複素射影代数曲面のクラス

竹　本　史　夫
数学教室
（1994年８月31日受理）

The Class of a Complex Projective Algebraic Surface

Fumio TAKEMOTO
Department of Mathematics
(Received August 31, 1994)

We study surfaces of small class with respect to the degree. We show that smooth complex projective surfaces of degree d and class m, satisfying $m-d \leqq 19$, are ruled. We also show that the smallest value of $m-d$ of a non-ruled surface is 20 and in fact there are only two families of smooth surfaces with $m-d=20$, namely the abelian surfaces of Horrocks-Mumford and some of the bielliptic surfaces in P^4.

1．序

SをN次元複素射影空間$\mathbf{P}^N$に含まれる非特異射影代数曲面とする。但し，Sは$\mathbf{P}^N$の超平面に含まれないとする。$S \subset \mathbf{P}^N$と書く。$\mathbf{P}^N$の超平面全体は，双対射影空間$(\mathbf{P}^N)^*$をなす。$\mathbf{P}^N$の超平面のうちSに接するもの全体S^*は$(\mathbf{P}^N)^*$の部分多様体である。Sが曲面であるとき，S^*が余次元1であることが知られている。この超曲面S^*の次数をmで表し，Sのクラスと言う。dをSの次数とする。次数dに比較してクラスmが小さい曲面を研究する。1955年Marchionnaは，常に$m-d \geqq -1$が成立することを示した。

$m-d=-1 \iff \mathbf{P}^2 \cong S \subset \mathbf{P}^5$　Veronese曲面（1955年Marchionna）

$m-d=0 \iff$ Sはscrollである。（1956年Gallarati）

$m-d=1,2$　存在しない。（1957年Gallarati）

$m-d=3 \sim 10$　1957年Gallaratiが分類したが，完全でなかった。1985年Lanteri[4]によって，不十分であった所が埋められた。

$m-d=11,12$の場合の完全な分類，および$m-d=13 \sim 16$の場合の分類が1993年Turrini and Vederio[7]によってなされた。後者の場合，いくつかの曲面の存在が不明である故，完全な分類ではない。以上の分類にあげられたいずれの曲面もruledである。本論文において，$m-d \leqq 19$の場合，必ずruled曲面であることを分類論に依らずに証明する。この19がある意味で最良の結果であることは，$\mathbf{P}^4$に含まれるアーベル曲面が，$m-d=20$を満たす事からわかる。実は，$m-d=20$ならば，曲面Sはruled曲面か，$\mathbf{P}^4$のアーベル曲面か，$\mathbf{P}^4$の超楕円曲面のいずれかである事も証明する。

2．準　備

定理の証明に必要な記号，事実について述べる。

O_S：Sのstructure sheaf
K：Sのcanonical sheaf
H：Sの非特異超平面切断である曲線
g：Hの種数
a：Sの位相的オイラー数
b：O_Sのオイラー・ポアンカレ数
$h^i(F)$：コホモロジー群$H^i(S,F)$の次元

このとき，Hの次数はdで，$H^2=d$である。また，

$$b = 1 - h^1(O_S) + h^0(K),$$

$$b(H) = h^0(O_S(H)) - h^1(O_S(H)) + h^2(O_S(H))。$$

簡単のために，invertible sheafとdivisorを同じ記号で表す。Sが$\mathbf{P}^1 \times C$に双有理的に同値であるとき，Sをruled曲面と言う。以下，必要な事実を述べる。

(1)　Sがnon-ruledならば，$a \geqq 0$かつ$b \geqq 0$である。更に，Sが一般型ならば，$b>0$である。

(2)　$a = 4(1-g) + m - d$　［Landmanの公式］

(3)　$12b = K^2 + a$　［Noetherの公式］

(4) $2g-2=H^2+K.H=d+K.H$

(5)[2] $H\subset P^{N-1}$：non-degenerate 非特異曲線，Hの次数をd，種数をgとする。このとき，

$$N\leqq\max(1+d/2,\ d-g+1)$$

が成り立つ。また$d=2(N-1)$ならば，$g\leqq N$が成り立つ。［Cliffordの定理］

(6)[3] $N=4$つまり$S\subset\mathbf{P}^4$のとき，

$$d^2-10d-5H.K-2K^2+12b=0$$

が成り立つ。

3．定理の証明

はじめに，定理の証明に必要となる補題1，補題2を証明する。

補題1． Sがnon-ruled曲面で，$d=2g-2$を満たすならば，$N=d/2+b-1$，かつKは数値的に0に同値である。

証明 (4)により$H.K=0$。Sがnon-ruled曲面だから，ある自然数nについて$h^0(nK)\geqq 1$。つまり$nK=O_S(D)$，$D\geqq 0$と表せる。$D.H=nK.H=0$。Hはampleであるので$D=0$。Kが数値的に0に同値になるので，$H-K$はampleになる。小平の消滅定理に依れば$h^i(-H+K)=0$ ($i=0,1$)。双対定理により，$h^i(H)=0$ ($i=1,2$)。リーマン・ロッホの定理を用いれば，$N+1=h^0(H)=b(H)=(H,H-K)/2+b=d/2+b$。 終

補題2． $H.K=1$，$H^2=d\geqq 2$ならば，$K^2\leqq 0$である。

証明 $(H-dK,H)=0$ 従って $H\equiv dK$（数値的同値），または$(H-dK)^2\leqq 0$。$H\equiv dK$の場合$K^2=1/d$。K^2は整数であるから，この場合は起らない。$(H-dK)^2\leqq 0$の場合$K^2\leqq 1/d\leqq 1/2$。K^2は整数だから，$K^2\leqq 0$となる。 終

定理． 1) $m-d\leqq 19$ならば，Sはruled曲面である。2) $m-d=20$ならば，Sはruled曲面，または$\mathbf{P}^4$に含まれるアーベル曲面，または$\mathbf{P}^4$に含まれる超惰円曲面である。

超惰円曲面とは，古典的にはhyperelliptic surfaceと言われた曲面である。最近では，bielliptic surfaceと呼ばれる事が多い。

定理の証明 $m-d\leqq 20$を満たすnon-ruled曲面は，$m-d=20$かつ$N=4$のときのみ存在し，それらはアーベル曲面または超惰円曲面であることを示せば良い。以下，Sは常にnon-ruled曲面とする。従って$H.K\geqq 0$である。(4)より$2g-2\geqq d\geqq 3$つまり$g\geqq 3$として良い。また(1)と(2)により$20\geqq m-d\geqq 4(g-1)$つまり$g\leqq 6$として良い。定理の証明は$g=3,4,5,6$の各々の場合詳しく調べる事に依って行われる。

$g=3$の場合　　$S\subset\mathbf{P}^N$ ($N\geqq 3$)

(4)により$4=d+K.H\geqq d$だから$d=3$または4である。すると$d/2+1\leqq 3$，$d-g+1\leqq 2$であるから(5)によると$N=3$かつ$d=4$である。つまりSは$\mathbf{P}^3$の4次曲面である。よって$b=2$また$K=O_S$がわかる。(3)により$a=24$。(2)により$m-d=32$。仮定は$m-d\leqq 20$だから，この様なnon-ruled曲面は存在しない。

$g=4$の場合 (4)により$6=d+K.H\geqq d$。すると$d/2+1\leqq 4$，$d-g+1\leqq 3$であるから，(5)によると$N=4$かつ$d=6$，または$N=3$である。まずNは3でないことを示す。もしNが3ならば，$H\subset\mathbf{P}^2$。平面の種数公式により$4=g=(d-1)(d-2)/2$。これを満たす自然数dは存在しない。従って$N=4$かつ$d=6$としてよい。このとき，$d=2g-2$が成り立つので補題1により$b=2$である。(3)により$24=K^2+a$，従って$a=24$がわかる（$K\equiv O_S$）。故に(2)により$m-d=36$。仮定は$m-d\leqq 20$であるので，この場合もnon-ruled曲面は存在しない。

$g=5$の場合 (4)により$8=d+H.K\geqq d$。すると$d/2+1\leqq 5$，$d-g+1\leqq 4$であるから(5)によると$N=5$かつ$d=8$，または$N=4$かつ$d=6\sim 8$，または$N=3$かつ$d=3\sim 8$である。まずNは3でない事を示す。もしNが3とすると，前と同じ議論で$5=g=(d-1)(d-2)/2$。これを満たす自然数dは存在しないからNは4以上としてよい。

$g=5$，$d=8$の場合 ($N=4$または5) $d=2g-2$を満たすから補題1により$N=3+b$。従って$b=1,2$である。(3)によると$12b=a(K^2=0)$。(2)により，$m-d=a+16\geqq 28$。この場合もnon-ruled曲面は存在しない。

$g=5$，$d=7$，$N=4$の場合 (4)により$K.H=1$。また$H^2=d=7$なので，補題2により$K^2\leqq 0$である。所が(2)により$20\geqq m-d=a+16$だから$a\leqq 4$である。(3)によると$12b=K^2+a\leqq 4$。つまり$b\leqq 1/3$である。bは整数であることと(1)によるとbは0でなけれ

ばならない。ここで(6)を用いると$K^2=-13$がわかる。(3)によれば$K^2=-a\geqq -4$。これは矛盾である。故にこの場合もこの様な曲面は存在しない。

$g=5$, $d=6$, $N=4$の場合　$d=2(N-1)$が成立するから，(5)によると$g\leqq 4$。これは矛盾である。この場合もこの様な曲面は存在しない。これで$g=5$の場合は，全て調べた事になる。

$g=6$の場合　(4)により$20\geqq m-d=a+20$であるから$a\leqq 0$である。所で(1)を考えれば$a=0$でなければならない。また(4)によると$10=K.H+d\geqq d$。まず，「(＊)$d=10$とすると，$N=4$である。」を示す。(＊)の証明：$d=10$とすると$d=2g-2$が成り立つので補題1により$N=4+b$, $K\equiv O_S$である。(3)より$12b=K^2+a=0$。故に$N=4$である。(＊)の証明終。$d/2+1\leqq 6$, $d-g+1\leqq 5$であるから(5)によると$N=6$かつ$d=10$，または$N\leqq 5$である。(＊)により$N\leqq 5$である。以下$N=5,4,3$の場合に分けて調べる。

$g=6$, $N=5$の場合　(5)によると$5=N\leqq \max(1+d/2, d-5)$であるから，$d$は8以上でなければならない。(＊)を考慮に入れれば，dは8または9である。

$g=6$, $N=5$, $d=8$の場合　$d=2(N-1)$が成り立つので(5)によると$g\leqq N=5$でなければならない。これは矛盾である。故に，この場合は起らない。

$g=6$, $N=5$, $d=9$の場合　(4)により$K.H=1$。また$H^2=9$なので補題2により$K^2\leqq 0$。(1)と(3)によると，$0\leqq 12b=K^2\leqq 0$。（今，$a=0$である。）

従って$b=0$, $K^2=0$である。次の命題により，この様な曲面は存在しない。この命題の証明は次節で行う。

命題　$N=5$, $K^2=0$, $b=0$, $g=6$, $d=9$を満たすnon-ruled曲面は存在しない。

$g=6$, $N=4$の場合　(5)によると$4=N\leqq \max(1+d/2, d-5)$であるから，$d$は6以上でなければならない。

$g=6$, $N=4$, $d=6$の場合　$d=2(N-1)$が成り立つので，(5)によると$g\leqq N=4$でなければならない。$g=6$に反する。故に，この場合は起らない。

$g=6$, $N=4$, $d=7\sim 10$の場合　(4)によると$10=H.K+d$。(3)によると$12b=K^2$。これらを(6)へ代入すると$d^2-10d-5(10-d)-2K^2+K^2=0$，つまり$K^2=d^2-5d-50$である。この式により$d=7,8,9$の場合$K^2$は負となる。また$d=10$の場合$K^2=0$となる。所で(1)と(3)によれば$K^2=12b\geqq 0$である。従って$d=7,8,9$の場合は起らない。

$g=6$, $N=4$, $d=10$, $K^2=0$, $b=0$。(4)により，$K.H=0$。Sはnon-ruled曲面だから，$K.H=0$を考慮すれば，Sの小平次元は0であることがわかる。また，$K^2=0$からSは極小曲面でなければならない。小平次元が0になる極小曲面は，4種類あるがそのうちbが0となるのは，アーベル曲面と超惰円曲面である。

$g=6$, $N=3$の場合　前と同様の議論により$6=g=(d-1)(d-2)/2$である。従って$d=5$，つまりSは$\mathbf{P}^3$の5次曲面である。$K^2=d(d-4)^2=5$。(3)により$12b=5$（今$a=0$である）。bは整数であるから，これは成立しない。この場合もnon-ruled曲面は存在しない。命題を証明すれば，定理の証明が終る。

4．命題の証明

$b=0$かつSはnon-ruled曲面だから，Sの小平次元は，0または1である。また，$K^2=0$であるからSは極小曲面でなければならない。(4)により$K.H=1$となるので，Sの小平次元は1でなければならない。まとめると，Sは小平次元1の極小曲面である。まず，$h^0(K)=0$を示す。もし$h^0(K)\geqq 1$ならば，$K.H=1$を考慮に入れれば，$K=O_S(D)$と表せる。ここでDはeffective divisorである。$1=K.H=D.H$，またHはvery ampleであるから，Dは既約で直線でなければならない。$-2=2g(D)-2=D^2+D.K=2K^2=0$。これは矛盾である。依って$h^0(K)=0$が証明された。$O_S$のオイラー・ポアンカレ数$b$は0であるから$h^1(O_S)=1$がわかる。(3)により$0=K^2+a$。従って，位相的オイラー数$a$も0である。

$$a=2-4h^1(O_S)+b_2(S)$$

であるから，$b_2(S)=2$になる。ここで，$b_2(S)$はSの2次元ベッチ数を表す。

完全列　$0\rightarrow \mathbf{Z}\rightarrow O_S\rightarrow O_S^*\rightarrow 0$　から

完全列　$H^1(S,O_S^*)\rightarrow H^2(S,\mathbf{Z})\rightarrow H^2(S,O_S)$

を得る。$h^2(O_S)=h^0(K)=0$つまり，$H^2(S,O_S)=0$。従って，$\mathrm{Num}(S)\otimes\mathbf{Q}\cong H^2(S,\mathbf{Q})$が成り立つ。ここで$\mathrm{Num}(S)$は，S上divisor群の数値的同値関係による商群とする。$b_2(S)=2$により，

$$\mathbf{Q}-\dim(\mathrm{Num}(S)\otimes\mathbf{Q})=2。$$

$H.K=1, K^2=0$によりHとKは$\mathbf{Q}$－独立だから，

Num (S)⊗ $\mathbf{Q}$ の基底として $\{H, K\}$ をとることが出来る。次に「(＊＊) H－Kは，ample である。」を証明する。(＊＊) の証明 $(H-K)^2=7$。ample についての中井の判定法に依れば，S上の任意の既約曲線Dに対して，$(H-K, D)$が正になることを示せば良い。$D \equiv \alpha H + \beta K$ (α, β：有理数) と表せる。≡は数値的同値を表す。Sは小平次元1の極小曲面であるから，ある自然数nについてnKはglobal sectionで生成される。従って，$nK.D \geqq 0$。$K.D = \alpha$ であるから $\alpha \geqq 0$。また α は整数である。まず $\alpha=0$ の場合，$D \equiv \beta K$。$(H-K, D) = H.D - K.D = H.D - \beta K^2 = H.D > 0$。$\alpha > 0$ の場合 $\alpha \geqq 1$ であるから，

$-2\alpha \leqq -2 \leqq 2g(D) - 2 = D^2 + D.K = 9\alpha^2 + 2\alpha\beta + \alpha$ 従って $\beta \geqq -4.5\alpha - 1.5$。

$(H-K, D) = 8\alpha + \beta \geqq 3.5\alpha - 1.5 > 0$。(＊＊) の証明終。小平の消滅定理によると $h^i(-H+K) = 0$ ($i = 0, 1$)。双対定理を用いると $h^i(H) = 0$ ($i = 1, 2$)。リーマン・ロッホの定理により $h^0(H) = b(H) = (H^2 - H.K)/2 + b = 4$。所で $S \subset \mathbf{P}^5$ だから $h^0(H) = 6$。矛盾。 終

5．補　足

定理2) における $\mathbf{P}^4$ に含まれるアーベル曲面および超楕円曲面は存在する。勿論これらが $m-d=20$ を満たす事は容易にわかる。アーベル曲面についてはHorrockes と Mumford (1973) により，超楕円曲面については Serrano (1990)[6] により存在が確定した。これらの曲面の幾何について，最近多くの論文が発表されている。

Turrini と Verderio の論文[7] において，mが29以下ならば，Sはruled曲面である事が証明された。$m=30$ となる non-ruled 曲面が存在するので，29はこの意味で最良の結果である。$m=30$ となる non-ruled 曲面の例は，上記の2種類の曲面である。これら以外に存在するかどうかは現在の所まだわかっていない。

文　献

1. A.Beauville: Surfaces algébriques complexes, Astérisque 54, 1978.
2. P.Griffiths and J.Harris: Principles of Algebraic Geometry, John Wiley and Sons 1978.
3. R.Hartshone: Algebraic Geometry, Springer, 1977.
4. A.Lanteri: On the class of a projective algebraic surfaces, Arch. Math., 45 (1985), 79-85.
5. E.L.Livorni: Classification of algebraic non-ruled surfaces with sectional genus less than or equal to six, Nagoya Math.J., 100 (1985), 1-9.
6. F.Serrano: Divisors of bielliptic surfaces and embeddings in $\mathbf{P}^4$, Math.Z., 203 (1990), 527-533.
7. C.Turrini and E.Verderio: Projective surfaces of small class, Geom.Dedicata, 47 (1993), 1-14.