正型ポテンシャルのピカール次元

中井　三留，多田　俊政*
数学教室
（1994年8月25日受理）

Picard Dimensions for Potentials of Positive Type

Mitsuru NAKAI and Toshimasa TADA*
Department of Mathematics
(Received August 25, 1994)

The Picard dimension $\dim(\mu, \Omega)$ of a signed radial Radon measure μ on d-dimensional Euclidean space punctured at the origin $(d \geqq 2)$ relative to the origin of the punctured unit ball Ω is the cardinal number of the set of extreme points of the space of normalized positive solutions of the Schrödinger equation $(-\Delta + \mu)u = 0$ on Ω with vanishing boundary values on the unit sphere. We stress that no additional conditions on the regularity or the sign of the potential μ of the above equation are imposed upon. The fundamental theorem on the Picard dimensions of radial Radon measures that the range of the mapping $\mu \mapsto \dim(\mu, \Omega)$ is the three element set $\{0, 1, \aleph\}$, where $\aleph$ is the cardinal number of continua, is established. Next the monotoneity of Picard dimensions, i.e. $\mu \leqq \nu$ implies $\dim(\mu, \Omega) \leqq \dim(\nu, \Omega)$, and the homogeneity inequality $\dim(c\mu, \Omega) \geqq \dim(\mu, \Omega)$ $(0 < c \leqq 1)$ are proven. Two new notions for a radial measure μ to be of strongly positive type as a generalization of positiveness and to be of positive type as a generalization of strongly positive type are introduced. The homogeneity equality $\dim(c\mu, \Omega) = \dim(\mu, \Omega)$ $(0 < c \leqq 1)$ as a precise form of the homogeneity inequality is shown for measures μ of strongly positive type as an application of the identity $\dim(\mu^+, \Omega) = \dim(\mu, \Omega)$, where μ^+ is the positive part of μ, valid for measures μ of strongly positive type. The identity $\dim(\mu + (c^2/|x|^2)\lambda, \Omega) = \dim(\mu, \Omega)$, where c is any real number and λ is d-dimensional Lebesgue measure, is also deduced for measures μ of positive type. Finally, as Appendix, μ-Martin kernels on the upper half unit ball over the origin are concretely determined.

d次元ユークリッド空間（$d \geqq 2$）上の一般符号回転不変ラドン測度μの穴あき単位球上の中心におけるピカール次元 $\dim(\mu, \Omega)$ とは，シュレーディンガー方程式

$$(-\Delta + \mu)u = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}\right)$$

の単位球面上零境界値をもつΩ上の正規化正解空間の端点集合の濃度である。上の方程式のポテンシャルμについては正則性や符号等に関する何等の付帯条件を課さない点を強調する。写像$\mu \mapsto \dim(\mu, \Omega)$ の値域が3元集合 $\{0, 1, \aleph\}$（$\aleph$は連続体濃度）であるという回転不変ラドン測度のピカール次元に関する基本定理を示す。ついでピカール次元の単調性：$\mu \leqq \nu$ならば$\dim(\mu, \Omega) \leqq \dim(\nu, \Omega)$，及び斉次不等式$\dim(c\mu, \Omega) \geqq \dim(\mu, \Omega)$（$0 < c \leqq 1$）を示す。正測度の一般化としての強正型性及びその一般化としての正型性という2つの新しい概念を導入する。強正型

*大同工業大学・数学教室

なμに対しては斉次不等式の精密化としての斉次等式$\dim(c\mu,\Omega)=\dim(\mu,\Omega)$ $(0<c\leqq 1)$ が強正型なμに対して成立する等式$\dim(\mu^{+},\Omega)=\dim(\mu,\Omega)$ (μ^{+}はμの正部分) の応用として導かれる。又正型なμに対して等式$\dim(\mu+(c^{2}/|x|^{2})\lambda,\Omega)=\dim(\mu,\Omega)$ (cは実数，λはd次元ルベッグ測度)が成り立つことが示される。最後に付録として単位上半球の中心上のμマルチン核を具体的に決定する。

1．回転不変測度のブルロー空間

1.1. d次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^{d}$ $(d\geqq 2)$ のベクトル $x=(x_{1},\cdots,x_{d})$ の長さを $|x|=(x_{1}^{2}+\cdots+x_{d}^{2})^{1/2}$ と記す。$\mathbf{R}^{d}$の単位球を$B^{d}=\{x\in\mathbf{R}^{d}: |x|<1\}$，単位球面を$S^{d-1}=\{x\in\mathbf{R}^{d}: |x|=1\}$，$S^{d-1}$上の固有曲面測度を$\sigma$，単位球面積を$\sigma_{d}=\sigma(S^{d-1})$ とかく。d次直交群，即ちd次直交行列全体に$\mathbf{R}^{d^{2}}$の位相を与えた位相群，を$O(d)$ と記す。$O(d)$ の各元gは各$x\in\mathbf{R}^{d}$に対して$g\cdot x={}^{t}(g^{t}x)$ (tは転置)と定めて$\mathbf{R}^{d}$に作用するものと考える。すると$O(d)$は，特にS^{d-1}に推移的かつ効果的に作用するコンパクト位相変換群となり，S^{d-1}は$O(d)$ のコンパクト等質空間である。

$\mathbf{R}^{d}$のボレル部分集合X上のボレル測度の差としてあらわされる一般符号測度μをX上の**ラドン測度**という。従ってμの全変分測度$|\mu|$はX上のボレル測度であって，$\mu=\mu^{+}-\mu^{-}$ ($\mu^{+}=(|\mu|+\mu)/2$, $\mu^{-}=(|\mu|-\mu)/2$) はμのジョルダン分解となる。特に本論文では，$\Omega=B^{d}\setminus\{0\}$，$\Gamma=S^{d-1}$と記し，主として$\Omega\cup\Gamma$上のラドン測度$\mu$を考える。これが**回転不変**であるとは，すべての$\Omega\cup\Gamma$のボレル部分集合Eとすべての$g\in O(d)$ に対して

$$\mu(g\cdot E)=\mu(E) \tag{1.1}$$

となることであるとする。ここに$g\cdot E=\{g\cdot x: x\in E\}$ を意味するとする。すると，$\Omega\cup\Gamma$ 上の任意の回転不変ラドン測度μに対して，常に$(0,1]$上のラドン測度$\overline{\mu}$が唯一定まって

$$d\mu(r\xi)=r^{d-1}d\overline{\mu}(r)d\sigma(\xi)\quad(r\in(0,1],\xi\in\Gamma). \tag{1.2}$$

の形の表示をもつ（[12, 定理1.1] 参照)。$\overline{\mu}$をμの**半径成分**と呼び，記号節約の為，μと同じ記号μであらわす：

$$d\mu(r\xi)=r^{d-1}d\mu(r)d\sigma(\xi)\quad(r\in(0,1],\xi\in\Gamma). \tag{1.3}$$

$\mathbf{R}^{d}$上の回転不変正ラドン測度の典型例はd次元ルベッグ測度λである：

$$d\lambda(r\xi)=r^{d-1}d\lambda(r)d\sigma(\xi)=r^{d-1}drd\sigma(\xi). \tag{1.4}$$

又$d\lambda(x)=dx$ $(x\in\mathbf{R}^{d})$ とか$d\sigma(\xi)=d\xi$ $(\xi\in\Gamma)$ と略記することも多い。

1.2. $\mathbf{R}^{d}$の開集合U上のラドン測度μが**カトー族**であるとは，次の条件がすべての$x\in U$に対して満たされることであるとする：

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sup_{y\in B(x,\varepsilon)}\int_{B(x,\varepsilon)}N(y,z)d|\mu|(z)\right)=0, \tag{1.5}$$

ここで$B(x,\varepsilon)$はx中心半径εの球であり，$N(y,z)$はニュートン核，即ち$|y-z|^{2-d}$ $(d\geqq 3)$ 又は$\log|y-z|^{-1}$ $(d=2)$ である。$\Omega\cup\Gamma$上のラドン測度μを本論文では主として考えるが，$\mathbf{R}^{d}\setminus\{0\}$の任意のボレル集合$E$に対しては，例えば$\mu(E)=\mu(E\cap(\Omega\cup\Gamma))$ と定めて，$\mathbf{R}^{d}\setminus\{0\}$上のラドン測度と考えることができる。以下$\Omega\cup\Gamma$上のラドン測度$\mu$は常に$\mathbf{R}^{d}\setminus\{0\}$上のラドン測度に拡張して考える。しかも$\Omega\cup\Gamma$上回転不変ならば$\mathbf{R}^{d}\setminus\{0\}$への拡張も回転不変なもので考えるものとする。

$\mathbf{R}^{d}\setminus\{0\}$上のラドン測度$\mu$をポテンシャルにもつ定常シュレーディンガー方程式

$$(1.6)\qquad (-\Delta+\mu)u=0 \quad \left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_d^2}\right)$$

を考える。$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ の開集合 U 上の関数 u が U 上（1.6）の**解**であるとは，u が（1.6）の超関数解である，つまり，$u\in L_{1,loc}(U;\ \lambda+|\mu|)$ で，しかもすべてのテスト関数 $\varphi\in C_0^\infty(U)$ に対して

$$-\int_U u(x)\Delta\varphi(x)dx+\int_U u(x)\varphi(x)d\mu(x)=0$$

となることであるとする。解 u は必ずしも連続な代表をもたない（[8] 参照）ので，特に $u\in C(U)$ で，u が U 上（1.6）の解であるとき，u を **μ 調和**であると言う。U 上の μ 調和関数全体を $H_\mu(U)$ と記すことにすれば，$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の各開集合 U に $H_\mu(U)$ を対応させる写像 $H_\mu: U\mapsto H_\mu(U)$ が定義できて，これは次の層の公理と称する3条件を満足するので，H_μ は $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の**関数の層**である：

（a）$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ の各開集合 U に対して $H_\mu(U)$ は U 上の関数族である；

（b）U,V が $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ の開集合で $U\subset V$ ならば，$u\in H_\mu(V)$ に対して $u|U\in H_\mu(U)$ となる；

（c）$(U_\iota)_{\iota\in I}$ が $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ の開集合族で，u が $\cup_{\iota\in I}U_\iota$ 上の関数であって，$u|U_\iota\in H_\mu(U_\iota)$（$\iota\in I$）ならば $u\in H_\mu(\cup_{\iota\in I}U_\iota)$ となる。

さて，空間 $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ とその上の関数の層 H_μ の組 $(\mathbf{R}^d\setminus\{0\}, H_\mu)$ を考える。$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ の領域 V が H_μ に関して**正則**であるとは，V が相対コンパクトで，$\partial V\neq\emptyset$ で，各 $\varphi\in C(\partial V)$ について，唯一の $u\in C(\overline{V})$ で，$u|\partial V=\varphi$，$u|V\in H_\mu(V)$ で，$\varphi\geq 0$ なら $u\geq 0$ となるものが定まることである。$(\mathbf{R}^d\setminus\{0\},H_\mu)$ が次の3公理を満たすとき，$(\mathbf{R}^d\setminus\{0\},\mathrm{H}_\mu)$ をブルロー調和空間，又は簡単に，**ブルロー空間**であるという：

公理1（線形性）．$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ の各開集合 U に対して，$H_\mu(U)$ は $C(U)$ の線形部分空間である；

公理2（ディリクレ問題の局所可解性）．H_μ についての正則領域が $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ の位相の底である；

公理3（ハルナック原理）．U が $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ の領域で，$H_\mu(U)$ の列 (u_n) が単調増加で $(u_n(x_0))$ がある $x_0\in U$ で有界ならば，$\lim_{n\to\infty}u_n\in H_\mu(U)$ となる。

$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の任意のラドン測度 μ に対しては，μ に何らかの条件を課さぬかぎり，仲々 $(\mathbf{R}^d\setminus\{0\},H_\mu)$ はブルロー空間とはならない。その意味で，カトー族のラドン測度が重要であるのは、次の事実の成立することにある（[1]，[2]，[10] 参照）：μ を $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上のカトー族のラドン測度とすると，$(\mathbf{R}^d\setminus\{0\},H_\mu)$ はブルロー空間となる。

ここで大切な認識は，$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の回転不変ラドン測度 μ は $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上のカトー族となることが示されることにある（[12，定理1.2] 参照)。これは大変なことで，例えば，回転不変の μ が λ について絶対連続，即ち $d\mu(r\xi)=r^{d-1}f(r)drd\xi$ の形をしている場合でも，多くの著者はブルロー空間を得る目的で $f\in L_{p,loc}(0,\infty)$（$p>d/2$）の様な仮定を置いて議論している（例えば [5]）。実は単に μ がラドン測度であればよいので，その条件は $f\in L_{1,loc}(0,\infty)$ の如く極度にゆるい。この故に **μ が $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の回転不変ラドン測度とすると $(\mathbf{R}^d\setminus\{0\},H_\mu)$ はブルロー空間となる**（[12，定理1.3] 参照）。以下では，断らぬかぎり，（1.6）のポテンシャル μ としては $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の回転不変ラドン測度を主として考えるので $(\mathbf{R}^d\setminus\{0\},H_\mu)$ がブルロー空間となる。$\Omega\cup\Gamma$ 上の回転不変ラドン測度を考えるときも，前述の如く $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 迄回転不変ラドン測度にのばして考えるので $(\mathbf{R}^d\setminus\{0\},H_\mu)$ がブルロー空間となる。

1.3. 以下では μ は $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の回転不変ラドン測度であるとする。μ の回転不変性を最大限に利用して，（1.6）を**変数分離法**で扱う。その為に対応する常微分方程式

$$(1.7)\qquad (r^{d-1}y')'=r^{d-1}y\mu$$

を考える。ここで μ は $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の回転不変測度 μ の半径成分としての $(0,\infty)$ 上の任意のラドン測度であり，又1変数 r の関数 φ に対して，$\varphi'=d\varphi/dr$，$\varphi''=d^2\varphi/dr^2$ を意味する。$(0,\infty)$ の部分区間 (a,b) において，y が（1.7）の**解**であるとは，$y\in C(a,b)$ であって，（1.7）を超関数の意味で満足すること，即ち，すべての $\varphi\in C_0^\infty(a,b)$ に対して

$$\int_a^b y(r)(r^{d-1}\varphi'(r))'dr=\int_a^b r^{d-1}y(r)\varphi(r)d\mu(r)$$

を満たすこととする。偏微分と常微分の大きな違いとして，上の $y\in C(a,b)$ は単に $y\in L_{1,loc}(a,b)$ と仮定するだけで $y\in C(a,b)$ となってしまうことがわかることを注意しておく。簡単の為（1.7）の解のことを μ解と呼ぶことにする。

$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$（又は$\Omega$）上の関数 $u(x)$ が回転不変であるとは $u(g\cdot x)=u(x)$（すべての $x\in\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$（又は$\Omega$）とすべての $g\in O(d)$）となることとする。このとき $u(x)$ は $|x|$ のみの関数なので，$u(|x|):=u(x)$ により u を又 $(0,\infty)$（又は $(0,1)$）上の関数とみなす。逆に $(0,\infty)$（又は $(0,1)$）上の関数 v があるとき，$v(x):=v(|x|)$ と定めて，v を $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$（又は$\Omega$）上の回転不変関数とみなすことができる。すると $(0,\infty)$（又は $(0,1)$）上の関数 $u(r)$ が $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$（又は$\Omega$）上の回転不変$\mu$ 調和関数となることと，$u(r)$ が $(0,\infty)$（又は $(0,1)$）上μ 解となることとは同等であることが示される（[12，定理 1.4] 参照）。

次にΓ上の n 位球関数 S_n を任意にとる（[6]，[14]，[9] 等参照）。$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の関数 $u(r\xi)$ に対してそのフーリエ係数

$$u_n(r)=\int_\Gamma u(r\xi)S_n(\xi)d\xi \tag{1.8}$$

を作る。$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の回転不変ラドン測度μ に対して新たな回転不変ラドン測度

$$\mu_n=\mu+\frac{n(n+d-2)}{r^2}\lambda \quad (n=0,1,\cdots) \tag{1.9}$$

を定める。すると $u(r\xi)$ がΩ上μ 調和関数であると，その n 位フーリエ係数 $u_n(r)$ は $(0,1)$ 上の μ_n 解となることが示される（[12，定理 1.5]）。こうして $u(r\xi)$ を

$$u(r\xi)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{N(n)}u_{nj}(r)S_{nj}(\xi)\right)$$

の様に変数を分離して考えるのである。ここで $\{S_{nj}:1\leqq j\leqq N(n)\}$ は n 位球関数の一つの正規直交基底である。

以上とは逆に $u_n(r)$ が $(0,1)$ 上の μ_n 解であると，$u=u_nS_n$ はΩ上μ 調和関数となる。事実，$\Delta_r u(r)=r^{1-d}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}u(r)\right)$ とし，Δ_ξ を $\Gamma=S^{d-1}$ 上の自然なリーマン計量に関するラプラス・ベルトラミー作用素とすると $\Delta=\Delta_{r\xi}=\Delta_r+r^{-2}\Delta_\xi$ とかける。任意の $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ をとるとき，$x=r\xi$ として，$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)dx$ は

$$I_1=\int_\Gamma\left(\int_0^1 u_n(r)\Delta_r\varphi(r\xi)r^{d-1}dr\right)S_n(\xi)d\xi$$

および

$$I_2=\int_0^1 u_n(r)\left(\int_\Gamma S_n(\xi)\Delta_\xi\varphi(r\xi)d\xi\right)r^{-2}r^{d-1}dr$$

の 2 項の和に分解される。I_1 の内側の積分は，ξ を固定して r のみの関数と考えて $\varphi(r\xi)\in C_0^\infty(0,1)$ であるから，$\varphi'(r\xi)=\partial\varphi(r\xi)/\partial r$ とかくと

$$\int_0^1 u_n(r)\left(r^{d-1}\varphi'(r\xi)\right)'dr=\int_0^1 r^{d-1}u_n(r)\varphi(r\xi)d\mu_n(r)$$

となるので，結局

$$I_1=\int_\Gamma\left(\int_0^1 u_n(r)S_n(\xi)\varphi(r\xi)r^{d-1}d\mu_n(r)\right)d\xi=\int_\Gamma u(x)\varphi(x)d\mu_n(x)$$

となる。次に I_2 の内側の積分は，r をとめて $\varphi(r\xi)$ を ξ のみの関数と考えて $\varphi(r\xi)\in C_0^\infty(\Gamma)=C^\infty(\Gamma)$ であり，グリーンの公式と $\Delta_\xi S_n=-n(n+d-2)S_n$ により

$$\int_\Gamma\varphi(r\xi)\Delta_\xi S_n(\xi)d\xi=\int_\Gamma n(n+d-2)S_n(\xi)\varphi(r\xi)d\xi$$

となるので

$$I_2=-\int_0^1\left(\int_\Gamma u_n(r)S_n(\xi)\varphi(r\xi)\frac{n(n+d-2)}{r^2}d\xi\right)r^{d-1}dr$$
$$=-\int_\Omega u(x)\varphi(x)\frac{n(n+d-2)}{r^2}d\lambda(x)$$

となる。以上により，$\mu_n=\mu+n(n+d-2)r^{-2}\lambda$ に注意して，

$$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)dx=\int_\Omega u(x)\varphi(x)d\mu_n(x)-\int_\Omega u(x)\varphi(x)\frac{n(n+d-2)}{r^2}d\lambda(x)$$
$$=\int_\Omega u(x)\varphi(x)d\left(\mu_n-\frac{n(n+d-2)}{r^2}\lambda\right)(x)=\int_\Omega u(x)\varphi(x)d\mu(x)$$

となり，$u=u_nS_n$ がμ調和となることがわかる。

2．μ解の正則性

2.1.　$0\leqq a<b\leqq\infty$ とする。区間 (a,b) 上の関数uが，次の4条件を満足するとき，uは (a,b) 上**可成り滑らか**であるという：(i) u は (a,b) 上絶対連続である；(ii) (a,b) の各点で有限な左及び右微分係数 u'_- と u'_+ が存在して，それらは (a,b) 上局所有界である；(iii) $E=\{x\in(a,b):u'_-(x)\neq u'_+(x)\}$ は可算集合である；(iv) $u'=u'_-=u'_+\in C((a,b)\backslash E)$ であって，(a,b) 上 u'_- 及び u'_+ は左及び右連続である。$E=E_u$ を u の (a,b) 上の**角点集合**と言う。μを $(0,\infty)$ 上のラドン測度とするとき，(a,b) 上の関数uが**μ可成り滑らか**とは，u が (a,b) 上可成り滑らかで，その角点集 $E_u\subset\{x\in(a,b):|\mu|(x)>0\}$ となることである。但し $|\mu|(x)$ は $|\mu|(\{x\})$ の略記である。$(0,\infty)$ の点 x で $|\mu|(x)=0$ となるとき x を**μ通常点**，$|\mu|(x)>0$ となるとき**μ特異点**と呼ぶ。ゆえにμ可成り滑らかな関数 u の角点集合はμ特異点(の一部)からなると言える。

μ解はμ可成り滑らかであることがわかっている（[12, 定理2.1] 参照)。$(0,\infty)$ の点 c,r に対して記号 $I\{c,r\}$ で $r\geqq c$ なら閉区間 $[c,r]$,$r<c$ なら符号付開区間 $-(r,c)$ をあらわす，即ち $\int_{-(r,c)}=-\int_{(r,c)}$ を意味する。$(0,\infty)$ 上のμ解は次の様な表示をもつこともわかっている（[12, 定理 2.1])：任意に $(0,\infty)$ の点 $c,\bar{c}$ を固定するとき，すべての $r\in(0,\infty)$ に対して

$$y(r)=y(\bar{c})+\int_{\bar{c}}^r s^{1-d}\left(c^{d-1}y'_-(c)+\int_{I\{c,s\}}t^{d-1}y(t)d\mu(t)\right)ds \tag{2.1}$$

とあらわされ，しかも

$$r^{d-1}y'_+(r)=c^{d-1}y'_-(c)+\int_{I\{c,r\}}t^{d-1}y(t)d\mu(t) \tag{2.2}$$

であり，その上

$$y'_+(c)-y'_-(c)=y(c)\mu(c) \tag{2.3}$$

となる。この最後の式から c がμ通常点であるか，又は $y(c)=0$ ならば $y'(c)$ が存在することがわかる。

逆に初期値を与えてμ解が唯一決定されることも示されている（[12, 定理 2.2])。つまり任意の開区間 $(\alpha,\beta)\subset(0,\infty)$ と任意の $c\in(\alpha,\beta)$ における初期値

$$(y(c),y'_-(c))=(y_0,c^{1-d}z_0) \tag{2.4}$$

を任意に与えたとき，これを満たす (α,β) 上の（そして実は $(0,\infty)$ 上の）μ解が唯一存在するのである。(2.4) を $y'_+(c)$ で与えたいなら，(2.3) により $y'_+(c)=c^{1-d}z_0+y_0\mu(c)$ で与えるわけで，もし c がμ通常点であるか，又

は $y(c)=0$ なら，$y'(c)=c^{1-d}z_0$ と本来の形で与えることが出来る。$(y(c),y'(c))=(0,-1)$ となるμ解 y なら常に求まる訳である。

(α,β) 上のμ解 u が，そこで $u\neq 0$ となっておれば，任意に $a\in(\alpha,\beta)$ をとるとき，u から作る (α,β) 上の新しい関数

$$v(r):=u(r)\int_a^r \frac{dt}{t^{d-1}u(t)^2}\ (r\in(\alpha,\beta))$$

を u の**ダランベール変換**と言う。これが又 (α,β) 上のμ解となる（[12, 補題 2.2] 参照)。

2.2. μ,ν を $(0,\infty)$ 上のラドン測度とし，$(0,\infty)$ 上で u をμ解，v をν解とし，更に部分区間 (a,b) 上では $u\neq 0$ とする。そのとき $w=v/u$ は (a,b) 上可成り滑らかで，方程式

$$(r^{d-1}u^2w')'=r^{d-1}u^2w(\nu-\mu) \tag{2.5}$$

の解となることが知られている（[12, 命題 2.1])，即ちすべてのテスト関数 $\varphi\in C_0^\infty(a,b)$ に対して

$$\int_a^b w(r^{d-1}u^2\varphi')'dr=\int_a^b r^{d-1}u^2w\varphi\, d(\nu-\mu)(r) \tag{2.6}$$

となる。逆に (2.5) の可成り滑らかな解 w と $(0,\infty)$ の任意の点 c と $\bar{c}$ をとるとき，$c^{d-1}u(c)^2w'_-(c)=z_0$，$w(\bar{c})=w_0$ とおくと，次の様な表示がえられる（[12, 定理 2.3])：

$$\begin{cases} z(r)=z_0+\int_{I[c,r]} t^{d-1}u(t)^2w(t)d(\nu-\mu)(t), \\ w(r)=w_0+\int_{\bar{c}}^r s^{1-d}u(s)^{-2}z(s)ds. \end{cases} \tag{2.7}$$

そこで上の関係 (2.7) の w の式に z を代入すれば，表示公式

$$w(r)=w(\bar{c})+\int_{\bar{c}}^r s^{1-d}u(s)^{-2}\left(c^{d-1}u(c)^2w'_-(c)+\int_{I[c,s]}t^{d-1}u(t)^2w(t)d(\nu-\mu)(t)\right)ds \tag{2.8}$$

がえられ，w の角点集合（可算集合）以外の r において上式を微分して

$$r^{d-1}u(r)^2w'(r)=c^{d-1}u(c)^2w'_-(c)+\int_{I[c,r]}t^{d-1}u(t)^2w(t)d(\nu-\mu)(t) \tag{2.9}$$

がえられる。

2.3. μ,ν,ω を $(0,\infty)$ 上のラドン測度とし，$(0,\infty)$ 上で u をμ解，v をν解，w をω解とし，更に部分区間 (a,b) 上では $u,v,w\neq 0$ とする。

命題 2.1. 次の公式が超関数の意味で (a,b) 上成立する：

$$\left(r^{d-1}\left(\frac{vw}{u}\right)'\right)'=r^{d-1}\frac{vw}{u}\left\{(\nu+\omega-\mu)+2\left(\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}\right)\left(\frac{u'}{u}-\frac{w'}{w}\right)\lambda\right\}. \tag{2.10}$$

この計算には，次の補題を使うと便利である（[12, 補題 2.1] に証明がある)：

補題 2.1. y が $(0,\infty)$ 上のμ解であるとき，$(0,\infty)$ 上の可成り滑らかなコンパクト台の関数 f に対して，次の等式が成り立つ：

$$-\int_0^\infty y'(r)(r^{d-1}f'(r))\,dr=\int_0^\infty r^{d-1}y(r)f(r)\,d\mu(r). \tag{2.11}$$

命題 2.1 の証明． 任意に $\varphi\in C_0^\infty(a,b)$ をとるとき，vw/u は絶対連続だから部分積分を行って

$$\int_a^b \frac{vw}{u}(r^{d-1}\varphi')'\,dr=-\int_a^b\left(\frac{vw}{u}\right)'(r^{d-1}\varphi')\,dr$$

となる。右辺の被積分関数は

$$v'r^{d-1}\left(\frac{w}{u}\varphi'\right)+w'r^{d-1}\left(\frac{v}{u}\varphi'\right)-u'r^{d-1}\left(\frac{vw}{u^2}\varphi'\right)$$

となる。例えば第1項について言えば，$\frac{w}{u}\varphi$ を補題 2.1 の f と思って（2.11）を使うと，

$$\begin{aligned}-\int_a^b v'r^{d-1}\left(\frac{w}{u}\varphi'\right)dr&=-\int_a^b v'r^{d-1}\left(\frac{w}{u}\varphi\right)'dr+\int_a^b v'r^{d-1}\left(\frac{w}{u}\right)'\varphi\,dr\\&=\int_a^b r^{d-1}v\frac{w}{u}\varphi\,d\nu(r)-\int_a^b r^{d-1}v'\frac{w'u-wu'}{u^2}\varphi\,dr\\&=\int_a^b r^{d-1}\frac{vw}{u}\varphi\left\{d\nu(r)+\frac{v'}{v}\left(\frac{w'}{w}-\frac{u'}{u}\right)d\lambda(r)\right\}\end{aligned}$$

となる。各項について同様の計算をして整理すると，

$$=\int_a^b\frac{vw}{u}(r^{d-1}\varphi')'\,dr=\int_a^b r^{d-1}\frac{vw}{u}\varphi\left\{d(\nu+\omega-\mu)+2\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}\right)\left(\frac{u'}{u}-\frac{w'}{w}\right)d\lambda\right\}$$

となって（2.10）が導かれた。 □

2.4. (a,b) 上 u が可成り滑らかで，(a,b) 上超関数の意味で

$$(r^{d-1}u')'\geqq r^{d-1}u\mu \tag{2.12}$$

となるとき，u は (a,b) 上 **μ劣解**であると言う。ここに（2.12）は，すべての $\varphi\in C_0^\infty(a,b)^+$（$C_0^\infty(a,b)$ 内の非負の関数全体）に対して

$$\int_a^b u(r^{d-1}\varphi')'\,dr\geqq\int_a^b r^{d-1}u\varphi\,d\mu \tag{2.13}$$

が成立することであるとする。(2.12)，(2.13) の不等号を逆にした場合 u は (a,b) 上の **μ優解**であると言う。u が μ 劣解なことと $-u$ が μ 優解なこととは同じなので，一方の性質から双対的に他方の性質が導かれるので，以下では μ 劣解についてのみ研究する。先ず，補題 2.1 の拡張である次の結果から出発する：

補題 2.2. **y が (a,b) 上の μ劣解であるとき，(a,b) 上の可成り滑らかなコンパクト台の非負値関数 f に対して，次の不等式が成り立つ：**

$$-\int_a^b y'(r)(r^{d-1}f'(r))\,dr\geqq\int_a^b r^{d-1}y(r)f(r)\,d\mu(r). \tag{2.14}$$

証明． f の正則化 $f_\varepsilon\in C_0^\infty(a,b)^+$（$\varepsilon>0$）であるから，（2.13）により

$$-\int_a^b y'(r)(r^{d-1}f'_\varepsilon(r))\,dr=\int_a^b y(r)\left(r^{d-1}f'_\varepsilon(r)\right)'dr\geqq\int_a^b r^{d-1}y(r)f_\varepsilon(r)\,d\mu(r)$$

となる。この第1項と第3項の間に成り立つ不等式において$\varepsilon\downarrow 0$とすることにより (2.14) が導かれる。 □

命題 2.2 (比較定理). 閉区間 $[a,b]$ 上真に正値である μ解 s があるとする。開区間 (a,b) 上 u が μ劣解で $[a,b]$ 上連続であるとする。$(u(a),u(b))=(h(a),h(b))$ となる μ解 h をとると, $[a,b]$ 上 $u\leqq h$ となる。

証明. $u-h$ は又μ劣解となるから, $u(a)=u(b)=0$ のとき (a,b) 上 $u\leqq 0$ となることを示せば十分である。もし (a,b) のどれかの点 c で $u(c)>0$ となるとすれば, $a\leqq\alpha<c<\beta\leqq b$ となる区間 (α,β) で $u>0$ かつ $u(\alpha)=u(\beta)=0$ となるものがとれる。$w=u/s$ は可成り滑らかであり, 任意の $\varphi\in C_0^\infty(\alpha,\beta)^+$ に対して

$$-\int_\alpha^\beta w' r^{d-1}s^2\varphi' dr=-\int_\alpha^\beta r^{d-1}(u's-us')\varphi' dr=-\int_\alpha^\beta r^{d-1}(u's\varphi'-s'u\varphi')dr$$

$$=-\int_\alpha^\beta u'(r^{d-1}(s\varphi)')dr+\int_\alpha^\beta s'(r^{d-1}(u\varphi)')dr$$

となる。$s\varphi$ は補題 2.2 の f にとれるし, $u\varphi$ は補題 2.1 の f にとれるから,

$$=-\int_\alpha^\beta u'(r^{d-1}(s\varphi)')dr\geqq\int_\alpha^\beta r^{d-1}us\varphi\, d\mu(r)$$

および

$$\int_\alpha^\beta s'(r^{d-1}(u\varphi)')dr=-\int_\alpha^\beta r^{d-1}us\varphi\, d\mu(r)$$

となるから, 結局

$$-\int_\alpha^\beta w' r^{d-1}s^2\varphi' dr\geqq 0 \tag{2.15}$$

となる。(α,β) の任意の点 $\overline{\alpha},\overline{\beta}$ $(\overline{\alpha}<\overline{\beta})$ を w の角点集合 (可算集合) 以外からとり, η を $0<2\eta<\overline{\beta}-\overline{\alpha}$ にとり, (α,β) 上の連続関数 f を $[\overline{\alpha},\overline{\beta}]$ 以外では0, $[\overline{\alpha}+\eta,\overline{\beta}-\eta]$ 上1, 残りでは線形となるように作る。$\varepsilon>0$ を十分小にとり, f_ε を f の正則化とすると, $f_\varepsilon\in C_0^\infty(\alpha,\beta)^+$ なので (2.15) が $\varphi=f_\varepsilon$ で成立する。$\varepsilon\downarrow 0$ とすることにより

$$-\int_\alpha^\beta(r^{d-1}s(r)^2w'(r))f'(r)dr\geqq 0$$

となる。w' は $\overline{\alpha},\overline{\beta}$ で連続で, $(\overline{\alpha},\overline{\alpha}+\eta)$, $(\overline{\beta}-\eta,\overline{\beta})$ で f' は夫々 $1/\eta,-1/\eta$, それ以外 (α,β) 上 0 なので, 上式で$\eta\downarrow 0$とすることにより

$$-\overline{\alpha}^{d-1}s(\overline{\alpha})^2w'(\overline{\alpha})+\overline{\beta}^{d-1}s(\overline{\beta})^2w'(\overline{\beta})\geqq 0$$

となる。ここでと $\overline{\alpha}\downarrow\alpha$ すると

$$\overline{\beta}^{d-1}s(\overline{\beta})^2w'(\overline{\beta})\geqq\alpha^{d-1}s(\alpha)^2w'_+(\alpha)$$

となる。(α,β) 上 $w\geqq 0$ で $w(\alpha)=0$ であるから $w'_+(\alpha)\geqq 0$ である。故に上の不等式から $\overline{\beta}^{d-1}s(\overline{\beta})^2w'(\overline{\beta})\geqq 0$ となり, 結局 (α,β) 上可算個の点を除き $w'\geqq 0$ となる, ゆえに

$$w(\beta)=w(c)+\int_c^\beta w'(r)dr\geqq w(c)>0$$

となって $w(\beta)=0$ に反する。よって (a,b) 上 $w\geqq 0$ となり, 勿論 $u\geqq 0$ となる。 □

3．陪単位と特異性指数

3.1.　$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の回転不変ラドン測度μをとり，その $(0,\infty)$ 上の半径成分も又μとかいた。だから $d\mu(r\xi)=r^{d-1}d\mu(r)d\xi\ (r\in(0,\infty), \xi\in\Gamma)$。$\mu$解$f_\mu$ で $(f_\mu(1), f_\mu'(1))=(0,-1)$ となるものが唯一存在する。$f_\mu(1)=0$ だから必然的に $f_\mu'(1)$ が存在した（(2.3) 参照)。f_μ を $(0,1]$ で考えて **μ陪単位**と呼ぶ。$(0,1)$ 上 $f_\mu\geqq 0$ で，ある $c\in(0,1)$ で $f_\mu(c)=0$ となるとすると，(2.3) により $f_\mu'(c)$ が存在し，必然的に $f_\mu'(c)=0$ でなければならず，初期値問題の解の一意性から $f_\mu\equiv 0$ と言う矛盾がでる。ゆえに f_μ は $(0,1)$ 上負の値をとらぬかぎり $f_\mu>0$ である。f_μ が $(0,1)$ 上負の値をとるときμは**楕円型**，そうでないときμを非楕円型という。定数 0 は $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の回転不変ラドン測度と考える，例えば，0λ とみる。0 陪単位 f_0 は 0 解（回転不変 0 調和関数，即ち古典調和関数）だから，$(r^{d-1}f_0')'=0$ を解いて

$$
f_0(r)=\begin{cases} \dfrac{1}{d-2}\left(\dfrac{1}{r^{d-1}}-1\right) & (d\geqq 3), \\ \log\dfrac{1}{r} & (d=2) \end{cases} \tag{3.1}
$$

となることがわかるので，0 は非楕円型である。色々のμに対する f_μ を互いに比較する必要がしばしば起きる。その時有用なのが，**比較原理**（[12，定理 3.1] 参照）である：$(0,1]$ 上 $\mu\leqq\nu$（又は$\mu<\nu$）で $(0,1)$ 上 $f_\mu>0$ とする。$(0,1)$ 上 f_ν/f_μ は減少関数（又は真に減少関数）で $f_\nu(r)/f_\mu(r)\downarrow 1\ (r\uparrow 1)$ である，とくに $(0,1)$ 上 $f_\nu\geqq f_\mu$（又は $f_\nu>f_\mu$）となる。従ってμが非楕円型で$\mu\leqq\nu$ならばνも非楕円型である。

μを非楕円型とし，$\mu\leqq\nu$とするとνも非楕円型で，f_ν/f_μ は $(0,1]$ 上減少関数で $f_\nu(r)/f_\mu(r)\downarrow 1\ (r\uparrow 1)$ であるので，逆に $\lim_{r\downarrow 0}f_\nu(r)/f_\mu(r)\in[1,\infty]$ が定まる。この値が有限となる条件を与えるものが**同位定理**（[12，定理 3.2]）である：次の 2 条件は同値である：

$$
\lim_{r\downarrow 0}\frac{f_\nu(r)}{f_\mu(r)}<\infty, \tag{3.2}
$$

$$
\iint_{0<s<t<1}\left(\frac{t}{s}\right)^{d-1}\left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 ds\, d(\nu-\mu)(t)<\infty. \tag{3.3}
$$

3.2.　$\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の回転不変ラドン測度μに対して，新しい同種のラドン測度

$$
\mu_n=\mu+\frac{n(n+d-2)}{r^2}\lambda\quad (n=0,1,\cdots) \tag{3.4}
$$

を考えた，ただしλは $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上のルベッグ測度であった。すると

$$
\mu=\mu_0<\mu_1<\cdots<\mu_n<\mu_{n+1}<\cdots
$$

であるので，μを非楕円型と仮定すると各 μ_n も非楕円型であって，$(0,1)$ 上

$$
0<f_\mu=f_{\mu_0}<f_{\mu_1}<\cdots<f_{\mu_n}<f_{\mu_{n+1}}<\cdots \tag{3.5}
$$

となり，更に f_{μ_n}/f_μ は $(0,1)$ 上減少で，$f_{\mu_n}(r)/f_\mu(r)\downarrow 1\ (r\uparrow 1)$ なので

$$
1/\alpha_n(\mu):=\lim_{r\downarrow 0}\frac{f_{\mu_n}(r)}{f_\mu(r)}\in(1,\infty]\quad (n=1,2,\cdots) \tag{3.6}
$$

が定義できる。ただし $1/\alpha_n(\mu)=\infty$ は $\alpha_n(\mu)=0$ と同値と定める。$\alpha_n(\mu)$ をμの **n 位特異性指数**（$n=1,2,\cdots$），とくに $\alpha(\mu):=\alpha_1(\mu)$ をμの**特異性指数**と呼ぶ。

命題 3.1 (単調性). $\mu \leqq \nu$ で μ を非楕円型とすると,

$$\frac{f_{\mu_n}(r)}{f_\mu(r)} \geqq \frac{f_{\nu_n}(r)}{f_\nu(r)} \quad (0 < r < 1) \tag{3.7}$$

となり, 従って特に, 上式で $r \downarrow 0$ として

$$\alpha_n(\mu) \leqq \alpha_n(\nu) \tag{3.8}$$

がすべての $n = 1, 2, \cdots$ について成立する。

この証明の為にも, 又後でくりかえし必要となり, 又別の用途の為にも次の補題を用意するとよい。任意の非楕円型の μ に対し, 任意の $R \in (0,1)$ をとめて, f_μ のダランベール変換

$$s(r) := f_\mu(r) \int_R^r \frac{dt}{t^{d-1} f_\mu(t)^2} \quad (R \leqq r < 1) \tag{3.9}$$

を考える。これは $(R,1)$ 上正の μ 解であるが, 更に次の性質をもつ。

補題3.1. $s(r) \to 1$ $(r \uparrow 1)$ となるので, s は $(R,1]$ 上の真に正である μ 解を定める。

証明. (3.9) の両辺を微分して変形すると

$$s(r) = f_\mu(r) \int_R^r \frac{dt}{t^{d-1} f_\mu(t)^2} = \frac{s'(r)}{f_\mu'(r)} f_\mu(r) - \frac{1}{r^{d-1} f_\mu'(r)}$$

となる。s は $(0,\infty)$ 上の μ 解を定めることが肝心で, それゆえ s の可成りの滑らかさにより, s' は特に局所有界で, f_μ' は 1 で $(0,\infty)\setminus E_{f_\mu}$ 上の関数として連続だから, 上式の最右辺は, $(f_\mu(1), f_\mu'(1)) = (0, -1)$ に注意して, $r \uparrow 1$ のとき 1 に近づくことがわかる。 □

命題 3.1 の証明. 公式 (2.10) を使うと

$$\left(r^{d-1}\left(\frac{f_{\mu_n} f_\nu}{f_\mu}\right)'\right)' = r^{d-1} \frac{f_{\mu_n} f_\nu}{f_\mu} \left\{(\mu_n + \nu - \mu) + 2\left(\frac{f_\mu'}{f_\mu} - \frac{f_{\mu_n}'}{f_{\mu_n}}\right)\left(\frac{f_\mu'}{f_\mu} - \frac{f_\nu'}{f_\nu}\right)\right\}$$

となる。ここで $\mu_n + \nu - \mu = \nu_n$ となり, また比較原理により $f_{\mu_n}/f_\mu \downarrow 1$ $(r \uparrow 1)$ なので対数微分法を考えて $f_\mu'/f_\mu - f_{\mu_n}'/f_{\mu_n} \geqq 0$ がわかる (殆ど到る所の意味で)。同じく比較原理により, $f_\mu'/f_\mu - f_\nu'/f_\nu \geqq 0$ も同様に示されるので, 結局 $(0,1)$ 上

$$\left(r^{d-1}\left(\frac{f_{\mu_n} f_\nu}{f_\mu}\right)'\right)' \geqq r^{d-1} \frac{f_{\mu_n} f_\nu}{f_\mu} \; \nu_n$$

となり, $f_{\mu_n} f_\nu / f_\mu$ は $(0,1)$ 上 ν_n 劣解である。任意の $a \in (0,1)$ をとるとき, $\nu_n (> \nu \geqq \mu)$ は非楕円型だから, 補題3.1により $[a,1]$ 上真に正の ν_n 解がある。よって比較定理により

$$\left(\frac{f_{\mu_n}(r) f_\nu(r)}{f_\mu(r)}\right) \Big/ \left(\frac{f_{\mu_n}(a) f_\nu(a)}{f_\mu(a)}\right) \leqq f_{\nu_n}(r) / f_{\nu_n}(a) \quad (a \leqq r \leqq 1)$$

となる。ここで $r \uparrow 1$ のとき

$$\frac{f_{\mu_n}(r) f_\nu(r)}{f_\mu(r)} = f_{\mu_n}(r) \frac{(f_\nu(r) - f_\nu(1))/(r-1)}{(f_\mu(r) - f_\mu(1))/(r-1)} \to 0 \cdot \frac{-1}{-1} = 0$$

を使っている。上記不等式をかきかえて

$$\frac{f_{\mu_n}(r)f_\nu(r)}{f_\mu(r)f_{\nu_n}(r)} \leqq \frac{f_{\mu_n}(a)f_\nu(a)}{f_\mu(a)f_{\nu_n}(a)} \quad (a<r<1)$$

となる。これは $f_{\mu_n}f_\nu/f_\mu f_{\nu_n}$ が減少関数で,上と同じく考えて, $\downarrow 1$ $(r\uparrow 1)$ であるから (0,1) 上 $f_{\mu_n}(r)f_\nu(r)/f_\mu(r)f_{\nu_n}(r) \geqq 1$ となり,（3.7）が出る。 □

さて（3.5）から明らかに

$$1>\alpha(\mu)=\alpha_1(\mu)\geqq\alpha_2(\mu)\geqq\cdots\geqq\alpha_n(\mu)\geqq\alpha_{n+1}(\mu)\geqq\cdots \tag{3.10}$$

となる。$\alpha(\mu)$ については，その値そのものよりも，$\alpha(\mu)>0$ であるか又は $\alpha(\mu)=0$ となるかが重要である。上記（3.10）から $\alpha(\mu)=0$ ならすべての n について $\alpha_n(\mu)=0$ となる。$\alpha(\mu)>0$ ならすべての n について $\alpha_n(\mu)>0$ であることが望ましい。これが正しいことが次の主張からわかる：

命題 3.2. **すべての $r\in(0,1)$ について**

$$\frac{f_{\mu_1}(r)}{f_\mu(r)} \leqq \frac{f_{\mu_n}(r)}{f_\mu(r)} \leqq \left(\frac{f_{\mu_1}(r)}{f_\mu(r)}\right)^{k(n)} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{3.11}$$

となる，ただしガウス記号を使って $k(n)=[n(n+d-2)/(d-1)]+1$ である。従って

$$\alpha(\mu)^{k(n)} \leqq \alpha_n(\mu) \leqq \alpha(\mu) \quad (n=1,2,\cdots). \tag{3.12}$$

証明. μ に対して $\mu_m=\mu+m(m+d-2)r^{-2}\lambda$ であったが，更に

$$\mu_{(m)}=(\cdots((\mu_1)_1)_1\cdots)_1=\mu+\frac{m(d-1)}{r^2}\lambda$$

とかくと便利である。ただし $\mu_{(0)}=\mu$ と解する。$\mu_{(m-1)}<\mu_{(m)}$ であるから命題 3.1 によれば

$$\frac{f_{\mu(m+1)}}{f_{\mu(m)}}=\frac{f_{(\mu(m))1}}{f_{\mu(m)}}\leqq\frac{f_{(\mu(m-1))1}}{f_{\mu(m-1)}}=\frac{f_{\mu(m)}}{f_{\mu(m-1)}} \quad (m=1,2,\cdots)$$

である。従って任意の自然数 k に対して

$$\frac{f_{\mu(k)}}{f_{\mu(k-1)}}\leqq\frac{f_{\mu(k-1)}}{f_{\mu(k-2)}}\leqq\cdots\leqq\frac{f_{\mu(2)}}{f_{\mu(1)}}\leqq\frac{f_{\mu(1)}}{f_{\mu(0)}}=\frac{f_{\mu_1}}{f_\mu}$$

となる。$k=k(n)$ にとると，$n(n+d-2)<k(d-1)$ により $\mu_n<\mu_{(k)}$ だから

$$\frac{f_{\mu_n}}{f_\mu}\leqq\frac{f_{\mu(k)}}{f_\mu}=\frac{f_{\mu(1)}}{f_{\mu(0)}}\cdot\frac{f_{\mu(2)}}{f_{\mu(1)}}\cdot\cdots\cdot\frac{f_{\mu(k)}}{f_{\mu(k-1)}}\leqq\left(\frac{f_{\mu_1}}{f_\mu}\right)^k$$

となって（3.11）が示される。 □

3.3. $\alpha(\mu)>0$ 又は $\alpha(\mu)=0$ を別の見地から判定する為に，同位定理（(3.2) と (3.3) の同値性）において $\nu=\mu_1=\mu+(d-1)r^{-2}\lambda$ とおけば $d(\nu-\mu)(t)=(d-1)t^{-2}dt$ であるから

$$1/\beta(\mu):=\iint_{0<s<t<1}\frac{t^{d-3}}{s^{d-1}}\left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 dsdt \tag{3.13}$$

（$1/\beta(\mu)=\infty$ は $\beta(\mu)=0$ と解する）とおけば，$\alpha(\mu)>0$（又は $\alpha(\mu)=0$）と $\beta(\mu)>0$（又は $\beta(\mu)=0$）が同値であることがわかる。(3.13) を反復積分になおすと

(3.14) $$1/\beta(\mu)=\int_0^1 t^{d-3}f_\mu(t)^2\left(\int_0^t \frac{ds}{s^{d-1}f_\mu(s)^2}\right)dt$$

となる。従って殆ど自明ながら

命題 3.3. **もし，１つの，従ってすべての $t\in(0,1)$ に対して**

(3.15) $$\int_0^t \frac{ds}{s^{d-1}f_\mu(s)^2}=\lim_{R\downarrow 0}\int_R^t \frac{ds}{s^{d-1}f_\mu(s)^2}=\infty$$

となるならば，$\alpha(\mu)=\beta(\mu)=0$ となる。

この事からも示唆される様に，非楕円型の μ に対して，(3.15) が成立するか否かで，μ を**放物型**又は**双曲型**と呼ぶと便利である。即ち回転不変ラドン測度を大きく楕円型と非楕円型に分類し，更に後者を放物型と双曲型に分類する訳である。

μ が双曲型のとき，即ち $\int_0^t(1/s^{d-1}f_\mu(s)^2)ds<\infty$ のとき，

(3.16) $$e_\mu(r):=f_\mu(r)\int_0^r \frac{dt}{t^{d-1}f_\mu(t)^2}$$

を**μ単位**と呼ぶ。明かに $e_\mu\in C(0,1)$ であるが，更に，補題 3.1 を使って，

$$e_\mu(r)=f_\mu(r)\int_0^R \frac{dt}{t^{d-1}f_\mu(t)^2}+f_\mu(r)\int_R^r \frac{dt}{t^{d-1}f_\mu(t)^2}\quad(0<R<r<1)$$

で $r\uparrow 1$ とすることにより，$e_\mu(r)\to 1$ となるから

(3.17) $$e_\mu(1)=1$$

と定めて，$e_\mu\in C(0,1]$ となる。$R\in(0,1)$ を任意にとり，補助的に f_μ のダランベール変換

(3.18) $$e_{\mu,R}(r):=f_\mu(r)\int_R^r \frac{dt}{t^{d-1}f_\mu(t)^2}$$

を考えると，$r=R$ においては明らかに，又 $r=1$ においては (3.17) と同様にして

(3.19) $$e_{\mu,R}(R)=0,\quad e_{\mu,R}(1)=1$$

がわかり，$e_{\mu,R}$ は $(0,1)$ 上の，従って $(0,\infty)$ 上の，μ 解を定め，$(0,1]$ 上

(3.20) $$e_{\mu,R}\uparrow e_\mu\quad(R\downarrow 0)$$

となる。任意の $\varphi\in C_0^\infty(0,1)$ をとり，$\mathrm{supp}\,\varphi\subset(R,1)$ となる様な $R\in(0,1)$ をとれば

$$\int_0^1 e_{\mu,R}(r)(r^{d-1}\varphi'(r))'dr=\int_0^1 r^{d-1}e_{\mu,R}(r)\varphi(r)d\mu(r)$$

であるから，$R\downarrow 0$ として

$$\int_0^1 e_\mu(r)(r^{d-1}\varphi'(r))'dr=\int_0^1 r^{d-1}e_\mu(r)\varphi(r)d\mu(r)$$

となるから，e_μ は $(0,1)$ 上，従って $(0,\infty)$ 上，の μ 解を定める。

μが双曲型ならば，(3.14) と (3.16) から

$$1/\beta(\mu)=\int_0^1 t^{d-3}e_\mu(t)f_\mu(t)dt \tag{3.21}$$

の形が導かれる。(3.16)の両辺を r で微分して

$$e'_\mu(r)=\frac{f'_\mu(r)}{f_\mu(r)}e_\mu(r)+\frac{1}{r^{d-1}f_\mu(r)} \quad \text{又は} \quad r^{d-1}\left(\frac{e'_\mu(r)}{e_\mu(r)}-\frac{f'_\mu(r)}{f_\mu(r)}\right)=\frac{1}{e_\mu(r)f_\mu(r)}$$

となる。これを (3.21) に代入すると

$$1/\beta(\mu)=\int_0^1\frac{dt}{t^2\left(\frac{e'_\mu(t)}{e_\mu(t)}-\frac{f'_\mu(t)}{f_\mu(t)}\right)}$$

が出る。これは後程本質的に利用される。

4．ピカール次元と基本定理

4.1.　$\Omega=B^d\backslash\{0\}$ および $\Gamma=S^{d-1}$ と略記している。Ωでの広義一様収束による位相で考えて，$H_\mu(\Omega)$ は線形位相空間，特に局所凸空間，である。$H_\mu(\Omega)$ の関数のうちΓで連続境界値 0 をとるもの全体を $H_\mu(\Omega;\Gamma)$ とあらわすと，$H_\mu(\Omega;\Gamma)$ は $H_\mu(\Omega)$ の閉部分空間となる。$u\in H_\mu(\Omega;\Gamma)$ に対して $\int_\Gamma u(r\xi)\,d\sigma(\xi)$ は $(0,\infty)$ 上のμ解を定め，f_μ の定数倍となるから，1 で微分係数をもつことがわかる。ゆえに $H_\mu(\Omega;\Gamma)$ 上の線形汎関数

$$\ell(u)=-\left(\frac{1}{\sigma(\Gamma)}\int_\Gamma u(r\xi)\,d\sigma(\xi)\right)'_{r=1} \quad (u\in H_\mu(\Omega;\Gamma)) \tag{4.1}$$

が定義できて，$H_\mu(\Omega;\Gamma)$ 上連続となることがわかる。更にℓは真に正値である，即ち $u\geqq 0$ で $u\neq 0$ なら $\ell(u)>0$ である。さて

$${}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)=\{u\in H_\mu(\Omega;\Gamma):\ell(u)=1\} \tag{4.2}$$

とおく。一般に関数族$\mathcal{F}$の中の正値関数全体を$\mathcal{F}^+$と記すことにするとき，${}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+$ は $H_\mu(\Omega;\Gamma)$ の（従って $H_\mu(\Omega)$ の）凸集合となるが，更にハルナック原理によりコンパクト集合となることもわかる。クライン・ミルマンの定理により

$${}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+=\overline{\mathrm{co}}\left[\mathrm{ex.}({}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+)\right] \tag{4.3}$$

となる，ここで $\mathrm{ex.}({}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+)$ は凸集合 ${}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+$ の端点の全体を意味し，$\overline{\mathrm{co}}$ は閉凸包をあらわす。$H_\mu(\Omega;\Gamma)^+$ がどれほど多くの関数をもつかは $\mathrm{ex.}({}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+)$ の濃度$\#(\mathrm{ex.}({}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+)$ が指標となるので

$$\dim(\mu,\Omega)=\#\left(\mathrm{ex.}({}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+)\right) \tag{4.4}$$

をμのΩの原点における**ピカール次元**と呼ぶ。これが我々の研究対象である。回転不変ラドン測度のピカール次元に関しての基本定理は次のもので，これは，[7]，[5]，[11]等の一般化である：

定理 4.1（基本定理）。回転不変ラドン測度μのピカール次元 $\dim(\mu,\Omega)$ の値域は3個の濃度 0，1，$\aleph$（連続体濃度）からなる。詳しくは，μが楕円型のときかつそのときにかぎり $\dim(\mu,\Omega)=0$，μが非楕円型なら，$\alpha(\mu)=0$ か $\alpha(\mu)>0$ に応じて $\dim(\mu,\Omega)=1$ か $\dim(\mu,\Omega)=\aleph$ となる。

証明. μ を楕円型とする。もし $u\in H_\mu(\Omega;\Gamma)^+\backslash\{0\}$ があると

$$0<\int_\Gamma u(r\xi)\,d\sigma(\xi)=cf_\mu(r)\quad(0<r<1\,;\,c\text{ は正定数})$$

により $f_\mu>0$ となって μ が楕円型であることに反する。ゆえに $H_\mu(\Omega;\Gamma)^+=\{0\}$ より ${}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+=\emptyset$ となり，$\dim(\mu,\Omega)=0$ となる。逆に $\dim(\mu,\Omega)=0$ ならば ${}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+=\emptyset$ であるから (4.3) により $H_\mu(\Omega;\Gamma)^+=\{0\}$ となって $f_\mu\notin H_\mu(\Omega;\Gamma)^+$ であるから，μ は楕円型となる。こうして，我々は，μ を非楕円型と仮定し，$\alpha(\mu)=0$ 又は $\alpha(\mu)>0$ に応じて $\dim(\mu,\Omega)=1$ 又は $\dim(\mu,\Omega)=\aleph$ を示せばよい。

最初 $\alpha(\mu)=0$ として $\dim(\mu,\Omega)=1$ を示す。その為に任意の $u\in{}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+$ をとるとき $u=f_\mu$ となることを示せばよい。各 $r\in(0,1]$ について $u(r\xi)$ の ξ についての $L_2(\Gamma,d\sigma)$ 内におけるフーリエ展開

$$u(r\xi)=c_{01}(r)S_{01}(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{N(n)}c_{nk}(r)S_{nk}(\xi)\right)$$

を考える。c_{nk} は (0,1) 上の μ_n 解で $c_{nk}(1)=0$ である。ゆえに (0,1] 上 $c_{nk}(r)=-c'_{nk}(1)f_{\mu n}(r)$ であり，特に $S_{01}(\xi)=\sigma_d^{-1/2}$ であるから

$$c_{01}(r)=\int_\Gamma u(r\xi)S_{01}(\xi)d\xi=\sigma_d^{-1/2}\int_\Gamma u(r\xi)d\xi$$

となり，従って

$$c'_{01}(1)=\sigma_d^{-1/2}\left(\int_\Gamma u(r\xi)d\xi\right)'=-\sigma_d^{-1/2}\ell(u)=-\sigma_d^{-1/2}$$

となる。こうして $c_{01}(r)=-c'_{01}(1)f_\mu(r)=\sigma_d^{-1/2}f_\mu(r)$ で $c_{01}S_{01}(\xi)=f_\mu(r)$ となる。ゆえに $L_2(\Gamma,d\sigma)$ 内

$$u(r\xi)=f_\mu(r)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{N(n)}c'_{nk}(1)S_{nk}(\xi)\right)f_{\mu n}(r)$$

となる。加法定理（後出の (7.6) 参照）によれば，$(N(n)/\sigma_d)^{1/2}\pm S_{nk}(\xi)\geqq 0$ であるので，これを上式の両辺にかけて Γ 上 $d\xi$ で積分すると

$$0\leqq\int_\Gamma u(r\xi)\left(\left(\frac{N(n)}{\sigma_d}\right)^{1/2}\pm S_{nk}(\xi)\right)d\xi=\left(u(r\xi),\left(\frac{N(n)}{\sigma_d}\right)^{1/2}\pm S_{nk}(\xi)\right)_{\xi,L_2(\Gamma)}$$

$$=(N(n)\,\sigma_d)^{1/2}f_\mu(r)\mp c'_{nk}(1)f_{\mu n}(r)$$

となり，これから

$$|c'_{nk}(1)|\leqq(N(n)\,\sigma_d)^{1/2}\frac{f_\mu(r)}{f_{\mu n}(r)}$$

となる。ここで $r\downarrow 0$ とすると

$$|c'_{nk}(1)|\leqq(N(n)\,\sigma_d)^{1/2}\alpha_n(\mu)\leqq(N(n)\,\sigma_d)^{1/2}\alpha(\mu)=0$$

となり，$c'_{nk}(1)=0$ $(k=1,\cdots,N(n)\,;\,n=1,2,\cdots)$ がわかる。ゆえに $u=f_\mu$ となる。

次に $\alpha(\mu)>0$ なら $\dim(\mu,\Omega)=\aleph$ を示す。$g\in O(d)$ を写像 $x\mapsto g\cdot x={}^t({}^tg\,{}^tx)$ と同一視して，Ω 上の関数 w に対して $(w\circ g)(x)=w(g\cdot x)$ と記すことにすると，w が回転不変なことは $w\circ g=w$ $(g\in O(d))$ で特徴づけられる。ex.$({}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+)$ は明らかに $O(d)$ について閉じている：各 $w\in$ex.$(H_\mu(\Omega;\Gamma)^+)$ と任意の $g\in O(d)$ に対して $w\circ g\in$ex.$({}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+)$ となる。μ は非楕円型だから，$f_\mu\in{}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+\neq\emptyset$ ゆえ (4.3) により ex.$({}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+)\neq\emptyset$ である。

任意の $u\in$ex.$({}_1H_\mu(\Omega;\Gamma)^+)$ は回転不変でないことを示す。もし回転不変とすると $u=f_\mu$ である。

$$u^{\pm}(r\xi)=f_{\mu}(r)\pm\alpha(\mu)f_{\mu_1}(r)\left(\frac{\sigma_d}{N(1)}\right)^{1/2}S_{11}(\xi)$$

とおくと，これらはΩ上調和となる。又 $u^{\pm}\in C(\Omega\cup\Gamma)$ でΓ上 $u^{\pm}=0$ である。さらに，$\alpha(\mu)(f_{\mu_1}/f_{\mu})$ は真に減少で

$$0\leqq\alpha(\mu)\frac{f_{\mu_1}(r)}{f_{\mu}(r)}<\lim_{s\downarrow 0}\alpha(\mu)\frac{f_{\mu_1}(s)}{f_{\mu}(s)}=1\quad(0<r\leqq 1)$$

である。したがって，$|(\sigma_d/N(1))^{1/2}S_{11}(\xi)|\leqq 1$ によれば，$0<r<1$ に対して

$$u^{\pm}(r\xi)=f_{\mu}(r)\left(1\pm\alpha(\mu)\frac{f_{\mu_1}(r)}{f_{\mu}(r)}\left(\frac{\sigma_d}{N(1)}\right)^{1/2}S_{11}(\xi)\right)\geqq f_{\mu}(r)\left(\{1-\alpha(\mu)\frac{f_{\mu_1}(r)}{f_{\mu}(r)}\right)>0$$

となる。よって $u^{\pm}\in H_{\mu}(\Omega;\Gamma)^{+}$ となる。さらに

$$\int_{\Gamma}S_{11}(\xi)d\xi=\sigma_d^{1/2}\int_{\Gamma}S_{01}(\xi)S_{11}(\xi)d\xi=0$$

だから

$$\ell(u^{\pm})=-\frac{1}{\sigma_d}\left(\int_{\Gamma}u^{\pm}(r\xi)d\xi\right)'_{r=1}=-f'_{\mu}(1)\mp\frac{1}{\sigma_d}\alpha(\mu)f'_{\mu_1}(1)\left(\frac{\sigma_d}{N(1)}\right)^{1/2}\int_{\Gamma}S_{11}(\xi)d\xi=1$$

となり，$u^{\pm}\in{}_1H_{\mu}(\Omega;\Gamma)^{+}$ となる。明らかに $u^{+}\neq u^{-}$ であって $f_{\mu}=(u^{+}+u^{-})/2$ となるから，$u\in\mathrm{ex.}({}_1H_{\mu}(\Omega;\Gamma)^{+})$ に反する。こうして，どの $u\in\mathrm{ex.}({}_1H_{\mu}(\Omega;\Gamma)^{+})$ も回転不変でない。

2つのベクトル $(\delta_{i1},\cdots,\delta_{id})$ $(i=1,2)$ の張る $\mathbf{R}^d$ の2次元部分空間を X とすると，$Y=\Omega\cap X$ は X の穴空き単位円板である。複素平面 $\mathbf{C}$ の単位円周 $T=\{\zeta\in\mathbf{C}:|\zeta|=1\}$ を乗法群と考える。各 $\zeta\in T$ に $O(d)$ の元

$$\tau(\zeta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cdots & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & E & \\ 0 & 0 & & & \end{vmatrix}\quad(\theta=\arg\zeta)$$

を対応させる，ただし E は $(d-2)$ 次元単位行列とする。すると $O(d)_X:=\{\tau(\zeta)\in O(d):\zeta\in T\}$ は乗法群として T に同型である。

今度は $u|Y$ が Y 上回転不変でないような $u\in\mathrm{ex.}({}_1H_{\mu}(\Omega;\Gamma)^{+})$ の存在を示そう。まず任意に $w\in\mathrm{ex.}({}_1H_{\mu}(\Omega;\Gamma)^{+})$ を1つとる。w はとにかくΩ上回転不変でないから，Ωの2点 x,y で $|x|=|y|$ かつ $w(x)\neq w(y)$ となるものがとれる。$\tau_0(x)$ も $\tau_0(y)$ も X に入る様な $\tau_0\in O(d)$ をとる。そこで $u:=w\circ\tau_0^{-1}$ とおく。すると u は又 $\mathrm{ex.}({}_1H_{\mu}(\Omega;\Gamma)^{+})$ に入ることは上に見た通りで，$u|Y$ は Y 上回転不変でない。実際 $\tau_1(\tau_0(x))=\tau_0(y)$ となる $\tau_1\in O(d)_X$ をとると，$u(\tau_0(x))=w(x)\neq w(y)=u(\tau_0(y))=u\circ\tau_1(\tau_0(x))$ となり，Y 上 $u\circ\tau_1\neq u$ がわかる。

上にとった u を固定した上で，$O(d)_{X,u}=\{\tau\in O(d)_X:Y$ 上 $u\circ\tau=u\}$ を考えよう。勿論 $O(d)_{X,u}$ は可換群 $O(d)_X$ の正規部分群である。各 $\tau^*\in O(d)_X/O(d)_{X,u}$ に対して $u_{\tau^*}:=u\circ\tau$ $(\tau\in\tau^*)$ と定めると u_{τ^*} は $\mathrm{ex.}({}_1H_{\mu}(\Omega;\Gamma)^{+})$ の元である。$\tau^*\mapsto u_{\tau^*}$ は $O(d)_X/O(d)_{X,u}$ から $\mathrm{ex.}({}_1H_{\mu}(\Omega;\Gamma)^{+})$ の中への単射であるから

$$\#(O(d)_X/O(d)_{X,u}\leqq\#(\mathrm{ex.}({}_1H_{\mu}(\Omega;\Gamma)^{+})=\dim(\mu,\Omega)\tag{4.5}$$

となることがわかる。

上の u に対して $z=x+iy\in\mathbf{C}$ の関数 $v=\gamma(u)$ を $v(z)=v(x+iy)=u(x,y,0,\cdots,0)$ によって定めて u に対応させる。各 $\zeta\in T$ に対して $v_\zeta(z)=v(\zeta z)(0<|z|<1)$ によって与えられる v_ζ を考える。$T_u=\{\zeta\in T: 0<|z|<1$ 上 $v_\zeta=v\}$ とおく。すると

$$v_\zeta(z)=v(\zeta z)=u(\tau(\zeta)\cdot(x,y,0,\cdots,0))=(u\circ\tau(\zeta))(x,y,0,\cdots,0)$$

であるから，$v_\zeta=\gamma(u\circ\tau(\zeta))$ となることがわかる。これは $\zeta\in T_u$ が $\tau(\zeta)\in O(d)_{X,u}$ に同等であることを意味する。T から $O(d)_X$ への同型写像 $\zeta\mapsto\tau(\zeta)$ により，T_u は $O(d)_{X,u}$ に写されるから，T/T_u は $O(d)_X/O(d)_{X,u}$ に同型である。これと (4.5) および自明な事実 $\dim(\mu,\Omega)\leqq\aleph$ により

$$\#(T/T_u)\leqq\dim(\mu,\Omega)\leqq\aleph \tag{4.6}$$

が示される。

最後に T の部分群 $T_0=\{\zeta\in T$: ある $n\in\mathbf{Z}$ に対して $\zeta^n=1\}$ ($\mathbf{Z}$ は整数全体) を考える。勿論 $\# T_0=\aleph_0$ (加算集合の濃度) である。各 $0<r<1$ に対して

$$v(re^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(r)e^{in\theta}$$

を θ に関しての $v(re^{i\theta})$ の複素フーリエ展開とする。そのとき，$\zeta\in T_u$ に対して

$$v_\zeta(re^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(r)\zeta^n e^{in\theta}$$

となる。$v\equiv v_\zeta$ だから

$$c_n(r)=c_n(r)\zeta^n\quad(0<r<1,\ n\in\mathbf{Z})$$

でなければならぬ。$v(z)$ は $0<|z|<1$ 上回転不変でないから，ある $r\in(0,1)$ とある $n\in\mathbf{Z}$ があって $c_n(r)\neq 0$ となる。すると $\zeta^n=1$ となり $\zeta\in T_0$ となる。つまり $T_u\subset T_0$ だから

$$\# T_u\leqq\# T_0=\aleph_0$$

であり，濃度の算術により

$$\#(T/T_u)=(\#(T/T_u))\cdot(\# T_u)=\# T=\aleph$$

となる。だから (4.6) によって $\dim(\mu,\Omega)=\aleph$ となる。 □

5．ピカール次元の単調性と斉次性

5.1. Ω 上の回転不変ラドン測度 μ に対する濃度値関数 $\mu\mapsto\dim(\mu,\Omega)$ が μ についての順序に関して単調増加であることを示す ([4], [11] の一般化)：

定理 5.1 (単調性定理). **Ω 上の回転不変ラドン測度 μ と ν について，もし $\mu\leqq\nu$ ならば $\dim(\mu,\Omega)\leqq\dim(\nu,\Omega)$ となる。**

証明. とにかく $\dim(\nu,\Omega)\geqq 0$ であるが，μ を楕円型とすると，定理 4.1 により $\dim(\mu,\Omega)=0$ だから，$\dim(\mu,\Omega)\leqq\dim(\nu,\Omega)$ となる。従って，μ が非楕円型の場合のみ考えるとよい。比較原理により ν も又非楕円型なので，特異性指数 $\alpha(\mu),\alpha(\nu)$ が考えられて，命題3.1により $\alpha(\mu)\leqq\alpha(\nu)$ となる。$\alpha(\mu)=0=\alpha(\nu)$

であっても $\alpha(\mu)=0<\alpha(\nu)$ であっても，定理4.1により $\dim(\mu,\Omega)=1=\dim(\nu,\Omega)$ 又は $\dim(\mu,\Omega)=1<\aleph=\dim(\nu,\Omega)$ となって $\dim(\mu,\Omega)\leqq\dim(\nu,\Omega)$ が出る。残るところは $0<\alpha(\mu)\leqq\alpha(\nu)$ の場合であって，$\dim(\mu,\Omega)=\dim(\nu,\Omega)=\aleph$ となり，やはり $\dim(\mu,\Omega)\leqq\dim(\nu,\Omega)$ が成立する。 □

5.2.　次に $\dim(\mu,\Omega)$ と $\dim(c\mu,\Omega)$ $(0<c\leqq 1)$ の関係を調べる。これらが一致することを理想とするが，そうならないことが多い。一般的に言えることは次の結果である（[11]の一般化）：

定理 5.2（斉次不等式）．$R^d\backslash\{0\}$ 上の回転不変ラドン測度 μ について，次の不等式が成立する：

$$\dim(\mu,\Omega)\leqq\dim(c\mu,\Omega)\quad(0<c\leqq 1) \tag{5.1}$$

この証明の為にはいくつかの準備をせねばならない。比較定理（命題2.2）に関してあまり本質的でないいくつかの補足的注意を述べる。$[a,b]$ $(\subset(0,\infty))$ 上真に正値な μ 解 s があるとする。(a,b) 上の解について，$u(a)$, $u(b)\geqq 0$ ならば (a,b) 上 $u\geqq 0$ となり，もし更に $u(a)$ 又は $u(b)>0$ ならば (a,b) 上 $u>0$ となる（**最小値原理**）。まず $u(a),u(b)\geqq 0$ とする。もしある $c\in(a,b)$ で $u(c)<0$ となるならば，$c\in(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ となるある区間 (α,β) で，$u(\alpha)=u(\beta)=0$ かつ (α,β) 上 $u<0$ となるものがとれる。(α,β) 上 u は μ 優解でもあるから，比較定理から (α,β) 上 $u\geqq 0$ でなければならずこれは矛盾である。故に特に $u(a)=u(b)=0$ ならば (a,b) 上（従って $(0,\infty)$）上 $u\equiv 0$ である（**ディリクレ問題の解の一意性**）。次に $u(a),u(b)\geqq 0$ で $u(a)$ 又は $u(b)>0$ とすると (a,b) 上 $u>0$ となることを示そう。とにかく (a,b) 上 $u\geqq 0$ であるので，もし $u(c)=0$ となる $c\in(a,b)$ があれば，(2.3)から $u'(c)$ の存在を知り，$u\geqq 0$ より $u'(c)=0$ となる。すると初期値問題の解の一意性から $u\equiv 0$ であって $u(a)=u(b)=0$ となって矛盾である。

上の最後の部分から次のことがわかる：u を例えば $(0,1)$ で μ 優解で $(0,1)$ 上 $u\geqq 0$ とすると実は $(0,1)$ 上 $u\equiv 0$ か又は $u>0$ である。$u\not\equiv 0$ とするとき，もし $u>0$ でないならば，ある区間 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ と $c\in(\alpha,\beta)$ であって，$[\alpha,\beta]$ 上真に正の μ 解 s があり，$u(c)=0$ で $u(\alpha)$ 又は $u(\beta)>0$ となるものがある。s とそのダランベール変換により1次独立な2つの μ 解を利用して，$(h(\alpha),h(\beta))=(u(\alpha),u(\beta))$ となる μ 解 h を作る。比較原理により $[\alpha,\beta]$ 上 $h\leqq u$ である。しかも上に見た所から $h>0$ である。よって $0<h(c)\leqq u(c)=0$ と言う矛盾がでる。

上の証明でも見た様に $[a,b]$ 上真に正の μ 解があると，それと，そのダランベール変換を利用して任意に $h(a)$, $h(b)$ を指定した μ 解 h が構成できる（**ディリクレ問題の可解性**）。

今一つ準備をする。(u_n) を $[a,b]$ 上の単調増加な μ 解 u_n の列で，$u=\lim_{n\to\infty}u_n$ が $[a,b]$ 上有界であるとすると u は又 $[a,b]$ 上の μ 解となる（**単調完備性**）。(3.20) に続く所の論法により容易に u が (1.7) の超関数解となることがわかる。(2.1) により，$a\leqq r\leqq b$ に対して

$$u_n(r)=u_n(a)+\int_a^r s^{1-d}\left(a^{d-1}(u_n)'_-(a)+\int_{[a,r]}t^{d-1}u_n(t)\mu(t)\right)ds$$

となる。これから $((u_n)'_-(a))$ の収束なことがわかるので，その極限を A として上式で $n\to\infty$ とすると

$$u(r)=u(a)+\int_a^r s^{1-d}\left(a^{d-1}A+\int_{[a,r]}t^{d-1}u(t)\mu(t)\right)ds$$

となる。この式は u の有界性から，u の連続性を保証し，u が μ 解となることがわかる。

$[a,b]$ 上真に正の μ 解 s があるものと仮定する。$[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ となる任意の区間 $[\alpha,\beta]$ をとるとき，ある定数 C が存在して

$$\max_{[\alpha,\beta]}h\leqq C\min_{[\alpha,\beta]}h \tag{5.2}$$

がすべての (a,b) 上の正の μ 解 h に対して成立する（**ハルナックの不等式**）。事実，$(u(a),u(b))=(0,1)$, $(v(a),v(b))=(1,0)$ となる μ 解 u と v を作る。$M_u=\max_{[\alpha,\beta]}u$, $m_u=\min_{[\alpha,\beta]}u$ とおき，M_v, m_v も v に対して同様に

定めるとき，

$$C=\max\left(\frac{M_u}{m_u},\frac{M_v}{m_v}\right)\geqq 1$$

とおくと $h(a)M_v\leqq Ch(a)m_v$ かつ $h(b)M_u\leqq Ch(b)m_u$ であるから，辺々加えると

$$h(a)M_v+h(b)M_u\leqq C(h(a)m_v+h(b)m_u)$$

となる。さて $\alpha\leqq r\leqq\beta$ のとき

$$h(r)=h(a)v(r)+h(b)u(r)\leqq h(a)M_v+h(b)M_u$$

であり又

$$h(r)=h(a)v(r)+h(b)u(r)\geqq h(a)m_v+h(b)m_u$$

となるから，以上3個の陳列の式から

$$\max_{[\alpha,\beta]}h\leqq h(a)M_v+h(b)M_u\leqq C(h(a)m_v+h(b)m_u)\leqq C\min_{[\alpha,\beta]}h$$

となる。

最後に，(u_n) を (a,b) 上の単調増加な μ 解 u_n の列で，$u=\lim_{n\to\infty}u_n$ とおくと，(a,b) 上 $u\equiv+\infty$ であるか又は u が (a,b) 上 μ 解となる（**ハルナック原理**）。なぜなら $u(c)<\infty$ となる $c\in(a,b)$ があるとき u が (a,b) 上の μ 解となることを示せばよい。$c\in[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ となる区間 $[\alpha,\beta]$ を任意にとるとき，u が (α,β) で μ 解となることを言えばよい。するとハルナック不等式から $[\alpha,\beta]$ 上 $u\leqq Cu(c)$ となることから，単調完備性により u は μ 解となる。

5.3. u を μ 解，v を ν 解とすると，$u\neq0$ となる区間において，超関数等式

$$\left(r^{d-1}u^2\left(\frac{v}{u}\right)'\right)'=r^{d-1}u^2\frac{v}{u}(\nu-\mu) \tag{5.3}$$

が成り立つ。形式的に計算して正しいから，超関数の意味で正しいことがわかる（命題2.1の証明参照)。

次に u を μ 解とするとき，$0<c\leqq1$ となる実数 c に対して，u^c を作ると，$u\neq0$ なる区間において

$$\left(r^{d-1}(u^c)'\right)'=r^{d-1}u^c\left\{c\mu+c(c-1)\left(\frac{u'}{u}\right)^2\lambda\right\} \tag{5.4}$$

となる。ゆえに u^c は $\{c\mu+c(c-1)(u'/u)^2\lambda\}$ 解で，$c\mu$ 優解となる。この式は，μ に対して $c\mu$ を調べる常套手段で，ロイデン [13] が初めて使った。これらを使って次のことが示される：

補題 5.1. **μを非楕円型とすると，$c\in(0,1)$ なら，$f_{c\mu}/(f_\mu)^c$ は (0,1) 上減少関数で $f_{c\mu}/(f_\mu)^c\downarrow0$ ($r\uparrow1$) となるので，特に $c\mu$ も又非楕円型となる。**

証明. (0,1) 上 $w=f_{c\mu}/(f_\mu)^c$ とおくと (5.4) と (5.3) を使って

$$\left(r^{d-1}(f_\mu)^{2c}w'\right)'=r^{d-1}(f_\mu)^{2c}wc(1-c)\left(\frac{f'_\mu}{f_\mu}\right)^2\lambda$$

となる。ほとんどすべての $a\in(0,1)$ と $r\in(0,1)$ に対して，(2.9) により

$$r^{d-1}f_\mu(r)^{2c}w'(r)=a^{d-1}f_\mu(a)^{2c}w'(a)-\int_{(r,a)}t^{d-1}f_\mu(t)^{2c}w(t)c(1-c)\left(\frac{f'_\mu(t)}{f_\mu(t)}\right)^2 d\lambda(t)$$

となる。$f_\mu(t)^{2c}w(t)=f_{c\mu}(t)f_\mu(t)^c\to 0$ $(t\uparrow 1)$, $f_\mu(a)^{2c}w'(a)=f'_{c\mu}(a)f_\mu(a)^c-c(f_{c\mu}(a)/f_\mu(a))f_\mu(a)^c f_\mu{}'(a)\to 0$ $(a\uparrow 1)$ であるから，上式で $a\uparrow 1$ とすると，w は可成り滑らかで

$$r^{d-1}f_\mu(r)^{2c}w'(r)=-\int_{(r,1)}t^{d-1}f_\mu(t)^{2c}w(t)c(1-c)\left(\frac{f'_\mu(t)}{f_\mu(t)}\right)^2 d\lambda(t)$$

となる。もし $f_{c\mu}$ が $(0,1)$ で負の値をとるとすると，$f_{c\mu}(b)=0$ かつ $(b,1)$ 上 $f_{c\mu}>0$ となる $b\in(0,1)$ が定まる。上式から $[b,1)$ 上殆ど到る所 $w'\leqq 0$ となる。しかも明らかに

$$|w(r)|=\frac{|(f_{c\mu}(r)-f_{c\mu}(1))/(r-1)|}{|(f_\mu(r)-f_\mu(1))/(r-1)|^c}\cdot|r-1|^{1-c}\to\frac{|f'_{c\mu}(1)|}{|f'_\mu(1)|^c}\cdot 0=0\quad(r\uparrow 1)$$

だから，$w(1)=0$ と定めて $w\in C(0,1]$ となる。そこで $b\leqq r_1<r_2\leqq 1$ を任意にとると

$$w(r_2)-w(r_1)=\int_{r_1}^{r_2}w'(r)dr\leqq 0$$

だから，w は $[b,1]$ 上減少関数となる。よって $0=w(b)\geqq w(r)\geqq w(1)=0$ $(r\in[b,1])$ から $[b,1]$ 上 $w\equiv 0$，即ち $f_{c\mu}\equiv 0$ となり，これは矛盾である。ゆえに $f_{c\mu}>0$ であって，$c\mu$ も又非楕円型である。再び上の議論から $(0,1)$ 上殆ど到る所 $w'\leqq 0$ となり，w は $(0,1)$ 上減少関数である。 □

命題 5.1.　μ を非楕円型とすると $c\mu$ $(0<c<1)$ は双曲型である。

証明. 補題5.1により $(0,1)$ 上 $f_{c\mu}>0$ である。u_n を $[1/(n+2),1/2]$ における $c\mu$ 解で $(u_n(1/(n+2)),u_n(1/2))=(0,f_\mu(1/2)^c)$ となるものが作れる。$(f_\mu)^c$ は $c\mu$ 優解であるから，$(1/(n+2),1/2)$ で $0<u_n<(f_\mu)^c$ となることが比較定理によりわかる。これから $(1/(n+2),1/2)$ で $u_n<u_{n+1}<(f_\mu)^c$ となるので，ハルナック原理により $u=\lim_{n\to\infty}u_n$ は $(0,1/2)$ で $c\mu$ 解で $0<u<(f_\mu)^c$，$u(1/2)=f_\mu(1/2)^c$ となる。$u(1)\leqq 0$ ならば $(1/2,1)$ でも $u\leqq(f_\mu)^c$ となるから $(f_\mu)^c-u\geqq 0$ は $(0,1)$ の $c\mu$ 優解で，1/2 で 0 となるから，$(0,1)$ で $(f_\mu)^c-u\equiv 0$ となる。すると $(f_\mu)^c$ は $(0,1)$ で $c\mu$ 解となるが，元々 $(f_\mu)^c$ は $(0,1)$ で $\{c\mu+c(c-1)(f'_\mu/f_\mu)^2\lambda\}$ 解で $f'_\mu(1)=-1$ なので $c\mu\neq c\mu+c(c-1)(f'_\mu/f_\mu)^2\lambda$ であって矛盾である。ゆえに $u(1)>0$ となる。そこでどの $r\in(0,1)$ に対しても，任意の $R\in(0,r)$ について

$$f_{c\mu}(r)\int_R^r\frac{dt}{t^{d-1}f_{c\mu}(t)^2}=e_{c\mu,R}(r)\leqq u(1)^{-1}u(r)$$

なので $R\downarrow 0$ として $\int_0^r(1/t^{d-1}f_{c\mu}(t)^2)dt<\infty$ がわかる。 □

5.4. 定理5.2の証明. μ が楕円型なら結論は自明なので，μ を非楕円型とする。すると $c\mu$ は命題5.1により双曲型で，特に非楕円型だから $\dim(c\mu,\Omega)\geqq 1$ である。もし μ が放物型ならば命題3.3により $\alpha(\mu)=0$ なので定理4.1から $\dim(\mu,\Omega)=1$ となって，やはり $\dim(\mu,\Omega)\leqq\dim(c\mu,\Omega)$ が出る。ゆえに μ が双曲型と仮定してよい。補題5.1により $(0,1)$ 上 $f_{c\mu}/(f_\mu)^c$ は減少関数だから，$\log((f_\mu)^c/f_{c\mu})$ は $(0,1)$ 上増加関数である。従って $(0,1)$ 上殆ど到る所 $(\log((f_\mu)^c/f_{c\mu}))'\geqq 0$，即ち

$$c\frac{f'_\mu(r)}{f_\mu(r)}\geqq\frac{f'_{c\mu}(r)}{f_{c\mu}(r)}\quad(0<\mathrm{r}<1)\tag{5.5}$$

となる。$R\in(0,1)$ を任意に固定する。$(e_{\mu,R})^c$ も (5.4) から $c\mu$ 優解なことがわかる。$s\in(R,1]$ を任意にとるとき，比較定理から $r\in(R,s)$ に対して

$$\frac{e_{\mu,R}(r)^c}{e_{\mu,R}(s)^c} \geqq \frac{e_{c\mu,R}(r)}{e_{c\mu,R}(s)} \quad (0 < R \leqq r \leqq s \leqq 1)$$

となる。ここで $R \downarrow 0$ とすると

$$\frac{e_\mu(r)^c}{e_\mu(s)^c} \geqq \frac{e_{c\mu}(r)}{e_{c\mu}(s)} \quad (0 < r \leqq s \leqq 1)$$

となる。これは $(e_\mu)^c/e_{c\mu}$ が，従って $\log((e_\mu)^c/e_{c\mu})$ が，$(0,1)$ 上減少関数となることを意味する。ゆえに殆ど到る所 $(\log((e_\mu)^c/e_{c\mu}))' \leqq 0$ となり

$$c\frac{e'_\mu(r)}{e_\mu(r)} \geqq \frac{e'_{c\mu}(r)}{e_{c\mu}(r)} \quad (0 < r < 1) \tag{5.6}$$

が出る。これら (5.6) と (5.5) から

$$c\left(\frac{e'_\mu(r)}{e_\mu(r)} - \frac{f'_\mu(r)}{f_\mu(r)}\right) \leqq \frac{e'_{c\mu}(r)}{e_{c\mu}(r)} - \frac{f'_{c\mu}(r)}{f_{c\mu}(r)} \quad (0 < r < 1)$$

となる。従って (3.22) により

$$1/\beta(c\mu) = \int_0^r \frac{dr}{r^2\left(\frac{e'_{c\mu}(r)}{e_{c\mu}(r)} - \frac{f'_{c\mu}(r)}{f_{c\mu}(r)}\right)} \leqq \frac{1}{c}\int_0^r \frac{dr}{r^2\left(\frac{e'_\mu(r)}{e_\mu(r)} - \frac{f'_\mu(r)}{f_\mu(r)}\right)} = 1/c\beta(\mu)$$

となり，

$$c\beta(\mu) \leqq \beta(c\mu) \quad (0 < c \leqq 1)$$

となる。μ と $c\mu$ が双曲型だから $\dim(\mu,\Omega) \geqq 1$ で $\dim(c\mu,\Omega) \geqq 1$ である。もし $\dim(\mu,\Omega) = 1$ ならば $\dim(c\mu,\Omega) \geqq \dim(\mu,\Omega)$ となる。もし $\dim(\mu,\Omega) = \aleph$ ならば (3.13) と基本定理4.1により $\beta(\mu) > 0$ となり，上記不等式から $\beta(c\mu) > 0$ となり，再び (3.13) と基本定理4.1から $\dim(c\mu,\Omega) = \aleph$ となって，$\dim(c\mu,\Omega) \geqq \dim(\mu,\Omega)$ は等式で成立する。 □

6．正型性と強正型性

6.1. $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度 μ を考え，その半径成分も同じ μ でかいている：$d\mu(r\xi) = r^{d-1}d\mu(r)d\xi$。$\mu$ が次の条件を満足するとき，μ は Ω 上**正型**であるといい，記号 $\mu \gg 0$ で表す：

a) ある $n \in \mathbf{Z}^+$ が定まって，$r^{-n}f_\mu(r)$ が $(0,1)$ 上単調減少関数である。

ここで $\mathbf{Z}^+$ は非負整数の全体である。$r^{-n}f_\mu(r) \downarrow 0$ $(r \uparrow 1)$ であるから無論 $(0,1)$ 上 $f_\mu > 0$ であることがわかり，μ が正型なら元々 μ は非楕円型であることがわかる。$r^{-n}f_\mu(r)$ の対数微分をとることにより，条件 a)は次の条件と同等であることがわかる。

b) ある $n \in \mathbf{Z}^+$ が定まって，$(0,1)$ 上 f_μ の角点集合（加算集合）を除いて

$$\frac{f'_\mu(r)}{f_\mu(r)} \leqq \frac{n}{r}$$

が成立する。

条件 a) 又は b) において存在する n のうち最も小さいものを $k = k_\mu \in \mathbf{Z}^+$ とするとき，k を μ の**正型指数**と呼ぶと便利である。

事実 6.1. $\mu \leqq \nu$ で $\mu \gg 0$ ならば $\nu \gg 0$ であり，$k_\nu \leqq k_\mu$ である。

証明. μ は非楕円型であるから比較原理（3.1参照）によれば $f_\nu(r)/f_\mu(r)\downarrow 1$ $(r\uparrow 1)$ となることがわかる。f_ν/f_μ の対数微分をとることにより，(0,1) 上 $f_\nu'/f_\nu - f_\mu'/f_\mu \leqq 0$ となり（正確には f_μ, f_ν の角点集合を除いて，従って雑には殆ど到る所），

$$\frac{f_\nu'(r)}{f_\nu(r)} \leqq \frac{f_\mu'(r)}{f_\mu(r)} \leqq \frac{k_\mu}{r}$$

となる。これから $k_\nu \leqq k_\mu$ もわかる。□

事実 6.2. $0 \gg 0$，即ち零測度は正型であり，$k_0 = 0$ である。

証明. $f_0(r)$ は (3.1) で与えられるので，(0,1) 上減少関数である。従って $r^{-0}f_0(r)$ が減少なので $0 \gg 0$ であり，$k_0 = 0$ である。□

上の2つの事実6.1及び6.2を合わせると，$\mu \geqq 0$ ならば $\mu \gg 0$ となることがわかる。従って μ が正型であることは μ が正（非負，即ち $\mu = \mu^+$）であることの一般化と考えられる。一般の μ では駄目ながら $\mu \geqq 0$ なら成立すると言う性質が多いが，これらが $\mu \gg 0$ 迄は正しくなるかどうかに興味がある。$\mu \leqq 0$ でも $\mu \gg 0$ となることはあるが，その時は $\mu \gg 0$ が次のように特徴づけられる：

命題 6.1. $\mu \leqq 0$ のとき，μ についての次の3条件は互いに同値である：
(α) μ は Ω 上正型である，即ち $\mu \gg 0$；
(β) f_μ は (0,1) 上単調減少である；
(γ) μ は非楕円型である。

証明. (β)が成り立つと，μ は $k_\mu = 0$ を指数とする正型であるから(α)がでる。(α)があると $r^{-k_\mu}f_\mu(r)\downarrow 0$ $(r\uparrow 1)$ から (0,1) 上で $f_\mu > 0$ であり(γ)が従う。故に(γ)から(β)を導けば(α)，(β)，(γ)が互いに同値なことが結論できる。この証明のみ自明さが幾分低い。(γ)，即ち $f_\mu > 0$ を仮定するので $(r^{d-1}f_\mu')' = r^{d-1}f_\mu \mu \leqq 0$ がわかる。ゆえに (0,1) 上 f_μ は0優解である。$0 < a < b < 1$ である a, b を任意に与え，次いで $0 < t < a$ となる任意の t をとめる。(t, b) 上の0優解 f_μ と0解

$$\frac{f_0(t) - f_0}{f_0(t) - f_0(b)} f_\mu(b)$$

の t 及び b における値(境界値)を比較することにより，比較定理から前者の方が後者より大きいことがわかり，特に $a \in (t, b)$ で考えると

$$\frac{f_0(t) - f_0(a)}{f_0(t) - f_0(b)} f_\mu(b) \leqq f_\mu(a)$$

となる。$t\downarrow 0$ とすると $f_0(t)\uparrow\infty$ となるので上式で $t\downarrow 0$ とすることにより，$f_\mu(b) \leqq f_\mu(a)$ となる。$a, b \in (0,1)$ は任意だから，これは f_μ が (0,1) 上減少関数なこと，即ち(β)が出る。□

μ のジョルダン分解を $\mu = \mu^+ - \mu^-$ と記す，即ち μ の全変分測度を $|\mu|$ としるすとき $\mu^+ = (|\mu| + \mu)/2$（μ の正部分），$\mu^- = (|\mu| - \mu)/2$（μ の負部分，$\mu^- \geqq 0$），である。さて μ が**強正型**であるとは，Ω 上 $-\mu^- \gg 0$ であることとする。このことを記号 $\mu \ggg 0$ で示すことにする。$-\mu^- \leqq 0$ であるから，命題6.1によれば，μ が強正型であることを $f_{-\mu^-}$ が (0,1) 上単調減少であることで定義してもよいし，又 $-\mu^-$ が非楕円型，即ち (0,1) 上，$f_{-\mu^-} > 0$，であることで定義してもよい。$-\mu^- \leqq \mu$ であるから，事実6.1により $-\mu^- \gg 0$ から $\mu \gg 0$ が出る。即ち μ が Ω 上強正型ならば正型である。これは用語の適切であることを保証している。無論 $\mu \geqq 0$ ならば $-\mu^- = 0 \gg 0$ であるから，正測度は強正型であるので，μ が強正型であることは，μ が正であることの一般化になっている：

$$\{\mu : \mu \geqq 0\} \subset \{\mu : \mu \ggg 0\} \subset \{\mu : \mu \gg 0\}. \tag{6.1}$$

前にも述べた様に $\mu \geqq 0$ に対して成り立つことの知られた定理が，上の包含関係のどの族まで拡げられるかを考えたい。

6.2. ピカール次元の研究上大切な視点は，**単調性**（定理5.1参照）と**斉次性**（定理5.2)である。前者については回転不変の範囲では決着である。後者については，斉次不等式がいつ等式で成り立つか（いつでも成り立つ訳ではないことは知られている）の問題が回転不変の範囲でも残される。歴史的に言えば，$\mu \geqq 0$ に対しては斉次等式 $\dim(c\mu,\Omega)=\dim(\mu,\Omega)$ $(0<c\leqq 1)$ が成り立つことが（μ に正則性条件をつけて）知られていた。本論では μ が強正型ならば μ に対して斉次等式が成り立つことを示す。その為まず，次の，それ自身独立の興味がある，事実を導いて，その応用として，斉次等式を出す。

定理 6.1. **μ が強正型ならば，そのピカール次元は，μ の正部分 μ^+ により決定される：**

$$\dim(\mu,\Omega)=\dim(\mu^+,\Omega)。$$

この意味する所は次の如くである：$\dim(\mu,\Omega)$ は μ^+ と μ^- により決定されるが，μ^- の影響が少ないと $\dim(\mu,\Omega)$ は $\dim(\mu^+,\Omega)$ とあまり違わない筈である。この影響の少なさを強正型の言葉で表現している。上記定理の証明は4個の補題を準備した後6.4節で与える。

6.3. $(f_\mu(0),f_\mu'(0))=(0,-1)$ であるから，十分 $\varepsilon>0$ が小さいと，$(1-\varepsilon,1]$ において大体 $f_\mu(r)\fallingdotseq 1-r$ であるから，μ によらず $f_\mu'(r)/f_\mu(r)\sim -1/(1-r)$ と考えられ，従って $f_\mu'(r)/f_\mu(r)-f_\nu'(r)/f_\nu(r)\to 0$ $(r\uparrow 1)$ であろうと見当がつく。これを正確に示そう。

補題 6.1. $\displaystyle\lim_{r\uparrow 1}\left(\frac{f_\mu'(r)}{f_\mu(r)}-\frac{f_\nu'(r)}{f_\nu(r)}\right)=0.$

証明. $\eta>0$ を十分1に近くとると，$[\eta,1)$ で f_μ,f_ν 共に正となる。f_μ,f_ν の角点でない $c,r\in(\eta,1)$ を任意にとるとき，(2.9) によれば

$$r^{d-1}f_\mu(r)^2\left(\frac{f_\nu}{f_\mu}\right)'(r)=c^{d-1}f_\mu(c)^2\left(\frac{f_\nu}{f_\mu}\right)'(c)+\int_{I[c,r]}t^{d-1}f_\mu(t)^2\frac{f_\nu(r)}{f_\mu(r)}d(\nu-\mu)(t)$$

となる。そこで上式で $c\uparrow 1$ とすると

$$r^{d-1}f_\mu(r)^2\left(\frac{f_\nu}{f_\mu}\right)'(r)=-\int_{(r,1]}t^{d-1}f_\mu(t)^2\frac{f_\nu(r)}{f_\mu(r)}d(\nu-\mu)(t) \tag{6.2}$$

となる。さて

$$\frac{f_\mu'}{f_\mu}-\frac{f_\nu'}{f_\nu}=\frac{f_\mu'f_\nu-f_\mu f_\nu'}{f_\mu f_\nu}=\frac{f_\mu}{f_\nu}\cdot\frac{f_\mu'f_\nu-f_\mu f_\nu'}{f_\mu^2}=\frac{f_\mu}{f_\nu}\left(\frac{f_\nu}{f_\mu}\right)' \tag{6.3}$$

に注意する。$r\in(\eta,1)$ を十分1に近くとると，$f_\mu'(1)=-1$ だから，$f_\mu(1)=0$ により

$$-\frac{11}{10}=-1-\frac{1}{10}\leqq\frac{f_\mu(t)-f_\mu(1)}{t-1}\leqq -1+\frac{1}{10}=-\frac{9}{10}\quad(t\in(r,1)) \tag{6.4}$$

となる。ゆえに、とくに

$$f_\mu(t)^2\leqq\frac{11^2}{10^2}(t-1)^2\quad(t\in(r,1)) \tag{6.5}$$

となる。ν に対しても (6.4) と同様の式を導いて，これとの比を作ることにより

$$\frac{9}{11} \leqq \frac{f_\nu(t)}{f_\mu(t)} \leqq \frac{11}{9} \quad (t \in (r,1)) \tag{6.6}$$

となる。式（6.2）に評価（6.5）と（6.6）を適用して

$$r^{d-1} f_\mu(r)^2 \left| \left(\frac{f_\nu}{f_\mu}\right)'(r) \right| \leqq \int_{(r,1)} 1 \cdot \frac{11^2}{10^2}(t-1)^2 \cdot \frac{11}{9}\, d\,|\nu-\mu|(t) \leqq 4(r-1)^2\,|\nu-\mu|((r,1))$$

となる。従って

$$r^{d-1}\left(\frac{f_\mu(r)-f_\mu(1)}{r-1}\right)^2 \left| \left(\frac{f_\nu}{f_\mu}\right)'(r) \right| \leqq 4\,|\nu-\mu|((0,1))$$

となる。$r \uparrow 1$ とすると，$(r,1) \downarrow \emptyset$ により，$|\nu-\mu|((r,1)) \downarrow |\nu-\mu|(\emptyset)=0$ となり，又 $|(f_\mu(r)-f_\mu(1))/(r-1)|^2 \to (-1)^2=1$ であるから，上式により $\lim_{r\uparrow 1}(f_\nu/f_\mu)'(r)=0$ となる。これと（6.6）により，（6.3）から求める結論がでる。 □

補題 6.2. **μを強正型とすると，μにのみ依存する正の定数 $c(\mu)$ が定まって**

$$0 \leqq \frac{f'_\mu(r)}{f_\mu(r)} - \frac{f'_{\mu^+}(r)}{f_{\mu^+}(r)} \leqq \frac{c(\mu)}{r} \quad (0<r<1).$$

証明. 公式（2.10）により

$$\begin{aligned} &\left(r^{d-1}\left(\frac{f_{\mu^+} f_{-\mu^-}}{f_\mu}\right)'\right)' \\ &= r^{d-1}\frac{f_{\mu^+} f_{-\mu^-}}{f_\mu}\left\{(\mu^+-\mu^--\mu)+2\left(\frac{f'_\mu}{f_\mu}+\frac{f'_{\mu^+}}{f_{\mu^+}}\right)\left(\frac{f'_\mu}{f_\mu}-\frac{f'_{-\mu^-}}{f_{-\mu^-}}\right)\lambda\right\} \end{aligned} \tag{6.7}$$

が成り立つ。$\mu^+ \geqq \mu$ でμが非楕円型だから比較原理により f_{μ^+}/f_μ は $(0,1)$ 上減少関数となり，又$\mu \geqq -\mu^-$ だから同様に考えて，$f_\mu/f_{-\mu^-}$ は $(0,1)$ 上の減少関数となる。ゆえに，対数微分をとることにより，$(0,1)$ 上

$$\frac{f'_\mu}{f_\mu}-\frac{f'_{\mu^+}}{f_{\mu^+}} \geqq 0,\ \frac{f'_\mu}{f_\mu}-\frac{f'_{-\mu^-}}{f_{-\mu^-}} \leqq 0$$

となる。これらと $\mu^+-\mu^--\mu=0$ により，（6.7）から，超関数としての不等式

$$\left(r^{d-1}\left(\frac{f_{\mu^+} f_{-\mu^-}}{f_\mu}\right)'\right)' \leqq 0$$

が出るから，$f_{\mu^+} f_{-\mu^-}/f_\mu$ は 0 優解で，$r=1$ では境界値 0 をもつことがわかる。従って任意の $a \in (0,1)$ をとり，0 解 f_0 をとり，境界値の比較から，比較定理により

$$\left(\frac{f_{\mu^+}(r)\, f_{-\mu^-}(r)}{f_\mu(r)}\right)\Big/\left(\frac{f_{\mu^+}(a)\, f_{-\mu^-}(a)}{f_\mu(a)}\right) \geqq \frac{f_0(r)}{f_0(a)} \quad (0<a \leqq r \leqq 1)$$

となる。これから

$$\frac{f_{\mu^+}(r)\, f_{-\mu^-}(r)}{f_\mu(r) f_0(r)} \geqq \frac{f_{\mu^+}(a)\, f_{-\mu^-}(a)}{f_\mu(a) f_0(a)} \quad (0<a \leqq r \leqq 1)$$

となる。これは $f_{\mu^+} f_{-\mu^-}/f_\mu f_0$ が $(0,1)$ 上増加関数であることを示す。対数微分をとると $(0,1)$ 上

$$\frac{f'_{\mu^+}}{f_{\mu^+}}+\frac{f'_{\mu^-}}{f_{\mu^-}}-\frac{f'_\mu}{f_\mu}-\frac{f'_0}{f_0} \geqq 0$$

となることがわかる。ここでμの強正型性を使えば，(0,1) 上 $f'_{-\mu^-}\leqq 0$ であるから上記不等式より，(0,1) 上

(6.8)
$$\frac{f'_\mu}{f_\mu}-\frac{f'_{\mu^+}}{f_{\mu^+}}\leqq -\frac{f'_0}{f_0}$$

となる，ここで (0,1) 上

$$-\frac{f'_0(r)}{f_0(r)}=\begin{cases}\dfrac{1}{r\log(1/r)} & (d=2),\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}-2}{r(1-r^{d-2})} & (d\geqq 3),\end{cases}$$

であるから，これと (6.8) 及び補題6.1により，補題6.2の不等式を成立させる様な定数 $c(\mu)$ の存在がわかる。□

6.4. μを非楕円型とするとき f_μ と $f_{\mu n}$ $(n=1,2,\cdots)$ については，比較原理により，$f_{\mu n}/f_\mu$ が (0,1) 上の減少関数なので常に $f'_\mu/f_\mu - f'_{\mu n}/f_{\mu n}\geqq 0$ である。これを上から評価したい。μが正型なら（従って勿論強正型ならなおのこと）これが上から $1/r$ の何倍かでおさえられる：

補題 6.3. **μが指数 $k=k_\mu$ の正型であるとすると，任意の自然数 $n\geqq(d-2)+4k/3$ に対して，次の不等式が成り立つ：**

$$0\leqq\frac{f'_\mu(r)}{f_\mu(r)}-\frac{f'_{\mu n}(r)}{f_{\mu n}(r)}\leqq\frac{2n}{r}\quad(0<r<1)$$

証明. 公式 (2.10) を $v\equiv 1$ で使って，更に (0,1) 上 $f'_\mu/f_\mu\leqq k/r$ に注意して計算すると，r^{2n} が $2n(2n+d-2)r^{-2}\lambda$ 解であることにより，

$$\begin{aligned}\left(r^{d-1}\left(\frac{f_\mu}{r^{2n}}\right)'\right)' &= r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2n}}\left\{\left(\mu-\frac{2n(2n+d-2)}{r^2}\lambda\right)+2\left(\frac{(r^{2n})'}{r^{2n}}-\frac{f'_\mu}{f_\mu}\right)\frac{(r^{2n})'}{r^{2n}}\lambda\right\}\\ &= r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2n}}\left\{\left(\mu-\frac{2n(2n+d-2)}{r^2}\lambda\right)+\left(\frac{8n^2}{r^2}-\frac{4n}{r}\cdot\frac{f'_\mu}{f_\mu}\right)\lambda\right\}\\ &\geqq r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2n}}\left\{\left(\mu-\frac{2n(2n+d-2)}{r^2}\lambda\right)+\left(\frac{8n^2}{r^2}-\frac{4n}{r}\cdot\frac{k}{r}\right)\lambda\right\}\\ &\geqq r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2n}}\left\{\mu-\frac{8n^2-2n(2n+d-2)-4kn}{r^2}\lambda\right\}\\ &\geqq r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2n}}\left(\mu-\frac{n(n+d-2)}{r^2}\lambda\right)=r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2n}}\mu_n\end{aligned}$$

となる。ここで $n\geqq(d-2)+4k/3$ を使った。これは f_μ/r^{2n} が μ_n 劣解であることを示す。任意の $a\in(0,1)$ に対して，$(a,1)$ 上境界値の同じ μ_n 解と比較して，比較定理を使うと

$$\left(\frac{f_\mu(r)}{r^{2n}}\right)\Big/\left(\frac{f_\mu(r)}{a^{2n}}\right)\leqq\frac{f_{\mu n}(r)}{f_{\mu n}(a)}\quad(a\leqq r\leqq 1)$$

となる。これをかきかえて

$$\frac{f_\mu(r)}{r^{2n}f_{\mu n}(r)}\leqq\frac{f_\mu(a)}{a^{2n}f_{\mu n}(a)}\quad(0<a\leqq r\leqq 1)$$

となり，これは $f_\mu/r^{2n}f_{\mu n}$ が (0,1) 上減少関数となることを意味するので，対数微分をとれば補題6.3が出る。 □

6.5. 本節で，今一つ補題を準備した後で，定理 6.1 を証明する。再びμの強正型性が必要である。

補題 6.4.　μを強正型とすると，$n>\max\{d-2,(-(d-2)+4c(\mu))/3\}$（$c(\mu)$ は補題6.2 の定数）を満足する任意の自然数 n に対して，次の不等式が成立する：

$$\frac{f_{\mu n}(r)}{f_{\mu}(r)}\leqq\frac{f_{(\mu^+)_{2n}}(r)}{f_{\mu^+}(r)}\quad(0<r<1).$$

証明.　μ は強正型ゆえ，μ は指数 $k=0$ の正型であり，勿論非楕円型であることをまず想起する。再び公式（2.10）を使うと

$$\left(r^{d-1}\left(\frac{f_{\mu n}f_{\mu^+}}{f_{\mu}}\right)'\right)'=r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu^+}}{f_{\mu}}\left\{(\mu_n+\mu^+-\mu)+2\left(\frac{f'_{\mu}}{f_{\mu}}-\frac{f'_{\mu n}}{f_{\mu n}}\right)\left(\frac{f'_{\mu}}{f_{\mu}}-\frac{f'_{\mu^+}}{f_{\mu^+}}\right)\lambda\right\}$$

が成り立つ。$\mu_n+\mu^+-\mu=\mu^++n(n+d-2)r^{-2}\lambda$ に注意し，又補題6.3と6.2を使えば，上式の右辺は

$$r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu^+}}{f_{\mu}}\left(\mu^++\frac{n(n+d-2)}{r^2}\lambda+\frac{4nc(\mu)}{r^2}\lambda\right)$$

でおさえられる。これは，$3n>-(d-2)+4c(\mu)$ であるから，

$$r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu^+}}{f_{\mu}}\left(\mu^++\frac{2n(2n+d-2)}{r^2}\lambda\right)=r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu^+}}{f_{\mu}}(\mu^+)_{2n}$$

より小さい。以上により（0,1）上の超関数不等式

$$\left(r^{d-1}\left(\frac{f_{\mu n}f_{\mu^+}}{f_{\mu}}\right)'\right)'\leqq r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu^+}}{f_{\mu}}(\mu^+)_{2n}$$

が導かれる。よって $f_{\mu n}f_{\mu^+}/f_{\mu}$ は（0,1）上（μ^+）$_{2n}$ 優解である。$a\in(0,1)$ を任意にとり，$(a,1)$ 上境界値の等しい $(\mu^+)_{2n}$ 解と比較して，$r\in(a,1)$ ならば

$$\left(\frac{f_{\mu n}(r)f_{\mu^+}(r)}{f_{\mu}(r)}\right)\Big/\left(\frac{f_{\mu n}(a)f_{\mu^+}(a)}{f_{\mu}(a)}\right)\geqq\frac{f_{(\mu^+)_{2n}}(r)}{f_{(\mu^+)_{2n}}(a)}$$

となる。これはかきかえれば

$$\frac{f_{\mu n}(r)f_{\mu^+}(r)}{f_{\mu}(r)f_{(\mu^+)_{2n}}(r)}\geqq\frac{f_{\mu n}(a)f_{\mu^+}(a)}{f_{\mu}(a)f_{(\mu^+)_{2n}}(a)}\quad(0<a\leqq r\leqq 1)$$

となるから，$f_{\mu n}(r)f_{\mu^+}(r)/f_{\mu}(r)f_{(\mu^+)_{2n}}(r)$ は（0,1）上増加関数で，$(r\uparrow 1)$ のとき 1 に近づくから，補題6.4が出る。

□

定理 6.1 の証明.　$\mu\leqq\mu^+$ であるから，単調性定理5.1によると，一般に

$$\dim(\mu,\Omega)\leqq\dim(\mu^+,\Omega)$$

である。基本定理4.1によれば，$\dim(\mu,\Omega)$ は 0, 1, $\aleph$（連続体濃度）のいずれかであるが，μ は強正型（従って正型）ゆえ，とくに非楕円型だから $\dim(\mu,\Omega)\neq 0$ である。もし $\dim(\mu,\Omega)=\aleph$ とすると，上記不等式から $\dim(\mu^+,\Omega)=\aleph$ であって求める等式が出る。従って残る所として，$\dim(\mu,\Omega)=1$ であるとき，$\dim(\mu^+,\Omega)=1$ を導けばよい。基本定理4.1から $\dim(\mu,\Omega)=1$ は $1/\alpha(\mu)=\lim_{r\downarrow 0}f_{\mu 1}(r)/f_{\mu}(r)=\infty$ を意味する。補題6.4の条件を満たす自然数 n をとる。(3.12) から

$$\infty=1/\alpha(\mu)\leqq 1/\alpha_n(\mu)=\lim_{r\downarrow 0}\frac{f_{\mu n}(r)}{f_{\mu}(r)}$$

となる。補題6.4により

$$\infty = \lim_{r \downarrow 0} \frac{f_{\mu n}(r)}{f_\mu(r)} \leqq \lim_{r \downarrow 0} \frac{f_{(\mu^+)_{2n}}(r)}{f_{\mu^+}(r)}$$

となる。再び（3.12）により $\alpha(\mu^+)^{k(2n)} \leqq \alpha_{2n}(\mu^+) = 0$ だから $\alpha(\mu^+) = 0$ となり，再び基本定理 4.1 により $\dim(\mu^+, \Omega) = 1$ となる。 □

6.6. 定理 6.1 の第一の応用として，$\mu \geqq 0$ に対して知られていた次の結果を $\mu \ggg 0$ の場合に拡張する。

定理 6.2（斉次等式）. μが強正型ならば，次の等式が成立する：

$$\mathbf{dim}(c\mu, \Omega) = \mathbf{dim}(\mu, \Omega) \quad (0 < c \leqq 1).$$

証明. 最初に特別の場合，即ち $\mu \geqq 0$ ならば上記等式が成立することを示そう。とにかく斉次不等式 5.2 によれば $\dim(\mu, \Omega) \leqq \dim(c\mu, \Omega)$ である。とくに $\mu \geqq 0$ であると $0 < c \leqq 1$ により $c\mu \leqq \mu$ となる。単調性定理 5.1 により $\dim(c\mu, \Omega) \leqq \dim(\mu, \Omega)$ となる。上記の不等式と合わせて等式の成立がわかる。

μ が一般の強正型の場合，このことが $-\mu^-$ が非楕円型であることとして特徴づけられることを使う。$0 < c \leqq 1$ だから，$-\mu^- \leqq 0$ により，$-\mu^- \leqq c(-\mu^-) = -(c\mu)^-$ により，$-(c\mu)^-$ も又非楕円型となり，$c\mu$ も又強正型となる。上段の結果と定理 6.1 を使って

$$\dim(c\mu, \Omega) = \dim((c\mu)^+, \Omega) = \dim(c\mu^+, \Omega) = \dim(\mu^+, \Omega) = \dim(\mu, \Omega)$$

となって。定理が示された。 □

6.7. $\mu \geqq 0$ の場合任意の $c > 0$ に対して $\dim(\mu + (c/r^2)\lambda, \Omega) = \dim(\mu, \Omega)$ となることが知られているが，これを正しいものとして仮定すれば，定理 6.1 の第 2 の応用として，これを $\mu \ggg 0$ の場合に直ちに拡張できることが次の如くに示される：

$$\mu \leqq \mu + \frac{c}{r^2}\lambda \leqq \mu^+ + \frac{c}{r^2}\lambda$$

に単調性定理 5.1 を使い更に $\dim(\mu^+ + (c/r^2)\lambda, \Omega) = \dim(\mu^+, \Omega)$ と定理 6.1 によれば

$$\dim(\mu, \Omega) \leqq \dim\left(\mu + \frac{c}{r^2}\lambda, \Omega\right) \leqq \dim\left(\mu^+ + \frac{c}{r^2}\lambda, \Omega\right) = \dim(\mu^+, \Omega) = \dim(\mu, \Omega)$$

となって $\dim(\mu + (c/r^2)\lambda, \Omega\} = \dim(\mu, \Omega)$ が出る。

しかし実は，もっと良い条件 $\mu \gg 0$ のもとで同じ結論が，しかも $\mu \geqq 0$ に対する結果を使わず自己完結的に証明できることを以下に示す：

定理 6.3. μを正型とすると任意の正数 c に対して次の等式が成立する：

$$\mathbf{dim}\left(\mu + \frac{c}{r^2}\lambda, \Omega\right) = \mathbf{dim}(\mu, \Omega).$$

証明. μ を指数 $k = k_\mu$ の正型とすると，(0,1) 上 $f'_\mu / f_\mu \leqq k/r$ である。そこで $n \geqq k+1$ となるどんな自然数 n に対しても (0,1) 上 $f'_\mu / f_\mu \leqq n/r$ となる。r^{2dn} は $2dn(2dn + d - 2)r^{-2}\lambda$ 解であることに注意して，公式（2.10）を $v \equiv 1$ で使うと

$$\left(r^{d-1}\left(\frac{f_\mu}{r^{2dn}}\right)'\right)'=r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2dn}}\left\{\left(\mu-\frac{2dn\,(2dn+d-2)}{r^2}\lambda\right)+2\left(\frac{(r^{2dn})'}{r^{2dn}}-\frac{f'_\mu}{f_\mu}\right)\frac{(r^{2dn})'}{r^{2dn}}\lambda\right\}$$
$$=r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2dn}}\left\{\left(\mu-\frac{2dn\,(2dn+d-2)}{r^2}\lambda\right)+2\left(\frac{2dn}{r}-\frac{f'_\mu}{f_\mu}\right)\frac{2dn}{r}\lambda\right\}$$
$$\geqq r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2dn}}\left\{\left(\mu-\frac{2dn\,(2dn+d-2)}{r^2}\lambda\right)+2\left(\frac{2dn}{r}-\frac{n}{r}\right)\frac{2dn}{r}\lambda\right\}$$
$$=r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2dn}}\left\{\mu-\frac{2dn\,(2dn+d-2)}{r^2}\lambda+\frac{4d\,(2d-1)n^2}{r^2}\lambda\right\}$$
$$=r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2dn}}\left\{\mu+\frac{2dn\,((2d-2)\,n-d+2)}{r^2}\lambda\right\}$$
$$\geqq r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2dn}}\left\{\mu+\frac{n\,(n+d-2)}{r^2}\lambda\right\}=r^{d-1}\frac{f_\mu}{r^{2dn}}\mu_n,$$

即ち，f_μ/r^{2dn} は (0,1) 上 μ_n 劣解である。$a\in(0,1)$ を任意にとり，$(a,1)$ 上境界値を比較して

$$\left(\frac{f_\mu(r)}{r^{2dn}}\right)\Big/\left(\frac{f_\mu(a)}{a^{2dn}}\right)\leqq\frac{f_{\mu n}(r)}{f_{\mu n}(a)}\quad(a\leqq r\leqq 1)$$

となる。これをかきかえて

$$\frac{f_\mu(r)}{r^{2dn}f_{\mu n}(r)}\leqq\frac{f_\mu(a)}{a^{2dn}f_{\mu n}(a)}\quad(0<a\leqq r\leqq 1)$$

となる。これは $f_\mu/r^{2dn}f_{\mu n}$ が (0,1) 上減少関数となることを意味し，対数微分をとって

(6.9)
$$0\leqq\frac{f'_\mu(r)}{f_\mu(r)}-\frac{f'_{\mu n}(r)}{f_{\mu n}(r)}\leqq\frac{2dn}{r}\quad(0<r<1)$$

がわかる。但し第一の不等式は $\mu_n\geqq\mu$ より比較原理により $f_{\mu n}(r)/f_\mu(r)\downarrow 1\ (r\uparrow 1)$ となることから従う。

次に $n\geqq k+1$ となるどんな自然数 n をとっても等式

(6.10)
$$\dim(\mu,\Omega)=\dim(\mu_n,\Omega)$$

が成り立つことを示す。$\mu\leqq\mu_n$ より $\dim(\mu,\Omega)\leqq\dim(\mu_n,\Omega)$ が単調性定理 5.1 により成り立つ。基本定理 4.1 及び $\dim(\mu,\Omega)\geqq 1$ により，$\dim(\mu,\Omega)=1$ のとき $\dim(\mu_n,\Omega)=1$ を示せば (6.10) が成り立つことになる。再度公式 (2.10) を使って

$$\left(r^{d-1}\left(\frac{f_{\mu n}f_{\mu n}}{f_\mu}\right)'\right)'=r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu n}}{f_\mu}\left\{(\mu_n+\mu_n-\mu)+2\left(\frac{f'_\mu}{f_\mu}-\frac{f'_{\mu n}}{f_{\mu n}}\right)\left(\frac{f'_\mu}{f_\mu}-\frac{f'_{\mu n}}{f_{\mu n}}\right)\lambda\right\}$$

となる。ここで $\mu_n+\mu_n-\mu=\mu_n+n\,(n+d-2)r^{-2}\lambda$ となることと，(6.9) により，上記右辺は

$$r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu n}}{f_\mu}\left\{\left(\mu_n+\frac{n\,(n+d-2)}{r^2}\lambda\right)+\frac{8d^2n^2}{r^2}\lambda\right\}$$
$$=r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu n}}{f_\mu}\left(\mu_n+\frac{n\,(n+d-2)+8d^2n^2}{r^2}\lambda\right)$$

でおさえられる。$n\,(n+d-2)+8d^2n^2\leqq m\,(m+d-2)$ となるように十分大きな自然数 m を固定すると，上記の測度は

$$r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu n}}{f_\mu}\left(\mu_n+\frac{m\,(m+d-2)}{r^2}\lambda\right)=r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu n}}{f_\mu}(\mu_n)_m$$

以下である。以上まとめて (0,1) 上

$$\left(r^{d-1}\left(\frac{f_{\mu n}f_{\mu n}}{f_\mu}\right)'\right)'=r^{d-1}\frac{f_{\mu n}f_{\mu n}}{f_\mu}(\mu_n)_m$$

となり $f_{\mu n}f_{\mu n}/f_\mu$ は $(\mu_n)_m$ 優解となる。任意に $a\in(0,1)$ を固定し，$(a,1)$ で境界値を比較して，比較定理により，$(a,1)$ 上

$$\left(\frac{f_{\mu n}(r)f_{\mu n}(r)}{f_\mu(r)}\right)\Big/\left(\frac{f_{\mu n}(a)f_{\mu n}(a)}{f_\mu(a)}\right)\geqq\frac{f_{(\mu n)m}(r)}{f_{(\mu n)m}(a)}\quad(a\leqq r\leqq 1)$$

となる。これをかきかえて

$$\frac{f_{\mu n}(r)f_{\mu n}(r)}{f_\mu(r)f_{(\mu n)m}(r)}\geqq\frac{f_{\mu n}(a)f_{\mu n}(a)}{f_\mu(a)f_{(\mu n)m}(a)}\quad(0< a\leqq r\leqq 1)$$

となる。これは $f_{\mu n}f_{\mu n}/f_\mu f_{(\mu n)m}$ が増加関数で，$r\uparrow 1$ と共に 1 に近づくことが陪単位の 1 での初期値を調べてわかるから，結局 (0,1) 上 $f_{\mu n}f_{\mu n}/f_\mu f_{(\mu n)m}\leqq 1$ となり

$$\frac{f_{\mu n}(r)}{f_\mu(r)}\leqq\frac{f_{(\mu n)m}(r)}{f_{\mu n}(r)}\quad(0<\mathrm{r}<1)$$

となることがわかる。$r\downarrow 0$ とすることにより，(3.6) により $1/\alpha_n(\mu)\leqq 1/\alpha_m(\mu_n)$ 又は $\alpha_n(\mu)\geqq\alpha_m(\mu_n)$ となる。さて $\dim(\mu,\Omega)=1$ としたから，基本定理 4.1 により $\alpha(\mu)=0$ となり (3.12) から $\alpha_n(\mu)=0$ となる。よって $\alpha_m(\mu_n)=0$ だから再び (3.12) より $\alpha(\mu_n)=0$ となり，もう一度基本定理により $\dim(\mu_n,\Omega)=1$ が出る。これで等式 (6.10) が保証された。

最後に任意の正数 c を与えるとき，自然数 n を $n\geqq k+1$ および $n(n+d-2)\geqq c$ となる様に十分大きくとって固定する。もちろん

$$\mu\leqq\mu+\frac{c}{r^2}\lambda\leqq\mu+\frac{n(n+d-2)}{r^2}\lambda=\mu_n$$

となる。単調性定理 5.1 と (6.10) を使えば

$$\dim(\mu,\Omega)\leqq\dim\left(\mu+\frac{c}{r^2}\lambda,\Omega\right)\leqq\dim(\mu_n,\Omega)=\dim(\mu,\Omega)$$

となって定理 6.3 の等式が結論できる。 □

7. 付録：単位上半球の中心上のマルチン核

7.1. μ を $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上回転不変ラドン測度で Ω 上双曲型とする。そのとき $\mu\leqq\nu$ とすると $f_\mu\leqq f_\nu$ であるから，各 $r\in(0,1)$ に対して

$$\int_a^r\frac{dt}{t^{d-1}f_\nu(t)^2}\leqq\int_a^r\frac{dt}{t^{d-1}f_\mu(t)^2}<\infty$$

となり，ν もまた双曲型となる。任意の区間 $(a,b)\subset(0,1)$ で u が正の μ 解ならば，$(r^{d-1}u')'=r^{d-1}u\mu\leqq r^{d-1}u\nu$ だから，u は (a,b) 上 ν 優解となる。$0<R\leqq r\leqq a\leqq 1$ として，(R,a) 上で境界値を較べて比較定理を使うと

$$e_{\mu,R}(r)/e_{\mu,R}(a)\geqq e_{\nu,R}(r)/e_{\nu,R}(a)\quad(R\leqq r\leqq a)$$

であり，$R\downarrow 0$ として

$$e_\mu(r)/e_\nu(r) \geqq e_\mu(a)/e_\nu(a) \quad (0 < r \leqq a \leqq 1)$$

となる。これは e_μ/e_ν が $(0,1)$ で減少関数で，$e_\mu(r)/e_\nu(r) \downarrow e_\mu(1)/e_\nu(1) = 1$ $(r \uparrow 1)$ なので，特に $(0,1)$ 上 $e_\mu \geqq e_\nu$ である。故に常に

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{e_\nu(r)}{e_\mu(r)} \in [0,1] \quad (\mu \neq \nu \text{ なら } [0,1))$$

が存在する。[12, 命題4.3]によると

$$\alpha_n(\mu) = \lim_{r\downarrow 0} \frac{e_{\mu n}(r)}{e_\mu(r)} \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{7.1}$$

となることがわかる。この他に数列

$$\hat{\alpha}_n(\mu) = \lim_{r\downarrow 0} \frac{e_{\mu n}(r)}{e_{\mu_1}(r)} \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{7.2}$$

も考える。だから

$$1 = \hat{\alpha}_1(\mu) > \hat{\alpha}_2(\mu) \geqq \cdots \geqq \hat{\alpha}_n(\mu) \geqq \hat{\alpha}_{n+1}(\mu) \geqq \cdots \geqq 0 \tag{7.3}$$

である。すると次のことが言える：

補題 7.1. $\alpha(\mu_1) = 0$ であると $\hat{\alpha}_n(\mu) = 0$ $(n = 2,3,\cdots)$ であり，$\alpha(\mu_1) > 0$ であると $\hat{\alpha}_n(\mu) > 0$ $(n = 2,3,\cdots)$ となる。

証明. (3.12) によると $\alpha(\mu_1) = 0$ と任意の n に対して $\alpha_n(\mu_1) = 0$ とは同等である。$\mu_n < (\mu_1)_n < \mu_{n+1}$ により

$$\frac{e_{\mu n}(r)}{e_{\mu_1}(r)} \geqq \frac{e_{(\mu_1)n}(r)}{e_{\mu_1}(r)} \geqq \frac{e_{\mu n+1}(r)}{e_{\mu_1}(r)}$$

であるから $\hat{\alpha}_n(\mu) \geqq \alpha_n(\mu_1) \geqq \hat{\alpha}_{n+1}(\mu)$ $(n = 1,2,\cdots)$ となる。これから求める結論がでる。 □

次に μ_1 を双曲型とする。混合不等式（[12, 補題4.2]）（の証明）と [12, 5.6] の論法を使って，$r \in (0,1)$ に対して定数 $p = p(R)$ と自然数 $q = q(R)$ が定まって，すべての $0 < r \leqq R < s \leqq 1$ に対して

$$e_{\mu n}(r) f_{\mu n}(r) \leqq p e_{\mu_1}(r) \left(\frac{R}{s}\right)^n \quad (n \geqq q) \tag{7.4}$$

となることがわかる。この評価式は以下で重要な役割を演ずる。

7.2. $\Gamma = S^{d-1}$ 上の n 位球面調和関数全体の線形空間を $L_2(\Gamma, d\sigma)$ の部分空間と考えたときの正規直交基底を $\{S_{nj} : j = 1,\cdots,N(n)\}$ とすると $\{S_{nj} : j = 1,\cdots,N(n);\ n = 0,1,2,\cdots\}$ は $L_2(\Gamma, d\sigma)$ の完全正規直交系である。ここで $N(n) = (2n + d - 2)\Gamma(n + d - 2)/\Gamma(n + 1)\Gamma(d - 1)$ $(n \geqq 1)$，$N(0) = 1$ であって

$$N(n) \leqq 2^{d-1} n^{d-2} \quad (n = 1,2,\cdots;\ N(0) = 1) \tag{7.5}$$

となる。$\{S_{nj}\}$ をどの様に選んでも，加法定理

$$\sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi)S_{nj}(\eta)=\frac{N(n)}{\sigma_d}P_n(\xi\cdot\eta) \quad (n=0,1,\cdots) \tag{7.6}$$

が成り立つ，ここで $P_n(t)$ は d 次元 n 位ルジャンドル多項式であって，例えば次のロドリーグの公式で与えられる：

$$P_n(t)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{d-1}{2}\right)}(1-t^2)^{\frac{3-d}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(1-t^2)^{n+\frac{3-d}{2}} \quad (n=0,1,\cdots). \tag{7.7}$$

あるいは又､次のラプラスの等式でも与えられる：

$$P_n(t)=\frac{\sigma_{d-2}}{\sigma_{d-1}}\int_{-1}^{1}\left(t+i\sqrt{1-t^2}\cdot s\right)^n(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}}ds \quad (n=0,1,\cdots). \tag{7.8}$$

更に次の母関数表示からも決定できる：

$$\sum_{n=0}^{N(n)} N(n)P_n(t)x^n=\frac{1-x^2}{(1+x^2-2xt)^{d/2}} \quad (0\leqq x<1,\ |t|\leqq 1). \tag{7.9}$$

これらについては［6］を参照する。すると次の重要な評価式がえられる：

補題 7.2. $\boldsymbol{P_n(t)}$ **については次の評価式が成立する：** $\boldsymbol{|t|\leqq 1}$ **のとき**

$$|\boldsymbol{P_n(t)}|\leqq \boldsymbol{1} \quad (\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0,1,\cdots}), \tag{7.10}$$

$$|\boldsymbol{P_n'(t)}|\leqq \boldsymbol{C_0^n} \quad (\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0,1,\cdots};\ \boldsymbol{C_0}=\max(\boldsymbol{4,d})). \tag{7.11}$$

証明. 最初の（7.10）については，例えば［6］を参照する。(7.11）について考える。(7.7）によれば $P_0(t)=1$，$P_0(t)=t$ だから，(7.11）は $n=0,1$ に対しては明らかに成立する。そこで（7.11）の n が，$n-2$，$n-1$ のときに成立するとして，n の時（7.11）を示せばよい。ラプラスの等式（7.8）の両辺を t で微分すると

$$P_n'(t)=\frac{\sigma_{d-2}}{\sigma_{d-1}}\int_{-1}^{1}n\left(t+i\sqrt{1-t^2}\cdot s\right)^{n-1}\left(1-i\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}s\right)(1-s^2)^{\frac{d-4}{2}}ds$$

となり，任意の $t_0\in(0,t)$ に対して $|t|\leqq t_0$ においては，$P_n'(t)/n$ は n に関して一様有界となる。ゆえに（7.9）の両辺を t で微分するとき，左辺では項別に微分できて

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}N(n)P_n'(t)x^n&=\left(-\frac{d}{2}\right)\frac{1-x^2}{(1+x^2-2xt)^{d/2}}\cdot\frac{-2x}{1+x^2-2xt}\\&=d\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}N(n)P_n(t)x^n\right)\frac{x}{1+x^2-2xt}\end{aligned}$$

となる。これから

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\{N(n)P_n'(t)+N(n-2)P_{n-2}'(t)-2tN(n-1)P_{n-1}'(t)\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}dN(n-1)P_{n-1}(t)x^n,$$

ただし，$P_{-2}'=P_{-1}'=0$ と解する。$n\geqq 2$ として x^n の係数を比較すると

$$N(n)P_n'(t)+N(n-2)P_{n-2}'(t)-2tN(n-1)P_{n-1}'(t)=d\cdot N(n-1)P_{n-1}(t)$$

がえられる。これより，$|t|\leqq 1$ において（7.10）および帰納法の仮定を使うと

$$|P_n'(t)| \leqq d\,|P_{n-1}(t)| + 2\,|P_{n-1}'(t)| + |P_{n-2}'(t)|$$

$$\leqq d + 2C_0^{n-1} + C_0^{n-2} \leqq C_0^{n-1} + 2\,C_0^{n-1} + C_0^{n-1} = 4\,C_0^{n-1} \leqq C_0^n. \qquad \square$$

7.3.　μ が Ω 上双曲型であることは，次の様な Ω 上の **μ グリーン関数**の存在することと同値である（[12，主要定理] 参照）：

$$G_\mu(s\eta, r\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(e_{\mu n}(r) f_{\mu n}(s) \sum_{j=0}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta)\Bigr) \quad (0 < r < s \leqq 1),$$

ここで右辺の級数は $(\xi, \eta) \in \Gamma \times \Gamma$ の関数として絶対かつ一様収束する。

$\Omega = B^d \setminus \{0\}$ に対して $\Omega^+ = \{x = (x_1, \cdots, x_{d-1}, x_d) \in \Omega : x_d > 0\}$ とする。つまり Ω^+ は単位上半球（境界面を含まぬ）である。$\Gamma^+ = \{\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_{d-1}, \xi_d) \in \Gamma : \xi_d \geqq 0\}$ とおくと，これは単位上半球面（縁を含む）である。$x = (x_1, \cdots, x_{d-1}, x_d) \in \mathbf{R}^d$ に対して $\hat{x} = (x_1, \cdots, x_{d-1}, -x_d)$ は平面 $\{x_d = 0\}$ に関する対称点である。Ω 上の μ グリーン関数 G_μ を使うと，Ω^+ の μ グリーン関数 $\hat{G}_\mu$ は次の様に与えられる：$r\xi, s\eta \in \Omega^+$ として

$$\hat{G}_\mu(s\eta, r\xi) = G_\mu(s\eta, r\xi) - G_\mu(s\eta, r\hat{\xi})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(e_{\mu n}(r) f_{\mu n}(s) \sum_{j=1}^{N(n)} \bigl(S_{nj}(\xi) - S_{nj}(\hat{\xi})\bigr) S_{nj}(\eta)\Bigr) \quad (0 < r < s \leqq 1).$$

しかし μ が双曲型でなくても，$\hat{G}_\mu$ が存在することはある。詳細は別の機会にゆずるが，とにかく［12，命題 4.2 及び 5 節］の論法によれば，μ_1 が双曲型であることは Ω^+ の **μ グリーン関数**が存在することと同値であって，$\hat{G}_\mu$ は次の表示をもつ（又［5］参照）：

$$\hat{G}_\mu(s\eta, r\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(e_{\mu n}(r) f_{\mu n}(s) \sum_{j=1}^{N(n)} \bigl(S_{nj}(\xi) - S_{nj}(\hat{\xi})\bigr) S_{nj}(\eta)\Bigr) \quad (0 < r < s \leqq 1). \tag{7.12}$$

以下では μ_1 は双曲型で，Ω^+ は（7.12）で与えられる μ グリーン関数 $\hat{G}_\mu$ が存在することを前提として，これらを利用して Ω^+ の原点の上にある μ マルチン核を決定する（$d = 2$ については［15］も参照）。

7.4.　加法定理（7.6）を使って，（7.12）をルジャンドル多項式を使ってかきなおすと

$$\hat{G}_\mu(s\eta, r\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{\mu n}(r) f_{\mu n}(s) \frac{N(n)}{\sigma_d}\bigl(P_n(\xi \cdot \eta) - P_n(\hat{\xi} \cdot \eta)\bigr) \quad (0 < r < s \leqq 1) \tag{7.13}$$

の表示がえられる。この式との関連で Γ^+ 上の ξ の関数（$\eta \in \Gamma$ はパラメーター）

$$Q_n(\xi, \eta) := \begin{cases} \dfrac{P_n(\xi \cdot \eta) - P_n(\hat{\xi} \cdot \eta)}{\xi_d} & (\xi_d > 0), \\[2ex] 2\dfrac{\partial}{\partial \xi_d} P_n(\xi \cdot \eta) & (\xi_d = 0) \end{cases} \tag{7.14}$$

を考える。$\xi, \hat{\xi}$ を $\mathbf{R}^d$ 内で考えて，平均値の定理を使うと，$\xi_d > 0$ のとき

$$Q_n(\xi, \eta) = 2P_n'\bigl(\xi \cdot \eta + \theta(\hat{\xi} \cdot \eta - \xi \cdot \eta)\bigr)\eta_d \quad (0 < \theta < 1) \tag{7.15}$$

となる $\theta = \theta(\xi, \eta)$ が定まる。又 $\xi_d = 0$ の時

$$Q_n(\xi, \eta) = 2P_n'(\xi \cdot \eta)\eta_d \tag{7.16}$$

となる。（7.14）の形から $Q_n(\xi, \eta)$ が $\Gamma^+ \cap \{\xi_d > 0\}$ 及び $\Gamma^+ \cap \{\xi_d = 0\}$ 上の関数として，η に関して一様に，ξ

の連続関数であることがわかる。更に（7.15），（7.16）によれば，ηに関して一様に

$$\lim_{\xi\in\Gamma^-\cap\{\xi_d>0\},\xi\to\bar{\xi}} Q_n(\xi,\eta)=Q_n(\bar{\xi},\eta)\left(\bar{\xi}=(\bar{\xi}_1,\cdots,\bar{\xi}_{d-1},0)\right)$$

となることがわかる。ゆえに $Q_n(\xi,\eta)$ は $(\xi,\eta)\in\Gamma^+\times\Gamma$ の関数として連続である。もっと重要なことは，(7.15)，(7.16)，(7.11)により，すべての $(\xi,\eta)\in\Gamma^+\times\Gamma$ に対して

$$|Q_n(\xi,\eta)|\leqq 2C_0^n \quad (n=1,2,\cdots) \tag{7.17}$$

となることである。

7.5. 不等式（7.4）の両辺を $e_{\mu_1}(r)$ でわると，$0<R<s\leqq 1$ に対して，

$$\frac{e_{\mu n}(r)}{e_{\mu_1}(r)}f_{\mu n}(s)\leqq p\left(\frac{R}{s}\right)^n \quad (n\geqq q)$$

となる。まず $S\in(0,1)$ を任意にとり，ついで $R\in(0,S)$ を十分小さくとって $C_0R/S<1$ となる様にとると，(7.17) を使えば，(7.5) も想起して，

$$\left|\frac{e_{\mu n}(r)}{e_{\mu_1}(r)}f_{\mu n}(s)\frac{N(n)}{\sigma_d}Q_n(\xi,\eta)\right|\leqq 2p\frac{2^{d-1}}{\sigma_d}n^{d-2}\left(\frac{C_0R}{S}\right)^n \quad (n\geqq q) \tag{7.18}$$

がすべての $r\in(0,R]$ とすべての $s\in[S,1]$ に対して成立する。ここで $r\downarrow 0$ とすることにより

$$\left|\hat{\alpha}_n(\mu)f_{\mu n}(s)\frac{N(n)}{\sigma_d}Q_n(\xi,\eta)\right|\leqq 2p\frac{2^{d-1}}{\sigma_d}n^{d-2}\left(\frac{C_0R}{S}\right)^n \quad (n\geqq q) \tag{7.19}$$

がすべての $s\in(S,1)$ について成立する。この評価により，任意の $s\eta\in\Omega^+$ および $\xi\in\Gamma^+$ に対して

$$\hat{M}(s\eta,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\alpha}_n(\mu)f_{\mu n}(s)\frac{N(n)}{\sigma_d}Q_n(\xi,\eta) \tag{7.20}$$

が定義できる。同様に，(7.18) から，$0<r<R\leqq s<1$ に対して，$s\eta,r\xi\in\Omega^+$ として

$$\hat{M}(s\eta,r\xi)=\frac{\hat{G}(s\eta,r\xi)}{e_{\mu_1}(r)\,\xi_d}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_{\mu n}(r)}{e_{\mu_1}(r)}f_{\mu n}(s)\frac{N(n)}{\sigma_d}Q_n(\xi,\eta) \tag{7.21}$$

を考えることが出来る。

最後に $x_0\in\Omega^+$ を固定して，$r\xi\in\Omega^+$ を極とする **μマルチン核**

$$\hat{K}(s\eta,r\xi)=\frac{\hat{G}(s\eta,r\xi)}{\hat{G}(x_0,r\xi)}=\frac{\hat{M}(s\eta,r\xi)}{\hat{M}(x_0,r\xi)} \quad (s\eta\in\Omega^+) \tag{7.22}$$

を考える。$r\xi\in\Omega^+$ について $r\xi\to 0$ となるときの $\hat{K}(s\eta,r\xi)$ の可能な極限関数の全体が，原点の上に極をもつμマルチン核の全体であるが，これを決定したい。

7.6. $\hat{\xi}\cdot\eta=\xi\cdot\hat{\eta},\hat{\xi}\cdot\hat{\eta}=\xi\cdot\eta$，とくに $\xi_d=0$ なら $\xi\cdot\eta=\xi\cdot\hat{\eta}$ 等により (7.14) から $Q_n(\xi\cdot\hat{\eta})=-Q_n(\xi,\eta)$ となるので，(7.20)，(7.21) をながめて

$$\begin{cases}\hat{M}(s\hat{\eta},\xi)=-\hat{M}(s\eta,\xi) & (\xi,\eta\in\Gamma^+,\ 0<s<1),\\ \hat{M}(s\hat{\eta},r\xi)=-\hat{M}(s\eta,r\xi) & (r\xi\in\Omega^+,\eta\in\Gamma^+,\ 0<r<s<1),\end{cases} \tag{7.23}$$

によって，$\hat{M}(\cdot,\xi)$，$\hat{M}(\cdot,r\xi)$ をΩ上で考えられる。

補題 7.3.　$\alpha(\mu_1)>0$ であるとき，A を Γ^+ 上のラドン測度であって

$$\int_{\Gamma^+}\hat{M}(s\eta,\xi)dA(\xi)=0 \quad (s\eta\in\Omega^+) \tag{7.24}$$

を満足するならば，$A=0$ である。

証明.（7.23）によると（7.24）は $s\eta\in\Omega^+$ ばかりでなく $s\eta\in\Omega$ に対しても成立する。（7.24）の両辺に $S_{nj}(\eta)$ をかけてΓ上 $d\eta$ で積分しフビニの定理で積分順序を交換して加法定理を使い，$\{S_{nj}\}$ が正規直交系であることを使って

$$\int_{\Gamma^+\cap\{\xi_d>0\}}\frac{S_{nj}(\xi)-S_{nj}(\hat{\xi})}{\xi_d}dA(\xi)+\int_{\Gamma^+\cap\{\xi_d=0\}}2\frac{\partial}{\partial\xi_d}S_{nj}(\xi)dA(\xi)=0$$

となる。ここで補題7.1により $\alpha(\mu_1)>0$ だから $\hat{\alpha}_n>0\ (n=1,2,\cdots)$ となることを本質的に使っている。この両辺に $S_{nj}(\eta)$ をかけ j について 1 から $N(n)$ 迄加えると，再び加法定理を用いて

$$\int_{\Gamma^+}Q_n(\xi,\eta)dA(\xi)=0 \quad (\eta\in\Gamma)$$

となる。この両辺に $N(n)s^n$ をかけて，n について 0 から∞迄加え，和と積分の順序を交換すると

$$\int_{\Gamma^+}\left(\sum_{n=0}^{\infty}N(n)Q_n(\xi,\eta)s^n\right)dA(\xi)=0 \tag{7.25}$$

となる。ここで $\xi_d>0$ ならば，（7.9）を使って

$$\sum_{n=0}^{\infty}N(n)Q_n(\xi,\eta)s^n=\frac{1}{\xi_d}\left(\sum_{n=0}^{\infty}N(n)P_n(\xi,\eta)s^n-\sum_{n=0}^{\infty}N(n)P_n(\hat{\xi},\eta)s^n\right)$$
$$=\frac{1}{\xi_d}\left(\frac{1-s^2}{(1+s^2-2s\xi\cdot\eta)^{d/2}}-\frac{1-s^2}{(1+s^2-2s\hat{\xi}\cdot\eta)^{d/2}}\right)=\frac{1}{\xi_d}\left(\frac{1-s^2}{|s\eta-\xi|^d}-\frac{1-s^2}{|s\eta-\hat{\xi}|^d}\right)$$

となる。$\xi_d=0$ ならば，やはり（7.9）を使って

$$\sum_{n=0}^{\infty}N(n)Q_n(\xi,\eta)s^n=2\sum_{n=0}^{\infty}N(n)\frac{\partial}{\partial\xi_d}P_n(\xi\cdot\eta)s^n=2\frac{\partial}{\partial\xi_d}\sum_{n=0}^{\infty}N(n)P_n(\xi\cdot\eta)s^n$$
$$=2\frac{\partial}{\partial\xi_d}\frac{1-s^2}{(1+s^2-2s\xi\cdot\eta)^{d/2}}=2\frac{\partial}{\partial\xi_d}\frac{1-s^2}{|s\eta-\xi|^d}=2d\cdot\frac{(1-s^2)s\eta_d}{|s\eta-\xi|^{d+2}}$$

となる。そこでポアソン核 $(1-s^2)/|s\eta-\xi|^d=:P(s\eta,\xi)$ とかくとき

$$\hat{P}(s\eta,\xi):=\begin{cases}\dfrac{P(s\eta,\xi)-P(s\eta,\hat{\xi})}{\xi_d}=\dfrac{1}{\xi_d}\left(\dfrac{1-s^2}{|s\eta-\xi|^d}-\dfrac{1-s^2}{|s\eta-\hat{\xi}|^d}\right) & (\xi_d>0)\\[2ex] 2\dfrac{\partial}{\partial\xi_d}P(s\eta,\xi)=2d\cdot\dfrac{(1-s^2)s\eta_d}{|s\eta-\xi|^{d+2}} & (\xi_d=0)\end{cases} \tag{7.26}$$

と定義する。すると（7.25）から

$$\int_{\Gamma^+}\hat{P}(s\eta,\xi)dA(\xi)=0 \quad (s\eta\in\Omega) \tag{7.27}$$

が出る。他方ハント・ウイーデン［3］によると，Ω^+ はリプシッツ領域だから，$\overline{\Omega^+}=\Omega^+\cup\Gamma^+\cup B$（ただし B=

$\{x\in B^d : x_d=0\}$) が Ω^+ の 0 マルチン・コンパクト化であって，0 マルチン境界点はすべて 0 マルチン極小点である。各 $\xi\in\Gamma^+$ に対して，(7.26) の $\hat{P}(x,\xi)$ $(x\in\Omega^+)$ は x の正値調和関数で，$\partial\Omega^+\setminus\{\xi\}$ では境界値 0 をとるので，$\hat{P}(x,\xi)$ は ξ に極をもつ Ω^+ 上の調和マルチン核（中心 $x_0\in\Omega^+$）の $\hat{P}(x_0,\xi)$ 倍となるから，$\hat{P}(x,\xi)$ も又極小となる。このことから，(7.27) により，0 マルチン表示の一意性から $A=0$ となる。 □

補題 7.4. $\alpha(\mu_1)>0$ とすると，任意の $\bar{\xi}\in\Gamma^+$ に対して Γ^+ 上の正値ボレル測度 A があって，Ω^+ 上

$$M(\cdot,\bar{\xi})=\int_{\Gamma^+}M(\cdot,\xi)dA(\xi) \tag{7.28}$$

となるならば，$A=\delta_{\bar{\xi}}$（$\bar{\xi}$ を台にもつディラック測度）となる。とくに，$\bar{\xi},\xi\in\Gamma^+$ に対して Ω^+ 上 $M(\cdot,\bar{\xi})=M(\cdot,\xi)$ となる必要十分条件は $\bar{\xi}=\xi$ である。

証明. $\bar{A}=\delta_{\bar{\xi}}-A$ とおくと，(7.28) から (7.24) が出る。よって補題7.3によると $\bar{A}=0$ となり，$A=\delta_{\bar{\xi}}$ となる。 □

7.7. μ が $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ 上の回転不変ラドン測度で，μ_1 は Ω 上双曲型で，Ω^+ の μ グリーン関数が存在し，(7.12) の表示をもつことを前提とする。このとき Ω^+ の原点の上に極をもつ μ マルチン核と原点上の μ マルチン境界を次の様に決定する：

定理 7.1. $(r_m\xi^{(m)})$ を 0 に収束する Ω^+ 内の点列とする。$\alpha(\mu_1)>0$ のときには，$(r_m\xi^{(m)})$ がマルチン理論の意味の基本列となる（即ち，$\hat{K}(\cdot,r_m\xi^{(m)})$ が収束する）為の必要十分条件は $(\xi^{(m)})$ がある $\xi\in\Gamma^+$ に収束することで，その μ マルチン核は

$$\hat{K}(s\eta,\xi)=\lim_{r_m\to 0,\,\xi^{(m)}\to\xi}\hat{K}(s\eta,r_m\xi^{(m)})=\frac{\hat{M}(s\eta,\xi)}{\hat{M}(x_0,\xi)} \tag{7.29}$$

となる。ゆえに $\{\hat{K}(s\eta,\xi):\xi\in\Gamma^+\}$ が原点の上に極をもつ μ マルチン核の全体であって，これらはすべて極小で，Γ^+ が 0 上の μ マルチン境界で，すべて極小点からなる；$\alpha(\mu_1)=0$ のときは，Ω^+内 0 に収束する任意の $(r_m\xi^{(m)})$ がただ一つの同値類を定める基本列となって

$$\lim_{r_m\to 0}\hat{K}(s\eta,r_m\xi^{(m)})=\frac{\lim_{r_m\to 0}\hat{M}(s\eta,r_m\xi^{(m)})}{\lim_{r_m\to 0}\hat{M}(x_0,r_m\xi^{(m)})}=\frac{\frac{2d}{\sigma_d}f_{\mu_1}(s)\,\eta_d}{\frac{2d}{\sigma_d}f_{\mu_1}(|x_0|)\,\eta_d} \tag{7.30}$$

となる。ゆえに原点の上に極をもつ μ マルチン核は (7.30) で与えられるものただ一つであって，これは必然的に極小であり，0 上の μ マルチン境界は極小点ただ一つである。

証明. まず $\alpha(\mu_1)>0$ とする。(7.18)−(7.21) と $Q_n(\xi,\eta)$ の $\Gamma^+\times\Gamma^+$ 上の連続性によれば，$r_m\to 0$，$\xi^{(m)}\to\xi\in\Gamma^+$とすると，

$$\lim_{m\to 0}\hat{M}(s\eta,r_m\xi^{(m)})=\hat{M}(s\eta,\xi)\quad(s\eta\in\Omega^+) \tag{7.31}$$

となり $(r_m\xi^{(m)})$ は基本列である。逆に $(r_m\xi^{(m)})$ を基本列としたとき，$(\xi^{(m)})$ が $\xi,\xi'\in\Gamma^+(\xi\neq\xi')$ に収束する部分列をもつと，(7.31) から，$\hat{M}(s\eta,\xi)=\hat{M}(s\eta,\xi')$ $(s\eta\in\Omega^+)$ となり，補題7.4から $\xi=\xi'$ と言う矛盾が出る。よって $(\xi^{(m)})$ はある $\xi\in\Gamma^+$ に収束する。マルチン理論の一般論によると，$H_\mu(\Omega^+;\partial\Omega^+\setminus\{0\}^+)$ の中で極小なもの全体は，$\{\hat{M}(\cdot,\xi):\xi\in\Gamma^+\}$ に含まれ，それを $\{\hat{M}(\cdot,\xi):\xi\in\tilde{\Gamma}^+\}$ とするとき，$\tilde{\Gamma}^+$ は Γ^+ の G_δ 部分集合であり，任意の $u\in H_\mu((\Omega^+;\partial\Omega^+\setminus\{0\})$ に対して，$\tilde{\Gamma}^+$ 上のボレル測度 A_u がただ一つ定まって

$$u=\int_{\tilde{\Gamma}^-}\hat{M}(\cdot,\xi)dA_n(\xi)$$

とかける。このことと補題7.4により，$\widetilde{\Gamma}^{+}=\Gamma^{+}$ でなければならないことがわかる。

つぎに $\alpha(\mu_1)=0$ とすると，補題7.1により $\hat{\alpha}_1(\mu)=1$ かつ $\hat{\alpha}_n(\mu)=0$ $(n=2,3,\cdots)$ である。やはり (7.18)−(7.21) によれば，$P_1(t)=t$，従って $Q_1(\xi,\eta)=2\eta_d$ であり，$N(1)=d$ を使えば，(7.30) がでる。残るところはマルチン理論の一般論そのものである。 □

参　照　文　献

[1] A. Boukricha: *Das Picard-Prinzip und Verwandte Fragen bei Störung von harmonische Räumen*, Math. Ann., **239**(1979), 247−270.

[2] A. Boukricha, W. Hansen and H. Hueber: *Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces*, Exposition Math., **5**(1987), 97−135.

[3] R. A. Hunt and R.L.Wheeden: *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **147**(1970), 507−527.

[4] M. Kwamura and M. Nakai: *A test of Picard principle for rotation free densities*, II, J. Math. Soc. Japan, **28**(1976), 323−342.

[5] M. Murata: *Structure of positive solutions to* $(-\Delta+V)u=0$ *in* $\mathbf{R}^n$, Duke Math. J., **53**(1986), 869−943.

[6] C. Müller: *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Math. **17**, Springer, 1966.

[7] M. Nakai: *Martin boundary over an isolated singularity of rotation free density*, J. Math. Soc. Japan, **26**(1974), 483−507.

[8] M. Nakai: *Continuity of solutions of Schrödinger equations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **110**(1991), 581−597.

[9] 中井三留: 球関数級数展開, 名古屋工業大学紀要, **44**(1992), 101−106.

[10] M. Nakai: *Brelot spaces of Schrödinger equations*, J. Math. Soc. Japan, **48**(1996) (to appear).

[11] M. Nakai and T. Tada: *Monotoneity and homogeneity of Picard dimensions for signed radial densities*, NIT Sem. Rep. Math., **99**(1993), 3−53.

[12] 中井三留・多田俊政: グリーン関数の具体的表示とその応用, 名古屋工業大学紀要, **45**(1993), 163−196.

[13] H. L. Royden: *The equation* $\Delta u=Pu$, *and the classification of open Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **271**(1959), 1−27.

[14] E. M. Stein and G. Weiss: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton, 1975.

[15] T.Tada: *The Martin boundary of the half disk with rotation free densities*, Hiroshima Math. J., **16**(1986), 315−325.

本研究は一部分文部省科研費（一般C, 課題番号 06640227）の援助による。
1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 31B35; Secondary 31C35.