_{B(x,\varepsilon)}g(y-z)d|\mu|(z).$$

μ がカトー族の測度だから $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\kappa(B(x,\varepsilon),\mu)=0$ である。ある $0<a<\infty$ があって，すべての $b\in(0,a)$ に対して

(3.22) $$\dim(\mu,\Omega_b)\geq 1$$

と仮定するとき $\dim(\mu,\Omega_a)\geq 1$ を示したい。$c\in(0,a)$ と $\xi\in\partial\Omega_c$ を任意に固定する。(3.22) から各 $b\in(c,a)$ 毎に $u_b(\xi)=1$ となる $u_b\in{}_\mu H(\Omega_b;\partial\Omega_b)^+$ がとれる。$\{u_b : c<b<a\}$ は正規族をつくるから (c,a) 内の増加列 $(b(n))_{n\geq 1}\uparrow a$ で $(u_{b(n)})_{n\geq 1}$ がある $u\in{}_\mu H(\Omega_a)^+$ に Ω_a 上局所一様に収束するものがとれる。簡単の為各 $n=1,2,\cdots$ について

$$v_n:=\begin{cases}u_{b(n)} & (\Omega_{b(n)}\text{ 上}),\\ 0 & (\Omega_a\backslash\Omega_{b(n)}\text{ 上})\end{cases}$$

とおく。$v_n(\xi)=u(\xi)=1$ $(n=1,2,\cdots)$ だからハルナック不等式によれば，$\partial\Omega_c$ 上 $v_n\leq\lambda u$ となる定数 $\lambda>0$ がみつかる。$s=\lambda u$ とおくと，$\Omega_a\backslash\Omega_c$ 上 $v_n\leq s$ となることが最小値原理によりわかる。

任意に $\zeta\in\partial\Omega_a$ を固定する。(3.5) の領域 $V=V(a,\zeta,r)$ を十分小さな $0<r<1/2a$ に対して考える。最初，V が MP−集合（${}_\mu H$ に関して V 上最小値原理が成立するの意）で $\overline{V}\cap\overline{\Omega}_c=\emptyset$ となる位小さく $0<r<1/2a$ をとる。

$$V\subset B\left(\frac{1+4a^2r^2}{1-4a^2r^2}\zeta,\ \frac{4a^2r}{1-4a^2r^2}\right)\subset B\left(\zeta,\ \frac{4a^2r}{1-2ar}\right)$$

に注意する。(3.6) により $\gamma(V)=\gamma(V(a,\zeta,r))=\mathcal{O}(1)$ $(r\downarrow 0)$ であった。$\kappa(B(\zeta,4a^2r/(1-2ar)),\mu)\to 0$ $(r\downarrow 0)$ だか

ら，任意に固定した $q\in(0,1/2)$ に対して

$$\max(\gamma(V(a,\zeta,r)),1)\kappa\left(B\left(\zeta,\frac{4a^2r}{1-2ar}\right),\mu\right)<\frac{q}{2} \tag{3.23}$$

となる様に更に小さく $0<r<1/2a$ をとる。この様になっている $V=V(a,\zeta,r)$ を固定する。∂V は球帽 $\Gamma_1=(\partial V)\cap\Omega_a$ と ζ を中心とする球帽 $\Gamma_0=(\partial V)\setminus\Gamma_1$ からなる。V 上のグリーン関数 $G^V(\cdot,\cdot)$ を使って

$$(Tf)(x):=\int_V G^V(x,y)f(y)d\mu(y)\ \left(f\in C(\overline{V})\right)$$

により定める有界線形作用素 $T:C(\overline{V})\to\{f\in C(\overline{V}):f|\partial V=0\}$ を考える。又

$$(|T|f)(x):=\int_V G^V(x,y)f(y)d|\mu|(y)\ \left(f\in C(\overline{V})\right)$$

も同種の有界線形作用素 $|T|$ を与える。V は ${}_\mu H$ －正則で，$H={}_0H$ として，$\overline{V}$ 上

$$\frac{1-2q}{1-q}H_f^V\le {}_\mu H_f^V\le\frac{1}{1-q}H_f^V \tag{3.24}$$

がすべての $f\in C(\partial V)^+$ に対して成立することを言う。実際 (3.23) から $\|T\|\le\||T|\|\le q$ である。従って $\|(I+T)^{-1}\|\le 1/(1-q)$ である。簡単の為 $H_f^V=:h$, $(I+T)^{-1}h=v$ とおく。V は MP－集合故 $v={}_\mu H_f^V$ である。よって

$${}_\mu H_f^V(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nT^nh(x)\ \ (x\in V) \tag{3.25}$$

となる。以下の手続きは [3]（又は [16] も参照）に依るものである。$(V_m)_{m\ge1}$ を V の滑らかな領域 V_m による近似とし，

$$h_m(x):=\begin{cases}h(x) & (x\in\overline{V}_m),\\ H_\varphi^{V\setminus\overline{V}_m}(x) & (x\in V\setminus\overline{V}_m)\end{cases}$$

とおく，但し $\varphi\in C(\partial(V\setminus\overline{V}_m))$ で ∂V 上 $\varphi=0$, ∂V_m 上 $\varphi=h$ とする。h_m は V 上ポテンシャル（即ち 0－ポテンシャル）だから，リースの定理によれば，∂V_m 上の正値ラドン測度 ν_m で

$$h_m(x)=\int_V G^V(x,y)d\nu_m(y)\ \ (x\in V)$$

となるものがとれる。(3.23) と $3G$ 不等式によれば，すべての組 $(x,y)\in V^2$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\int_V G^V(x,z)G^V(z,y)d\mu(z)\right| &\le\int_V G^V(x,z)G^V(z,y)d|\mu|(z)\\ &\le\gamma(V)G^V(x,y)\int_V(g(x-z)+g(z-y))d|\mu|(z)\\ &\le 2\gamma(V)\kappa\left(B\left(\zeta,\frac{4a^2r}{1-2ar}\right),\mu\right)G^V(x,y)\le qG^V(x,y)\end{aligned}$$

となる。フビニの定理により，すべての $x\in V$ に対して

$$\begin{aligned}(|T|h_m)(x)&=\int_V G^V(x,z)\left(\int_V G^V(z,y)d\nu_m(y)\right)d|\mu|(z)\\ &=\int_V\left(\int_V G^V(x,z)G^V(z,y)d|\mu|(z)\right)d\nu_m(y)\\ &\le\int_V qG^V(x,y)d\nu_m(y)=qh_m(x)\end{aligned}$$

となる。V 上 $0\le h_m\uparrow h$ $(m\uparrow\infty)$ だからルベッグの収束定理より，$\overline{V}$ 上 $|T|h\le qh$ となる。帰納的に考えて $|T|^nh\le q^nh$ $(n=1,2,\cdots)$ となる。(3.25) により

$$h(x)-\sum_{n=1}^{\infty}|T|^nh(x)\le{}_\mu H_f^V(x)\le\sum_{n=0}^{\infty}|T|^nh(x).$$

しかるに $\Sigma_{n=1}^{\infty}|T|^nh(x)\le(\Sigma_{n=1}^{\infty}q^n)h(x)=(q/(1-q))h(x)$, $\Sigma_{n=0}^{\infty}|T|^nh(x)\le(\Sigma_{n=0}^{\infty}q^n)h(x)=(1/(1-q))h(x)$ だ

から，(3.24) が出る。

さて ∂V 上 $0\leq f_n\leq f_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ で $f_n|\Omega_{b(n)}\cap\Gamma_1=s$, $f_n|\Gamma_0=0$ $(n=1,2,\cdots)$ となる $(f_n)_{n\geq1}\subset C(\partial V)$ をとることが出来る。$s_n=(I+T)^{-1}H^V_{f_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ とおく。(3.24) より $\overline{V}$ 上

$$\frac{1-2q}{1-q}H^V_{f_n}\leq s_n\leq\frac{1}{1-q}H^V_{f_n} \tag{3.26}$$

となる。$0\leq s_n\leq s_{n+1}\leq s$ なので，$(s_n)_{n\geq1}$ はある $s_V|\Gamma_1=s$ となる $s_V\in H(V)^+\cap C(V\cup\Gamma_1)$ に収束する。(3.26) と $s_n\leq s_V$ により，$(H^V_{f_n})_{n\geq1}$ はある $h_V\in H(V)^+$ に収束する。$H^V_{f_n}\in H(V)^+\cap C(V\cup\Gamma_0)$ で $H^V_{f_n}|\Gamma_0=0$ であるから，境界ハルナック原理により h_V は $\Gamma_0\backslash\overline{\Gamma}_1$ で境界値 0 をもつ。(3.26) で $n\uparrow\infty$ とすると V 上

$$\frac{1-2q}{1-q}h_V\leq s_V\leq\frac{1}{1-q}h_V \tag{3.27}$$

がえられる。これは $s_V\in{}_\mu H(V)^+\cap C(V\cup(\Gamma_0\backslash\overline{\Gamma}_1))$ かつ $s_V|(\Gamma_0\backslash\overline{\Gamma}_1)=0$ を意味する。

$s\geq s_V$ で Γ_1 上 $s=s_V$ なので

$$s^*:=\begin{cases}s & (\Omega_a\backslash V\text{上}),\\ s_V & (V\text{上})\end{cases}$$

は Ω_a 上 μ ー優調和である。$\partial\Omega_c$ では $v_n\leq s=s^*$ なので，最小値原理で $\Omega_a\backslash\Omega_c$ 上 $v_n\leq s^*$ となり $u\leq s^*$ となる。$s_V|(\Gamma_0\backslash\overline{\Gamma}_1)=0$ より

$$\lim_{x\in\Omega_a,\ x\to\zeta}u(x)=0.$$

ζ が $\partial\Omega_a$ の任意の点であったことと，$u(\xi)=1$ より $u\in{}_\mu H(\Omega_a;\partial\Omega_a)\backslash\{0\}$ となり $\dim(\mu,\Omega_a)\geq1$ が示された。 □

4．相対ピカール次元と双曲拡大

4.1.　第3の基本命題. Ω_a 上 μ ーグリーン関数が存在するとき，(μ,Ω_a) は**双曲型**であると言う。このとき (μ,Ω_a) は非楕円型である。非楕円型で双曲型でないとき (μ,Ω_a) は**放物型**であると言う。補題2.5により $\dim(\mu,\Omega_a)\geq2$ なら (μ,Ω_a) は双曲型で，(μ,Ω_a) が双曲型ならば $\dim(\mu,\Omega_a)\geq1$ となる。本章では次の結果を証明する。

4.2.　定理. ある $0<a<\infty$ に対して (μ,Ω_a) が双曲型ならば，ある $b\in(a,\infty)$ があって (μ,Ω_b) も双曲型となる。

証明は本章末4.10節で与える。ある $0<a<\infty$ に対して $\dim(\mu,\Omega_a)\geq2$ とすると，(μ,Ω_a) は双曲型であるので，上の定理から $b\in(a,\infty)$ があって，(μ,Ω_b) も又双曲型である。ゆえに $\dim(\mu,\Omega_b)\geq1$ となる。こうして主定理の証明の為に必要な，次の第3の基本命題が得られた：

4.3.　命題. ある $0<a<\infty$ に対して $\dim(\mu,\Omega_a)\geq2$ ならば，ある $b\in(a,\infty)$ があって $\dim(\mu,\Omega_b)\geq1$ となる。

4.4.　球族の正則被覆性. 中心 a 半径 $r>0$ の球 $B(a,r)$ を考える。その表面 $S(a,r)=\partial B(a,r)$ は中心 a 半径 $r>0$ の球面である。$S(a,r)$ 上の2点 ξ,η の測地距離を $d_{S(a,r)}(\xi,\eta)$ と記す。$S(a,r)$ の北極と南極の間の測地距離を $\delta(a,r)$ とかく。$\zeta\in S(a,r)$ と $\delta\in(0,\delta(a,r))$ に対して，$S(a,r)$ 上の中心 ζ 半径 δ の球帽とは $\{\xi\in S(a,r):d_{S(a,r)}(\xi,\zeta)<\delta\}$ のことで，これを $\beta(\zeta,\delta)=\beta(\zeta,\delta;S(a,r))$ と記す。$\overline{\beta}(\zeta,\delta)=\{\xi\in S(a,r):d_{S(a,r)}(\xi,\zeta)\leq\delta\}$ である。どんな $\eta\in S(a,r)$ とどんな $0<\delta<\delta(a,r)$ に対しても有限個の点 $\xi_i\in\overline{\beta}(\eta,\delta)\backslash\beta(\eta,\delta)$ $(1\leq i\leq m)$ をうまくえらべば $\overline{\beta}(\eta,\delta)\subset\cup_{i=1}^m\overline{\beta}(\xi_i,\delta)$ と出来る。この様な m の最小値を $m(\eta,\delta)$ とする。あらゆる $a\in\mathbf{R}^d$, $r\in(0,\infty)$, $\eta\in S(a,r)$ 及び $\delta\in(0,\delta(a,r))$ に対する $m(\eta,\delta)$ の最大値を $M=M(d)$ とすると，$M(d)$ は $2\leq M(d)<\infty$ である様な自然数で，これは $\mathbf{R}^d$ 固有の空間定数である。今一つ，$(1-\sin\theta)/(1+\sin\theta)^{d-1}\geq1/2$ となる様な $\theta\in(0,\pi/2)$ の最大なものを $\theta(d)$ とする。$\theta(d)$ も $0<\theta(d)<\pi/4$ となるような $\mathbf{R}^d$ 固有の空間定数である。

$0<\theta<\pi/2$, $0<r<\infty$ に対して

$$C(\zeta,a\,;\,\theta,r)=\{x\in\mathbf{R}^d:(\zeta-x)\cdot(\zeta-a)\le|\zeta-x||\zeta-a|\cos\theta,\ |\zeta-x|\le r\}$$

は頂点ζ，中心線$\overline{a\zeta}$，開き角2θの錐とζ中心，半径rの球との共通部分であるいわゆる**切頭錐**である。これは$B(a,r)$に頂点$\zeta\in S(a,r)=\partial B(a,r)$を除いて含まれている。

Γを$\mathbf{R}^d$内のC^2超曲面とする。次の2条件がみたされるとき，Γは球$B(a,r)$を**正則分離する**と言うことにする：$B(a,r)\backslash\Gamma$及び$B(a,r/2)\backslash\Gamma$のいずれも丁度2つの成分からなる；$S(a,r)\cap\Gamma$は$S(a,r)$のC^2閉超曲面である。Γが$B(a,r)$と**正則交差する**とは，以下の四性質をみたす様な$\zeta\in S(a,r)$と2正数$\varepsilon_1,\varepsilon_2<r$が定まることである：$\Gamma+t(\zeta-a)$ $(|t|<\varepsilon_1)$は$B(a,r)$を正則分離する；$|t|\le\varepsilon_1$となる任意のtに対して，$|t'|\le\varepsilon_1$かつ$t<t'$となるすべてのt'について$\Gamma^{t'}:=(\Gamma+t'(\zeta-a))\cap B(a,r)$は$B(a,r)\backslash\Gamma^t$の同一成分内にある；どの$\xi\in\Gamma^t$ $(|t|\le\varepsilon_1)$に対しても，ξを通り$\zeta-a$に平行な直線はΓ^tと点ξにおいてのみ交わる；

$$\Gamma\cap\big(\overline{B}(a,r)\backslash B(a,r-\varepsilon_2)\big)\subset\bigcup_{\zeta\in\Gamma\cap S(a,r)}C(\zeta,a;\theta(d),r).$$

最後に球族$\mathcal{B}=\{B(a_i,r_i):i=1,\cdots,n\}$が$\Gamma$を**正則被覆する**とは次の2条件が満たされることとする：Γは$B(a_i,r_i)$と正則交差する$(1\le i\le n)$; $\cup_{j=1}^n B(a_j,r_j/2)\supset\Gamma$。

4.5. 調和関数の境界値. $S(a,r)\backslash\Sigma$が2つの成分S_1,S_2からなる様な$S(a,r)$上のC^2閉超曲面Σをとる。Σの$\mathbf{R}^d$内の近傍となる領域Yをとる。$Y\cap B(a,r)$上の有界調和（即ち0−調和）関数u_i $(i=1,2)$で，u_iは$Y\cap(S(a,r)\backslash\Sigma)$で境界値をもち，それが$Y\cap(S_i\cup\Sigma)$上$\Sigma$で1となる様な連続拡張をもち，又$Y\cap(S_j\cup\Sigma)$ $(j\in\{1,2\}\backslash\{i\})$上$\Sigma$で0となる様な連続拡張をもつものとする。次の結果が得られる：

4.6. 補題. **各$\xi\in\Sigma$について$C_\xi=C(\xi,a;\theta(d),r)\cap Y$とするとき，各$i=1,2$について，**

$$\frac{1}{2M(d)}\le\liminf_{x\in C_\xi,\ x\to\xi}u_i(x)\le\limsup_{x\in C_\xi,\ x\to\xi}u_i(x)\le1-\frac{1}{2M(d)},\tag{4.7}$$

ここに上式の上，下極限は$\xi\in\Sigma$について一様である。

証明：最も左の不等式を示せば十分である。最も右の不等式は$1-u_i$をu_j $(j\ne i)$と思ってu_jに最左辺を適用するとu_iに対しての最右辺が出る。そこでw_iを$B(a,r)$上S_iの調和測度とする$(i=1,2)$，即ちw_iはS_iで境界値1, S_j $(j\in\{1,2\}\backslash\{i\})$で境界値0をもつ$B(a,r)$上のただ1つの有界調和関数である（$\Sigma$の2−容量は0であることに注意）。$w_i$に対して(4.7)の最左辺が言えたとする。$u_i-w_i$の$Y\cap(S(a,r)\backslash\Sigma)$上の境界値は，$\Sigma$で0となる様な$Y\cap S(a,r)$への連続拡張をもつから，再び$2-\mathrm{cap}(\Sigma)=0$に注意して，

$$\lim_{x\in Y\cap B(a,r),x\to\xi}(u_i-w_i)(x)=0$$

となる。ここで極限は$\xi\in\Sigma$に関して一様である。よって$u_i=(u_i-w_i)+w_i$とみて，w_iに対する(4.7)の最左辺の成立からu_iに対するものが出る。故にw_1に対して(4.7)の最左辺を示せばよい。ΣはC^2級ゆえ各$\xi\in\Sigma$によらぬ$\delta>0$があって，S_1内の測地球$\beta=\beta(\eta,\delta)$で$\overline{\beta}\cap\Sigma=\{\xi\}$となるものがとれる。$\beta_0=\beta(\xi,\delta)$とする。$\beta(\xi,\delta)$の周上$\eta=\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_M$ $(M=M(d))$を適当にとると$\beta(\xi,\delta)\subset\cup_{i=1}^M\overline{\beta}(\eta_i,\delta)$となる。$\beta(\eta_i,\delta)$の$B(a,r)$に関する調和測度を$v_i$ $(i=1,\cdots,M)$, $\beta_0=\beta(\xi,\delta)$の$B(a,r)$に関する調和測度を$v_0$とする。$B(a,r)$上$\Sigma_{i=1}^M v_i\ge v_0$であるから，特に

$$\sum_{i=1}^M v_i(x)\ge v_0(x)\ \ \big(x\in\overline{a\xi}\big).\tag{4.8}$$

aを中心とする$\overline{a\xi}$の周りのη_1をη_kに移す回転をτ_kとすると$(k=1,\cdots,M)$, $v_k(x)=v_1(\tau_k^{-1}x)$ $(x\in B(a,r))$であり，$x\in\overline{a\xi}$なら$\tau_k^{-1}x=x$だから$v_i(x)=v_1(x)$ $(x\in\overline{a\xi},\ i=1,\cdots,M)$となり，(4.8)により$Mv_1(x)\ge v_0(x)$ $(x\in\overline{a\xi})$となる。v_0はξで境界値1をもつから

$$\varliminf_{x\in\overline{a\xi},x\to\xi}v_1(x)\ge1/M$$

となる。下極限は$\xi\in\Sigma$に関して一様である。$B(a,r)$上$w_1\ge v_1$だから，上式より，$\xi\in\Sigma$に関して一様の意味で

$$\varliminf_{x\in\overline{a\xi},x\to\xi}w_1(x)\ge1/M.\tag{4.9}$$

$x\in C\setminus\{\xi\}$ を十分 ξ に近くとると，適当な $y=y(x)\in\overline{a\xi}\setminus\{\xi\}$ があって $x\in\overline{B}(y,|y-\xi|\sin\theta(d))$ （$\subset C$）となる。$w_1\in H(B(y,|y-\xi|))^+$ とみてポアソンの積分表示を使うと

$$w_1(x)\geq\frac{1+\sin\theta(d)}{(1-\sin\theta(d))^{d-1}}w_1(y)\geq\frac{1}{2}w_1(y)$$

となる（ハルナック不等式)。これより，(4.9) を使って，$\xi\in\Sigma$ に関して一様の意味で

$$\begin{aligned}\liminf_{x\in C_\xi,x\to\xi}w_1(x)&\geq\frac{1}{2}\liminf_{x\in C_\xi,x\to\xi}w_1(y(x))\\&\geq\frac{1}{2}\liminf_{z\in C_\xi,z\to\xi}w_1(z)\geq 1/2M\end{aligned}$$

□

4.10. 定理4.2の証明. 球 $B(a,\varepsilon)$ の μ のカトー定数について $\kappa(B(a,\varepsilon),\mu)\downarrow 0$ ($\varepsilon\downarrow 0$) を想起する。$S(0,1)\subset\mathbf{R}^d$ の曲面積を σ_d とするとき，$c_d:=2\pi$ ($d=2$), $c_d:=\sigma_d$ ($d-2$) ($d\geq 3$) とおくと，領域 A がグリーン関数（即ち0−グリーン関数）$G^A(x,y)$ をもつとき $G^A(x,y)\sim(1/c_d)g(x-y)$ ($x\to y$) である。

ある $0<r_0<\infty$ に対して (μ,Ω_{r_0}) が双曲型ならば，ある正数 η が見つかって $(\mu,\Omega_{r_0+\eta})$ も又双曲型となることを以下証明する。先ず $A_1:=\Omega_{r_0}=B(0,r_0)\setminus\{0\}$, $\Gamma_1:=\partial A_1=S(0,r_0)$ とおく。補題2.6により，A_1 上に μ −単位 $w={}_1w(={}_\mu e^{A_1})$ が存在する。各 $a\in\Gamma_1$ に対し，$\varepsilon>0$ を十分小にとると，次の2条件がみたされる：Γ_1 は $B(a,\varepsilon)$ と正則交差する；

$$\kappa(B(a,\varepsilon),\mu)\Big(\sup_{B(a,\varepsilon)\cap A_1}w\Big)\Big(\sup_{B(a,\varepsilon)}{}_\mu H_1^{B(a,\varepsilon)}\Big)<1/4M. \tag{4.11}$$

$\varepsilon>0$ を十分小さくとれば (4.11) の左辺の最後の因子の存在と，その $a\in\Gamma_1$ に関する一様有界性が成り立つことは $3G$ 定数などを使ってすぐわかる。この様な $0<\varepsilon<r_0$ を1つ固定して $r(a)$ と記す：$0<r(a)<r_0$。Γ_1 の完閉性により有限個の点 $a_i\in\Gamma_1$ ($i=1,\cdots,n$) があって

$$\bigcup_{i=1}^n B(a_i,r(a_i)/2)\supset\Gamma_1$$

と出来る。$r(a_i)=r_i$ ($i=1,\cdots,n$) とかく。すると $\mathcal{B}=\{B(a_i,r_i):1\leq i\leq n\}$ は Γ_1 を正則被覆する。そこでの定数 $\varepsilon_i=\varepsilon_i(B(a_1,r_1),\Gamma_1)$ ($i=1,2$) と $\zeta=\zeta(B(a_1,r_1),\Gamma_1)\in\partial B(a_1,r_1)$ を固定する。$0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$ としておく。先ず $D:=D_0:=B(a_1,r_1)\cap A_1$ とおく。$\Gamma_1^t=(\Gamma_1+t(\zeta-a_1))\cap B(a_1,r_1)$ とかくとき，$0<t<\varepsilon_1$ に対して $B(a_1,r_1)\setminus\Gamma_1^t$ の D を含む成分を D_t と記す（必要なら ζ を $2a-\zeta$ でおきかえる)。∂D_t を3つの部分 Γ_1^t と $\Lambda^t:=(\partial D_t)\cap A_1$ と $\Sigma^t:=\partial D_t\setminus(\overline{\Gamma}_1^t\cup\overline{\Lambda}^t)$ に分解する。

∂D_t 上の境界関数 f_t を Λ^t 上 $f_t:=w$, $\overline{\Sigma}^t\cup\overline{\Gamma}_1^t$ 上 $f_t:=0$ で定める。(4.11) から $c_d^{-1}\kappa(D_t,\mu)<1/4M$ であることにより，$w_t={}_\mu H_{f_t}^{D_t}$ が求まり f_t の連続点 $z\in\partial D_t$ に於いては w_t は境界値 $f_t(z)$ をとる有界 μ −調和関数である。又 $\omega_t:={}_0H_{f_t}^{D_t}$ も同様の性質をもつ。そこで積分作用素

$$(T_t\varphi)(x)=\int_{D_t}G^{D_t}(x,y)\varphi(y)d\mu(y)$$

を考えると，D_t 上

$$w_t(x)=\omega_t(x)-(T_tw_t)(x)$$

となるので，(4.11) により，$\Gamma_1^0=\Gamma_1\cap B(a_1,r_1)$ として

$$\sup_{\Gamma_1^t}w_t\leq\sup_{\Gamma_1^t}\omega_t+1/4M \tag{4.12}$$

となる。$D_{\varepsilon_2}\setminus D_t$ 上 $\omega_t\equiv 0$ としておく。すると $(\omega_t)_{t\downarrow 0}$ は減少列で D_{ε_2} 上 $0\leq\omega_t<\omega_{\varepsilon_2}=:\omega$ ($0<t\leq\varepsilon_2$) となる。$C_\xi:=C(\xi,a_1;\theta(d),r_1)$ ($\xi\in\Gamma_1\cap S(a_1,r_1)$) とおく。補題4.6により

$$\limsup_{x\in C_\xi,x\to\xi}\omega(x)\leq 1-1/2M$$

がすべての $\xi\in\Gamma_1\cap S(a_1,r_1)$ に対して一様上極限の意味で成立する。従ってある $\varepsilon_3\in(0,\varepsilon_2)$ がみつかって $\Gamma\cap(B(a_1,r_1)\setminus\overline{B}(a_1,r_1-\varepsilon_3))$ 上

(4.13) $$0<\omega_t\leq\omega_{\varepsilon_2}\leq 1-1/3M \quad (0<t<\varepsilon_2)$$

が成立する。次に

(4.14) $$\lim_{t\downarrow 0}\Bigl(\sup_{\Gamma_1\cap\overline{B}(a_1,r_1-\varepsilon_3)}\omega_t\Bigr)=0$$

を示す。ディニイの定理を使えばよいから，任意の $y\in\Gamma_1\cap\overline{B}(a_1,r_1-\varepsilon_3)$ をとめるごとに $\omega_t(y)\downarrow 0$ $(t\downarrow 0)$ を言えばよい。y を通り $\zeta-a_1$ に平行な直線を ℓ とし，ℓ への距離が $r_1/4$ より小である点からなる無限円柱の Γ_1^0 と Γ_1^{-c} との間の部分を E とする，但し $c>0$ は十分小にとって $\overline{E}\subset B(a_1,r_1)$ となる様にする。

$$K:=\sup_{B(a_1,r_1)\cap A_1} w$$

とおく。E の上底 $\overline{E}\cap\Gamma_1=\overline{E}\cap\Gamma_1^0$ で境界値 0，$\partial E\backslash(\overline{E}\cap\Gamma_1)$ で境界値 K と定めた有界調和関数を h とする。$E_t=E+t(\zeta-a_1)$ とおくとき，$0<t<\varepsilon_1$ を十分小にとって $\overline{E}\cap\Gamma_1\subset E_t\subset\overline{E}_t\subset B(a_1,r_1)$ となる t ばかりを考える。

$$h_t(x):=h(x-t(\zeta-a_1))\quad(x\in E_t)$$

とおくと，h_t は $E_t\cap\Gamma_1^t$ で境界値 0，$\partial E_t\backslash(\overline{E}_t\cap\Gamma_1^t)$ で境界値 K となる有界調和関数である。境界値を較べて E_t 上 $\omega_t\leq h_t$ となるので

$$0<\omega_t(y)\leq h_t(y)=h(y-t(\zeta-a_1))$$

となる。$y-t(\zeta-a_1)\in E$ は正則境界点 y に $t\to 0$ のとき収束するので $h(y-t(\zeta-a_1))\to 0$ $(t\downarrow 0)$ となり，上式から $\omega_t(y)\to 0$ $(t\downarrow 0)$ となる。よって (4.13),(4.14) よりある $t_1\in(0,\varepsilon_2)$ があって，$\sup_{\Gamma_1^0}\omega_{t_1}\leq 1-1/3M$ となる。(4.12) から $\sup_{\Gamma_1^0}w_t\leq 1-1/12M$ が出る。従って Γ_1^0 上

$$0<w_t\leq 1-1/12M<1=w$$

となる。ゆえに $(\partial D)\backslash\Gamma_1^0$ 上 $w_{t_1}=w$，Γ_1^0 上 $w_{t_1}<w$ だから D 上 $w_{t_1}<w$ となる。そこで，$A_1\backslash D_{t_1}$ では $s=w$，D_{t_1} では $s=w_{t_1}$ とおくと，貼付補題で s は $A_1\cup D_{t_1}$ 上の μ －優調和関数でそこで $s>0$ である。しかも $A_1\cup D_{t_1}$ で s は μ －調和でない。しからざれば，A_1 上 w，s 共に μ －調和で $w-s\geq 0$ で $A_1\backslash D$ で $w-s\equiv 0$ なので，ハルナックの不等式により A_1 上 $w\equiv s$ となるが，これは D 上 $s=w_t<w$ に矛盾する。ゆえに $A_1\cup D_{t_1}$ 上正値 μ －ポテンシャルが存在することになるから，$A_1\cup D_{t_1}$ 及びそのどんな部分領域 Q (但しある $0<b<\infty$ があって $\overline{\Omega}_b\subset Q\subset A_1\cup D_{t_1}$ とする) 上にも μ －グリーン関数が存在する。∂Q を滑らかとすると，補題2.6により Q 上 μ －単位が存在する。

さて A_1 を $A_1\cup D_{t_1}$ の中で少しふくらませて C^2 境界をもつ穴空き位相球 $A_2(A_1\subset A_2\subset A_1\cup D_{t_1})$ が次の3条件をみたす様にとることが出来る：$\Omega_\infty\supset A_2\supset A_1\cup(\Gamma_1\cap\overline{B}(a_1,r_1/2))$; $\Gamma_2:=\partial A_2$ を $\mathcal{B}$ は正則被覆する；A_2 上 μ －単位 ${}_2w$ があり，すべての $B(a,\varepsilon)\in\mathcal{B}$, $w={}_2w$ に対して (4.11) が成り立つ。$(A_1,\Gamma_1,{}_1w,B(a_1,r_1)\cap A_1)$ の代わりに $(A_2,\Gamma_2,{}_2w,B(a_2,r_2)\cap A_2)$ に対して上と全く同様の議論をくりかえすことにより，C^2 級の境界をもつ穴空き位相球 A_3 を次の3条件を満たす様にとれる：$\Omega_\infty\supset A_3\supset A_2\cup(\Gamma_2\cap\overline{B}(a_2,r_2/2))$; $\Gamma_3:=\partial A_3$ を $\mathcal{B}$ は正則被覆する；A_3 上 μ －単位 ${}_3w$ があり，すべての $B(a,\varepsilon)\in\mathcal{B}$, $w={}_3w$ に対して (4.11) が成り立つ。これをくりかえして C^2 級の境界をもつ穴空き位相球 A_i $(1\leq i\leq n+1)$ の有限列 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_{n+1}$ を，一般に次の3条件をみたす様にとれる $(2\leq i\leq n+1)$:

(i) $A_i\supset A_{i-1}\cup(\Gamma_{i-1}\cap\overline{B}(a_{i-1},r_{i-1}/2))$;

(ii) $\Gamma_i:=\partial A_i$ を $\mathcal{B}$ は正則被覆する；

(iii) A_i 上に μ －単位 ${}_iw$ があり，すべての $B(a,\varepsilon)\in\mathcal{B}$, $w={}_iw$ に対して (4.11) が成り立つ。

条件 (i) から一般に $\Gamma_1\cap\overline{B}(a_{i-1},r_{i-1}/2)\subset A_i$ $(2\leq i\leq n+1)$ となるから $A_{n+1}\supset\Gamma_1$ となり，$A_{n+1}\supset\overline{A}_1$ となる。ゆえに適当な $\eta>0$ をとれば $\overline{A}_1\subset\Omega_{r_0+\eta}\subset A_{n+1}$ である様に出来る。A_{n+1} は μ －単位をもつから μ －グリーン関数をもち，従って $\Omega_{r_0+\eta}$ も双曲型となることがわかる。 □

5．相対ピカール次元の変動

5.1. 主定理の証明（分類）. $\Sigma_\mu=\{\dim(\mu,\Omega_t):0<t<\infty\}$ とおくとき命題2.2の帰結として，Σ_μ は少なく共1つの濃

度を含み，又高々３つの濃度を含むことがわかっている。Σ_μ が１元集合，即ち $\Sigma_\mu=\{\xi\}$ であると，μ は type I である。次に Σ_μ が２元集合の場合を考える。Σ_μ の２元 ξ，η 中大きい方を ξ とすると $\xi\geq 1$ である。もし $\xi\geq 2$ ならば $T=\{t\in(0,\infty):\dim(\mu,\Omega_t)=\xi\}$ とおくとき，Σ_μ が２元を含むことから，命題2.2により $T=(0,a)$ 又は $T=(0,a]$ $(0<a<\infty)$ となり，$(0,\infty)\backslash T$ 上 $\dim(\mu,\Omega_t)=\eta$ である。命題2.2により $\eta\geq 1$ ではあり得ないから，$\eta=0$ となる。命題3.2によれば $\dim(\mu,\Omega_a)\geq 1$ であるが，もし $\dim(\mu,\Omega_a)=1$ とすると Σ_μ が $0,1,\xi$ の３元からなることになって矛盾が出るゆえ，$\dim(\mu,\Omega_a)\geq 2$ である。再び命題2.2により $\dim(\mu,\Omega_a)\geq\xi$ となる。故に $T=(0,a]$ でなければならぬ。すると命題4.3により $a<b$ であるようなある b があって $\dim(\mu,\Omega_b)\geq 1$ となり $\dim(\mu,\Omega_t)=0$ $(t\in(0,\infty)\backslash T)$ に反する。以上により $\xi=1$, $\eta=0$ であって，$\dim(\mu,\Omega_t)=1$ $(0<t<a)$, $\dim(\mu,\Omega_t)=0$ $(a<t<\infty)$ となる。命題3.2によれば $\dim(\mu,\Omega_a)=1$ となり，μ は type II であることがわかった。最後に，Σ_μ が３元からなるとすると，命題2.2によれば，$\Sigma_\mu=\{0,1,\xi\}$ $(\xi\geq 2)$ である。再び命題2.2によれば，μ が type III でなければならぬことがわかる。 □

5.2. 主定理の証明（存在）. type I の μ も type II の μ も type III の μ も，いずれも存在すること，更に type I の場合，任意に与えた $\xi\in\Xi=\{0,1,2,\cdots,\aleph_0,\aleph\}$ に対して $\dim(\mu,\Omega_t)\equiv\xi$ となる type I の μ が存在することを，又 type III の場合の相対ピカール次元の値域として，任意に与えた $\xi\in\Xi\backslash\{0,1\}$ に対して $\{0,1,\xi\}$ となる type III の μ が存在することを以下例示する。λ は $\mathbf{R}^d$ 上のルベーグ測度とする。

5.3. 例（type I）：任意の正数 α を固定するとき，$d\mu(x)=-|x|^{-(2+\alpha)}d\lambda(x)$ により μ を与えると，これは $\mathbf{R}_0^d=\mathbf{R}^d\backslash\{0\}$ 上のカトー族のラドン測度であるが，すべての $a\in(0,\infty)$ に対して $\dim(\mu,\Omega_a)\equiv 0$ である（[10]参照）。

5.4. 例（type I）：$\mu=0$ である様な μ に対しては，すべての $a\in(0,\infty)$ に対して $\dim(\mu,\Omega_a)\equiv 1$ である（[1], [20, 21] 参照）。これはしばしばピカール原理と呼ばれる古典的結果である。

5.5. 例（type I）：どんな $\xi\in\Xi\backslash\{0,1\}$ に対しても，すべての $a\in(0,\infty)$ で $\dim(\mu,\Omega_a)\equiv\xi$ となるカトー族のラドン測度 μ で $d\mu(x)=P(x)d\lambda(x)$ $(P\in C^\infty(\mathbf{R}^d)^+$, ∞ の近傍で $P\equiv 0)$ の形のものが存在する（[17]参照）。

5.6. 例（type II）：$\mu=-\lambda$ である様な μ をとると，ある $a_0\in(0,\infty)$ が存在して，$\dim(\mu,\Omega_a)\equiv 1$ $(a\in(0,a_0])$, $\dim(\mu,\Omega_a)\equiv 0$ $(a\in(a_0,\infty))$ となる。ここに $a_0=j_{(d-2)/2,1}$ は $(d-2)/2$ 次の第１種ベッセル関数の最小の正値零点であり，例えば $j_{0,1}=2.4048256$, $j_{1,1}=3.8317060$, $j_{2,1}=5.1356223$ 等（[23]参照）である。

5.7. 例（type III）：任意の $\xi\in\Xi\backslash\{0,1\}$ をとるとき，ξ に対する例5.5の様な type I の測度 μ_0 をとる。μ_0 は ∞ の近傍で $\mu_0=0$ にとってあるから $\mathbf{R}^d\backslash\Omega_c$ で $\mu_0=0$ とする $(0<c<\infty)$。Ω_c 上 $\mu=\mu_0$, $\mathbf{R}^d\backslash\Omega_c$ 上 $\mu=-\lambda$ とおくと，これは明らかに $\mathbf{R}_0^d$ 上のカトー族の一般符号ラドン測度である。例5.6により，$\mathbf{R}^d\backslash\Omega_c$ 内に含まれる様な ∞ の近くの点中心，十分大きな半径の球の内部には正値 μ－調和関数は存在せぬので，$b\in(c,\infty)$ を Ω_b が上の球を含むくらい大きくとると，$\dim(\mu,\Omega_b)=0$ となる。他方 $\dim(\mu,\Omega_c)=\dim(\mu_0,\Omega_c)=\xi$ である。ゆえに Σ_μ が 0 と $\xi\geq 2$ を含むから μ は type I でも type II でもあり得ない。こうして μ は type III であることがわかる。

以上で存在部分の証明は完了である。 □

付録：球の $3G$ 定数

本文第３章で使った $3G$ 定数（3.3節）（(4.11) も参照）に関連した所を述べる。$\mathbf{R}^d$ $(d\geq 2)$ の変形基本調和関数を g と記した，即ち $d\geq 3$ ならば本来の基本調和関数 $g(x)=1/|x|^{d-2}$ そのものであるが，$d=2$ のときは $g(x)=\max(\log(1/|x|),1)$ の様に修整が施されていた。V をグリーン関数（即ち0－グリーン関数）$G^V(\cdot,\cdot)$ を持つ $\mathbf{R}^d$ の領域（即ち**双曲領域**）とする。すべての $x,y,z\in V$ について

$$\frac{G^V(x,z)G^V(z,y)}{G^V(x,y)}\leq\gamma(V)(g(x-z)+g(z-y)) \tag{1}$$

となる様な最小の定数 $\gamma(V)\in(0,\infty]$ が双曲領域 V の **$3G$ 定数**で不等式 (1) を V 上の **$3G$ 不等式**と言う。２数

$a, b>0$ について

$$\max(a,b) \leq a+b \leq 2\max(a,b)$$

であるから，$\gamma(V)$ と (1) の不等式を，すべての $x,y,z \in V$ について

$$\frac{G^V(x,z)G^V(z,y)}{G^V(x,y)} \leq \bar{\gamma}(V)\max(g(x-z), g(z-y)) \tag{2}$$

となる様な最小の定数を $\bar{\gamma}(V) \in (0,\infty]$ とすると言う形に定式化しても同値である，即ち，$\gamma(V)<\infty$ と $\bar{\gamma}(V)<\infty$ は同値である。**V が有界リプシッツ領域ならば $\gamma(V)<\infty$ である**（Cranston-Fabes-Zhao の定理［8］）と言うのが既知の最良の結果であり，最近の学術書 Chung-Zhao［6］に詳しい証明が述べられているが主張の深さの故引用が多数必要で当然ながら完全に自己完結なものを与えることは無理である。

実は V が中心 a 半径 $0<r<\infty$ の球 $B(a,r)=\{x \in \mathbf{R}^d : |x-a|<r\}$ の場合 $\gamma(B(a,r))<\infty$ となることだけでも非常に有用であるが，その証明にかぎれば，極めて初等的に出来るので，ここに記録しておきたい。$d=2$ の場合と $d \geq 3$ の場合では証明が表面的にはすっかり異なるので別々に扱う。

3．球の $3G$ 定数の一様性． 応用上は $\gamma(B(a,r))<\infty$ だけでなく，$\gamma(B(a,r))$ が a に依存せぬこと及び $\gamma(B(a,r))=\mathcal{O}(1)$ $(r \downarrow 0)$，が極めて重要である。これについて先ず注意する。$d \geq 3$ の場合状況は極めて明朗である：すべての $a \in \mathbf{R}^d$, $0<r<\infty$ に関して

$$\gamma(B(a,r)) = \gamma(B(0,1)) \quad (d \geq 3) \tag{4}$$

となる。事実 $B(a,r)$ のグリーン関数 $G^{B(a,r)}(x,y)$ について

$$G^{B(a,r)}(x,y) = \frac{1}{r^{d-2}} G^{B(0,1)}\left(\frac{x-a}{r}, \frac{y-a}{r}\right) \quad (x,y \in B(a,r))$$

となること及び

$$g\left(\frac{x-a}{r}, \frac{z-a}{r}\right) = \frac{1}{r^{d-2}} g(x-z)$$

に注意すれば直ちにわかる。$d=2$ の場合は相対的にすっきりしない結論である：すべての $a \in \mathbf{R}^2$ に関して

$$\gamma(B(a,r)) \leq \gamma(B(0,1)) \quad (d=2;\ 0<r \leq 1), \tag{5}$$

従って少なく共 $\gamma(B(a,r))=\mathcal{O}(1)$ $(r \downarrow 0)$ は次元 $d \geq 2$ に関わらず常に正しい；$0<r \leq 1$ のときには (5) より弱い形ながら，一般の $0<r<\infty$ に対して，従って特に $r>1$ に対して

$$\gamma(B(a,r)) \leq (1+\max(\log r, 1))\gamma(B(0,1)) \quad (d=2;\ 0<r<\infty) \tag{6}$$

の形のものが成り立つ。実際 $d=2$ の故不変性

$$G^{B(a,r)}(x,y) = G^{B(0,1)}\left(\frac{x-a}{r}, \frac{y-a}{r}\right)$$

が成り立つ。それは良いけれど，$\max(\alpha,\beta)=\alpha \cup \beta$ とかくことにして，

$$g\left(\frac{x-a}{r} - \frac{z-a}{r}\right) = g\left(\frac{x-y}{r}\right) = \left(\log\frac{1}{|x-y|} + \log r\right) \cup 1$$

により，$0<r \leq 1$ なら $\log r \leq 0$ だから

$$g\left(\frac{x-a}{r} - \frac{z-a}{r}\right) < 1 \cup \log\frac{1}{|x-z|} = g(x-z)$$

により (5) が出る。一般に $0<r<\infty$ のとき

$$\left(\log\frac{1}{|x-z|} + \log r\right) \cup 1 \leq 1 \cup \log\frac{1}{|x-z|} + 1 \cup \log r$$

だから $g(x-z)+g(z-y) \geq 2$ に注意すると

$$g\left(\frac{x-a}{r}-\frac{z-a}{r}\right)+g\left(\frac{z-a}{r}-\frac{y-a}{r}\right)\leq g\,(x-z)+g(z-y)+2(1\cup\log r)$$
$$=(g(x-z)+g(z-y))\left(1+\frac{2(1\cup\log r)}{g(x-z)+g(z-y)}\right)$$
$$\leq(g(x-z)+g(z-y))(1+1\cup\log r)$$

となることから（6）がわかる。

いずれにしろ，$\gamma(B(0,1))<\infty$ を示しさえすれば，$\gamma(B(a,r))=\mathcal{O}(1)$（$r\downarrow 0$）の意味での一様性もついでに導かれる。こうして以下 $\gamma(B(0,1))<\infty$ の証明だけに集中する。

7．2次元球（円板）の3G定数． 以下単位球（円板）$B:=B(0,1)$ かつ B 上のグリーン関数 $G(x,y):=G^B(x,y)$ とかく。$\overline{B}(a,r)\subset B(b,\rho)$ である任意の2つの有限球（円板）$B(a,r)$ と $B(b,\rho)$ をとるとき $G^{B(b,\rho)}(x,y)=G((x-b)/\rho,(y-b)/\rho)$ の具体的な形を使うと，ある定数 $K=K(a,r,b,\rho)\geq 1$ が存在して，すべての $x,z\in B(a,r)$ に対して

$$K^{-1}G^{B(b,\rho)}(x,z)\leq g(x-z)\leq KG^{B(b,\rho)}(x,z)$$

となることがわかる。従って $\gamma(B(0,1))<\infty$ は，(1)，(2) の同値性と上の不等式により，次の結果と同値なことがわかる。

8．定理．空間の次元 $d=2$ とするとき，すべての $x,y,z\in B$ に対して

(9)
$$\frac{G(x,z)G(z,y)}{G(x,y)}\leq c\cdot\max\left(G^{B(0,2)}(x,z),G^{B(0,2)}(z,y)\right)$$

となる様な定数 $0<c<\infty$ が定まる。

証明：2次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ を複素平面 $\mathbf{C}$ と同一視すると

$$2\pi G(x,y)=\log\left|\frac{1-x\bar{y}}{x-y}\right|=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}\right)$$

の様に表現出来る。さて x, y, z の内2つが一致すると（9）は自明に成り立つから，x, y, z は互いに異なるものと仮定してよい。この様な x, y, z を任意に固定する。B から B への等角写像 $g=g_z$ を

$$g(t):=\frac{t-z}{1-\bar{z}t}$$

で与えると，グリーン関数の g－不変性

(10)
$$G(g(t_1),\,g(t_2))=G(t_1,\,t_2)$$

の成立は自明である。$g(z)=0$ が要点である。さて，$|t|\leq 1$ に於いて

(11)
$$G^{B(0,\,2)}(g(t),\,0)\leq c\prime G^{B(0,2)}(t,\,z)\ \ (c\prime:=(\log 2)/\log(5/4))$$

が成立することをみたい。この為には

(12)
$$\log\left|\frac{2(1-t\bar{z})}{t-z}\right|\leq c\prime\log\left|\frac{4-t\bar{z}}{2(t-z)}\right|\ \ (|t|\leq 1)$$

を示すとよい。両辺とも $(|t|<1)\backslash\{z\}$ で調和であり，$t\to z$ のとき，$c\prime>1$ だから（右辺）－（左辺）$\to\infty\geq 0$ である。$|t|=1$ のとき $t=e^{i\theta}$ とおいて

$$(\text{左辺})=\log 2$$

である。又 $|t|=1$，即ち $t=e^{i\theta}$ のとき

$$(\text{右辺})/c\prime=\frac{1}{2}\log\frac{|4e^{i\theta}-z|^2}{4|e^{i\theta}-z|^2}$$

である。さて

$$\min_\theta \frac{|4e^{i\theta}-z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}=\min_\theta \frac{|4e^{i\theta}-|z||^2}{|e^{i\theta}-|z||^2}$$

だから，$|z|=a$ として，$0<a<1$ だから

$$\frac{|4e^{i\theta}-a|^2}{|e^{i\theta}-a|^2}=\frac{16+a^2-8a\cos\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}=4+\frac{12-3a^2}{1+a^2-2a\cos\theta}\geq 4+\frac{12-3a^2}{(1+a)^2}>4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$$

により

$$(\text{右辺})/c'>\frac{1}{2}\log\frac{25}{4\cdot 4}=\log\frac{5}{4}$$

だから $|t|=1$，即ち $t=e^{i\theta}$ のとき

$$(\text{右辺})>\log 2$$

となり（12）の成立が示された。

さて任意の $x', y'\in B$ に対して

$$\frac{G(x',0)G(0,y')}{G(x',y')}\leq c''\cdot\max\left(G^{B(0,2)}(x',0),G^{B(0,2)}(0,y')\right) \tag{13}$$

が成り立つような定数 $c''>0$ が求められたとする。任意に定めてあった $x, y, z\in B$ に対して $g(x)=x'$, $g(y)=y'$, $g(z)=0$ であると見て，（13）から

$$\frac{G(g(x),g(z))G(g(z),g(y))}{G(g(x),g(y))}\leq c''\cdot\max\left(G^{B(0,2)}(g(x),0),G^{B(0,2)}(0,g(y))\right)$$

となる。(10),(11) を使えば $c=c'\cdot c''$ とすると（9）の成り立つことが解る。以上により（13）を示せばよい。文字を変えて，全ての $x, y\in B$（$x\neq y$, $x,y\neq 0$）に対して

$$\frac{G(x,0)G(0,y)}{G(x,y)}\leq c\cdot\max\left(G^{B(0,2)}(x,0),G^{B(0,2)}(0,y)\right) \tag{14}$$

となる様な定数 $c>0$ が選べることを示しさえすれば良い。上の（14）を示すのに x, y についての対称性があるので，以下

$$0<|x|\leq|y|<1$$

の時のみ考察すれば良い。以下この仮定のもとで（14）を3つの場合 i),ii),iii）に別けて示す。

場合 i）．$|y|^2\leq 3/4$ とする。

次の不等式を使う：$a\geq 1$ とすると，すべての $\xi\geq 0$ に対して

$$\log(1+a\xi)\leq a\log(1+\xi). \tag{15}$$

さて

$$2\pi G(x,0)=\log\frac{1}{|x|}=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1-|x|^2}{|x|^2}\right)$$

等の形に留意する。更に

$$4(1-|x|^2)\geq 4(1-|y|^2)\geq 4-4\cdot(3/4)=1$$

及び

$$|x-y|^2/|y|^2\leq(|x|+|y|)^2/|y|^2\leq(2|y|)^2/|y|^2=4$$

に注意して

$$\min\left(\frac{1-|x|^2}{|x|^2},\frac{1-|y|^2}{|y|^2}\right)\leq\frac{1-|y|^2}{|y|^2}\leq 4(1-|x|^2)\cdot\frac{1-|y|^2}{|y|^2}\cdot\frac{|x-y|^2}{|x-y|^2}$$
$$=4\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}\cdot\frac{|x-y|^2}{|y|^2}\leq 16\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}$$

となり（15）を使って

$$\min(2\pi G(x,0),2\pi G(0,y))=\frac{1}{2}\log\Bigl(1+\min\Bigl(\frac{1-|x|^2}{|x|^2},\frac{1-|y|^2}{|y|^2}\Bigr)\Bigr)$$
$$\leq\frac{1}{2}\log\Bigl(1+16\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}\Bigr)$$
$$\leq 16\cdot\frac{1}{2}\log\Bigl(1+\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}\Bigr)=16\cdot 2\pi G(x,y)$$

となる。よって

$$G(x,0)G(0,y)=\min(G(x,0),G(0,y))\cdot\max(G(x,0),G(0,y))$$
$$\leq 16G(x,y)\max\bigl(G^{B(0,2)}(x,0),G^{B(0,2)}(0,y)\bigr).$$

場合 ii)．$|y|^2>3/4$ とし，更に $|x|\leq 1/2$ とする。
この時は，ハルナック不等式により，定数 $\bar{c}$ があって

$$G(y,0)\leq\bar{c}G(y,x)\quad(|x|\leq 1/2)$$

となる。よって

$$G(x,0)G(0,y)\leq\bar{c}(G(x,y))G(x,0)$$
$$\leq\bar{c}G(x,y)\max\bigl(G^{B(0,2)}(x,0),G^{B(0,2)}(0,y)\bigr).$$

場合 iii)．依然 $|y|^2>3/4$ であるが，残る所の $|x|>1/2$ とする。
次の2つの不等式を使う：

(16)
$$\log(1+\xi)\leq\xi\ (\xi\geq 0),\ \log(1+\xi)\geq\frac{1}{2}\xi\ (0\leq\xi\leq 1).$$

さて $1/2<|x|\leq|y|$ に注意する。

$$\log\frac{1}{|x|}=\log\Bigl(1+\frac{1-|x|}{|x|}\Bigr)\leq\frac{1-|x|}{|x|}\leq 2(1-|x|)$$

等に依れば

$$4\pi^2G(x,0)G(0,y)=\log\frac{1}{|x|}\cdot\log\frac{1}{|y|}\leq 4(1-|x|)(1-|y|)$$

である。他方 $(1-|x|)(1-|y|)/(|y|+|x|)\leq(1/2)(1/2)/(1/2+1/2)=1/4<1$ だから

$$2\pi G(x,y)=\frac{1}{2}\log\Bigl(1+\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}\Bigr)$$
$$\geq\frac{1}{2}\log\Bigl(1+\frac{(1-|x|)(1+|y|)}{|x|+|y|}\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x|+|y|}\Bigr)\geq\frac{1}{2}\log\Bigl(1+\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x|+|y|}\Bigr)$$
$$\geq\frac{1}{4}\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x|+|y|}\geq\frac{1}{8}(1-|x|)(1-|y|)$$

となる。ゆえに

$$4\pi^2G(x,y)\max\bigl(G^{B(0,2)}(x,0),G^{B(0,2)}(0,y)\bigr)$$
$$=2\pi G(x,y)\max\Bigl(\log\frac{2}{|x|},\log\frac{2}{|y|}\Bigr)\geq 2\pi G(x,y)\log 2$$
$$\geq\frac{\log 2}{8}(1-|x|)(1-|y|)\geq\frac{\log 2}{32}4\pi^2G(x,0)G(0,y)$$

により

$$\frac{G(x,0)G(0,y)}{G(x,y)}\leq\frac{32}{\log 2}\max\bigl(G^{B(0,2)}(x,0),G^{B(0,2)}(0,y)\bigr)$$

となり証明は完了する。 □

17. d 次元球 ($d\geq 3$) の $3G$ 定数． 前と同様にして d 次元 ($d\geq 3$) 単位球 $B(0,1)=:B$ とし，そのグリーン関数を

$G^B(x,y)=:G(x,y)$ とする。$\gamma(B(0,1))<\infty$ を示すのに (1) でなく (2) の形を使う。

18. 定理. 空間の次元 $d\geq 3$ とするとき，すべての $x, y, z\in B$ に対して

$$\frac{G(x,z)G(z,y)}{G(x,y)}\leq C\cdot\max(g(x-z),g(z-y)) \tag{19}$$

となる様な定数 $0<C<\infty$ が定まる。

証明：記号 c_d は $c_d=2\pi$ ($d=2$), $(d-2)\sigma_d$ ($d\geq 3$; σ_d は単位球の表面積) を意味した。今は $d\geq 3$ のみに注目する。又 x^* は ∂B に関する $x\in B\setminus\{0\}$ の反転とする，即ち $x^*=x/|x|^2$. $0^*=\infty$, $\infty^*=0$ とする。さて $g(x-y)$ を $G^{\mathbf{R}^d}(x,y)$ と看做したいので $c_d^{-1}g$ を改めて g とかくことにしても (19) に本質的変更はない。そうした上で

$$c_d g(x-y)=|x-y|^{2-d}$$

及び

$$c_d G(x,y)=|x-y|^{2-d}-|x|^{2-d}|y-x^*|^{2-d}$$

であることをまず確認する。

先駆的な不等式として，全ての $x,y,z\in\mathbf{R}^d$ に対して

$$\frac{g(x-z)g(z-y)}{g(x-y)}\leq C_1\cdot\max(g(x-z),g(z-y))\quad\left(C_1=2^{d-2}\right) \tag{20}$$

となることを示す。2点 x, y といま1つの点 z とみて $|x-y|\leq|x-z|+|y-z|$ だから，$|x-y|\leq 2|x-z|$ 又は $|x-y|\leq 2|y-z|$ のいずれかが成立すると言うことが重要な着眼点である。(20) における x, y の対称性により $|x-y|\leq 2|x-z|$ が成立するとして良い。すると順次

$$|x-y|^{d-2}\leq 2^{d-2}|x-z|^{d-2},\ |x-z|^{2-d}\leq 2^{d-2}|x-y|^{2-d},\ g(x-z)\leq 2^{d-2}g(x-y)$$

により

$$g(x-z)g(z-y)\leq 2^{d-2}g(x-y)g(z-y)\leq 2^{d-2}g(x-y)\max(g(x-z),g(z-y))$$

となって (20) が示された。

次に (20) から (19) へ移行する所が，いま1つの要所である。その為 $G(x,y)/g(x-y)$ を計算する。単に内積の計算で

$$\begin{aligned}\frac{G(x,y)}{g(x-y)}&=1-\frac{|x|^{2-d}|y-x^*|^{2-d}}{|x-y|^{2-d}}=1-\left(\frac{|x|^2|y-x^*|^2}{|x-y|^2}\right)^{\frac{2-d}{2}}\\&=1-\left(1+\frac{|x|^2|y-|x|^{-2}x|^2-|x-y|^2}{|x-y|^2}\right)^{\frac{2-d}{2}}\\&=1-\left(1+\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}\right)^{\frac{2-d}{2}}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x-y|^2}\leq\frac{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}{|x-y|^2}\leq 4\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x-y|^2}$$

を使えば

$$1-\left(1+\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x-y|^2}\right)^{\frac{2-d}{2}}\leq\frac{G(x,y)}{g(x-y)}\leq 1-\left(1+4\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x-y|^2}\right)^{\frac{2-d}{2}} \tag{21}$$

となる。

こうして関数 $1-(1+r)^{(2-d)/2}$ ($0\leq r<\infty$) の研究が必要である。明らかに $0\leq 1-(1+r)^{(2-d)/2}\leq 1$ ($0\leq r<\infty$) である。R を任意に固定すると

$$\min\left(1-R^{\frac{2-d}{2}},\frac{d-2}{2}R^{-\frac{d}{2}}r\right)\leq 1-(1+r)^{\frac{2-d}{2}}\leq\min\left(1,\frac{d-2}{2}r\right)\quad(r\geq 0) \tag{22}$$

となる。これを示すには微分法による。

$$f(r)=\frac{d-2}{2}r-\left(1-(1+r)^{\frac{d-2}{2}}\right)$$

とおくと $f(0)=0$ で

$$f'(r)=\frac{d-2}{2}\left(1-(1+r)^{-\frac{d}{2}}\right)\geq 0$$

だから $f(r)\geq 0$ $(r\geq 0)$ となり右辺の不等式は示された。左辺を示すのに $0\leq r\leq R-1$ に於いて，再び

$$f(r)=1-(1+r)^{\frac{2-d}{2}}-\frac{d-2}{2}R^{-\frac{d}{2}}r$$

とおく。$f(0)=0$ であり，$0\leq r\leq R-1$ なら

$$f'(r)=\frac{d-2}{2}\left((1+r)^{-\frac{d}{2}}-R^{-\frac{d}{2}}\right)\geq 0$$

であるので $[0,R-1]$ 上 $f(r)\geq 0$，従って（22）の左辺の不等式は $[0,R-1]$ で正しい。$R-1\leq r\leq\infty$ ならば $1-(1+r)^{(2-d)/2}$ は増加関数だから

$$1-R^{\frac{2-d}{2}}=\left(1-(1+r)^{\frac{2-d}{2}}\right)_{r=R-1}\leq 1-(1+r)^{\frac{2-d}{2}}$$

となってやはり（22）の左辺は正しい。

もう１つの初歩的な不等式を用いる。もし $a\leq Ca', b\leq Cb'$ ならば

$$\min(a,b)\leq C\min(a',b') \tag{23}$$

となる（関係量の正負にかかわらぬ所が要点ながら下で使うのは皆正である）。$(\min(a,b), \min(a',b'))$ が (a,a') 又は (b,b') なら勿論正しい。(a,b') 又は (b,a') ならば

$$\min(a,b)=a\leq b\leq Cb'=C\min(a',b')$$

又は

$$\min(a,b)=b\leq a\leq Ca'=C\min(a',b')$$

だからである。

さて（21）へ帰る。$(1-|x|)(1-|y|)/|x-y|^2=r$ と記そう。（22）を使うが決まりを付けるため，$R=4$ にとっておく。（21）と（22）から

$$\min\left(1-2^{2-d},2^{-d-1}(d-2)r\right)\leq\frac{G(x,y)}{g(x-y)}\leq\min(1,2(d-2)r)$$

となる。ここへ（23）を使う。

$$C_0=\max\left(1,2(d-2),1/(1-2^{2-d}),1/2^{-d-1}(d-2)\right)$$

にとっておくと，結局

$$C_0^{-1}\min(1,r)\leq\frac{G(x,y)}{g(x-y)}\leq C_0\min(1,r)$$

となる。ゆえに

$$a(x,y)=\min\left(1,\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x-y|^2}\right)$$

とおけば

$$C_0^{-1}a(x,y)g(x-y)\leq G(x,y)\leq C_0a(x,y)g(x-y)\quad(x,y\in B) \tag{24}$$

となる。これにより（20）から（19）へ持って行く。

最後の一頑張りとして，任意の $x, y, z\in B$ について

$$a(x,z)a(z,y) \leq 12a(x,y) \tag{25}$$

となることを示そう。x, y の対称性により，$|x-y| \leq 2|x-z|$ の仮定のもとに（25）を示すとよい。更に $1-|z| \leq 3(1-|y|)$ とするならば，$a(z, y) \leq 1$ だから，

$$\begin{aligned} a(x, z)a(z, y) &\leq a(x, z) \leq \frac{(1-|x|)(1-|z|)}{|x-z|^2} \\ &\leq \frac{(1-|x|)\cdot 3(1-|y|)}{(2^{-1}|x-y|)^2} \leq 12\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x-y|^2} \end{aligned}$$

で（25）が成立する。逆に $1-|z| > 3(1-|y|)$ とすると

$$1-|z| \leq |z-y| + (1-|y|) \leq |z-y| + (1-|z|)/3$$

となり，$2(1-|z|) \leq 3|z-y|$ から

$$\left(\frac{1-|z|}{|z-y|}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned} a(x, z)a(z, y) &\leq \frac{(1-|x|)(1-|z|)}{|x-z|^2} \cdot \frac{(1-|z|)(1-|y|)}{|z-y|^2} \\ &\leq \frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x-z|^2} \cdot \left(\frac{1-|z|}{|z-y|}\right)^2 \\ &\leq \frac{(1-|x|)(1-|y|)}{(2^{-1}|x-y|)^2} \cdot \frac{9}{4} = 9\frac{(1-|x|)(1-|y|)}{|x-y|^2} \end{aligned}$$

となり，やはり（25）が成り立つ。

いよいよ締めくくる。(20), (24), (25) によると

$$\begin{aligned} G(x, z)G(z, y) &\leq C_0^2 a(x, z)a(z, y)g(x-z)g(z-y) \\ &\leq 12C_0^2 a(x, y) \cdot C_1 g(x-y)\max(g(x-z), g(z-y)) \\ &\leq 12C_0^3 C_1 G(x, y)\max(g(x-z), g(z-y)) \end{aligned}$$

だから（19）の C としては $C=12C_0^3C_1$ に取れば良い。 □

参照文献

[1] M. Bôcher: *Singular points of functions which satisfy partial differential equations of the elliptic type,* Bull. Amer. Math. Soc., **9**(1903), 455-463.

[2] A. Boukricha: *Das Picard-Prinzip und verwandte Fragen bei Störung von harmonishen Räumen,* Math. Ann., **239**(1979), 247-270.

[3] A. Boukricha, W. Hansen and H. Hueber: *Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces,* Expo. Math., **5**(1987), 97-135.

[4] M. G. Bouligand: *Fonctions Harmoniques. Principes des Picard et de Dirichlet,* Memorial des Science Mathématiques **11**, 1926.

[5] M. Brelot: *Étude de l'équation de la chaleur $\Delta u = c(M)u(M)$, $c(M) \geq 0$, au voisinage d'un point singulier du coefficient,* Ann. Éc. Norm., (3), **48**(1931), 153-246.

[6] K. L. Chung and Z. Zhao: *From Brownian Motion to Schrödinger Equation,* Springer, 1995.

[7] C. Constantinescu and A. Cornea: *Potential Theory on Harmonic Spaces,* Springer, 1972.

[8] M. Cranston, E. Fabes and Z. Zhao: *Conditional gauge and potential theory for the Schrödinger operator,* Trans. Amer. Math. Soc., **307**(1988), 171-194.

[9] R.-H. HERVÉ: *Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel,* Ann. Inst. Fourier, **12**(1962), 415-571.

[10] H. IMAI: *Nonhomogeneity of Picard dimensions for negative radial densities,* Hiroshima Math. J., **25**(1995), 313-319.

[11] F.-Y. MAEDA: *Dirichlet Integrals on Harmonic Spaces,* Lecture Notes in Math. **803**, Springer, 1980.

[12] M. MURATA: *Isolated singularities and positive solutions of elliptic equations in* $\mathbf{R}^n$, Matematisk Institute, Aarhus Universitet, Preprint Series **14**(1986/1987), 1-39.

[13] M. NAKAI: *Picard principle and Riemann theorem,* Tohoku Math. J., **28**(1976), 277-292.

[14] M. NAKAI: *Picard principle for finite densities,* Nagoya Math. J., **70**(1978), 7-24.

[15] M. NAKAI: *Continuity of solutions of Schrödinger equations,* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **110**(1991), 581-597.

[16] M. NAKAI: *Brelot spaces of Schrödinger equations,* J. Math. Soc. Japan, **48**(1996), 275-298.

[17] M. NAKAI AND T. TADA: *The distribution of Picard dimensions,* Kodai Math. J., **7**(1984), 1-15.

[18] M. NAKAI AND T. TADA: *Monotoneity and Homogeneity of Picard dimensions for signed radial densities,* Hokkaido Math. J. (to appear).

[19] R. PHELPS: *Lectures on Choquet's Theorem,* Van Nostrand Math. Studies **7**, Van Nostrand, 1968.

[20] M. É. PICARD: *Deux théorèmes élémentaires sur les singularités des fonctions harmoniques,* C. R. Acad. Sc. Paris, **176**(1923), 933-935.

[21] M. É. PICARD: *Sur les singularités des founctions harmoniques,* C. R. Acad. Sc. Paris, **176**(1923), 1025-1026.

[22] B. RODIN AND L. SARIO: *Principal Functions,* Van Nostrand, 1968.

[23] G. N. WATSON: *A treatise on the Theory of Bessel Functions,* Reprinted, Cambridge, 1994.

本研究は一部文部省科研費（一般C，課題番号07640196，07640259，基盤C，課題番号，08640194，08640243）の援助による。

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 31C35; Secondary 31B35.