ロイデン完閉化上のポテンシャル論

中　井　三　留
数学教室
（1995年8月24日受理）

Potential Theory on Royden Compactifications

Mitsuru NAKAI
Department of Mathematics
(Received August 24, 1995)

We first deduce the fundamental properties of the L_p spaces $(1 \leqq p \leqq \infty)$ of vector fields on a Riemannian manifold M of dimension $n \geqq 2$. Making use of these L_p spaces we introduce the Royden space on M and the Royden compactification of M with exponent $1<p<\infty$. We then discuss the theory of $\mathscr{A}$-harmonic functions of exponent $1<p<\infty$ on M related to the Royden space on M. Here, especially, we generalize the Virtanen-Royden theorem in the classical harmonic function theory to the general case of $\mathscr{A}$-harmonic functions. The main purpose of this paper is to prove the following two fundamental theorems on the $\mathscr{A}$-harmonic Dirichlet problem on M with the boundary data on the Royden boundary of M: every real valued continuous function on the Royden boundary of M is resolutive; the totality of regular points in the Royden boundary of M coincides with the Royden harmonic boundary of M.

n次元（$n \geqq 2$）リーマン多様体M上のベクトル場の作るL_p空間（$1 \leqq p \leqq \infty$）の基本的性質を導く。それを利用してM上の指数p（$1<p<\infty$）のロイデン空間とロイデン完閉化の基礎理論を導く。さらにロイデン空間と関連して指数$1<p<\infty$の$\mathscr{A}$調和関数論を論ずる。こゝで特に古典調和関数論のビルタネン・ロイデンの定理を一般の$\mathscr{A}$調和関数の場合へ拡張する。本論文の主目標はロイデン境界上の境界値に対する$\mathscr{A}$調和ディリクレ問題に関する次の2つの基本定理を証明することである：ロイデン境界上の実数値連続関数は可解である；ロイデン境界上の正則点の全体は丁度ロイデン調和境界と一致する。

1．ベクトル場のL_p空間

1.1. Mをn次元（$n \geqq 2$）リーマン多様体とする。つまりMは可符号，連結，可算なC^∞多様体でC^∞のリーマン計量が与えられているものとする。Mの各座標近傍Uとしては相対コムパクトなものを考えることにし，Uには一つの局所座標$x=(x^1,\cdots,x^n)$を固定する。リーマン計量テンソル(g_{ij})は各Uで$ds^2=g_{ij}(x)dx^idx^j$の形で線要素dsを与える。こゝで，又以下に於て，特に断らぬかぎり，アインシュタインの規約に従う：示数iが上下の位置に現われるときは，$i=1,\cdots,n$に関しての和がとられるものと解する。$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$, $g=\det(g_{ij})$とおくとMの体積要素dVは各Uで$dV=\sqrt{g}\,dx^1\cdots dx^n$の形となる。$M$は$dV$を測度とする測度空間と考える。$x \in M$における$M$の接空間を$T_x(M)$と記す。$T_x(M)$は$n$次元ベクトル空間で，その各ベクトル$h$の反変成分を$(h^1,\cdots,h^n)$とすると，$h=h^i(\partial/\partial x^i)_x$の表示をもち，$k=k^i(\partial/\partial x^i)_x$との内積$h \cdot k=\langle h, k\rangle=g_{ij}(x)h^ik^j$, $\langle(\partial/\partial x^i)_x, (\partial/\partial x^j)_x\rangle=g_{ij}(x)$となる。$h, k$の共変成分を，$(h_1,\cdots,h_n)$, $(k_1,\cdots,k_n)$とすると$h \cdot k=g^{ij}(x)h_ik_j$である。反変成分と共変成分の間には$h^i=g^{ij}(x)h_j$および$h_i=g_{ij}(x)h^j$の関係があるからである。$M$の接バンドルを$T(M)=\cup_{x \in M}T_x(M)$と記す。

M上のベクトル場Xの各Uでの反変成分を$(X^1,\cdots,X^n)$，共変成分を$(X_1,\cdots,X_n)$とする。各$i=1,\cdots,n$につき各U上$x \mapsto X^i(x)$（同じことであるが$x \mapsto X_i(x)$）が可測のとき，XはM上の可測ベクトル場と言い，その全体を

$L(M)=L(M;T(M))$ と記す。実関数の $L(M)=L(M;\boldsymbol{R})$ との区別は文脈による。$Y\in L(M)$ の反変成分，共変成分を $(Y^1,\cdots,Y^n)$，$(Y_1,\cdots,Y_n)$ とするとき X と Y の点内積を

$$X\cdot Y=\langle X,\ Y\rangle=g_{ij}X^iX^j=g^{ij}X_iX_j$$

で定める，$X\cdot Y=\langle X, Y\rangle$ は M 上の可測関数となる。$X\in L(M)$ の点ノルムは

$$|X|=\langle X,\ X\rangle^{1/2}=(g_{ij}X^iX^j)^{1/2}=(g^{ij}X_iX_j)^{1/2}$$

で与える。$|X|$ も M 上の可測関数である。そこで $X\in L(M)$ の p ノルム（$1\leqq p\leqq\infty$）を $|X|$ の p ノルム即ち $\|X\|_p=\|X\|_{p,M}=(\int_M|X|^pdV)^{1/p}$ $(1\leqq p<\infty)$，$\|X\|_\infty=\|X\|_{\infty,M}=\sup_M|X|$ で定める。ベクトル場の線形空間

$$L_p(M)=L_p(M;T(M))=\{X\in L(M;T(M)):\ \|X\|_p<\infty\}\quad(1\leqq p\leqq\infty)$$

を考える。実関数の $L_p(M)=L_p(M;\boldsymbol{R})$ との区別は文脈による。$L_p(M;\ T(M))$ は $\|\cdot\|_p=\|\cdot;L_p(M)\|=\|\cdot;L_p(M;\ T(M))\|$ をノルムとするノルム空間となることは，ミンコウスキーの不等式を使って直ちにわかる。

1.2. 空間 $L_p(M;T(M))$ に関するいくつかの基本的性質として，完備性，双対性，一様凸性について述べる。最初に次の性質から始める。

定理 1.1. 空間 $L_p(M;T(M))$ は完備，即ちバナッハ空間である。

証明. 相対コムパクト座標近傍 U で，計量〈・，・〉の一様楕円性により，ある定数 c_U が存在して，ベクトル場 $X\in L(M)$ の反変成分を $(X^1,\cdots,X^n)$ とすると，U 上 $|X^i|\leqq c_U|X|$ $(i=1,\cdots,n)$ となる。これより $L_p(U)=L_p(U;\boldsymbol{R},dV)$ として

$$\|X^i;L_p(U)\|\leqq c_U\|X\|_p\quad(i=1,\cdots,n)$$

となる。$1\leqq p<\infty$ のとき，$L_p(M)$ のコーシー列 $(X_k)_{k\geqq1}$ に対して部分列 $(Y_k)_{k\geqq1}$ を

$$\|Y_{k+1}-Y_k\|<2^{-k}\quad(k=1,2,\cdots)$$

となるように選び，これに対して $Y\in L_p(M)$ が存在して $\|Y_k-Y\|_p\to0$ $(k\to\infty)$ を言えばよい。各 U での Y_k の反変成分を $(Y_k^1,\cdots,Y_k^n)$ とすると

$$\|Y_{k+1}^i-Y_k^i\,;L_p(U)\|\leqq c_U2^{-k}\quad(k=1,2,\cdots;i=1,\cdots,n)$$

となる。$Y_1^i+\sum_{k=1}^\infty(Y_{k+1}^i-Y_k^i)$ を U で考える標準的な方法で，$Y^i\in L_p(U)$ が存在して U 上 a.e. に $Y_k^i\to Y^i$ となり $(i=1,\cdots,n)$ U で $(Y^1,\cdots,Y^n)$ を反変成分とする M 上のベクトル場 $Y\in L(M)$ が定まり，U 上 a.e. に $Y_k\to Y$ となることから M 上 a.e. に $|Y_k-Y|\to0$ となる。ファトゥの補題により

$$\|Y_k-Y\|_p=\left(\int_M(\liminf_{m\to\infty}|Y_k-Y_{k+m}|^p)dV\right)^{1/p}\leqq\liminf_{m\to\infty}\left(\int_M|Y_k-Y_{k+m}|^pdV\right)^{1/p}\leqq2\cdot2^{-k}$$

となる。$p=\infty$ のときも同様の考え方で，上よりずっと容易に示される。 □

1.3. 次に $L_p(M;T(M))$ $(1\leqq p<\infty)$ の共役空間を決定する。一般に $1\leqq p\leqq\infty$ に対して $1/p+1/q=1$ となる $1\leqq q\leqq\infty$ を p の共役指数と言う。

定理 1.2. $1\leqq p<\infty$ の共役指数を q とするとき，$L_p(M;T(M))$ の共役空間 $L_p(M;T(M))^*=L_q(M;T(M))$ となる。即ち各 $Y^*\in L_p(M)^*$ に対して唯一つの $Y\in L_q(M)$ が定まり，すべての $X\in L_p(M)$ に対して

$$\boldsymbol{Y^*(X)=\int_M\langle X,Y\rangle dV,}$$

$$\boldsymbol{\|Y^*\|:=\sup\left\{|Y^*(X)|:X\in L_p(M),\ \|X\|\leqq1\right\}=\|Y\|_q.}$$

証明. M の単体分割 $\{M_\mu\}$ $(\mu=1,2,\cdots)$ で各 M_μ はある座標近傍 U_μ に含まれるものとする。M_μ の特性関数を e_μ とおき，$E_i=(\delta_{i1},\cdots,\delta_{in})$ とおく。$e_\mu E_i$ は M 上の一つのベクトル場を定める：$e_\mu E_i\in L(M)$。さて任意の $Y^*\in L_p(M)^*$ $(1\leqq p<\infty)$ を固定し，任意の $X\in L_p(M)$ をとる。$L_p(M)$ 内の収束の意味で $X=\sum_{\mu\geqq 1}e_\mu X$ となるから，

$$Y^*(X)=\sum_{\mu\geqq 1}Y^*(e_\mu X)$$

となる。$L_p(M_\mu)=L_p(M_\mu;\boldsymbol{R},dV)$ とする。さて $f\mapsto Y^*(e_\mu fE_i)$ は $L_p(M_\mu)^*$ の元を定める。事実 $C_{\mu i}=\sup_{M_\mu}g_{ii}^{1/2}$ とおくと

$$\|e_\mu fE_i\|_p=\left(\int_{M_\mu}|f|^p g_{ii}^{p/2}dV\right)^{1/p}\leqq C_{\mu i}\|f;L_p(M_\mu)\|$$

だから，$|Y^*(e_\mu fE_i)|\leqq(C_{\mu i}\|Y^*\|)\|f;L_p(M_\mu)\|$ となるからである。ゆえに実関数空間の場合の結果 $L_p(M_\mu)^*=L_q(M_\mu)$ によれば，$f_{\mu i}\in L_q(M_\mu)$ が定まって

$$Y^*(e_\mu fE_i)=\int_{M_\mu}ff_{\mu i}\,dV$$

がすべての $f\in L_p(M_\mu)$ で成り立つ。ただし $M\backslash M_\mu$ 上 $f_{\mu i}=0$ として $f_{\mu i}$ は M 全体で定義しておく。$Y_\mu^i=g^{ij}f_{\mu j}$（M_μ 上），$Y_\mu^i=0$（$M\backslash M_\mu$ 上）として，$Y_\mu\in L(M)$ を，M_μ 上の Y_μ の反変成分が（$Y_\mu^1,\cdots,Y_\mu^n$）で $M\backslash M_\mu$ 上 $Y_\mu=0$ として定める。すると $Y_\mu=e_\mu Y_\mu$ であって，更に $Y_\mu\in L_q(M)$ である。実際，$g^{ij}\xi_i\xi_j\leqq K^2\sum_{i=1}^n(\xi_i)^2$ がすべてのベクトル $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ に対して成り立つとき

$$|Y_\mu|^2=g_{ij}Y_\mu^iY_\mu^j=g^{ij}f_{\mu i}f_{\mu j}\leqq K^2\sum_{i=1}^n f_{\mu i}^2$$

により $|Y_\mu|\leqq K\sum_{i=1}^n|f_{\mu i}|$ より $\|Y_\mu\|_q\leqq K\sum_{i=1}^n\|f_{\mu i};L_q(M_\mu)\|<\infty$ だからである。そこで $Y=\sum_{\mu\geqq 1}Y_\mu$ とおくと，$Y\in L(M)$ で $e_\mu Y=Y_\mu$ である。すると

$$Y^*(e_\mu X)=\int_{M_\mu}\langle X,Y\rangle dV=\int_M e_\mu\langle X,Y\rangle dV$$

がすべての $X\in L_p(M)$ で成り立つ。さて $[a^ib_i]$ とかいたときは $a^1b_1+\cdots+a^nb_n$ ではなく単独の積 $a^i\times b_i$ を表すとするとき，上式の成り立つ理由は，X の M_μ での反変成分を $(X^1,\cdots,X^n)$ とすると

$$Y^*(e_\mu X)=Y^*\Big(\sum_{i=1}^n\big[e_\mu X^iE_i\big]\Big)=\sum_{i=1}^n Y^*\Big(\big[e_\mu X^iE_i\big]\Big)=\sum_{i=1}^n\int_{M_\mu}\big[X^if_{\mu i}\big]dV$$
$$=\int_{M_\mu}\Big(\sum_{i=1}^n\big[X^if_{\mu i}\big]\Big)dV=\int_{M_\mu}g_{ij}X^iY_\mu^jdV=\int_{M_\mu}\langle X,Y_\mu\rangle dV=\int_{M_\mu}\langle X,Y\rangle dV.$$

さて，こゝですべての $X\in L_p(M)$ について $|X||Y|\in L_1(M)$ となることをみる。なぜなら，$Z(x)=|Y(x)|^{-1}Y(x)$（$Y(x)\neq 0$ のとき），$Z(x)=0$（$Y(x)=0$ のとき）として，$e_\mu|X|Z\in L(M)$ となる。こゝで

$$\int_M|X||Y|dV\leqq\|Y^*\|\|X\|_p \tag{1.1}$$

を示せばよい。$|e_\mu|X|Z|=e_\mu|X||Z|\leqq e_\mu|X|$ で，$\langle e_\mu|X|Z,Y\rangle=e_\mu|X|\langle Z,Y\rangle=e_\mu|X||Y|$ に注意して

$$\int_M|X||Y|dV=\sum_{\mu\geqq 1}\int_{M_\mu}|X||Y|dV=\sum_{\mu\geqq 1}\int_{M_\mu}e_\mu|X||Y|dV=\sum_{\mu\geqq 1}\int_M\langle e_\mu|X|Z,Y\rangle dV$$
$$=\sum_{\mu\geqq 1}Y^*(e_\mu|X|Z)=Y^*\Big(\sum_{\mu\geqq 1}e_\mu|X|Z\Big)=Y^*(|X|Z)\leqq\|Y^*\|\||X|Z\|_p\leqq\|Y^*\|\|X\|_p$$

だからである。

$|\langle X,Y\rangle|\leqq|X||Y|$ だから $\langle X,Y\rangle\in L_1(M)$ である。よって

$$Y^*(X)=\int_M\langle X,Y\rangle dV\quad(X\in L_p(M)) \tag{1.2}$$

となる。事実，$Y^*(X)=\sum_{\mu\geqq 1}Y^*(e_\mu X)=\sum_{\mu\geqq 1}\int_{M_\mu}\langle X,Y\rangle dV=\int_M\langle X,Y\rangle dV$ となる。さて次に

$$\|Y^*\|=\|Y\|_q \tag{1.3}$$

を示す。$p=1$ とするとき $q=\infty$ で，(1.2) より $|Y^*(X)|\leqq \int_M |X||Y|dV \leqq \|Y\|_\infty \|X\|_1$ だから $\|Y^*\|\leqq\|Y\|_\infty$ である。逆に $\|Y^*\|\geqq\|Y\|_\infty$ をみる為に，$\|Y^*\|+\varepsilon<\|Y\|_\infty$ となる正数 ε があったとすると，ある M_μ と $\int_A dV>0$ である集合 $A\subset M_\mu$ があって，A 上 $\|Y^*\|+\varepsilon<|Y|$ となる。A の特性関数を x_A とし，$X_A=|x_A e_\mu E_1|^{-1}(x_A e_\mu E_1)$ (A 上)，$X_A=0$ ($M\backslash A$ 上) で $X_A\in L(M)$ を定めると，$|X_A|=x_A$ となり，(1.1) により $\int_M |X_A||Y|dV\leqq\|Y^*\|\|X_A\|_1$ である。他方 $\int_M |X_A||Y|dV\geqq\int_A(\|Y^*\|+\varepsilon)|X_A|dV=(\|Y^*\|+\varepsilon)\|X_A\|_1>0$ で，結局

$$(\|Y^*\|+\varepsilon)\|X_A\|_1\leqq\|Y^*\|\|X_A\|_1$$

と言う矛盾が出て (1.3) が $p=1$ のとき示された。次に $p>1$ とする。$W_m\in L(M)$ $(m=1,2,\cdots)$ を，$x\in\cup_{\mu<m}M_\mu$ で $|Y(x)|\leqq m$ のとき $W_m(x)=Y(x)$，そうでないとき $W_m(x)=0$ とすると，$W_m\in L_r(M)$ $(1\leqq r\leqq\infty)$ で $|W_m|\leqq|Y|$ である。そこで $Z_m\in L(M)$ を，$Z_m(x)=|W_m(x)|^{-1}W_m(x)$ $(W_m(x)\neq 0)$, $Z_m(x)=0$ $(W_m(x)=0)$ と定める。そして $X=|W_m|^{q/p}Z_m$ とおくと，$|X|=|W_m|^{q/p}|Z_m|=|W_m|^{q/p}$ であるので $X\in L_p(M)$ で，(1.1) により，$\|W_m\|_q^q=\int_M|W_m|^{q/p}|W_m|dV\leqq\int_M|X||Y|dV\leqq\|Y^*\|\|X\|_p=\|Y^*\|\|W_m\|_q^{q/p}$ だから，$\|W_m\|_q\leqq\|Y^*\|$ となる。ファトゥの定理により

$$\|Y\|_q^q=\int_M\left(\liminf_{m\to\infty}|W_m|\right)^q dV\leqq\liminf_{m\to\infty}\int_M|W_m|^q dV\leqq\|Y^*\|^q$$

だから $\|Y\|_q\leqq\|Y^*\|$ となる。(1.2) によりヘルダーの不等式によって $|Y^*(X)|\leqq\|X\|_p\|Y\|_q$ となるから $\|Y^*\|\leqq\|Y\|_q$ となって，$p>1$ の場合にも (1.3) が示された。

最後に Y に一意性は，すべての $X\in L_p(M)$ とすべての $Y\in L_q(M)$ に対して $\int_M\langle X,Y\rangle dV=0$ から $Y=0$ が出ることを言えばよい。$x\in\cup_{\mu<m}M_\mu$ で $|Y(x)|\leqq m$ のとき，$Y_m(x)=Y(x)$ とし，それ以外では $Y_m(x)=0$ とするとき，$Y_m\in L_r(M)$ $(1\leqq r\leqq\infty)$ である。そのとき，$\langle Y_m,Y\rangle=\langle Y_m,Y_m\rangle=|Y_m|^2$ であるが，$\int_M|Y_m|^2dV=\int_M\langle Y_m,Y\rangle dV=0$ により $|Y_m|=0$ から $Y=0$ となる。 □

1.4. 双対性定理（定理1.2）は様々の応用をもつが，次の結果はよく使われる。$F\subset L_p(M;T(M))$ とする。F 内のどんな点列 $(f_i)_{i\geqq1}$ をとっても必ず部分列 $(g_i)_{i\geqq1}$ で M 上弱収束する，即ち各 $h\in L_q(M;T(M))$ に対して $(\int_M g_i h dV)_{i\geqq1}$ が収束する，様なものがとれるとき，F は弱点列コムパクトであると言う。

弱点列コムパクト性定理. **$L_p(M;T(M))$ $(1<p<\infty)$ の部分集合が弱点列コムパクトとなるための必要十分条件は，それが有界となることである。**

証明. $L_p(M)^{**}=(L_p(M)^*)^*=L_q(M)^*=L_p(M)$ であるから，$L_p(M)$ は反射的なバナッハ空間である。こゝで周知の次の定理を想起する（[3；p.68]）：反射的なバナッハ空間の部分集合が弱点列コムパクトとなる為の必要十分条件は，それが有界となることである。これより上の主張が従う。 □

1.5. $L_p(M;T(M))$ の点列 $(X_i)_{i\geqq1}$ が X に弱収束する為の一つの十分条件を与える次の定理はしばしば有用である。

ルレイ・リオンヅの補題. **$(X_i)_{i\geqq1}$ は $\|X_i\|_p\leqq c<\infty$ $(i=1,2,\cdots)$ をみたす $L_p(M;T(M))$ $(1<p<\infty)$ 内の点列で，又 $X\in L_p(M;T(M))$ とする。もし M 上 a.e. に $X_i\to X$ ならば $L_p(M;T(M))$ 内の弱収束の意味で $X_i\to X$ となる。**

証明. 実関数空間で $V(M)<\infty$ の場合がルレイ・リオンズ [6] の原定理であるが上では $V(M)=\infty$ であってもよい。$\|X\|_p\leqq\liminf_{i\to\infty}\|X_i\|_p\leqq c$ ゆえ $\|X_i-X\|_p\leqq 2c$ $(i=1,2,\cdots)$ である。$\sum_{i\geqq1}\varepsilon_i<\infty$, $\varepsilon_i>0$ とし，$h(x)=\sum_{i=1}^\infty\varepsilon_i|X_i(x)-X(x)|^p$ とおくと

$$\int_M|h(x)|dV=\sum_{i=1}^\infty\varepsilon_i\|X_i-X\|_p^p\leqq(2c)^p\sum_{i=1}^\infty\varepsilon_i<\infty$$

だから $h\in L_1(M)=L_1(M;\boldsymbol{R})$ となる。$h(x)=0$ と $|X_i(x)-X(x)|=0$ $(i=1,2,\cdots)$ の同値性に注意すると，

$$M(N)=\{x\in M:|X_i(x)-X(x)|\leqq h(x)^{1/p}\quad(i\geqq N)\}$$

は可測で，$M(N)$ は N と共に増加し，$V(M\backslash\lim_{N\to\infty}M(N))=0$ である。任意の $Y\in L_q(M)$ に対して

$$a_i=\int_M\langle X_i-X,Y\rangle dV\to 0\quad(i\to\infty)$$

を示せばよい。

$$|a_i|\leqq\int_{M\setminus M(N)}|Y||X_i-X|dV+\int_{M(N)}|Y||X_i-X|dV$$

の右辺第1項をⅠ，第2項をⅡとする。ヘルダーの不等式により

$$\mathrm{I}\leqq\Big(\int_{M\setminus M(N)}|Y|^q dV\Big)^{1/q}\Big(\int_{M\setminus M(N)}|X_i-X|^p dV\Big)^{1/p}\leqq 2c\Big(\int_{M\setminus M(N)}|Y|^q dV\Big)^{1/q}=:\varepsilon(N)$$

となる。$Y\in L_q(M)$ により $\varepsilon(N)\to 0(N\to\infty)$ である。再びヘルダーの不等式により

$$\mathrm{II}\leqq\Big(\int_{M(N)}|Y|^q dV\Big)^{1/q}\Big(\int_{M(N)}|X_i-X|^p dV\Big)^{1/p}\leqq\|Y\|_q\Big(\int_{M(N)}|X_i-X|^p dV\Big)^{1/p}=:\delta(N,i)$$

となる。N を固定するとき，$|X_i-X|^p\leqq h\in L_1(M(N))$ であって，$M(N)$ 上a.e.に $|X_i-X|^p\to 0$ であるから，ルベッグの収束定理によって，$\delta(N,i)\to 0\ (i\to\infty)$ となる。よって

$$\limsup_{i\to\infty}|a_i|\leqq\varepsilon(N)+\lim_{i\to\infty}\delta(N,i)=\varepsilon(N)\quad(N=1,2,\cdots)$$

より，$N\to\infty$ として $a_i\to 0\ (i\to\infty)$ をうる。 □

1.6. 空間 $L_p(M;T(M))$ $(1<p<\infty)$ が様々な問題に使われるとき有力な道具として機能する理由を与える $L_p(M;T(M))$ $(1<p<\infty)$ の重要な諸性質の一つに**一様凸性**がある。これは最初実関数空間 $L_p(M;\boldsymbol{R})$ $(1<p<\infty)$ に対してクラークソン [2] によって示されたが，その証明は本質的には $L_p(M;T(M))$ に対しても有効であるが，全く直接的と言う訳ではない，即ち完全には自明でない修正が必要である。以下どの様にするかを述べる。

1.6.1. よく使われる，クラークソンの不等式群の中の代表的な2つは次のものである。

$$\|X+Y\|_p^q+\|X-Y\|_p^q\leqq 2(\|X\|_p^p+\|Y\|_p^p)^{q/p}\quad(1<p\leqq 2)\tag{1.4}$$

が $L_p(M;T(M))$ に入るすべてのベクトル場 X と Y について成り立つ，たゞし $q=p/(p-1)$ は p の共役指数である；同様に

$$\|X+Y\|_p^p+\|X-Y\|_p^p\leqq 2(\|X\|_p^q+\|Y\|_p^q)^{p/q}\quad(2\leqq p<\infty)\tag{1.5}$$

が成り立つ。$p=2$ ならヒルベルト空間 $L_2(M;T(M))$ における平行四辺形法則から両不等式共等式で成り立つ。

上の2つの不等式は対応する次の2つの不等式から導かれる：

$$|X+Y|^q+|X-Y|^q\leqq 2(|X|^p+|Y|^p)^{q/p}\ (1<p\leqq 2)\tag{1.6}$$

が $X(\xi)$ と $Y(\xi)$ が共に定まる M のすべての点 ξ で成り立つ；同様にして

$$|X+Y|^p+|X-Y|^p\leqq 2(|X|^q+|Y|^q)^{p/q}\ (2\leqq p<\infty).\tag{1.7}$$

1.6.2. (1.6)(又は (1.7)) から (1.4) (又は (1.5)) を導く方法は実関数空間の場合（例えば [1] 参照）と比べて特に新しい所はないが，後で (1.6) を証明するときの参考となるので，こゝで導びいておく。(1.4) の左辺は

$$\Big(\int_M(|X+Y|^q)^{p/q}dV\Big)^{q/p}+\Big(\int_M(|X-Y|^q)^{p/q}\Big)^{q/p}$$

とみられる。$0<p/q\leqq 1$ であるので逆向きミンコウスキーの不等式（例えば [1；p.25] 参照）によると上の量は高々

$$\Big(\int_M(|X+Y|^q+|X-Y|^q)^{p/q}dV\Big)^{q/p}$$

である。上の被積分関数に (1.6) を使うと，上の量は高々

$$2\Big(\int_M((|X|^p+|Y|^p)^{q/p})^{p/q}dV\Big)^{q/p}=2\Big(\int_M|X|^p dV+\int_M|Y|^p dV\Big)^{q/p}$$

で，これは（1.4）の右辺に他ならない。

同様に（1.5）は（1.7）から次の様に導びかれる。(1.5) の左辺は $\int_M(|X+Y|^p+|X-Y|^p)dV$ で，この被積分関数に（1.7）を使うと，これは高々

$$2\int_M(|X|^q+|Y|^q)^{p/q}dV=2\left(\left(\left(\int_M(|X|^q+|Y|^q)^{p/q}dV\right)^{q/p}\right)^{p/q}\right.$$

である。$p/q\geqq 1$ であるから通常のミンコウスキーの不等式によると，上式の右辺は高々

$$2\left(\left(\left(\int_M(|X|^q)^{p/q}dV\right)^{q/p}+\left(\int_M(|Y|^q)^{p/q}dV\right)^{q/p}\right)^{p/q}=2\left(\left(\int_M|X|^pdV\right)^{q/p}+\left(\int_M|Y|^pdV\right)^{q/p}\right)^{p/q}$$

で，これは（1.5）の右辺そのものである。

1.6.3. この様に見てくると，我々の本質的な仕事は（1.6）と（1.7）を示すことである。こゝで（1.7）は実質的には（1.6）と同じである：単に p と q の役割を入れかえて一方から他方にうつる。よって $X(\xi)$ と $Y(\xi)$ の定まる M の点 ξ に於て（1.6）を示せばよい。ξ に於て $x(\xi)=0$ となる ξ 中心の座標近傍 (B,x) をとり，B における X と Y の反変成分を $(X^1,\cdots,X^n)$ および $(Y^1,\cdots,Y^n)$ とする。すると（1.6）は次の形となる：

$$\left(g_{ij}(0)(X^i(0)+Y^i(0))(X^j(0)+Y^j(0))\right)^{q/2}+\left(g_{ij}(0)(X^i(0)-Y^i(0))(X^j(0)-Y^j(0))\right)^{q/2}$$
$$\leqq 2\left(\left(g_{ij}(0)X^i(0)X^j(0)\right)^{p/2}+\left(g_{ij}(0)Y^i(0)Y^j(0)\right)^{p/2}\right)^{q/p}.$$

しかしながら (B,x) としては $g_{ij}(0)=\delta_{ij}$ となる様にえらぶ事も出来たので，(1.6) を ξ で示すには，$X^j(0)=z^j$ および $Y^j(0)=w^j$ とおいて，

$$\left(\sum_{j=1}^n|z^j+w^j|^2\right)^{q/2}+\left(\sum_{j=1}^n|z^j-w^j|^2\right)^{q/2}\leqq 2\left(\left(\sum_{j=1}^n|z^j|^2\right)^{p/2}+\left(\sum_{j=1}^n|w^j|^2\right)^{p/2}\right)^{q/p} \tag{1.8}$$

を示せばよい。本来 z^j や w^j は実数であるが，z^j や w^j を複素数としても（1.8）が示される。$n=1$ とすると（1.8）は

$$|z+w|^q+|z-w|^q\leqq 2(|z|^p+|w|^p)^{q/p}\quad (1<p\leqq 2) \tag{1.9}$$

となる。上の不等式はクラークソンの仕事の心臓部分で，証明はとても簡単とは言えないので，こゝでは例えば [1; p.36] を参照する。

こゝで（1.9）を仮定して（1.8）を導く。(1.8) の左辺を

$$\left(\sum_{j=1}^n(|z^j+w^j|^q)^{2/q}\right)^{q/2}+\left(\sum_{j=1}^n(|z^j-w^j|^q)^{2/q}\right)^{q/2}$$

とみる。$0<2/q\leqq 1$ により，逆向きミンコウスキー不等式によると，上の量は高々

$$\left(\sum_{j=1}^n(|z^j+w^j|^q+|z^j-w^j|^q)^{2/q}\right)^{q/2}$$

である。この式の各項に（1.9）を適用すると，上の量は高々

$$2\left(\sum_{j=1}^n\left((|z^j|^p+|w^j|^p)^{q/p}\right)^{2/q}\right)^{q/2}=2\left(\sum_{j=1}^n(|z^j|^p+|w^j|^p)^{2/p}\right)^{q/2}=2\left(\left(\sum_{j=1}^n(|z^j|^p+|w^j|^p)^{2/p}\right)^{p/2}\right)^{q/p}$$

である。$2/p\geqq 1$ であるから通常のミンコウスキーの不等式により，上式の最右辺は高々

$$2\left(\left(\sum_{j=1}^n(|z^j|^p)^{2/p}\right)^{p/2}+\left(\sum_{j=1}^n(|w^j|^p)^{2/p}\right)^{p/2}\right)^{q/p}=2\left(\left(\sum_{j=1}^n|z^j|^2\right)^{p/2}+\left(\sum_{j=1}^n|w^j|^2\right)^{p/2}\right)^{q/p}$$

となって（1.8）の証明は完了である。

1.6.4. もしも $\|X\|_p\leqq 1$ かつ $\|Y\|_p\leqq 1$ であると，(1.4) と（1.5）を使って，次の2不等式が出る：

$$\|X-Y\|_p\leqq 2(1-\|(X+Y)/2\|_p^q)^{1/q}\quad (1<p\leqq 2);$$
$$\|X-Y\|_p\leqq 2(1-\|(X+Y)/2\|_p^p)^{1/p}\quad (2\leqq p<\infty).$$

これから $\|(X+Y)/2\|_p\to 1$ ならば $\|X-Y\|_p\to 0$ となる。この性質をもって，$L_p(M;T(M))$ は**一様凸**であると言う。

1.7. クラークソンの不等式（1.4）と（1.5）の今一つの応用例として，後程の我々の目的にとって重要な役割を果す次の結果を述べる：

コーシー列補題． $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ を $L_p(M;T(M))$ 内の有向列であって，$(\|X_\alpha\|)_{\alpha\in A}$ が収束し，更に任意の $\alpha,\beta\in A$ に対して

(1.10)
$$\|(X_\alpha+X_\beta)/2\|_p\geqq\|X_\gamma\|_p,\quad \gamma=\gamma(\alpha,\beta)\geqq\alpha,\beta$$

となる $\gamma\in A$ が定まるとする。すると $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ はコーシー列となる：

$$\lim_{\alpha,\beta}\|X_\alpha-X_\beta\|_p=0.$$

証明．（1.4）と（1.5）に（1.10）を適用すると

(1.10.1)
$$\|X_\alpha-X_\beta\|_p\leqq\left(2\,(\|X_\alpha\|_p^p+\|X_\beta\|_p^p)^{q/p}-2^q\|X_\gamma\|_p^q\right)^{1/q}\quad(1<p\leqq2);$$

(1.10.2)
$$\|X_\alpha-X_\beta\|_p\leqq\left(2\,(\|X_\alpha\|_p^q+\|X_\beta\|_p^q)^{p/q}-2^p\|X_\gamma\|_p^p\right)^{1/p}\quad(2\leqq p<\infty).$$

こゝで $\gamma=\gamma(\alpha,\beta)\geqq\alpha,\beta$ である。$(\|X_\alpha\|_p)_{\alpha\in A}$ の極限を d とすると

$$\lim_\alpha\|X_\alpha\|_p=\lim_\beta\|X_\beta\|_p=\lim_{\alpha,\beta}\|X_{\gamma(\alpha,\beta)}\|=d$$

となるから，(1.10.1),(1.10.2) において α，β に関する極限をとると，それぞれの右辺の極限値が $(2(d^p+d^p)^{q/p}-2^qd^q)^{1/q}=0$ $(1<p\leqq2)$ および $(2(d^q+d^q)^{p/q}-2^pd^p)^{1/p}=0$ $(2\leqq p<\infty)$ となるので，$\lim_{\alpha,\beta}\|X_\alpha-X_\beta\|_p=0$ となる。 □

2．$\mathcal{A}$ 調和関数

2.1. $\mathcal{A}$ がリーマン多様体 M 上の指数 $1<p<\infty$ の**強単調楕円型作用素**であるとは $\mathcal{A}$ が接バンドル $T(M)$ から $T(M)$ への写像であって，ある定数 $0<\alpha\leqq\beta<\infty$ に対して，次の5性質をもつものであるとする：

可測連続性． 殆んどすべての $x\in M$ に対して $\mathcal{A}_x:=\mathcal{A}|T_x(M)$ は接空間 $T_x(M)$ から $T_x(M)$ への連続写像であり，又全ての M 上の可測ベクトル場 X に対して $x\mapsto\mathcal{A}_x(X(x))$ で定まるベクトル場が M 上可測である；

楕円性． 殆んど全ての $x\in M$ と全ての $h\in T_x(M)$ に対して

$$\mathcal{A}_x(h)\cdot h\geqq\alpha|h|^p;$$

有界性． 殆んど全ての $x\in M$ と全ての $h\in T_x(M)$ に対して

$$|\mathcal{A}_x(h)|\geqq\beta|h|^{p-1};$$

強単調性． 殆んど全ての $x\in M$ と $h_1\neq h_2$ であるすべての $h_1,h_2\in T_x(M)$ に対して

$$(\mathcal{A}_x(h_1)-\mathcal{A}_x(h_2))\cdot(h_1-h_2)>0;$$

擬斉次性． 零でないすべての実数 λ に対して

$$\mathcal{A}_x(\lambda h)=|\lambda|^{p-2}\lambda\mathcal{A}_x(h).$$

$1<p<\infty$ を固定するとき，M 上の指数 p の強単調楕円型作用素 $\mathcal{A}$ の全体を $\mathcal{A}_p(M)$ で表す。一つの $\mathcal{A}\in\mathcal{A}_p(M)$ を使って次の仮似線形楕円型偏微分方程式を考える：

(2.1)
$$-\mathrm{div}\mathcal{A}_x(\nabla u(x))=0.$$

上の方程式の解を考える為に次の関数空間を考える。M の開集合 G をとる。まずベクトル場 $X\in locL_1(G)$ が関数 $u\in locL_1(G)$ の超関数勾配であるとは

$$\int_G u\ \mathrm{div}\,Y\,dV=-\int_G\langle X,\,Y\rangle dV$$

がすべてのベクトル場 $Y\in C_0^1(G)$ について成り立つことである。$X=\nabla u$ と記す。さて**ディリクレ空間** $L_p^1(G)$ とは

$\nabla u \in L_p(M)$ となる $u \in locL_1(G)$ の全体とする。もう一つの空間は**ソボレフ空間** $W_p^1(G)$ で，それは $L_p^1(G) \cap L_p(G)$ のことゝする。$W_p^1(G)$ はノルム

$$\|u\,;\,W_p^1(G)\| := \|u\,;\,L_p(G)\| + \|\nabla u\,;\,L_p(G)\|$$

によってバナッハ空間を作る。ポアンカレーの不等式により

$$W_p^1(G) \subset L_p^1(G) \subset loc\,W_p^1(G)$$

である。さて $C_0^\infty(G)$ の $W_p^1(G)$ 内の閉包を $W_{p,0}^1(G)$ と記す。通常 $L_{p,0}^1(G)$ は，ある列 $(\varphi_i)_{i\geq 1} \subset C_0^\infty(G)$ があって $\|\nabla\varphi_i - \nabla f\|_p \to 0$ となる $f \in L_p^1(G)$ の全体と定義するが，本論文では更にG上 a.e. に $\varphi_i \to f(i\to\infty)$ となることも要求することにする。つまり $L_p^1(G)$ で関数列 $(f_i)_{i\geq 1}$ が f に収束することを G 上 a.e. に $f_i \to f$ で $\|\nabla f_i - \nabla f\,;\,L_p(G)\| \to 0$ となることで与える位相によって考える。一般に2つの関数 f，g に対して束算法 $f \cup g$，$f \cap g$ を

$$(f\cup g)(x) = \max(f(x), g(x)),\ (f\cap g)(x) = \min(f(x), g(x))$$

で定める。$\mathcal{F}$ が $L_p^1(M)$, $W_p^1(M)$, $L_{p,0}^1(M)$, $W_{p,0}^1(M)$ のどれであっても，$f, g \in \mathcal{F}$ ならば $f\cup g$, $f\cap g \in \mathcal{F}$ となる。しかも $\mathcal{F}$ 内で $f_i \to f$, $g_i \to g$ ならば $\mathcal{F}$ 内で $f_i \cup g_i \to f\cup g$, $f_i \cap g_i \to f \cap g$ となる。これらについては［4；1章］を参照する。

さて G 上の関数 u が（2.1）の弱解であるとは，$u \in locW_p^1(G)$ であって

$$\int_G \mathcal{A}_x(\nabla u)\cdot\nabla\varphi dV = 0 \tag{2.2}$$

がすべての $\varphi \in C_0^\infty(G)$ で成り立つことゝする。もし $u \in L_p^1(G)$ ならば $\mathcal{A}$ の有界性とヘルダーの不等式から $\mathcal{A}_x(\nabla u) \in L_q(G)$ $(1/p+1/q=1)$ であり，そのとき u が（2.1）の弱解となる必要十分条件は（2.2）がすべての $\varphi \in L_{p,0}^1(G)$ で成り立つことである。(2.1）の弱解は測度零の集合上での修正を前提として連続となる（［4；6章］参照)。

そこで u が G 上（2.1）の連続弱解となるとき，u を G 上の **$\mathcal{A}$ 調和関数**と言って，その全体を $H_{\mathcal{A}}(G)$ と記す。それ自身も重要な $\mathcal{A}_p(M)$ の元の典型例は p ラプラシアン $\mathcal{A}_x(h) = |h|^{p-2}h$ である。そのときの（2.1）は p ラプラス方程式

$$-\triangle_p u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$$

の形となる。このときの $\mathcal{A}$ 調和を特に **p 調和**と言い，その全体を $H_{\mathcal{A}}(G)$ の代りに $H_p(G)$ と記す。

$\mathcal{A}$ 調和関数の基本的な性質，とくに $\boldsymbol{R}^n$ 上のそれから（［4；6章］参照）いかにして M 上のそれを導くかについては［5］を参照する。こゝでは次の2性質を特記する。第一は**ハルナックの不等式**で次の形に述べられる：任意のコムパクト $K \subset G$ に対して，(2.1）の構造と G と K の幾何学的形状にのみ依存する定数 $C>0$ があって

$$\max_K u \leq C \min_K u$$

がすべての $u \in H_{\mathcal{A}}(G)^+$ に対して成立する。第二は**ヘルダー連続性**である：任意のコムパクト $K \subset G$ と正数 L に対して，(2.1）の構造と G と K の幾何学的形状にのみ依存する2定数 $C>0$ と $\lambda>0$ があって

$$|u(x)-u(y)| \leq CL|x-y|^\lambda \quad (x, y \in K)$$

がすべての G 上 $|u| \leq L$ となる $u \in H_{\mathcal{A}}(G)$ に対して成立する。

2.2. とくに G は M 内相対コムパクトとする。すべての $f \in W_p^1(G)$ とすべての $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_p(M)$ に対して，$u-f \in W_{p,0}^1(G)$ となるたゞ1つの $u \in H_{\mathcal{A}}(G) \cap W_p^1(G)$ が存在すると言うマズヤの定理がすべての基本となる（例えば［4；p.59］参照)。この様な u を記号 $\pi_{\mathcal{A}}^G f$ で表す。$\mathcal{A}$ が自明のときは π^G，G が自明のときは $\pi_{\mathcal{A}}$，いずれも自明のときは π とかく。とくに $\mathcal{A}_x(h) = |h|^{p-2}h$（$p$ ラプラシアン）の場合には $\pi_{\mathcal{A}}^G f$ の代りに $\pi_p^G f = \pi_p f = \pi^G f = \pi f$ とかく。

$\pi_{\mathcal{A}}^G$ は2種類の**単調性**をもつ（［8］参照)：第1は $f, g \in W_p^1(G)$ として $f \leq g$ ならば $\pi_{\mathcal{A}}^G f \leq \pi_{\mathcal{A}}^G g$ となる；第2は $f \in W_p^1(G)$ かつ $h \in H_{\mathcal{A}}(G)$ とするとき $f \leq h$ ならば $\pi_{\mathcal{A}}^G f \leq h$ となる。

$y \in \partial G$ が **$\mathcal{A}$ 正則**であるとは，すべての $f \in C(\overline{G}) \cap W_p^1(G)$ に対して

$$\lim_{x\in G,\, x\to y} \pi_{\mathcal{A}}^G f(x) = f(y)$$

となることであるとする。$f\in C(\overline{G})\cap W_p^1(G)$ のときは，$\pi_{\mathcal{A}}^G f$ はペロン・ウィナー・ブルローの意味の G 上境界値 f の $\mathcal{A}$ 調和に関しての一般化ディリクレ問題の一般化解と一致し，その意味での $y\in\partial G$ の $\mathcal{A}$ 正則性と上の $\mathcal{A}$ 正則性は全く一致する（[4；6, 9 章］参照)。すべての $y\in\partial G$ が $\mathcal{A}$ 正則のとき G は $\mathcal{A}$ 正則と言う。G が滑めらかな境界 ∂G で囲まれている様な場合 G は正則となる（[4；6, 9 章参照)。

2.3. 今後は M は非コムパクトであるとする。M の領域 R が**滑めらか**であるとは，R は M 内相対完閉であって，∂R が互に交らぬ有限個の滑めらかな閉超曲面からなることである。滑めらかな領域 R の全体 $\{R\}$ は包含で有向列となり $R\uparrow M$ である。$\{R\}$ を M の**近似**と言うことにする。$\{R\}$ の可算部分列 $\{R_i\}_{i\geq 1}$ で，$\overline{R}_i\subset R_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots)$, $M=\cup_{i\geq 1}R_i$ となるものを M の**可算近似**と言うことにする。

$1\in L_{p,0}^1(M)$（又は $1\notin L_{p,0}^1(M)$ ）のとき，M は **p 放物型**（又は **p 双曲型**）と言う。更に別の定式化については後出の補題 3.3 をみよ。

3．調和化可能関数族

3.1. $N_p(M):=L_p^1(M)\cap C(M)$ を M 上の**ロイデン空間**とよぶ。空間 $N_{p,0}(M):=L_{p,0}^1(M)\cap C(M)$ はロイデン零空間である。従って $f\in N_{p,0}(M)$ となる為の必要十分条件は，$f\in N_p(M)$ であって，かつある $(\varphi_i)_{i\geq 1}\subset C_0^\infty(M)$ で M 上 a.e. に $\varphi_i\to f$ であると共に $\|\nabla\varphi_i-\nabla f\|_p\to 0$ となることである。従って M の p 双曲性は $1\notin N_{p,0}(M)$ で特徴づけられる。以後簡単の為 $f\in L_p^1(M)$ に対して

$$D_{p,M}(f)=\|\nabla f\,;\,L_p(M)\|^p$$

と記して f の M 上の **p ディリクレ積分**とよぶ。M が自明のときは単に $D_p(f)$，更に p も自明なら $D(f)$ と略記する。

さて $G\subset M$ を相対コムパクト開集合とするとき，任意の $f\in N_p^1(G)$ に対して

$$D_{p,G}(\pi_{\mathcal{A}}^G f)\leqq(\beta/\alpha)^p D_{p,G}(f)$$

となることを**ディリクレ原理**と言う。p 調和の場合は $\alpha=\beta$ にとれるから，ディリクレ原理は

$$D_{p,G}(\pi_p^G f)\leqq D_{p,G}(f)$$

の形をとる。証明には $\int_G\langle\mathcal{A}_x(\nabla u),\,\nabla u-\nabla f\rangle dV=0$ から出発して，

$$\alpha D_{p,G}(u)\leqq\int_G\langle\mathcal{A}_x(\nabla u),\,\nabla u\rangle dV=\int_G\langle\mathcal{A}_x(\nabla u),\,\nabla f\rangle dV$$
$$\leqq\int_G|\mathcal{A}_x(\nabla u)||\nabla f|dV\leqq\beta\int_G|\nabla u|^{p-1}|\nabla f|dV\leqq\left(\int_G|\nabla u|^{(p-1)q}dV\right)^{1/q}\left(\int_G|\nabla f|^p dV\right)^{1/p}$$

となる。最後の不等式はヘルダーのそれから，q を p の共役指数として，導く。これにより $\alpha D_{p,G}(u)\leqq\beta D_{p,G}(u)^{1/q}\times D_{p,G}(f)^{1/p}$ となって，上の不等式が出る。

補題 3.1（完備性補題）．$(f_i)_{i\geq 1}$ を $N_p(M)$ $(1<p<\infty)$ 内の関数列で次の条件をみたすとする：$(f_i)_{i\geq 1}$ は M 上局所有界；$(D_{p,M}(f_i))_{i\geq 1}$ は有界；ある $f\in C(M)$ に対して M 上 a.e. に $f_i\to f$。すると $f\in N_p(M)$ であって，$L_p(M;T(M))$ 内 ∇f_i は ∇f に弱収束する。

証明． 1.4 の弱点列コムパクト性定理により，$(\nabla f_i)_{i\geq 1}$ は弱点列コムパクトである。その任意の弱収束部分列 $(\nabla g_i)_{i\geq 1}$ とその弱極限 $Y\in L(M)$ をとるとき，ルベッグの収束定理により，任意の $X\in C_0^\infty(M)$ に対して

$$\int_M\langle Y,X\rangle dV=\lim_{i\to\infty}\int_M\langle\nabla g_i,\,X\rangle dV=\lim_{i\to\infty}\left(-\int_M g_i\,\mathrm{div}\,X\,dV\right)=-\int_M f\,\mathrm{div}\,X\,dV=\int_M\langle\nabla f,X\rangle dV$$

となるから $Y=\nabla f$ となり，$\nabla f\in L_p(M)$ であって，弱収束の意味で $\nabla f_i\to\nabla f$ となることがわかる。　□

3.2. $\mathcal{A}\in\mathcal{A}_p(M)$ $(1<p<\infty)$ を固定する。$\{R\}$ を M の近似とする。

補題 3.2（一様有界性補題）．M を p 双曲型とする。M 内の任意のコムパクト集合 K と相対コムパクト開集合 $G\supset K$ について，有向列 $(\pi_{\mathcal{A}}^R f)_{R\supset G}$ は K 上一様有界となる。

証明． 各 $R\in\{R\}$, $R\supset G$, に対して $u_R=\pi_{\mathcal{A}}^R f$ (R 上), $u_R=f$ ($M\backslash R$ 上) で u_R を定める。最初 M 上 $f\geqq 0$ の場合について考える。任意に $a\in K$ を固定する。$R\supset G$ のとき $u_R\in H_{\mathcal{A}}(R)^+$ だから，ハルナックの不等式により，ある定数 $C=C(G,K)\geqq 1$ が存在して

$$\|u_R\|_{\infty,K}=\sup_K u_R\leqq C\inf_K u_R\leqq Cu(a)$$

となる。故に $\sup_{R\supset G}u_R(a)<\infty$ を示せばよい。主張に反して $\sup_{R\supset G}u_R(a)=\infty$ とする。すると M の可算近似 $\{R_i\}_{i\geq 1}$ で，$R_1\supset\overline{G}$ かつ $u_{R_i}(a)\to\infty$ $(i\to\infty)$ となるものがとれる。$c_i=1/u_{R_i}(a)\to 0$ $(i\to\infty)$ である。そこで $v_i:=c_iu_{R_i}$ とおくと $v_i\in H_{\mathcal{A}}(R_i)^+\cap N_p(M)^+$ である。各 $k=1,2,\cdots$ に対して $v_i\in H_{\mathcal{A}}(R_{k+2})$ $(i>k+1)$ で，$R_{k+2}\supset\overline{R}_{k+1}$ だから，ハルナックの不等式により，ある定数 $B_k=B_k(R_{k+2},\overline{R}_{k+1})\geqq 1$ が存在して

$$\|v_i\|_{\infty,\overline{R}_{k+1}}=\sup_{\overline{R}_{k+1}}v_i\leqq B_k\inf_{\overline{R}_{k+1}}v_i\leqq B_kv_i(a)=B_k\quad(i>k+1)$$

となる。従ってヘルダー連続性により

$$|v_i(x)-v_i(y)|\leqq B_kC_k|x-y|^{\lambda_k}\quad(x,y\in\overline{R}_{k+1}\,;\,i>k+1)$$

となる。こゝに正数 C_k と λ_k は R_{k+2} と $\overline{R}_{k+1}$ の形状のみで定まる。よってアスコリ・アルツェラの定理により $(v_i)_{i>k}$ は $\overline{R}_k$ 上一様収束部分列を含む。故に対角線論法により，必要なら番号をつけかえて，$(v_i)_{i\geqq 1}$ は M 上局所一様収束すると仮定出来る。$(v_i)_{i\geqq 1}$ の M 上の極限を v とすると，$v\in C(M)$（実は $v\in H_{\mathcal{A}}(M)$）である。$v_i\in N_p(M)$ であるからディリクレ原理を使うと

$$\|\nabla v_i\|_{p,M}=c_i\|\nabla u_{R_i}\|_{p,M}\leqq c_i(\beta/\alpha)\|\nabla f\|_{p,M}$$

であるので，完備性補題により $v\in N_p(M)$ で，$L_p(M)$ 内の弱収束の意味で $\nabla v_i\to\nabla v$ となる。しかし上の不等式により $L_p(M)$ 内の強収束の意味で $\nabla v_i\to 0$ となり $\nabla v=0$ がわかる。$1=v_i(a)\to v(a)=1$ により M 上 $v\equiv 1$ となる。さて $M\backslash R_i$ 上

$$\varphi_i:=-(c_if-v_i)=-c_i(f-u_{R_i})=0$$

であるから，$\varphi_i\in N_{p,0}(M)$ となり，更に M 上局所一様収束の意味で $\varphi_i\to 1$ となり

$$\|\nabla\varphi_i-\nabla 1\|_{p,M}=c_i\|\nabla f-\nabla u_{R_i}\|_{p,M}\leqq c_i(\|\nabla f\|_{p,M}+\|\nabla u_{R_i}\|_{p,M})\leqq 2c_i\|\nabla f\|_{p,M}\to 0\quad(i\to\infty)$$

だから $1\in N_{p,0}(M)$ となって M の p 双曲性に反する。

次に一般の $f\in N_p(M)$ の場合を考える。$f^+=f\cup 0$, $f^-=-f\cap 0$ とおくと $f^\pm\in N_p(M)^+$ となる。M 上 $-f^-\leqq f\leqq f^+$ だから，比較原理により各 $R\in\{R\}$ に対し R 上

$$-\pi_{\mathcal{A}}^R f^-\leqq\pi_{\mathcal{A}}^R f\leqq\pi_{\mathcal{A}}^R f^+$$

となる。上に見た様に $f^\pm$ に対して $(\pi_{\mathcal{A}}^R f^\pm)_{R\supset G}$ は K 上一様有界だから $(\pi_{\mathcal{A}}^R f)_{R\supset G}$ についても同じ結論がえられる。 □

3.3. 任意の $\mathcal{A}\in\mathcal{A}_p(M)$ $(1<p<\infty)$ をとる。$f\in N_p(M)$ に対して $u-f\in N_{p,0}(M)$ となる $u\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap N_p(M)$（即ち f の調和化）を求めることを論ずる。この様な u が求まるときは，唯一つであることが，M の p 双曲型の仮定から従う。事実，$v-f\in N_{p,0}(M)$ で $v\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap N_p(M)$ となるものが u 以外にあったとする。$u-v=(u-f)-(v-f)\in N_{p,0}(M)$ である。すると

$$\int_M\langle\mathcal{A}_x(\nabla u(x))-\mathcal{A}_x(\nabla v(x)),\nabla u(x)-\nabla v(x)\rangle dV(x)=0$$

となる。被積分関数は非負だから，M 上 a.e. に 0 となり，$\mathcal{A}$ の強単調性により，M 上 a.e. に $\nabla(u-v)=\nabla u-\nabla v=0$ となる。これにより M 上 $u-v=c$（定数）となる。ゆえに $c\in N_{p,0}(M)$ より $c=0$ となる。次のこともついでに示されている：$f_i\in N_p(M)$ $(i=1,2)$ で $f_1-f_2\in N_{p,0}(M)$ ならば対応する u_i $(i=1,2)$ について $u_1=u_2$；$u_i\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap N_p(M)$ $(i=1,2)$, $u_1-u_2\in N_{p,0}(M)$ ならば $u_1=u_2$。

最初に $\mathcal{A}_x(h)=|h|^{p-2}h$（即ち p 調和）の場合を考える。このときは u の構成法が，一般の $\mathcal{A}$ の場合より，より鮮明にわかる。$p=2$ のときはロイデン分解と呼ばれる（[10] 参照)。

定理 3.1（p 調和分解定理）. M を p 双曲型とする。任意の $f\in N_p(M)$ に対して $u-f\in N_{p,0}(M)$ となる唯一つの $u\in H_p(M)\cap N_p(M)$ が存在して，$\{R\}$ を M の近似とするとき $(\pi_p^R f)_R$ は u に M 上局所一様収束し，更に $D_{p,M}(\pi_p^R f-u)\to 0$ $(R\to M)$ となる。たゞし $M\backslash R$ 上では $\pi_p^R f=f$ とおくとする。

証明. $u_R=\pi_p^R f$（R 上），$u_R=f$（$M\backslash R$ 上）と u_R を定める。ディリクレ原理により $D_p(u_R)\leqq D_p(u_{R'})\leqq D_p(f)$ $(R'\subset R\subset M)$ となるから $(D_p(u_R))_R$ は収束する。任意の R, R' に対して $R\cup R'\subset R''$ をとるとき，$\pi_p^{R''}((u_R+u_{R'})/2)=u_{R''}$ だから，再びディリクレ原理により $D_p((u_R+u_{R'})/2)\geqq D_p(u_{R''})$ となる。よって1.7のコーシー列補題によれば，あるベクトル場 $X\in L_p(M)$ があって，$L_p(M)$ 内の強収束の意味で $\nabla u_R\to X$ $(R\to M)$ となる。一様有界補題によると $(u_R)_R$ は M 上局所一様有界となるから，このどんな部分列も局所一様収束部分列 $(v_i)_{i\geqq 1}$ を含む。その M 上の極限を $v\in H_p(M)$ とする。すべてのベクトル場 $Y\in C_0^\infty(M)$ に対して

$$\int_M\langle\triangle v_i, Y\rangle dV=-\int_M v_i \operatorname{div} Y\,dV$$

である。$i\to\infty$ とすると

$$\int_M\langle X, Y\rangle dV=-\int_M v \operatorname{div} Y\,dV$$

となる。これは $X=\nabla v$ であることを示し，強収束の意味で $\nabla u_R\to\nabla v$ $(R\to M)$ となる。$f-v_i\in N_{p,0}(M)$ で，$(f-v_i)_{i\geqq 1}$ は $f-v$ に局所一様収束するので $f-v\in N_{p,0}(M)$ となり，$N_p(M)$ の完備性と合わせて $v\in H_p(M)\cap N_p(M)$ となる。ゆえに v は $(v_i)_{i\geqq 1}$ に依存せぬから，定理の主張が従う。 □

3.4. $\{R\}$ を M の近似とし，座標球 $B\in\{R\}$ を一つ固定する。$\overline{B}\subset R$ とすると $R\backslash\overline{B}$ は p 正則な領域であるので，$w_R=0$（$\overline{B}$ 上），$w_R\in H_p(R\backslash\overline{B})\cap C(\overline{R}\backslash B)$, $w_R=1$（$M\backslash R$ 上）と定めた関数 $w_R\in N_p(M)$ となり，M 上 $0\leqq w_R\leqq 1$ となる。R が増加するとき w_R は減少するのでハルナックの原理により，$\overline{B}$ 上 0，$M\backslash\overline{B}$ 上 p 調和，M 上連続となる $w=w(\cdot,B,M)$ があって，$w_R\downarrow w$ となり，M 上 $0\leqq w\leqq 1$ である。w を $M\backslash\overline{B}$ に関する M の理想境界の **p 調和測度**と言う。$M\backslash\overline{B}$ 上 $w\equiv 0$ 又は $w>0$ となる。ディリクレ原理により $D_{p,M}(w_R)\leqq D_{p,M}(w_{R'})$ $(R'\subset R)$, $D_{p,M}((w_R+w_{R'})/2)\geqq D_{p,M}(w_{R''})$ $(R\cup R'\subset R'')$ であるから，1.7のコーシー列補題により $(\nabla w_R)_R$ は強収束し又 $(\nabla w_R)_R$ は ∇w に弱収束するから，結局 $(\nabla w_R)_R$ は ∇w に強収束する。

補題 3.3. M が p 放物型となる為の必要十分条件は M の理想境界の p 調和測度が零となることである。

証明. $1-w_R\in N_{p,0}(M)$ で M 上局所一様に $1-w_R\to 1-w$ $(R\to M)$ かつ強収束の意味で $\nabla(1-w_R)\to\nabla(1-w)$ $(R\to M)$ により $1-w\in N_{p,0}(M)$ となる。故に $w=0$ なら $1\in N_{p,0}(M)$ となる。逆に $1\in N_{p,0}(M)$ なら $1-(1-w)=w\in N_{p,0}(M)$ となる。局所有界列 $(\varphi_i)_{i\geqq 1}\subset C_0^\infty(M)$ で M 上 a.e. に $\varphi_i\to 1$ $(i\to\infty)$ かつ $D_{p,M}(\varphi_i)\to 0$ $(i\to\infty)$ となるものがとれる。$\phi_i=\varphi_i((w-1/i)\cup 0)$ は $M\backslash\overline{B}$ 内にコムパクト台をもつから $\phi_i\in N_{p,0}(M\backslash\overline{B})$ となる。しかし $(\phi_i)_{i\geqq 1}$ は局所有界で $M\backslash\overline{B}$ 上 a.e. に $\phi_i\to w(i\to\infty)$ かつ $D_{p,M\backslash\overline{B}}(\phi_i\to w)\to 0$ となるので $w\in N_{p,0}(M\backslash\overline{B})$ である。しかも $w\in H_p(M\backslash\overline{B})$ だから $w=0$ となる。 □

3.5. $N_p(M)$ に関しての完備性補題に対応して $N_{p,0}(M)$ についても同様の性質の成り立つことをみる。

補題 3.4（完備性補題）. $(f_i)_{i\geqq 1}$ を $N_{p,0}(M)$ $(1<p<\infty)$ 内の関数列で次の条件をみたすとする：$(f_i)_{i\geqq 1}$ は M 上局所有界；$(D_{p,M}(f_i))_{i\geqq 1}$ は有界列；ある $f\in C(M)$ に対して M 上 a.e. に $f_i\to f$。すると $f\in N_{p,0}(M)$ であって

$L_p(M;T(M))$ 内 ∇f_i は ∇f に弱収束する。

証明. $N_p(M)$ に関する完備性補題により $f\in N_p(M)$ で，∇f_i は ∇f に弱収束する。$1\in N_{p,0}(M)$ ならば，$(\varphi_i)_{i\geq 1}\subset C_0^\infty(M)$ で $D_{p,M}(\varphi_i)\to 0$ $(i\to\infty)$ かつ M 上 a.e. に $\varphi_i\to 1$ となるものがとれる。$(\varphi_i)_{i\geq 1}$ を一様有界にとり直すことは容易である。各 $m=1,2,\cdots$ に対し $g_m=(f\cap m)\cup(-m)$ とおく。$g_m\in N_p(M)$ である。$g_m\varphi_i$ はコムパクト台で M 上 a.e. に $g_m\varphi_i\to g_m$ かつ $D_{p,M}(g_m\varphi_i-g_m)\to 0$ $(i\to\infty)$ となるので $g_m\in N_{p,0}(M)$ となる。M 上 a.e. に $g_m\to f$ かつ $D_{p,M}(g_m-f)\to 0$ $(m\to\infty)$ となるので $f\in N_{p,0}(M)$ がわかる。

次に $1\notin N_{p,0}(M)$ とする。$u-f\in N_{p,0}(M)$ かつ $u\in H_p(M)$ となる u をとるとき $u=0$ と言えばよい。$u=(u-f)+f$ とみて $v_i=(u-f)+f_i$ とおくと $v_i\in N_{p,0}(M)$ であって，$(v_i)_{i\geq 1}$ は局所有界で M 上 a.e. に $v_i\to u$ で $(D_{p,M}(v_i))_{i\geq 1}$ は有界となる。従って弱収束の意味で $\nabla v_i\to\nabla u$ となるので，

$$\int_M(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot\nabla v_i\,dV=0$$

で $i\to\infty$ として $\int_M|\nabla u|^p dV=0$ となり，M 上 $u=c$（定数）となる。主張に反して $c\neq 0$ ならば $c^{-1}f$ を考えて $c=1$ としてよい。$h_i=(v_i\cap 1)\cup 0\in N_{p,0}(M)$ とすると M 上 $0\leq h_i\leq 1$ であって，M 上 a.e. に $h_i\to 1$ である。$(D_{p,M}(h_i))_{i\geq 1}$ は $(D_{p,M}(v_i))_{i\geq 1}$ と共に有界列なので，∇h_i は $\nabla 1=0$ に弱収束する。さて補題 3.3 により p 調和測度 $w=w(\cdot,\bar{B},M)$ は正である。他方 $h_iw\in N_{p,0}(M\backslash\bar{B})$ に注意して

$$0=\int_{M\backslash\bar{B}}\langle|\nabla w|^{p-2}\nabla w,\nabla(h_iw)\rangle dV=\int_M\langle|\nabla w|^{p-2}\nabla w,\nabla(h_iw)\rangle dV$$
$$=\int_M h_i|\nabla w|^p dV+\int_M\langle w|\nabla w|^{p-2}\nabla w,\nabla h_i\rangle dV$$

の最右辺の第 1 項にルベッグの収束定理を，第 2 項には ∇h_i の 0 への弱収束性を使って，$i\to\infty$ とすると $\int_M|\nabla w|^p dV=0$ が出て $w=0$ となることがわかる。これは矛盾である。 □

3.6. $\mathcal{A}\in\mathcal{A}_p(M)$ $(1<p<\infty)$ を 1 つ固定する。従前通りに $\{R\}$ を M の近似とする。$f\in N_p(M)$ に対して，$M\backslash R$ 上 $\pi_{\mathcal{A}}^R f=f$ とおくことにする。

定理 3.2（調和化可能性定理）. M を p 双曲型とする。任意の $f\in N_p(M)$ に対して，$u-f\in N_{p,0}(M)$ となる唯一つの $u\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap N_p(M)$ が存在して，$(\pi_{\mathcal{A}}^R f)_R$ は M 上 u に局所一様収束し，又 $L_p(M;T(M))$ 内 $(\nabla(\pi_{\mathcal{A}}^R f))_R$ は ∇u に弱収束し，

(3.1) $$D_{p,M}(u),\ D_{p,M}(\pi_{\mathcal{A}}^R f)\leq(\beta/\alpha)^p D_{p,M}(f)$$

がすべての $R\in\{R\}$ について成立する。

証明. $\pi_{\mathcal{A}}^R f=u_R$ とおく。一様有界性補題により，$(u_R)_R$ のどんな部分列も M 上局所一様収束する部分列 $(v_i)_{i\geq 1}$ を含む。その極限を u とすると $u\in H_{\mathcal{A}}(M)$ である。ディリクレ原理により (3.1) の一部分 $D_{p,M}(u_R)\leq(\beta/\alpha)^p D_{p,M}(f)$ は直ちにわかる。故にとくに $\|\nabla v_i\|_{p,M}\leq(\beta/\alpha)\|\nabla f\|_{p,M}$ $(i\geq 1)$ となる。完備性補題により，$u\in N_p(M)$ で，$L_p(M)$ 内の弱収束の意味で $\nabla v_i\to\nabla u$ となる。故に $u\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap N_p(M)$ となる。$v_i-f\in N_{p,0}(M)$ であって，$(\nabla(v_i-f))_{i\geq 1}$ も $(\nabla v_i)_{i\geq 1}$ と共に有界であり，$(v_i-f)_{i\geq 1}$ は $u-f$ に局所一様収束する。故に今一つの完備性補題により $u-f\in N_{p,0}(M)$ となる。これにより u は f のみによって一意に定まるものである。つまり $(u_R)_R$ のどんな部分列のどんな収束部分列も同一の u に収束するので，$(u_R)_R$ が M 上 u に局所一様収束することがわかる。よって完備性補題から $L_p(M)$ の弱収束の意味で $\nabla u_R\to\nabla u$ $(R\to M)$ となることが出る。これにより (3.1) がすべて従う。 □

3.7. M を p 双曲型とすると各 $f\in N_p(M)$ に対して唯一つの $u\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap N_p(M)$ で $u-f\in N_{p,0}(M)$ となるものが定まった。G を M の相対コムパクト開集合とするとき，$f\in N_p(G)$ に対して唯一つの $u\in H_{\mathcal{A}}(G)\cap N_p(G)$ が定まり，$u-f\in N_{p,0}(G)$ となる。ところでもし上の $f\in W_p^1(G)$ なら $\pi_{\mathcal{A}}^G f-f\in W_{p,0}^1(G)$ である。$W_{p,0}^1(G)\cap C(G)\subset N_{p,0}(M)$ だから $\pi_{\mathcal{A}}^G f-f\in N_{p,0}(G)$ となり，$\pi_{\mathcal{A}}^G f=u$ となることがわかる。この理由で $f\in N_p(G)$ に対して $u-f\in N_{p,0}(M)$ により定まる唯一つの $u\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap N_p(M)$ を，$u=\pi_{\mathcal{A}}^M f$ とかくことは合理的である。以後この様にかくと，$\pi_{\mathcal{A}}^M$ も

$N_p(M)$ の上で単調性をもつことが極限移行ですぐわかる：$f,g\in N_p(M)$ で $f\leqq g$ とすると $\pi_{\mathcal{A}}^M f\leqq \pi_{\mathcal{A}}^M g$；$f\in N_p(M)$ かつ $h\in H_{\mathcal{A}}(M)$ で $f\leqq h$ とすると $\pi_{\mathcal{A}}^M f\leqq h$。

4．ビルタネン・ロイデンの定理

4.1. 以降本節では M は p 双曲型とする。$1<p,\ q<\infty$ は互いに共役な指数とする。次の結果は，マズヤ［7］が，M が $\boldsymbol{R}^n$ の有界開集合のとき導いた。

補題 4.1（マズヤの補題）． $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}_i\in \boldsymbol{L}_p^1(\boldsymbol{M})$ $(\boldsymbol{i}=1,2,\cdots)$ に対して

$$(4.1)\qquad \int_M\langle\mathcal{A}_x(\nabla u_i)-\mathcal{A}_x(\nabla u),\ \nabla u_i-\nabla u\rangle dV\to 0\quad(i\to\infty)$$

となるならば，$\boldsymbol{L}_p(\boldsymbol{M};\boldsymbol{T}(\boldsymbol{M}))$（又は $\boldsymbol{L}_q(\boldsymbol{M};\boldsymbol{T}(\boldsymbol{M}))$）内の弱収束の意味で $\nabla\boldsymbol{u}_i\to\nabla\boldsymbol{u}$（又は $\mathcal{A}_x(\nabla u_i)\to\mathcal{A}_x(\nabla u)$）となる。

証明． $(u_i)_{i\geqq 1}$ の適当な部分列 $(v_i)_{i\geqq 1}$ があって，殆んどすべての $x\in M$ に対して

$$(4.2)\qquad \langle\mathcal{A}_x(\nabla v_i(x))-\mathcal{A}_x(\nabla u(x)),\ \nabla v_i(x)-\nabla u(x)\rangle\to 0\ (i\to\infty)$$

となる。$x\in M$ で (4.2) が成り立つとして

$$\xi=\nabla u(x)=(\xi^1,\cdots,\xi^n)$$

とおく。η を $(\nabla v_i(x))_{i\geqq 1}$ の任意の集積点とするとき，$|\eta|<\infty$ であることを示す。事実，ある定数 C があって

$$\langle\mathcal{A}_x(\nabla v_i(x))-\mathcal{A}_x(\nabla u(x)),\ \nabla v_i(x)-\nabla u(x)\rangle\geqq\beta|\nabla v_i(x)|^p-C(|\nabla v_i(x)|^{p-1}+|\nabla v_i(x)|+1)$$

となる。もし $|\eta|=\infty$ ならば，上式の右辺，従って左辺は ∞ に発散し，(4.2) に反する。よって $|\eta|<\infty$ である。写像 $h\mapsto\mathcal{A}_x(h)$ の連続性を使うと，(4.2) より

$$\langle\mathcal{A}_x(\eta)-\mathcal{A}_x(\xi),\ \eta-\xi\rangle=0$$

となり $\eta=\xi$ となる。従って殆んどすべての $x\in M$ に対して

$$\nabla v_i(x)\to\nabla u(x),\ \mathcal{A}_x(\nabla v_i(x))\to\mathcal{A}_x(\nabla u(x))\quad(i\to\infty)$$

となることがわかる。(4.1) の積分を $A(u_i)$ と記すとすると，ヘルダーの不等式を使って

$$A(v_i)\geqq\alpha(D_p(v_i)+D_p(u))-\beta(D_p(v_i)^{1/q}D_p(u)^{1/p}+D_p(u)^{1/q}D_p(v_i)^{1/p})$$

となることがわかる。これから $(D_p(v_i))_{i\geqq 1}$ が有界列となることが結論される。1.5 のルレイ・リオンヅの補題から弱収束の意味で，$\nabla v_i\to\nabla u$ かつ $\mathcal{A}_x(\nabla v_i)\to\mathcal{A}_x(\nabla u)$ となって，$(\nabla v_i)_{i\geqq 1}$, $(\mathcal{A}_x(\nabla v_i))_{i\geqq 1}$ の弱極限が，それぞれのえらび方によらぬことから結論がでる。 □

4.2. $H_{\mathcal{A}}(M)$ の2つの関数 u，v に対して，次の2性質をもつ $w\in H_{\mathcal{A}}(M)$ が定まるとき，$w=u\vee v$ と記す：M 上 $w\geqq u$ かつ $w\geqq v$；もしある $h\in H_{\mathcal{A}}(M)$ が M 上 $h\geqq u$ かつ $h\geqq v$ となるならば $h\geqq w$。$u\vee v$ を u と v の最小 $\mathcal{A}$ 調和優関数，$u\wedge v=-(-u)\vee(-v)$ を最大 $\mathcal{A}$ 調和劣関数と言う。記号 $u\cup v=\max(u,v)$, $u\cap v=\min(u,v)$ と混同してはいけない。

補題 4.2（束算法補題）． $\boldsymbol{f}_1$ と $\boldsymbol{f}_2$ が $\boldsymbol{N}_p(\boldsymbol{M})$ の元であるとき，$\boldsymbol{M}$ 上

$$(4.3)\qquad \pi_{\mathcal{A}}^M(f_1\cup f_2)=(\pi_{\mathcal{A}}^M f_1)\vee(\pi_{\mathcal{A}}^M f_2)$$

となり，又上式で $\cup$ と $\vee$ を $\cap$ と $\wedge$ で置き換えた式も成立する。

証明. M の可算近似 $\{R_i\}_{i\geq 1}$ をとり，u_{ki} を R_i 上 $u_{ki}=\pi_{\mathcal{A}}^{R_i}f_k$，$M\backslash R_i$ 上 $u_{ki}=f_k$ とおいて u_{ki} を定める $(k=1,2)$。$f_1\cup f_2-u_{1i}\cup u_{2i}$ はコムパクト台だから $N_{p,0}(M)$ に入る。調和化可能性定理によれば $(\nabla(f_1\cup f_2-u_{1i}\cup u_{2i}))_{i\geq 1}$ は有界で，M 上局所一様に $(f_1\cup f_2-u_{1i}\cup u_{2i})_{i\geq 1}$ は $f_1\cup f_2-u_1\cup u_2$ に収束する。完備性補題により $f_1\cup f_2-u_1\cup u_2\in N_{p,0}(M)$ となる。ゆえに

$$\pi_{\mathcal{A}}^M(f_1\cup f_2)=\pi_{\mathcal{A}}^M(u_1\cup u_2)$$

となる。M 上 $u_k\leqq u_1\cup u_2$ $(k=1,2)$ だから $\pi=\pi_{\mathcal{A}}^M$ の単調性により $u_k\leqq\pi(u_1\cup u_2)$ $(k=1,2)$ となる。次に $u_1, u_2\leqq h\in H_{\mathcal{A}}(M)$ とする。$u_1, u_2\leqq u_1\cup u_2\leqq h$ だから，π の単調性により $u_1, u_2\leqq\pi(u_1\cup u_2)\leqq h$ となる。よって $\pi(f_1\cup f_2)=u_1\vee u_2$ となる。 □

4.3. こゝで $\mathcal{A}$ ディリクレ積分 $D_{\mathcal{A},M}(f)=D_{\mathcal{A}}(f)$ を導入する：$f\in L_p^1(M)$ に対して

$$D_{\mathcal{A},M}(f)=\int_M\mathcal{A}_x(\nabla u(x))\cdot\nabla u(x)dV(x).$$

$\alpha D_{p,M}(f)\leqq D_{\mathcal{A},M}(f)\leqq\beta D_{p,M}(f)$ だから，有限であるか無限であるかに関しては $\mathcal{A}$ ディリクレ積分も p ディリクレ積分も互に同等である。とくに $\mathcal{A}_x(h)=|h|^{p-2}h$（$p$ ラプラシアン）のとき $D_{\mathcal{A},M}(f)=D_{p,M}(f)$ である。

定理 4.1（ビルタネン・ロイデンの定理）. 任意の $u\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap L_p^1(M)$ に対して

$$\boldsymbol{u_m:=(u\wedge m)\vee(-m)\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap L_p^1(M)\cap L_\infty(M)}$$

である $(m=1,2,\cdots)$。$(u_m)_{m\geq 1}$ は M 上 u に一様収束し，$L_p(M;T(M))$ 内弱収束の意味で $\nabla u_m\to\nabla u$ で，更に

$$\boldsymbol{D_{\mathcal{A},M}(u_m)\to D_{\mathcal{A},M}(u)\quad(m\to\infty).}$$

4.4. 注意. $p=2$ で $\mathcal{A}_x(h)=h$ の場合（つまり古典調和の場合）に最初ビルタネンが，

$$H_{\mathcal{A}}(M)\cap L_p^1(M)\neq\boldsymbol{R}\Rightarrow H_{\mathcal{A}}(M)\cap L_p^1(M)\cap L_\infty(M)\neq\boldsymbol{R}$$

であることを示した。古典調和のとき $D_{\mathcal{A},M}(u_m)=\|\nabla u_m\|_{2,M}^2$ なので上の定理の言う所は $(\nabla u_m)_{m\geq 1}$ はヒルベルト空間 $L_2(M;T(M))$ 内で $(\nabla u_m)_{m\geq 1}$ が ∇u に弱収束し，$\|\nabla u_m\|_{2,M}\to\|\nabla u\|_{2,M}$ なので，$\|\nabla u_m-\nabla u\|_{2,M}\to 0$ となることがでる。この形が本来のロイデンの定理で，上の定理 4.1 は本来のロイデンの定理の真の拡張である。古典的ビルタネン・ロイデンの定理については [9] を参照する。

4.5. 定理 4.1 の証明. $f_m=(u\cap m)\cup(-m)$ とおくと $f_m\in N_p(M)$ であり，

$$D_{p,M}(f_m)=D_{p,\{|u|<m\}}(u)\leqq D_{p,M}(u)\quad(m=1,2,\cdots)$$

であり，又 $D_{p,M}(u-f_m)=D_{p,\{|u|>m\}}(u)\to 0$ $(m\to\infty)$ となる。次に (4.3) により $u_m=\pi_{\mathcal{A}}^M f_m$ であるのでディリクレ原理により

$$D_{p,M}(u_m)\leqq(\beta/\alpha)^pD_{p,M}(f_m)\leqq(\beta/\alpha)^pD_{p,M}(u)\quad(m=1,2,\cdots)$$

となる。さて

$$A(u_m):=\int_M\langle\mathcal{A}_x(\nabla u)-\mathcal{A}_x(\nabla u_m),\ \nabla u-\nabla u_m\rangle dV$$
$$=\int_M\langle\mathcal{A}_x(\nabla u)-\mathcal{A}_x(\nabla u_m),\ \nabla u-\nabla f_m\rangle dV+\int_M\langle\mathcal{A}_x(\nabla u)-\mathcal{A}_x(\nabla u_m),\ \nabla f_m-\nabla u_m\rangle dV$$

を考える。$f_m-u_m\in N_{p,0}(M)$ で $u, u_m\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap L_p^1(M)$ なので右辺第 2 項は 0 となる。ゆえにヘルダーの不等式により，p と q を互に共役な指数として

$$A(u_m) \leqq \int_M |\mathcal{A}_x(\nabla u)||\nabla u - \nabla f_m| dV + \int_M |\mathcal{A}_x(\nabla u_m)||\nabla u - \nabla f_m| dV$$
$$\leqq \beta \int_M |\nabla u|^{p-1} |\nabla u - \nabla f_m| dV + \beta \int_M |\nabla u_m|^{p-1} |\nabla u - \nabla f_m| dV$$
$$\leqq \beta (D_{p,M}(u)^{1/q} + D_{p,M}(u_m)^{1/q}) D_{p,M}(u-f_m)^{1/p} \leqq \beta(1+(\beta/\alpha)^{p/q}) D_{p,M}(u)^{1/q} D_{p,M}(u-f_m)^{1/p} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

となる。よってマズヤの補題により $L_p(M)$（又は $L_q(M)$）内弱収束の意味で $\nabla u_m \to \nabla u$（又は $\mathcal{A}_x(\nabla u_m) \to \mathcal{A}_x(\nabla u)$）となる。そこで

$$D_{\mathcal{A},M}(u_m) = \int_M \langle \mathcal{A}_x(\nabla u_m), \nabla u_m - \nabla f_m \rangle dV + \int_M \langle \mathcal{A}_x(\nabla u_m), \nabla f_m - \nabla u \rangle dV + \int_M \langle \mathcal{A}_x(\nabla u_m), \nabla u \rangle dV$$

を考える。右辺第1項は0となる。右辺第2項は

$$\leqq \beta \int_M |\nabla u_m|^{p-1} |\nabla f_m - \nabla u| dV \leqq \beta D_{p,M}(u_m)^{1/q} D_{p,M}(u-f_m)^{1/p}$$
$$\leqq \beta(\beta/\alpha)^{p/q} D_{p,M}(u)^{1/q} D_{p,M}(u-f_m)^{1/p} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

となる。第3項は $\int_M \langle \mathcal{A}_x(\nabla u), \nabla u \rangle dV = D_{\mathcal{A},M}(u)$ に収束する。よって $D_{\mathcal{A},M}(u_m) \to D_{\mathcal{A},M}(u)$ $(m \to \infty)$ となる。

$u^+ = \pi^M_{\mathcal{A}}(u \cup 0)$, $u^- = \pi^M_{\mathcal{A}}(u \cap 0)$ とおく。M 上 $-u^- \leqq u \leqq u^+$ なので $-u^- \leqq f_m \leqq u^+$ となり，これから $-u^+ \leqq u_m \leqq u^+$ となる。よって $(u_m)_{m \geq 1}$ は局所一様有界なので，$(u_m)_{m \geq 1}$ の任意の部分列 S は M 上一様収束部分列 $(u_{m_i})_{i \geq 1}$ を含む。その極限 u_S とするとき，$D_{p,M}(u_{m_i}) \leqq D_{p,M}(u)$ なので完備性補題により $u_S \in N_p(M)$ で $(\nabla u_{m_i})_{i \geq 1}$ は ∇u_S に弱収束する。$f_{m_i} - u_{m_i} \in N_{p,0}(M)$ で，$(f_{m_i} - u_{m_i})_{i \geq 1}$ は M 上 $u - u_S$ に局所一様収束する。又

$$D_p(f_{m_i} - u_{m_i})^{1/p} \leqq D_p(f_{m_i})^{1/p} + D_p(u_{m_i})^{1/p} \leqq (1+\beta/\alpha) D_p(u)^{1/p}$$

でもあるから完備性補題により，$u - u_S \in N_{p,0}(M)$ となり $u_S = u$ となる。よって M 上局所一様に $u_m \to u$ となる。□

5．ロイデン調和境界

5.1. M 上のロイデン空間 $N_p(M)$ に加えて

$$M_p(M) = N_p(M) \cap L_\infty(M)$$

を M 上の**ロイデン代数**と言う。$M_p(M)$ は $\|f\|_{\infty,M} + \|\nabla f\|_{p,M}$ をノルムとして可換バナッハ代数となる。$M_p(M)$ の極大イデヤル空間を M_p^* と記す。これは次の性質をもつ（例えば［9；3章］参照）：M_p^* はコムパクト・ハウスドルフ空間；M は M_p^* の開かつ稠密な部分空間；$N_p(M)$ の各関数は M_p^* 迄 $[-\infty, \infty]$ 値連続関数として一意的に拡張出来て，$N_p(M) \subset C(M_p^*; [-\infty, \infty])$ と考えるとき，$N_p(M)$ は M_p^* の任意の2点を分離する。$f \in N_p(M)$ の M_p^* への拡張も同じ文字 f で表す。ワイエルシュトラス・ストーンの近似定理により，$M_p(M)$ は $C(M_p^*; \boldsymbol{R})$ の中で（一様収束について）稠密である。M_p^* を M の指数 $1 < p < \infty$ の**ロイデン・コムパクト化（完閉化）**，$\Gamma_p(M) = M_p^* \backslash M$ を M の指数 p の**ロイデン境界**と言う。さらに

$$\Delta_p(M) = \{\xi \in M_p^* : \text{すべての } f \in N_{p,0}(M) \text{ について } f(\xi) = 0\}$$

を M の**ロイデン p 調和境界**又は指数 p のロイデン調和境界と呼ぶ。$\Delta_p(M)$ に関して基本的であるのは次の性質である：

双対定理． ***$N_{p,0}(M)$ が $\Delta_p(M)$ を定めることに双対的に $\Delta_p(M)$ が $N_{p,0}(M)$ を次の如く定める：***

$$\boldsymbol{N_{p,0}(M) = \{f \in N_p(M) : \text{すべての } \xi \in \Delta_p(M) \text{ について } f(\xi) = 0\}.}$$

証明． 最初に f が M 上 $|f| \leqq c$（有限定数）をみたすときに示す。任意に正数 ε をとると，$\Delta_p(M)$ の M_p^* 内での開近傍 U で U 上 $|f| < \varepsilon$ となるものがとれる。$\Delta_p(M)$ の定義から各 $\xi \in M_p^* \backslash U$ に対して $f_\xi(\xi) \neq 0$ となる $f_\xi \in N_{p,0}(M)$ がとれる。f_ξ をその $2/f_\xi(\xi)$ 倍でおきかえ，更に $f_\xi \cup 0$ でおきかえて，$f_\xi(\xi) = 2$ かつ M_p^* 上 $f_\xi \geqq 0$ と仮定してよいことになる。さて集合 $\{f_\xi > 1\}$ は f_ξ のえらび方により，ξ を含む M_p^* の開集合で，

$$\bigcup_{\xi\in M_p^*\setminus U}\{f_\xi>1\}\supset M_p^*\setminus U$$

であり，しかも $M_p^*\setminus U$ はコムパクト故 M_p^* 内の有限個の点 $\xi_1,\cdots,\xi_m$ を適当にとると

$$\bigcup_{i=1}^{m}\{f_{\xi_i}>1\}\supset M_p^*\setminus U$$

となるように出来る。そこで $h=\sum_{i=1}^m f_{\xi_i}$ とおけば，$h\in N_{p,0}(M)$ で，$M_p^*\setminus U$ 上 $h>1$ となる。ゆえに $g=h\cap 1$ とすると $g\in N_{p,0}(M)$ となり，M_p^* 上 $0\leqq g\leqq 1$ であって，しかも $g|(M_p^*\setminus U)=1$ となる。ゆえに M_p^* 上

$$-\varepsilon-cg<f<\varepsilon+cg$$

となる。$\pi_p^M(\varepsilon+cg)=\varepsilon$ により M 上従って M_p^* 上 $-\varepsilon\leqq\pi_p^M f\leqq\varepsilon$ となり，$\varepsilon\downarrow 0$ として $\pi_p^M f=0$ がわかる。ゆえに $f\in N_{p,0}(M)$ となる。

次に必ずしも f が有界でないとき，

$$f_m=(f\cap m)\cup(-m)\quad(m=1,2,\cdots)$$

とおくと，$\triangle_p(M)$ 上 f と共に $f_m=0$ だから，最初に示したことから $f_m\in N_{p,0}(M)$ となる。$(f_m)_{m\geqq 1}$ は M 上局所一様に f に収束し

$$D_{p,M}(f_m-f)=D_{p,\{|f|>m\}}(f)\to 0\quad(m\to\infty)$$

となるから，完備性補題により $f\in N_{p,0}(M)$ となる。 □

5.2. $\mathcal{A}$ 劣（又は優）調和性については［4；7章］を参照する。$\triangle_p(M)$ の果たす役割の一つとして次の重要な結果をのべる。

命題 5.1（一般比較原理）．s は M 上上方有界 $\mathcal{A}$ 劣調和関数，S は M 上下方有界 $\mathcal{A}$ 優調和関数で，各 $\xi\in\triangle_p(M)$ に対して

$$\limsup_{x\in M,\,x\to\xi}s(x)\leqq\liminf_{x\in M,\,x\to\xi}S(x)\qquad(5.1)$$

が成り立つと，M 上 $s\leqq S$ となる。

証明．（5.1）の左辺で $s(\xi)$，右辺で $S(\xi)$ として s，S を $M_p^*=M\cup\Gamma_p(M)$ 迄拡張すると，s（又は S）は $M^*=M_p^*$ の上で上（又は下）半連続となる。よって，とくに各 $\xi\in M^*$ に対して

$$S(\xi)=\sup\{\varphi(\xi):\varphi\in C(M^*)\text{ かつ }M\text{ 上 }\varphi\leqq S\}$$

となるから，各 $\xi\in\Delta=\Delta_p(M)$ に対して，$s(\xi)\leqq S(\xi)$ により任意の正数 ε に対して，M^* 上 $\varphi_\xi<S$ かつ $\varphi_\xi(\xi)>s(\xi)-\varepsilon$ となる $\varphi_\xi\in C(M^*)$ がみつかる。$U_\xi=\{\eta\in M^*:\varphi_\xi(\eta)>s(\eta)-\varepsilon\}$ は ξ を含む開集合で，$\cup_{\xi\in\Delta}U_\xi\supset\Delta$ だから，Δ のコムパクト性により，有限個の $\xi_i\in\Delta$ $(i=1,\cdots,m)$ が求まり $U:=\cup_{i=1}^m U_{\xi_i}\supset\Delta$ となる。

$$\varphi:=\varphi_{\xi_1}\cup\cdots\cup\varphi_{\xi_m}$$

とおくと，U は Δ の開近傍で，$\varphi\in C(M^*)$ かつ U 上 $s-\varepsilon<\varphi<S+\varepsilon$ となる。$M_p(M)$ は $C(M^*)$ 内稠密だから，$f\in M_p(M)$ であって U 上

$$s-\varepsilon<f<S+\varepsilon$$

となるものがみつかる。$g|(M^*\setminus U)=1$, $g|\Delta=0$ となる $g\in N_{p,0}(M)^+$ をとる。S の下方有限性と上の不等式により，$f_S:=f-jg$ で j を十分大きな番号にとるとき，M 上 $f_S\leqq S+\varepsilon$ となる。同様に $f_s:=f+jg$ で番号 j を十分大きくとると M 上 $f_s\geqq s-\varepsilon$ となる。Δ 上 $f_s=f_S$ だから

$$\pi_{\mathcal{A}}^M f_s=\pi_{\mathcal{A}}^M f_S=:u$$

となる。$\{R\}$ を M の近似とするとき，R 上 $s-\varepsilon$（又は $S+\varepsilon$）の劣（又は優）調和性より

$$\pi^R_{\mathcal{A}} f_S < S + \varepsilon,\ \pi^R_{\mathcal{A}} f_s > s - \varepsilon$$

となり $R \uparrow M$ とすることにより M 上 $s-\varepsilon \leqq u \leqq S+\varepsilon$，特に M 上 $s-\varepsilon \leqq S+\varepsilon$ となり $\varepsilon \downarrow 0$ として結論に到る。 □

5.3. $u, v \in H_{\mathcal{A}}(M) \cap L^1_p(M)$ は M^*_p 上連続であるから，$\Delta_p(M)$ における境界値が比較できる。

命題 5.2（比較原理）． $\boldsymbol{u}$ **と** $\boldsymbol{v}$ **を** $\boldsymbol{H_{\mathcal{A}}(M) \cap L^1_p(M)}$ **内の関数として，**$\boldsymbol{\Delta_p(M)}$ **の上で** $\boldsymbol{u \leqq v}$ **であるならば，**$\boldsymbol{M}$ **の上で** $\boldsymbol{u \leqq v}$ **となる。特に** $\boldsymbol{\Delta_p(M)}$ **上** $\boldsymbol{u = v}$ **ならば，**$\boldsymbol{M}$ **上** $\boldsymbol{u = v}$ **となる。**

証明． $u_j = (u \wedge j) \vee (-j)$, $v_j = (v \wedge j) \vee (-j)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ とおくならば，任意の $\xi \in \Delta_p(M)$ において

$$u_j(\xi) = (u(\xi) \cap j) \cup (-j) \leqq (v(\xi) \cap j) \cup (-j) = v_j(\xi)$$

だから，命題 5.1 により M 上 $u_j \leqq v_j$ となる。$j \to \infty$ として，M 上 $u \leqq v$ がわかる。 □

5.4. 上の比較原理を，次の如くに一般にする。

命題 5.3（相対境界付比較原理）． $\boldsymbol{U}$ **を** $\boldsymbol{M}$ **の開集合とし，**$\boldsymbol{u}$ **と** $\boldsymbol{v}$ **を** $\boldsymbol{H_{\mathcal{A}}(U) \cap L^1_p(U)}$ **内の関数とする。もしすべての** $\boldsymbol{\xi \in (\partial U) \cup (\overline{U} \cap \Delta)}$ **（**$\boldsymbol{\overline{U}}$ **は** $\boldsymbol{M^*_p}$ **での閉被）に対して**

$$\limsup_{x \in U,\, x \to \xi} \boldsymbol{u(x)} \leqq \liminf_{x \in U,\, x \to \xi} \boldsymbol{v(x)} \tag{5.2}$$

とすると，$\boldsymbol{U}$ **上** $\boldsymbol{u \leqq v}$ **となる。**

証明． 命題 5.2 の証明におけると同様の u_j と v_j を U で作るとき，u_j と v_j に対して（5.2）が成り立つ。もし U 上これから $u_j \leqq v_j$ が示されたら，$j \uparrow \infty$ として U 上 $u \leqq v$ が出る。従って u，v は有界として証明すれば十分である。又任意の正数 ε をとり，v を $v + \varepsilon$ でおきかえると，（5.2）の $\leqq$ は $<$ で成り立つ。これで U 上 $u \leqq v + \varepsilon$ が示されたら $\varepsilon \downarrow 0$ として $u \leqq v$ が出るから，（5.2）の $\leqq$ は $<$ であると仮定してよい。

$$V = \{x \in U : u(x) > v(x)\}$$

とおき，$V = \emptyset$ を示せばよいから，背理法で $V \neq \emptyset$ とする。$V \cup \partial V \subset U$ で $\overline{V} \cap \Delta_p(M) = \emptyset$ である。そこで一様有界な $(\varphi_i)_{i \geqq 1} \subset C^\infty_0(M)$ と $\varphi \in N_{p,0}(M)$ で M 上 a.e. に $\varphi_i \to \varphi$ かつ $D_{p,M}(\varphi_i - \varphi) \to 0$ $(i \to \infty)$ でしかも $V \cup \partial V$ 上 $\varphi = 1$ となるものがとれる。$w = u - v$ とおくと $w | \partial V = 0$ である。各自然数 j に対して $\varphi_i((w - 1/j) \cup 0)$ は U 内コムパクト台をもつ。そこで $\theta = u$ 又は v とおくと

$$0 = \int_V \langle \mathcal{A}_x(\nabla \theta),\ \nabla(\varphi_i((w - 1/j) \cup 0)) \rangle dV$$

$$= \int_{\{w \geqq 1/j\}} \varphi_i \langle \mathcal{A}_x(\nabla \theta),\ \nabla w \rangle dV + \int_{\{w \geqq 1/j\}} (w - 1/j) \langle \mathcal{A}_x(\nabla \theta),\ \nabla \varphi_i \rangle dV.$$

こゝで $j \to \infty$，ついで $i \to \infty$ とすると

$$\int_V \langle \mathcal{A}_x(\nabla \theta),\ \nabla w \rangle dV = 0$$

となる。この式の $\theta = u$ のものと $\theta = v$ のものとの差を作ると

$$\int_V \langle \mathcal{A}_x(\nabla u) - \mathcal{A}_x(\nabla v),\ \nabla u - \nabla v \rangle dV = 0$$

となり，順次 V 上 $\nabla(u - v) = 0$，よって V 上 $u - v =$ 定数，ついで ∂V 上 $u - v = 0$ だから V 上 $u - v \equiv 0$ となり，V の定義に反する。 □

6. ディリクレ問題

6.1. Mは本節ではp双曲型とする。ロイデン調和境界$\Delta_p(M)$の定義と双対定理により，Mがp双曲型である必要十分条件は$\Delta_p(M)\neq\emptyset$である。さてM_p^*に関する$\mathcal{A}$ディリクレ問題（$\mathcal{A}\in\mathcal{A}_p(M)$, $1<p<\infty$）は次の様に定式化される：任意に与えた$f\in C(\Gamma_p(M))$, $\Gamma_p(M)$はMのロイデン境界$M_p^*\backslash M$，に対して，$u\in H_{\mathcal{A}}(M)\cap C(M_p^*)$であって，$\Gamma_p(M)$上$u=f$となる関数$u$を求めよ。この問題をペロン・ウィーナー・ブルローの方法に依って論ずる（[4；9章] 参照)。

Mの開集合Gで，各$\xi\in\partial G$に対して，ξ中心のC^1級の座標近傍(B,x), $x=(x^1,\cdots,x^n)$を，うまくとって$B\cap G=\{x\in B:|x|<1,\ x^n>0\}$, $B\cap\partial G=\{x\in B:|x|<1,\ x^n=0\}$となるとき$G$を$M$の**滑めらかな開集合**と言う。$M_p^*$のコムパクト集合$X$をとる。$M_p^*$内$X$の**滑めらかな近傍**$U$とは，$U$が$M_p^*$の開集合で，$U\supset X$，でしかも$U\cap M$が$M$の滑めらかな開集合となっていることであるとする。

補題 6.1（滑めらかな近傍の存在補題）. M_p^*の任意のコムパクト集合Xと任意の開集合$V\supset X$に対して，$X\subset U\subset\overline{U}\subset V$となる$X$の滑めらかな近傍$U$が存在する。

証明. $\varphi|X=4$, $\varphi|(M_p^*\backslash V)=1$，かつ$M_p^*$上$1\leqq\varphi\leqq4$となる$\varphi\in M_p(M)$がとれる。$M_p(M)\cap C^\infty(M)$はバナッハ代数$M_p(M)$の中でそのノルムで稠密であるから，$f|X>3$, $f|(M_p^*\backslash V)<2$となる$f\in M_p(M)\cap C^\infty(M)$がとれる。サードの定理によって，$2<c<3$となる$\varphi$のある非特異値をとるとき$U=\{\xi\in M_p^*:f(\xi)>c\}$にとればよい。 □

6.2. 更に技術的な補題を追加する。後での使用のみを考えて，ぎりぎりの一般化は追求しない。

補題 6.2（相対境界付境界値問題）. $f\in M_p(M)$, $\Delta_p(M)$の滑めらかな近傍U、及び定数cの三つを任意に与える。すると次の様な$u\in M_p(M)$が唯一つ存在する：$u\in H_{\mathcal{A}}(U)$；$\Delta_p(M)$上$u=f$；$M_p^*\backslash U$上$u=c$。

証明. 最初$c=0$の場合を考える。$K:=\sup_M|f|$とおく。Uに閉包共含まれるような$\Delta_p(M)$の小近傍の上で1，$M_p^*\backslash U$の小近傍で0となり，値域が$[0,1]$に含まれるような$\varphi\in M_p(M)$をとり，fの代わりにφfに対して求めるuはfに対して求めるものと同じものとなるから，

$$f|(M_p^*\backslash U)=0$$

と仮定してよい。

Mの可算近似$\{R_i\}_{i\geqq1}$をとる。$R_1\cap U\neq\emptyset$とする。さらに各iにつき$R_i\cap U$は$\mathcal{A}$正則である様にもとれる。$R_i\cap U$上$u_i=\pi_{\mathcal{A}}^{R_i\cap U}f$, $M\backslash(R_i\cap U)$では$u_i=f$とおく。命題5.3によりM上$|u_i|\leqq K$, $R_i\cap U$上でディリクレ原理を使って

$$D_{p,M}(u_i)\leqq(\beta/\alpha)^pD_{p,M}(f)$$

がでる。$(u_i)_{i\geqq1}$の$U\cap M$上の局所一様収束部分列$(v_i)_{i\geqq1}$をとり，その$U\cap M$上の極限をuとする。$M\backslash U$上$u\equiv0$としてuはM全体で定義する。とにかく$u\in H_{\mathcal{A}}(U)$で$M_p^*\backslash U$上$u=0$となる。

$u\in C(M)$を示す。その為にはuが任意の$\xi\in\partial(U\cap M)$で極限0となることを言えばよい。ξのC^1級の座標近傍(B,x), $x=(x^1,\cdots,x^n)$で，

$$U\cap B=\{x\in B:|x|<1,\ x^n>0\},\ (\partial U)\cap B=\{x\in B:|x|<1,\ x^n=0\}$$

となるものをとるとき，次の様な$g\in M_p(M)$がつくられる：$(\partial U)\cap B$に含まれる相対閉なξの近傍で$g=0$；$(\partial B)\cap U$上$g=K$；$\partial(U\cap B)$上$0\leqq g\leqq K$；$g\in H_{\mathcal{A}}(U\cap B)$。すると$U\cap B$上$-g\leqq v_i\leqq g$であるから，極限で，$U\cap B$上$-g\leqq u\leqq g$となるので

$$\lim_{x\in M,\ x\to\xi}u(x)=0=u(\xi)$$

となる。ゆえに$u\in C(M)\cap L_\infty(M)$がわかった。

以上から完備性補題により$u\in M_p(M)$となる。$v_i-f\in N_{p,0}(M)$から，再び完備性補題で$u-f\in N_{p,0}(M)$となる。これにより$\Delta_p(M)$上$u=f$となる。

一般の場合には，$f-c$，0に対して上の様なuを求め，$u+c$を考えると，これがf，cに対する答となる。一意性は命題5.3によりわかる。 □

6.3. 補題6.2の直接の応用として，後で我々の目的にとって重要な次の結果をのべる。

補題6.3（上方優調和関数の存在）．$f\in M_p(M)$と正数εの両者を任意に与える。そのとき次の様な$s\in M_p(M)$が存在する：sはM上$\mathcal{A}$優調和；$\Delta_p(M)$の上では$s=f$；$\Gamma_p(M)$の上では$s+\varepsilon>f$。

証明． $H_{\mathcal{A}}(M)\cap M_p(M)$の関数$h=\pi_{\mathcal{A}}^M f$を考える。$\Delta_p(M)$上$h=f$ゆえ，補題6.1により，$\Delta_p(M)$の滑めらかな近傍$U$で$U$上$|h-f|<\varepsilon$となるものがとれる。$c=\sup_M h\cup f$とおく。補題6.2により次の様な$s\in M_p(M)$を作る：$s\in H_{\mathcal{A}}(U)$；$\Delta_p(M)$上$s=f$；$M_p^*\backslash U$上$s=c$。

sがM上$\mathcal{A}$優調和になることをみる。任意の$\xi\in\partial(U\cap M)$をとる。ξ中心のC^1級の座標近傍(B,x), $x=(x^1,\cdots,x^n)$，で

$$B\cap U=\{x\in B:|x|<1,\ x^n>0\},\ B\cap\partial U=\{x\in B:|x|<1,\ x^n=0\}$$

となるものをとる。Bの同心球$V=\{x\in B:|x|=r\}$ $(0<r<1)$を任意にとる。命題5.3とcの定義からM上$s\leqq c$である。したがって$\pi_{\mathcal{A}}^V s\leqq c$であるので，

$$V^+=\{x\in B:|x|<r,\ x^n\geqq 0\}$$

の境界上$\pi_{\mathcal{A}}^V s\leqq s$なので$V^+$上$\pi_{\mathcal{A}}^V s\leqq s$となる。$V\backslash V^+$では$\pi_{\mathcal{A}}^V s\leqq c=s$なので結局$V$上$\pi_{\mathcal{A}}^V s\leqq s$となる。これは$s$が$M$上$\mathcal{A}$優調和となることを示す。

U上では$\partial(U\cap R)\cup(\Delta_p(M)\cap U)$における境界値を較らべて$s\geqq h$なので命題5.3により$U$上$s\geqq h$となる。また$U\cap\Gamma_p(M)$では$s\geqq h\geqq f-\varepsilon$である。$\Gamma_p(M)\backslash U$では$s=c\geqq f\geqq f-\varepsilon$で，$\Gamma_p(M)$上$s+\varepsilon\geqq f$となる。 □

6.4. fを$\Gamma_p(M)$上の有界関数とする。fに対して次の性質をもつM上の関数sをfの上方関数と言う：sはM上$\mathcal{A}$優調和；すべての$\xi\in\Gamma_p(M)$に対して

$$\liminf_{x\in M,\ x\to\xi} s(x)\geqq f(\xi). \tag{6.1}$$

$-s$が$-f$の上方関数となるときsをfの下方関数と言う。fの上方関数の全体を$\overline{S}_f$，下方関数の全体を$\underline{S}_f$と記す。$\sup_M f\in\overline{S}_f$, $\inf_M f\in\underline{S}_f$なので，$\overline{S}_f$ も$\underline{S}_f$ も共に空集合ではない。各$x\in M$に対し

$$\overline{H}_f(x)=\inf\{s(x):s\in\overline{S}_f\} \tag{6.2}$$

を境界値fに対する$\mathcal{A}$調和ディリクレ問題の上方一般化解（又は簡単に上方解）と言う。空間MやトポロジーM_p^*や調和性$\mathcal{A}$も明示したければ$\overline{H}_f=\overline{H}_f^{M,M_p^*,\mathcal{A}}$などと記す。ペロンの定理で$\overline{H}_f$は$M$上$\mathcal{A}$調和となる（[4；9章] 参照)。$\underline{H}_f:=-\overline{H}_{-f}$は下方解と呼ぶ。$M$上$\underline{H}_f\leqq\overline{H}_f$であるが，これが一致するとき$H_f:=\overline{H}_f=\underline{H}_f$とかき，$f$は$\Gamma_p(M)$上$\mathcal{A}$**可解**であると言う。そのとき$H_f$を境界値$f$の$\mathcal{A}$調和ディリクレ問題の一般化解（又は単に解)，時にはペロン解，又時にはPWB解（ペロン・ウィーナー・ブルロー解）と言う。$\xi\in\Gamma_p(M)$に対して

$$\lim_{x\in M,\ x\to\xi}\overline{H}_f(x)=f(\xi) \tag{6.3}$$

がすべての$f\in C(\Gamma_p(M))$で成り立つことが理想である。この様なξを$\Gamma_p(M)$上の$\mathcal{A}$**正則点**と言う。$C(\Gamma_p(M))$の各関数は可解となるか否か，$\Gamma_p(M)$内の正則点はどれか，の2問題がPWB法によるディリクレ問題を論ずるときの中心的なテーマである。

6.5. Mはp双曲型であるとし，$\mathcal{A}\in\mathcal{A}_p(M)$ $(1<p<\infty)$を一つ任意に固定する。可解性については次の結果が出る（p調和の場合 [11] 参照)。

定理6.1（可解性定理）．$\Gamma_p(M)$上の実数値連続関数は$\mathcal{A}$可解である。

証明. 最初$f\in M_p(M)$となるfの$\Gamma_p(M)$への制限を同じfで示すとき，fは可解となることを示す。M上$\pi^M_{\mathcal{A}}f=u$とおくと$u\in M_p(M)\subset C(M^*_p)$である。$f$と任意の正数$\varepsilon$に対して補題6.3の$s$をとると$s+\varepsilon\in\overline{S}_f$である。命題5.1から$M$上$u\leqq s+\varepsilon$となり，$M$上$u\leqq\overline{H}_f+\varepsilon$となる。$\varepsilon>0$は任意だから$u\leqq\overline{H}_f$となる。他方すべての$\xi\in\Delta_p(M)$に対して

$$\limsup_{x\in M,\, x\to\xi}\overline{H}_f(x)\leqq\limsup_{x\in M,\, x\to\xi}s(x)=f(\xi)=\liminf_{x\in M,\, x\to\xi}u(x)$$

であるから，再び命題5.1によりM上$\overline{H}_f\leqq u$となる。故に$\overline{H}_f=u$である。$-f$から出発して同じことを考えると，$\overline{H}_{-f}=-u$となり$u=\underline{H}_f$がでる。以上によりM上$\overline{H}_f=\underline{H}_f=u$となって$f$は可解である。

次に一般の$f\in C(\Gamma_p(M))$をとる。fはM^*_p迄実数値連続に拡張できるので，それを同じ文字fで表して$f\in C(M^*_p)$と考える。$M_p(M)$は$C(M^*_p)$内稠密であるから，任意の正数εに対してM^*_p上$g-\varepsilon\leqq f\leqq g+\varepsilon$となる$g\in M_p(M)$がとれる。特に$\Gamma_p(M)$上$g-\varepsilon\leqq f\leqq g+\varepsilon$なので，明らかに$M$上

$$\underline{H}_{g-\varepsilon}\leqq\underline{H}_f\leqq\overline{H}_f\leqq\overline{H}_{g+\varepsilon}$$

となる。$\underline{H}_{g-\varepsilon}=H_g-\varepsilon$, $\overline{H}_{g+\varepsilon}=H_g+\varepsilon$だから，上の不等式より，$M$上$0\leqq\overline{H}_f-\underline{H}_f\leqq 2\varepsilon$となる。$\varepsilon$の任意性から$\overline{H}_f=\underline{H}_f$となる。 □

系. $\boldsymbol{f\in M_p(M)}$**のとき**$\boldsymbol{H_f=\pi^M_{\mathcal{A}}f}$**である。**

6.6. $f\in C(\Gamma_p(M))$はすべて$\mathcal{A}$可解だから(6.3)の$\xi\in\Gamma_p(M)$の$\mathcal{A}$正則性の定義は次のように述べられる：すべての$f\in C(\Gamma_p(M))$に対して

$$\lim_{x\in M,\, x\to\xi}H_f(x)=f(\xi). \tag{6.4}$$

そこで最後に$\Gamma_p(M)$内の$\mathcal{A}$正則点を次のように決定する。(p調和の場合は[11]参照)。

定理 6.2 (正則点集合定理). $\boldsymbol{\Gamma_p(M)}$**内の**$\boldsymbol{\mathcal{A}}$**正則点の全体はロイデン**$\boldsymbol{p}$**調和境界**$\boldsymbol{\Delta_p(M)}$**である。**

証明. 任意に$\xi\in\Delta_p(M)$をとる。任意の$f\in C(\Gamma_p(M))$に対して(6.4)を示したい。任意の正数εをとるとき$g\in M_p(M)$で$\Gamma_p(M)$上$g-\varepsilon\leqq f\leqq g+\varepsilon$となるものがとれる。$u=\pi^M_{\mathcal{A}}g$とすると$u(\xi)=g(\xi)$で$H_g=u$である。ゆえに$M$上

$$u-\varepsilon\leqq H_f\leqq u+\varepsilon$$

となるから

$$f(\xi)-\varepsilon\leqq\liminf_{x\in M,\, x\to\xi}H_f(x)\leqq\limsup_{x\in M,\, x\to\xi}H_f(x)\leqq f(\xi)+\varepsilon$$

となり，εの任意性により$H_f(x)\to f(\xi)$ $(x\in M, x\to\xi)$がわかる。ゆえに$\Delta_p(M)$の点はすべて$\mathcal{A}$正則点である。

次に$\xi\in\Gamma_p(M)\backslash\Delta_p(M)$を任意にとるとき，$\xi$は$\mathcal{A}$正則でないことを言う。$f\in M_p(M)$であって$f(\xi)=1$で$f|\Delta_p(M)=0$となるものをとる。すると双対性定理により$f\in N_{p,0}(M)$で，それゆえ$H_f=\pi^M_{\mathcal{A}}f\equiv 0$となる。よって

$$\lim_{x\in M,\, x\to\xi}H_f(x)=0\neq 1=f(\xi)$$

となって(6.4)の成り立たぬ$f\in C(\Gamma_p(M))$があるのでξは$\mathcal{A}$正則でない。 □

参照文献

[1] R.A. Adams: *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] J.A. Clarkson: *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 40(1936), 396-414.

[3] N. Dunford and J.T. Schwartz: *Linear Operators*, Part I, Interscience, 1967.

[4] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio: *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations*, Oxford, 1993.

[5] L. HOLOPAINEN: *Nonlinear potential theory and quasiregular mappings on Riemannian manifolds*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI Math. Dissertation, **74**(1990), 1-45.

[6] J. LERAY AND J.L. LIONS: *Quelque résultats de Višik sur les problèmes elliptique non linéare par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France, **93**(1965), 97-105.

[7] V.G. MAZ'YA: *On the continuity at the boundary point of solutions of quasi-linear elliptic equations*, Vestnik Leningrad Univ. Math., 3(1976), 225-242. English translation of Vestnik Leningrad. Univ., **25** (1970), 42-55 (Russian).

[8] M. NAKAI: *Existence of Dirichlet finite harmonic measures on Euclidean balls*, Nagoya Math, J., **133**(1994), 85-125.

[9] L. SARIO AND M. NAKAI: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer, 1970.

[10] H. TANAKA: *Harmonic boundaries of Riemannian manifolds*, Nonlinear Analysis, **14**(1990), 55-67.

[11] H. TANAKA: *Kuramochi boundaries of Riemannian manifolds* (in *Potential Theory* (ed. M. Kishi), Walter de Gruyter, 1992), pp.321-329.

本研究は一部分文部省科研費（一般C，課題番号06640227,07640196）の援助に依る。

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 31B25; Secondary 31B35, 31C12, 31C45.