

グリーン関数の具体的表示とその応用

中井三留, 多田俊政*

数学教室

(1993年8月25日受理)

Concrete Representation of Green's Function and Its Application

Mitsuru NAKAI and Toshimasa TADA

Department of Mathematics

(Received August 25, 1993)

The main purpose of this paper is to expand the Green's function of the Schrödinger equation $(-\Delta + \mu)u = 0$ on the punctured unit ball $B^d \setminus \{0\}$ into an explicit Fourier series of spherical harmonics, where μ is a rotationally invariant signed Radon measure on the punctured Euclidean space $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ of dimension $d \geq 2$. As an application of this expansion the Martin compactification $(B^d \setminus \{0\})_\mu^*$ of $B^d \setminus \{0\}$ with respect to the equation $(-\Delta + \mu)u = 0$ will be determined as follows: $(B^d \setminus \{0\})_\mu^* = \{\alpha(\mu) \leq |x| \leq 1\}$, where $\alpha(\mu)$ in $[0, 1)$ is the singularity index of the measure μ at its singularity over the origin. Since no regularity assumption upon μ are imposed, the result is the utmost generalization of earlier relevant results obtained under certain regularity conditions on μ such as the one that μ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure λ on \mathbf{R}^d and its Radon-Nikodym density $d\mu/d\lambda$ is of locally Hölder continuous and positive (Nakai [11]) or more generally of locally class L_p with $p > d/2$ (Murata [10]).

\mathbf{R}^d を d 次元ユークリッド空間 ($d \geq 2$), μ を $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度で, 穴空き球 $B^d \setminus \{0\}$ 上シュレーディンガー方程式 $(-\Delta + \mu)u = 0$ がグリーン関数 G_μ をもつものとする。本論文の主目的は, グリーン関数 G_μ の

$$G_\mu(r\xi, s\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e_{\mu_n}(r) f_{\mu_n}(s) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta) \right) \quad (0 < r < s \leq 1, \xi, \eta \in S^{d-1})$$

の様な具体的な単位球面 S^{d-1} 上の球面調和関数 S_{nj} のフーリエ級数展開を導くことにある, ここで e_μ と f_μ は μ に関する単位と陪単位であり

$$d\mu_n(x) = d\mu(x) + n(n+d-2)|x|^{-2}dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とする。この展開公式の応用として, $B^d \setminus \{0\}$ の $(-\Delta + \mu)u = 0$ に関するマルチン・コンパクト化 $(B^d \setminus \{0\})_\mu^*$ を具体的に決定する:

$$(B^d \setminus \{0\})_\mu^* = \{\alpha(\mu) \leq |x| \leq 1\},$$

ここで $\alpha(\mu)$ は μ の特異性指数である。この結果は1974年第一著者 [11] が, μ が正值絶対連続で $d\mu(x)/dx$ が局所へ

ルター連続と言う仮定のもとに導き、1986年村田 [10] が μ が絶対連続で $d\mu(x)/dx \in L_{p,loc}$ ($p > d/2$) の仮定のもとで再発見した。本論文の結論は、 μ に関しての上記の様な色々な正則性の条件が一切不用であるので、最良の最終的な結果と言える。

1. 回転不変測度

1.1. d 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^d ($d \geq 2$) のベクトル $x = (x_1, \dots, x_d)$ の長さを $|x| = (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}$ と記す。 \mathbf{R}^d の単位球を $B^d = \{x \in \mathbf{R}^d : |x| < 1\}$, 単位球面を $S^{d-1} = \{x \in \mathbf{R}^d : |x| = 1\}$, S^{d-1} 上の固有曲面測度を σ , 単位球面積を $\sigma_d = \sigma(S^{d-1})$ とかく。 d 次直交群, 即ち d 次直交行列全体に \mathbf{R}^{d^2} の位相を与えた位相群, を $O(d)$ と記す。 $O(d)$ の各元 g は各 $x \in \mathbf{R}^d$ に対して $g \cdot x = {}^t(g^t x)$ (t は転置) と定めて \mathbf{R}^d に作用するものとする。すると $O(d)$ は, 特に S^{d-1} に推移的かつ効果的に作用するコンパクト位相変換群となり, S^{d-1} は $O(d)$ のコンパクト等質空間である。

\mathbf{R}^d のボレル部分集合 X 上のボレル測度の差としてあらわされる一般符号測度 μ を X 上のラドン測度という。従って μ の全変分測度 $|\mu|$ は X 上のボレル測度であって, $\mu = \mu^+ - \mu^-$ ($\mu^+ = (|\mu| + \mu)/2, \mu^- = (|\mu| - \mu)/2$) は μ のジョルダン分解となる。特に, 本論文では, $\bar{B}^d \setminus \{0\}$ ($\bar{B}^d = B^d \cup S^{d-1}$) 上のラドン測度 μ を考える。これが回転不変であるとは, すべての $\bar{B}^d \setminus \{0\}$ のボレル部分集合 E と, すべての $g \in O(d)$ に対して

$$(1.1) \quad \mu(g \cdot E) = \mu(E)$$

となることであるとする。こゝに $g \cdot E = \{g \cdot x : x \in E\}$ を意味する。先ず最初に次の結果の証明から出発する:

定理1.1. $\bar{B}^d \setminus \{0\}$ 上の任意の回転不変ラドン測度 μ に対して, 常に $(0,1]$ 上のラドン測度 $\bar{\mu}$ が唯一つ定まって, 次の表示を持つ:

$$(1.2) \quad d\mu(r\xi) = r^{d-1} d\bar{\mu}(r) d\sigma(\xi) \quad (r \in (0,1], \xi \in S^{d-1}).$$

証明. $\bar{B}^d \setminus \{0\} = (0,1] \times S^{d-1}$ とみて, $(0,1]$ のボレル部分集合 A と S^{d-1} のボレル部分集合 B により $\bar{B}^d \setminus \{0\}$ の特別のボレル部分集合としての矩形集合 $A \times B$ を考える。 A を任意に固定して B を色々動かすことにより, $B \mapsto \mu_A(B) = \mu(A \times B)$ は S^{d-1} 上のラドン測度 μ_A を定める。任意の $g \in O(d)$ をとるとき

$$\mu_A(g \cdot B) = \mu(A \times (g \cdot B)) = \mu(g \cdot (A \times B)) = \mu(A \times B) = \mu_A(B)$$

であるから, $\mu_A(g \cdot B) = \mu_A(B)$ となり, μ_A は S^{d-1} 上の回転不変測度である。 S^{d-1} 上には元々固有の回転不変測度 σ があることを想起しよう。

群 $O(d)$ は \mathbf{R}^{d^2} の部分空間としてコンパクトで可算基をもつ。 $O(d)$ の等質空間 S^{d-1} のどの点における等方部分群も互いに共役であるが, とくに $(1,0, \dots, 0) \in S^{d-1}$ における等方部分群は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & T & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad T \in O(d-1)$$

の形の $O(d)$ の元よりなるので, これを $O(d-1)$ と同一視してよい。故に $g \cdot O(d-1) \mapsto g \cdot (1,0, \dots, 0)$ は左剰余類集合としての商空間 $O(d)/O(d-1)$ から S^{d-1} の上への位相同型写像を与える。故にこの意味で

$$(1.3) \quad S^{d-1} = O(d)/O(d-1)$$

と表現できる ([8], p.167参照)。こうして σ, μ_A 共に商空間 $O(d)/O(d-1)$ 上の $O(d)$ の作用に関しての不変測

度と考えられる。

$O(d)$ はコンパクト群だからユニモジュラーで唯一の両側不変正規化ハール測度 ω_d をもつ。 $O(d)$ の部分群としての $O(d-1)$ も同様の ω_{d-1} をもつ。 $f \in C(O(d))$ に対して $O(d)$ 上の関数

$$x \mapsto \int f(xt) d\omega_{d-1}(t)$$

を定義すると、これは $O(d)$ 上連続となる。しかも $O(d-1)$ による $O(d)$ の各剰余類上で定数となることが ω_{d-1} の不変性によりわかる。故に $f \in C(O(d))$ に対して

$$f \sim(\xi) = \int f(xt) d\omega_{d-1}(t) \quad (x \in \xi \in O(d)/O(d-1))$$

により $f \sim \in C(O(d)/O(d-1))$ が定義できる。すると線形写像 $f \mapsto f \sim$ は $C(O(d))$ から $C(O(d)/O(d-1))$ の上への写像であることが示される ([5], p.131 参照)。 σ は (1.3) により $O(d)/O(d-1)$ 上の $O(d)$ の作用に関する不変測度と考えられるから、 $\int f \sim(\xi) d\sigma(\xi)$ の値を f の積分とみて、 $O(d)$ 上の不変積分となることがわかり、不変測度の一意性により、ある定数 c が定まって、すべての $f \in C(O(d))$ に対して、

$$\int f \sim(\xi) d\sigma(\xi) = c \int f(g) d\omega_d(g)$$

の形のフビニ型等式が成立する ([5], p.131 参照; 又 [16] も参照)。全く同じ理由によりある定数 c_A が定まって、すべての $f \in C(O(d))$ に対して、

$$\int f \sim(\xi) d\mu_A(\xi) = c_A \int f(g) d\omega_d(g)$$

が成立する。特に $f \mapsto f \sim$ が上への写像だから $c > 0$ となる。今一度 $f \mapsto f \sim$ が上への写像であることから、上の 2 式より

$$\int \varphi(\xi) d\left(\mu_A - \frac{c_A}{c} \sigma\right)(\xi) = 0$$

がすべての $\varphi \in C(S^{d-1}) (= C(O(d)/O(d-1)))$ に対して成立する。こうして S^{d-1} 上 $\mu_A = (c_A/c)\sigma$ が結論出来る。そこで $c_A/c = \nu(A)$ とかくなれば、 $\mu_A(B) = \nu(A)\sigma(B)$ 、即ち

$$\mu(A \times B) = \nu(A)\sigma(B)$$

が結論出来る。とくに $\nu(A) = \mu(A \times S^{d-1})/\sigma(S^{d-1})$ により、 A を $(0,1]$ のボレル部分集合を色々動かして、 $\nu(A)$ が $(0,1]$ 上のラドン測度となることがわかる。故に $d\bar{\mu}(r) = r^{1-d}d\nu(r)$ により $(0,1]$ 上のラドン測度 $\bar{\mu}$ を定めることにより、(1.2) が導かれる。□

$\bar{B}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度 μ に対して (1.2) で定まる $\bar{\mu}$ を μ の半径成分と呼び、記号節約の為、 μ と同じ記号 μ であらわす：

$$(1.4) \quad d\mu(r\xi) = r^{d-1}d\mu(r)d\sigma(\xi) \quad (r \in (0,1], \xi \in S^{d-1}).$$

\mathbf{R}^d 上の回転不変正ラドン測度の典型例は d 次元ルベグ測度 λ である：

$$(1.5) \quad d\lambda(r\xi) = r^{d-1}d\lambda(r)d\sigma(\xi) = r^{d-1}drd\sigma(\xi).$$

又 $d\lambda(x) = dx$ ($x \in \mathbf{R}^d$) とか $d\sigma(\xi) = d\xi$ ($\xi \in S^{d-1}$) と略記することも多い。

1.2. \mathbf{R}^d の開集合 U 上のラドン測度 μ がカトー族であるとは、次の条件がすべての $x \in U$ に対して満たされることであるとする：

$$(1.6) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\sup_{y \in B(x, \varepsilon)} \int_{B(x, \varepsilon)} N(y, z) d|\mu|(z) \right) = 0.$$

こゝで $B(x, \varepsilon)$ は x 中心半径 ε の球であり、 $N(y, z)$ はニュートン核即ち $|y - z|^{2-d}$ ($d \geq 3$) 又は $\log|y - z|^{-1}$ ($d = 2$) である。 U 上のカトー族のラドン測度の全体を記号 $K(U)$ であらわす。 $\overline{B}^d \setminus \{0\}$ 上のラドン測度 μ を本論文では主として考えるが、 $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ の任意のボレル集合 E に対しては、例えば、 $\mu(E) = \mu(E \cap (\overline{B}^d \setminus \{0\}))$ と定めて、 $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上のラドン測度と考えることが出来る。さらに μ が $\overline{B}^d \setminus \{0\}$ 上回転不変なら、この様に拡張すれば $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上回転不変となる。以下 $\overline{B}^d \setminus \{0\}$ 上のラドン測度 μ は常に $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上のラドン測度に拡張して考える。しかも $\overline{B}^d \setminus \{0\}$ 上回転不変なら $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ への拡張も回転不変なもので考えるものとする。

定理1.2. $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度 μ は $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上カトー族である。

証明. 規約通り μ の半径成分も又 μ と記す： $d\mu(r\xi) = r^{d-1}d\mu(r)d\sigma(\xi)$ ($r \in (0, \infty), \xi \in S^{d-1}$)。すると $|\mu|$ の半径成分も又 $(0, \infty)$ 上で考えた $|\mu|$ である： $d|\mu|(r\xi) = r^{d-1}d|\mu|(r)d\sigma(\xi)$ 。そこで任意の $a \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ に対して

$$\gamma(a; \mu) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\sup_{y \in B(a, \varepsilon)} \int_{B(a, \varepsilon)} N(x, y) d|\mu|(x) \right)$$

とおくとき、 $\gamma(a; \mu) = 0$ を示したい。

$$I(y) = \int_{B(a, \varepsilon)} N(x, y) d|\mu|(x)$$

とおくと、 $\gamma(a; \mu) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\sup_{y \in B(a, \varepsilon)} I(y))$ であるので、 $I(y)$ を評価する。その為対称軸上に a を含み、開き $\theta = \sin^{-1}(\varepsilon/|a|)$ の、原点を頂点とする錐

$$\Lambda(a, \theta) = \{x \in \mathbf{R}^d : a \cdot x > |a||x|\cos\theta\}$$

を考える。こゝで $a \cdot x$ は a と x の内積である。 $\varepsilon \downarrow 0$ の場合を考えるから、 $0 < \varepsilon < |a|, 0 < \theta < \pi/4$ となる様な十分小さな ε ばかりを考えることにしてよい。すると $\Lambda(a, \theta) \cap \{|a| - \varepsilon < |x| < |a| + \varepsilon\} \supset B(a, \varepsilon)$ だから

$$J(y) = \int_{\Lambda(a, \theta) \cap \{|a| - \varepsilon < |x| < |a| + \varepsilon\}} N(x, y) d|\mu|(x)$$

とおけば、 $I(y) \leq J(y)$ となるから、 $J(y)$ を評価する。 $\Gamma_r = \{x \in \mathbf{R}^d : |x| = r\}$ ($r > 0$) とかけば

$$\begin{aligned} J(y) &= \int_{\Lambda(a, \theta) \cap \{|a| - \varepsilon < |x| < |a| + \varepsilon\}} N(x, y) d|\mu|(x) \\ &= \int_{(|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon)} \left(\int_{\Lambda(a, \theta) \cap \Gamma_r} N(r\xi, y) r^{d-1} d\sigma(\xi) \right) d|\mu|(r) \end{aligned}$$

となる。そこで

$$U_r(y) = \int_{\Lambda(a, \theta) \cap \Gamma_r} N(r\xi, y) r^{d-1} d\sigma(\xi)$$

とおけば $J(y) = \int_{(|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon)} U_r(y) d|\mu|(r)$ となる。 Γ_r 上の面素を ds としると

$$U_r(y) = \int_{\Lambda(a, \theta) \cap \Gamma_r} N(x, y) ds(x)$$

となり、これは曲面分布 s のニュートンポテンシャルである。最大値の原理によれば

$$\sup_{y \in \mathbf{R}^d} U_r(y) = \sup_{y \in \Lambda(a, \theta) \cap \Gamma_r} U_r(y)$$

となるので、任意の $y_0 \in \Lambda(a, \theta) \cap \Gamma_r$ に対する $U_r(y_0)$ を評価する。 $\eta = (0, \dots, 0, 1) \in S^{d-1}$ に対して

$$K_r = \int_{\Lambda(\eta, 2\theta) \cap \Gamma_r} N(x, \eta) ds(x)$$

とおく。 $\Lambda(a, \theta) \subset \Lambda(y_0, 2\theta)$ で、回転で $\Lambda(y_0, 2\theta)$ は $\Lambda(\eta, 2\theta)$ に重さなるので、積分 $\int_{\Lambda(y_0, 2\theta) \cap \Gamma_r} N(x, y) ds(x)$ は y に関係しないので

$$\begin{aligned} U_r(y_0) &= \int_{\Lambda(a, \theta) \cap \Gamma_r} N(x, y_0) ds(x) \leq \int_{\Lambda(y_0, 2\theta) \cap \Gamma_r} N(x, y_0) ds(x) \\ &= \int_{\Lambda(\eta, 2\theta) \cap \Gamma_r} N(x, \eta) ds(x) = K_r \end{aligned}$$

となり、結局 $\sup_{y \in \mathbf{R}^d} U_r(y) \leq K_r$ となる。ゆえに K_r を評価しさえすればよい。 $x = (x', x_d)$ ($x' \in \mathbf{R}^{d-1}$) とかくと、 $\Lambda(\eta, 2\theta) \cap \Gamma_r$ 上の面素 $ds(x)$ は

$$ds(x) = \frac{r}{x_d} dx_1 \cdots dx_{d-1} = \frac{r}{x_d} dx' \quad (x_d = \sqrt{r^2 - x_1^2 - \cdots - x_{d-1}^2})$$

とかける。故に

$$K_r = \int_{|x'| < r \sin 2\theta} N(x, \eta) \frac{r}{x_d} dx'$$

となる。 $x' \in \mathbf{R}^{d-1}$ を \mathbf{R}^{d-1} 上の極座標 $x' = t\xi'$ ($t \in (0, \infty)$, $\xi' \in S^{d-2}; \mathbf{R}^{d-1}$ の単位球面) でかくと $dx' = t^{d-2} dt d\xi'$ ($d\xi'$ は S^{d-2} 上の面素) とかけるから

$$K_r = \int_{S^{d-2}} \left(\int_0^{r \sin 2\theta} N(x, \eta) \frac{r}{x_d} t^{d-2} dt \right) d\xi'$$

である。ここで $L_r(\xi') = \int_0^{r \sin 2\theta} N(x, \eta) (r/x_d) t^{d-2} dt$ とおけば $K_r = \int_{S^{d-2}} L_r(\xi') d\xi'$ となる。 $x_d \geq r \cos 2\theta$ であり、 $|x - \eta|^2 = |x'|^2 + (x_d - 1)^2 \geq |x'|^2$ に注意すると、 $1/|x - \eta| \leq 1/|x'| = 1/t$ であるから、 $N(t) = 1/t^{d-2}$ ($d \geq 3$) 又は $\log(1/t)$ ($d = 2$) とおけば、 $N(x, \eta) \leq N(t)$ となる。以上により

$$L_r(\xi') \leq \int_0^{r \sin 2\theta} N(t) \frac{r}{r \cos 2\theta} t^{d-2} dt$$

となる。上の右辺は、 $d \geq 3$ ならば

$$\int_0^{r \sin 2\theta} \frac{1}{t^{d-2}} \frac{1}{\cos 2\theta} t^{d-2} dt = r \tan 2\theta$$

となるし、 $d = 2$ ならば

$$\int_0^{r \sin 2\theta} \left(\log \frac{1}{t} \right) \frac{1}{\cos 2\theta} t^{d-2} dt = (r \tan 2\theta) \{1 - \log r - \log(\sin 2\theta)\}$$

となる。ゆえに

$$\beta(\varepsilon) = (|a| + \varepsilon) \cdot \left(\tan \left(2 \sin^{-1} \frac{\varepsilon}{|a|} \right) \right) \cdot \left(1 - \log(|a| - \varepsilon) - \log \left(\sin 2 \left(\sin^{-1} \frac{\varepsilon}{|a|} \right) \right) \right)$$

とおくならば、すべての $d \geq 2$ に対して $L_r(\xi^i) \leq \beta(\varepsilon)$ となる。従って

$$K_r = \int_{S^{d-2}} L_r(\xi^i) d\xi^i \leq \sigma_{d-1} \beta(\varepsilon)$$

となる。こゝで σ_{d-1} は S^{d-2} の表面積である。故に $U_r(y) \leq K_r$ だから

$$U_r(y) \leq \sigma_{d-1} \beta(\varepsilon) \quad (y \in \mathbf{R}^d, r \in (|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon))$$

が出る。よって

$$J(y) = \int_{(|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon)} U_r(y) d|\mu|(r) \leq \sigma_{d-1} \beta(\varepsilon) |\mu|((|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon))$$

であるから、

$$\begin{aligned} \gamma(a; \mu) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\sup_{y \in B(a, \varepsilon)} I(y) \right) \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\sup_{y \in B(a, \varepsilon)} J(y) \right) \\ &\leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sigma_{d-1} \beta(\varepsilon) |\mu|((|a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon)) = \sigma_{d-1} \cdot 0 \cdot |\mu|(\{|a|\}) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

1.3. $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上のラドン測度 μ をポテンシャルに持つ定常シュレーディンガー方程式

$$(1.7) \quad (-\Delta + \mu)u = 0 \quad (\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_d^2)$$

を考える。 $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ の開集合 U 上の関数 u が U 上 (1.7) の解であるとは、 u が (1.7) の超関数解である、つまり、 $u \in L_{1,loc}(U; \lambda + |\mu|)$ で、しかもすべてのテスト関数 $\varphi \in C_0^\infty(U)$ に対して

$$-\int_U u(x) \Delta \varphi(x) dx + \int_U u(x) \varphi(x) d\mu(x) = 0$$

となることであるとする。解 u は必ずしも連続でない ([12] 参照) ので、特に $u \in C(U)$ で、 u が (1.7) の解であるとき、 u を U 上 μ -調和であると言う。 U 上の μ -調和関数全体を $H_\mu(U)$ と記すことにすれば、 $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ の各開集合 U に $H_\mu(U)$ を対応させる写像 $H_\mu: U \mapsto H_\mu(U)$ が定義できて、これは次の層の公理と称する 3 条件を満足するので、 H_μ は $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の関数の層である：

- (a) $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ の各開集合 U に対して $H_\mu(U)$ は U 上の関数族である；
- (b) U, V が $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ の開集合で $U \subset V$ ならば、 $u \in H_\mu(V)$ に対して $u|_U \in H_\mu(U)$ となる；
- (c) $(U_i)_{i \in I}$ が $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ の開集合族で、 u が $\bigcup_{i \in I} U_i$ 上の関数であって、 $u|_{U_i} \in H_\mu(U_i)$ ならば $u \in H_\mu(\bigcup_{i \in I} U_i)$ となる。

空間 $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ とその上の関数の層 H_μ の組 $(\mathbf{R}^d \setminus \{0\}, H_\mu)$ が次の 3 公理を満たすとき、 $(\mathbf{R}^d \setminus \{0\}, H_\mu)$ をブルロー調和空間であると言う：

公理 1. $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ の各開集合 U に対して、 $H_\mu(U)$ は $C(U)$ の線形部分空間である；

公理 2. H_μ についての正則領域が $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ の位相の底である、こゝで $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ の領域 V が正則であるとは、 V が相対コンパクトで、 $\partial V \neq \emptyset$ で、各 $\varphi \in C(\partial V)$ について、唯一の $u \in C(V)$ で $u|_{\partial V} = \varphi, u|_V \in H_\mu(V)$ で、 $\varphi \geq 0$ なら $u \geq 0$ となるものが定まることである；

公理 3 (ハルナック原理). U が $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ の領域で、 $H_\mu(U)$ の列 $\{u_n\}$ が単調増加で $\{u_n(x_0)\}$ がある $x_0 \in U$ で有界ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in H_\mu(U)$ となる。

$\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の任意のラドン測度 μ に対しては、 μ に何等かの条件を課さぬかぎり、仲々 $(\mathbf{R}^d \setminus \{0\}, H_\mu)$ はブルロー空間とはならない。その意味で、カトー族のラドン測度が重要であるのは、次の事実の成立することにある ([1], [2] 参照) : μ を $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上のカトー族のラドン測度とすると、 $(\mathbf{R}^d \setminus \{0\}, H_\mu)$ はブルロー調和空間となる。従って定理 1.2 により、次の重要な結果が得られる：

定理1.3. μ を $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度とすると $(\mathbf{R}^d \setminus \{0\}, H_\mu)$ はブルロー調和空間となる。

1.4. 以下では $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度 μ をポテンシャルにもつ定常シュレーディンガー方程式 (1.7) の連続解, μ -調和関数, を研究する。定理1.3で $(\mathbf{R}^d \setminus \{0\}, H_\mu)$ はブルロー調和空間なので, ブルロー調和空間の一般論が利用出来る ([3], [6]参照)。

μ の回転不変性を最大限に利用して, 我々は (1.7) を変数分離法で扱う。その為に対応する常微分方程式

$$(1.8) \quad (r^{d-1}y')' = r^{d-1}y\mu$$

を考える, ここで μ は $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度 μ の半径成分としての $(0, \infty)$ 上の任意のラドン測度であり, 又一変数 r の関数 φ に対して $\varphi' = d\varphi/dr, \varphi'' = d^2\varphi/dr^2$ を意味する。 $(0, \infty)$ 上の関数 y が (1.8) の解であるとは, y が $(0, \infty)$ 上の連続超関数解, 即ち, $y \in C(0, \infty)$ であって, すべての $\varphi \in C_0^\infty(0, \infty)$ に対して

$$\int_0^\infty y (r^{d-1}\varphi')' dr = \int_0^\infty r^{d-1}y\varphi d\mu$$

となることであるとする。 $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の関数 $u(x)$ が回転不変であるとは, $u(g \cdot x) = u(x)$ (すべての $x \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, すべての $g \in O(d)$) となることであるとする。このとき, $u(x)$ は $|x|$ のみの関数なので, $u(|x|) = u(x)$ により, u を又 $(0, \infty)$ 上の関数とみなす。逆に $(0, \infty)$ 上の関数 v があると $v(x) = v(|x|)$ と定めて, v を $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変関数とみなすことが出来る。すると

定理1.4. $(0, \infty)$ 上の関数 $u(r)$ が $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変な μ -調和関数となる為の必要十分条件は, $u(r)$ が $(0, \infty)$ 上 (1.8) の解となることである。

証明. $u \in H_\mu(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ とする。任意の $\varphi \in C_0^\infty(0, \infty)$ をとるとき, それは又 $C_0^\infty(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ の関数とみなせる。さて u の μ -調和性により

$$\int_{\mathbf{R}^d \setminus \{0\}} u(r) \Delta \varphi(r) d\lambda(r\xi) = \int_{\mathbf{R}^d \setminus \{0\}} u(r) \varphi(r) d\mu(r\xi)$$

となる。この左辺は

$$\int_{S^{d-1}} \int_0^\infty u(r) r^{1-d} (r^{d-1}\varphi'(r))' r^{d-1} dr d\xi = \sigma_d \int_0^\infty u(r) (r^{d-1}\varphi'(r))' dr$$

となり, 又右辺は

$$\int_{S^{d-1}} \int_0^\infty u(r) \varphi(r) r^{d-1} d\mu(r) d\xi = \sigma_d \int_0^\infty u(r) r^{d-1} \varphi(r) d\mu(r)$$

となるので, 結局

$$\int_0^\infty u(r) (r^{d-1}\varphi'(r))' dr = \int_0^\infty r^{d-1} u(r) \varphi(r) d\mu(r)$$

となり, これは u が $(0, \infty)$ 上 (1.8) の解であることを示す。

逆に $u(r)$ が (1.8) の解であるとき, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ をとると, $\bar{\varphi}(r) = \int_{S^{d-1}} \varphi(r\xi) d\xi \in C_0^\infty(0, \infty)$ であって

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d \setminus \{0\}} u(r) \Delta \varphi(r\xi) d\lambda(r\xi) &= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} u(r) \Delta \varphi(r\xi) r^{d-1} dr d\xi \\ &= \int_0^\infty u(r) \Delta \left(\int_{S^{d-1}} \varphi(r\xi) d\xi \right) r^{d-1} dr = \int_0^\infty u(r) \Delta \bar{\varphi}(r) r^{d-1} dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty u(r) r^{1-d} (r^{d-1} \varphi'(r))' r^{d-1} dr = \int_0^\infty u(r) (r^{d-1} \varphi'(r))' dr \\
&= \int_0^\infty u(r) r^{d-1} \overline{\varphi}(r) d\mu(r) = \int_0^\infty u(r) r^{d-1} \left(\int_{S^{d-1}} \varphi(r\xi) d\xi \right) d\mu(r) \\
&= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} u(r) \varphi(r\xi) r^{d-1} d\mu(r) d\xi = \int_{\mathbf{R}^d \setminus \{0\}} u(r) \varphi(r\xi) d\mu(r\xi)
\end{aligned}$$

となり $u(r)$ は \mathbf{R}^d 上 μ -調和関数となる。 □

1.5. S^{d-1} 上の n 位球関数 S_n を任意にとる ([9], [15], [13] 等参照)。 $B^d \setminus \{0\}$ 上の μ -調和関数 $u(r\xi)$ に対して

$$(1.9) \quad u_n(r) = \int_{S^{d-1}} u(r\xi) S_n(\xi) d\xi$$

を作る。又 $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度 μ に対して新たな回転不変ラドン測度

$$(1.10) \quad \mu_n = \mu + \frac{n(n+d-2)}{r^2} \lambda \quad (n = 0, 1, \dots; \mu_0 = \mu)$$

を定める。(1.8) 同様 $(0, \infty)$ 上常微分方程式

$$(1.11) \quad (r^{d-1} y')' = r^{d-1} y \mu_n$$

が考えられる。すると

定理1.5. $u(r\xi)$ を $B^d \setminus \{0\}$ 上の μ -調和関数とすると、(1.9) で定める $(0, 1)$ 上の関数 u_n は $(0, 1)$ 上 (1.11) の解となる。

証明. $\Delta = \Delta_{r\xi} = \Delta_r + r^{-2} \Delta_\xi$ と分解する、但し $\Delta_r = r^{1-d} \frac{\partial}{\partial r} (r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r})$ で、 Δ_ξ は S^{d-1} 上の自然なリーマン計量に関するラプラス・ベルトラミ作用素とする。任意に $\varphi \in C_0^\infty(0, \infty)$ をとるとき、 $\Delta_\xi S_n(\xi) = -n(n+d-2) S_n(\xi)$ により、

$$\begin{aligned}
r^{1-d} (r^{d-1} \varphi'(r) S_n(\xi))' &= \Delta_r (\varphi(r) S_n(\xi)) = \Delta (\varphi(r) S_n(\xi)) - r^{-2} \Delta_\xi (\varphi(r) S_n(\xi)) \\
&= \Delta (\varphi(r) S_n(\xi)) + r^{-2} n(n+d-2) \varphi(r) S_n(\xi)
\end{aligned}$$

であるから、 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ に注意して、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty u_n(r) (r^{d-1} \varphi'(r))' dr &= \int_0^\infty \left(\int_{S^{d-1}} u(r\xi) S_n(\xi) d\xi \right) (r^{d-1} \varphi'(r))' dr \\
&= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} u(r\xi) r^{1-d} (r^{d-1} \varphi'(r) S_n(\xi))' r^{d-1} dr d\xi \\
&= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} u(r\xi) (\Delta (\varphi(r) S_n(\xi)) + r^{-2} n(n+d-2) \varphi(r) S_n(\xi)) r^{d-1} dr d\xi \\
&= \int_{\mathbf{R}^d \setminus \{0\}} u(r\xi) \varphi(r) S_n(\xi) d\mu(r\xi) \\
&\quad + n(n+d-2) \int_{\mathbf{R}^d \setminus \{0\}} r^{-2} u(r\xi) \varphi(r) S_n(\xi) r^{d-1} dr d\xi \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{S^{d-1}} u(r\xi) S_n(\xi) d\xi \right) \varphi(r) r^{d-1} d\mu(r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + n(n+d-2) \int_0^\infty r^{-2} \left(\int_{S^{d-1}} u(r\xi) S_n(\xi) d\xi \right) \varphi(r) r^{d-1} dr \\
 & = \int_0^\infty u_n(r) \varphi(r) r^{d-1} d\mu(r) + n(n+d-2) \int_0^\infty r^{-2} u_n(r) \varphi(r) r^{d-1} dr \\
 & = \int_0^\infty r^{d-1} u_n(r) \varphi(r) \left(d\mu(r) + \frac{n(n+d-2)}{r^2} d\lambda(r) \right) \\
 & = \int_0^\infty r^{d-1} u_n(r) \varphi(r) d\mu_n(r)
 \end{aligned}$$

となるので, u_n は (1.11) の解である。 □

以上の理由により $(0, \infty)$ 上のラドン測度 μ を与えて常微分方程式 (1.8) ((1.11) はその特別のもの) の研究が不可欠となる。

2. 常微分方程式

2.1. $0 \leq a < b \leq \infty$ とする。区間 (a, b) 上の関数 u が, 次の4条件を満足するとき, u は (a, b) 上可成り滑らかであると言う: (i) u は (a, b) 上絶対連続である; (ii) (a, b) の各点で有限な左及び右微分係数 u^- と u^+ が存在して (a, b) 上局所有界である; (iii) $E = \{x \in (a, b) : u^-(x) \neq u^+(x)\}$ は可算集合である; (iv) $u^- = u^+ = u \in C((a, b) \setminus E)$ で, (a, b) 上 u^- 及び u^+ は左及び右連続である。 $E = E_u$ を u の (a, b) 上の角点集合と言う。 μ を $(0, \infty)$ 上のラドン測度とする。 (a, b) 上の関数 u が μ -可成り滑らかとは, u が (a, b) 上可成り滑らかで, その角点集合 $E_u \subset \{x \in (a, b) : |\mu|(x) > 0\}$ となることである。 $(0, \infty)$ の点 x で $|\mu|(x) = 0$ となるとき x を μ -通常点, $|\mu|(x) > 0$ となるとき μ -特異点と呼ぶ。故に μ -可成り滑らかな関数 u の角点集合は μ -特異点からなると言える。

$(0, \infty)$ の点 c, t に対し, 記号 $I\{c, t\}$ で $t \geq c$ なら閉区間 $[c, t]$, $t < c$ なら符号付开区間 $-(t, c)$ をあらわす。任意に $y \in C(0, \infty)$ をとり, 又 c と \bar{c} は $(0, \infty)$ の任意の点, 更に任意の定数 y_0, z_0 をとって

$$(2.1) \quad z(r) = z_0 + \int_{I\{c, r\}} t^{d-1} y(t) d\mu(t)$$

で $(0, \infty)$ 上の関数 z を定め, ついで

$$(2.2) \quad w(r) = y_0 + \int_{\bar{c}}^r t^{1-d} z(t) dt$$

で $(0, \infty)$ 上の関数 w を定義する。すると w は μ -可成り滑らかであることを以下示す。

(2.1) で定めた関数 $z(r)$ は増加関数の差としてあらわされる (有界変分) ので, 各 $r \in (0, \infty)$ に対して $z(r-0), z(r+0)$ が存在して, μ -通常点では $z(r-0) = z(r+0) = z(r)$ となり, μ -特異点では, $z(r-0) \neq z(r+0) = z(r)$ となる。積分域を $I\{c, t\}$ にとったことから $z(t)$ の右連続性がわかる。一般に

$$(2.3) \quad z(r+0) - z(r-0) = r^{d-1} y(r) \mu(r)$$

となる。ここで, 又以後も $\mu(\{r\})$ を $\mu(r)$ と略記する。 E_μ を μ -特異点集合とすると, E_μ は可算で, $z \in C((0, \infty) \setminus E_\mu)$ となり, 又 $z(r-0), z(r+0)$ は夫々左及び右連続となる。ついで各 r について

$$(2.4) \quad |z(r) - z_0| \leq r^{d-1} \|y; L_\infty(I\{c, r\})\| \cdot |\mu|(I\{c, r\})$$

等となるから, $z(r), z(r-0), z(r+0)$ は局所有界となる。

さて (2.2) で定めた $w(r)$ は $(0, \infty)$ 上絶対連続で

$$(2.5) \quad w_\pm^1(r) = r^{1-d} z(r \pm 0)$$

が存在し, (2.4) より w_{\pm}^l は局所有界で, μ -通常点では $w^l(r) = w_{\pm}^l(r) = w^l(r) = z(r)$ が存在し, $w^l \in C((0, \infty) \setminus E_{\mu})$ となることがわかる。又 $w^l(r)$ および $w_{\pm}^l(r)$ は夫々左および右連続である。(2.3) から一般に

$$(2.6) \quad w_{+}^l(r) - w^l(r) = y(r)\mu(r)$$

となる。これにより, $r \in E_{\mu}$ かつ $y(r) \neq 0$ と $w^l(r) \neq w_{+}^l(r)$ が同値となる。つまり $E_w = E_{\mu} \setminus y^{-1}(0)$ となる。

2.2. $(0, \infty)$ 上のラドン測度 μ を与えて常微分方程式 (1.8) を考える。改めて陳列する:

$$(2.7) \quad (r^{d-1}y^l)^l = r^{d-1}y\mu.$$

この方程式の $(0, \infty)$ 上の解 y は連続超関数解を意味するとした。

定理2.1 (解の表示). $(0, \infty)$ 上 (2.7) の任意の解 y は μ -可成り滑らかであって, 任意の $(0, \infty)$ の点 c, \bar{c} に対して

$$(2.8) \quad y(r) = y(\bar{c}) + \int_{\bar{c}}^r s^{1-d} \left(c^{d-1}y^l(c) + \int_{I(c,s)} t^{d-1}y(t) d\mu(t) \right) ds$$

の表示式が成り立ち, さらに

$$(2.9) \quad r^{d-1}y_{+}^l(r) = c^{d-1}y^l(c) + \int_{I(c,r)} t^{d-1}y(t) d\mu(t)$$

であり, 又

$$(2.10) \quad y_{+}^l(c) - y^l(c) = y(c)\mu(c).$$

証明. $y_0 = y(\bar{c}), z_0 = c^{d-1}y^l(c)$ として, (2.1), (2.2) で $(0, \infty)$ 上の関数 z, w を定める。そこで $h = y - w$ とおく。テスト関数 $\varphi \in C_0^{\infty}(0, \infty)$ を任意にとるとき

$$\int_0^{\infty} y(r) (r^{d-1}\varphi^l(r))^l dr = \int_0^{\infty} r^{d-1}y(r) \varphi(r) d\mu(r)$$

にまず注意する。さて w も z も有界変分なので, ルベッグ・スチルチェス積分における部分積分の公式と, $d(\int_{I(c,r)} t^{d-1}y(t) d\mu(t)) = r^{d-1}y(r) d\mu(r)$ 等により ([14], pp.225-229参照)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} w(r) (r^{d-1}\varphi^l(r))^l dr = - \int_0^{\infty} r^{d-1}\varphi^l(r) dw(r) \\ & = - \int_0^{\infty} r^{d-1}\varphi^l(r) d\left(\int_{\bar{c}}^r s^{1-d}z(s) ds\right) = - \int_0^{\infty} r^{d-1}\varphi^l(r) r^{1-d}z(r) dr \\ & = - \int_0^{\infty} \varphi^l(r) z(r) dr = \int_0^{\infty} \varphi(r) dz(r) \\ & = \int_0^{\infty} \varphi(r) d\left(\int_{I(c,r)} t^{d-1}y(t) d\mu(t)\right) = \int_0^{\infty} r^{d-1}y(r) \varphi(r) d\mu(r) \end{aligned}$$

となる。以上によりすべての $\varphi \in C_0^{\infty}(0, \infty)$ に対して

$$(2.11) \quad \int_0^{\infty} h(r) (r^{d-1}\varphi^l(r))^l dr = 0$$

となる。ここで $h(|x|)$ として h を $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の連続関数と考えるとき, $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$ を任意にとると

$$\int_{\mathbf{R}^d \setminus \{0\}} h(|x|) \Delta \varphi(x) dx = \int_{S^{d-1}} \int_0^\infty h(r) (\Delta_r \varphi(r\xi) + r^{-2} \Delta_\xi \varphi(r\xi)) r^{d-1} dr d\xi$$

であるが、グリーンの公式により

$$\int_{S^{d-1}} \Delta_\xi \varphi(r\xi) d\xi = \int_{S^{d-1}} (1 \Delta_\xi \varphi(r\xi) - \varphi(r\xi) \Delta_\xi 1) d\xi = 0$$

となるので、(2.11) により、 $\xi \in S^{d-1}$ をとめると $\varphi(r\xi) \in C_0^\infty(0, \infty)$ だから

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d \setminus \{0\}} h(|x|) \Delta \varphi(x) dx &= \int_{S^{d-1}} \left(\int_0^\infty h(r) \Delta_r \varphi(r\xi) r^{d-1} dr \right) d\xi \\ &= \int_{S^{d-1}} \left(\int_0^\infty h(r) (r^{d-1} \varphi_r(r\xi))_r dr \right) d\xi = 0 \end{aligned}$$

となり、 $h(|x|)$ は連続なので、ワイルの補題により、 $h(|x|)$ は $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上調和関数となり、 $h \in C_0^\infty(0, \infty)$ となる。よって $y - w \in C_0^\infty(0, \infty)$ だから、 y は w と同程度に滑らかで、 y も可成り μ -滑らかなことがわかる。 $h(\bar{c}) = (y - w)(\bar{c}) = y(\bar{c}) - y_0 = 0$ 、 $h'(c) = (y - w)'(c) = y'(c) - w'(c) = y'(c) - c^{1-d} z(c - 0) = y'(c) - c^{1-d} z_0 = y'(c) - y'(c) = 0$ に注意する。 $(r^{d-1} h'(r))' = 0$ だから、 $r^{d-1} h'(r) = c^{d-1} h'(c) = 0$ となり、従って $h(r) = h(\bar{c}) = 0$ となる。故に $h \equiv 0$ 又は $y \equiv w$ となる。(2.2) に (2.1) を代入して (2.8) がえられる。(2.5) と (2.1) から (2.9) が出る。(2.6) から (2.10) が出る。□

2.3. 常微分方程式 (2.7) の初期値問題を考える。初期値は、任意に $c \in (0, \infty)$ を定め、 y_0, z_0 を任意にとるとき

$$(2.12) \quad (y(c), y'(c)) = (y_0, c^{1-d} z_0)$$

で与える。 $y'_+(c)$ で与えたいなら、(2.10) により、 $y'_+(c) = c^{1-d} z_0 + y_0 \mu(c)$ で与える訳で、もし c が μ -通常点又は $y_0 = 0$ なら $y'(c) = c^{1-d} z_0$ と本来の形で与えることができる。

定理2.2(初期値問題の解の存在と一意性). 任意の開区間 $(\alpha, \beta) \subset (0, \infty)$ と任意の $c \in (\alpha, \beta)$ と任意の初期値 (2.12) に対して、初期値 (2.12) をみたく (α, β) 上の (2.7) の解が唯一つ存在する。

証明. 他の場合も同様なので $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ の場合で考える。定理2.1及びその証明によると、 $y \in C(0, \infty)$ が上の初期値問題の解となるための必要十分条件は、 y が次の連立方程式の解の組 y, z の y となることである：

$$(2.13) \quad \begin{cases} y(r) = y_0 + \int_c^r t^{1-d} z(t) dt, \\ z(r) = z_0 + \int_{I(c,r)} t^{d-1} y(t) d\mu(t). \end{cases}$$

従って (2.13) の解の組 y, z が唯一組存在することを言えばよい。任意に $0 < a < c < b < \infty$ をとるとき、 $[a, b]$ 上 (2.13) をみたく y と z が存在して唯一つであることを言えばよい。その為

$$K = \max\left(a^{1-d}, \int_{[a,b]} t^{d-1} d|\mu|(t)\right), \quad k = \max(|y_0|, |z_0|)$$

とおき、 $y_0(r) \equiv y_0, z_0(r) \equiv z_0$ から出発して、逐次近似列 $\{y_n(r)\}, \{z_n(r)\}$ を次式で定める：

$$(2.14) \quad \begin{cases} y_n(r) = y_0 + \int_c^r t^{1-d} z_{n-1}(t) dt, \\ z_n(r) = z_0 + \int_{I(c,r)} t^{d-1} y_{n-1}(t) d\mu(t). \end{cases}$$

この漸化式から、次の評価式が帰納的に導かれる：

$$\begin{cases} |y_{2n} - y_{2n-1}| \leq kK^{2n} \frac{|r-c|^n}{n!}, & |z_{2n} - z_{2n-1}| \leq kK^{2n} \frac{|r-c|^n}{n!} \\ |y_{2n+1} - y_{2n}| \leq kK^{2n+1} \frac{|r-c|^{n+1}}{(n+1)!}, & |z_{2n+1} - z_{2n}| \leq kK^{2n+1} \frac{|r-c|^n}{n!} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

これから $\{y_n\}, \{z_n\}$ は $[a, b]$ 上一様収束するので、その極限を y, z とするとき、(2.14) で $n \rightarrow \infty$ として (2.13) が導出。
上の y, z 以外に (2.13) をみたす \bar{y}, \bar{z} が $[a, b]$ 上にあるとする。すると

$$\begin{cases} y(r) - \bar{y}(r) = \int_c^r t^{1-d} (z(t) - \bar{z}(t)) dt, \\ z(r) - \bar{z}(r) = \int_{I(c,r)} t^{d-1} (y(t) - \bar{y}(t)) d\mu(t) \end{cases}$$

となる。 $M = \max(\|y - \bar{y}; L_\infty[a, b]\|, \|z - \bar{z}; L_\infty[a, b]\|)$ とすると、順次代入をくりかえして、 $[a, b]$ 上

$$|y(r) - \bar{y}(r)| \leq MK^{2n-1} \frac{|r-c|^n}{n!}, \quad |z(r) - \bar{z}(r)| \leq MK^{2n} \frac{|r-c|^n}{n!}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる。これより $y \equiv \bar{y}, z \equiv \bar{z}$ が導出。 □

補題2.1. y が $(0, \infty)$ 上 (2.7) の解であるとき、 $(0, \infty)$ 上の可成り滑らかなコンパクト台の関数 f に対して、次の等式が成り立つ：

$$(2.15) \quad \int_0^\infty y'(r) (r^{d-1} f'(r)) dr = - \int_0^\infty r^{d-1} y(r) f(r) d\mu(r).$$

証明. f の正則化 $f_\varepsilon \in C_0^\infty(0, \infty)$ ($\varepsilon > 0$) であるから

$$\int_0^\infty y'(r) (r^{d-1} f_\varepsilon'(r)) dr = - \int_0^\infty y(r) (r^{d-1} f_\varepsilon'(r))' dr = - \int_0^\infty r^{d-1} y(r) f_\varepsilon(r) d\mu(r)$$

と成る、ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすることにより (2.15) が導かれる。 □

$(0, \infty)$ の開部分区間 (α, β) 上 u は (2.7) の解でしかも $u \neq 0$ とする。任意に $a \in (\alpha, \beta)$ をとるとき、 u から作られる (α, β) 上の新しい関数

$$v(r) = u(r) \int_a^r \frac{dt}{t^{d-1} u(t)^2} \quad (r \in (\alpha, \beta))$$

を u のダランベール変換と言う。

補題2.2. ダランベール変換 v は又 (α, β) 上 (2.7) の解である。

証明. 任意のテスト関数 $\varphi \in C_0^\infty(\alpha, \beta)$ をとる。 $v(r)$ を定める右辺の積分部分を $\phi(r)$ とかけば、 $\phi'(r) = r^{1-d} u(r)^{-2}$ である。そこで

$$\begin{aligned} - \int_\alpha^\beta v (r^{d-1} \phi')' dr &= \int_\alpha^\beta v' (r^{d-1} \phi') dr \\ &= \int_\alpha^\beta (u' \phi + u r^{1-d} u^{-2}) (r^{d-1} \phi') dr = \int_\alpha^\beta u' (r^{d-1} \phi' \phi) dr + \int_\alpha^\beta u^{-1} \phi' dr \end{aligned}$$

となる。 $(\phi \phi)' = \phi' \phi + \phi r^{1-d} u^{-2}$ なので、上の最右辺第1項は、補題2.1を使って

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} u' (r^{d-1} (\varphi\phi)' - u^{-2}\varphi) dr &= \int_{\alpha}^{\beta} u' (r^{d-1} (\varphi\phi)') dr + \int_{\alpha}^{\beta} (u^{-1})' \varphi dr \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} r^{d-1} u \varphi \phi d\mu(r) - \int_{\alpha}^{\beta} u^{-1} \varphi' dr \end{aligned}$$

となる。以上により

$$\int_{\alpha}^{\beta} v (r^{d-1} \varphi')' dr = \int_{\alpha}^{\beta} r^{d-1} v \varphi d\mu(r)$$

となるから、これは v が (2.7) の連続超関数解であることを示す。 □

2.4. μ, ν を $(0, \infty)$ 上のラドン測度とし、 $(0, \infty)$ の部分区間 (a, b) 上で、 u を $(r^{d-1}u')' = r^{d-1}u\mu$ の解、 v を $(r^{d-1}v')' = r^{d-1}v\nu$ の解であるとし、更に (a, b) 上 $u \neq 0$ とする。このとき

命題2.1. $w = v/u$ は (a, b) 上可成り滑らかで、次の方程式の解である：

$$(2.16) \quad (r^{d-1}u^2w')' = r^{d-1}u^2w(\nu - \mu),$$

即ちすべてのテスト関数 $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ に対して次式が成立する：

$$\int_a^b w (r^{d-1}u^2\varphi')' dr = \int_a^b r^{d-1}u^2w\varphi d(\nu - \mu)(r).$$

証明. u, v と共に w は可成り滑らかなである。 $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$ を任意にとるとき、部分積分と、 $\varphi u, \varphi v$ が可成り滑らかなことから、補題2.1を使って

$$\begin{aligned} \int_a^b w (r^{d-1}u^2\varphi')' dr &= - \int_a^b w' (r^{d-1}u^2\varphi') dr = - \int_a^b \frac{v'u - v u'}{u^2} (r^{d-1}u^2\varphi') dr \\ &= - \int_a^b \{v' (r^{d-1}\varphi'u) - u' (r^{d-1}\varphi'v)\} dr \\ &= - \int_a^b [v' \{r^{d-1}(\varphi u)' - r^{d-1}\varphi u'\} - u' \{r^{d-1}(\varphi v)' - r^{d-1}\varphi v'\}] dr \\ &= - \int_a^b \{v' (r^{d-1}(\varphi u)') - u' (r^{d-1}(\varphi v)')\} dr \\ &= \int_a^b r^{d-1}v\varphi u d\nu - \int_a^b r^{d-1}u\varphi v d\mu = \int_a^b r^{d-1}u^2w\varphi d(\nu - \mu)(r). \end{aligned} \quad \square$$

定理2.3. $(0, \infty)$ 上 (2.16) の可成り滑らかな解 w と $(0, \infty)$ の任意の点 c, \bar{c} をとるとき、 $c^{d-1}u(c)^2w'(c) = z_0, w(\bar{c}) = w_0$ とおくと w は次の形にあらわされる：

$$(2.17) \quad \begin{cases} z(r) = z_0 + \int_{I(c,r)} t^{d-1}u(t)^2w(t) d(\nu - \mu)(t), \\ w(r) = w_0 + \int_{\bar{c}}^r s^{1-d}u(s)^{-2}z(s) ds. \end{cases}$$

従って (2.17) の w の式に z を代入して再帰公式

$$(2.18) \quad \begin{aligned} w(r) &= w(\bar{c}) + \int_{\bar{c}}^r s^{1-d}u(s)^{-2} \\ &\times \left(c^{d-1}u(c)^2w'(c) + \int_{I(c,s)} t^{d-1}u(t)^2w(t) d(\nu - \mu)(t) \right) ds \end{aligned}$$

がえられる。とくに (2.17) の第 2 式を微分したものと第 1 式から, w の角点集合 (可算集合) を除いて次の表示公式が出る:

$$(2.19) \quad r^{d-1}u(r)^2w'(r) = c^{d-1}u(c)^2w'(c) + \int_{I(c,r)} t^{d-1}u(t)^2w(t)d(\nu - \mu)(t).$$

証明. (2.17) の第 1 式は z の定義式故, (2.17) の第 2 式が成立することを示せばよい。その為 (2.17) の第 2 式の右辺を \bar{w} として $w \equiv \bar{w}$ を示せばよい。 \bar{w} が可成り滑らかなことはすぐわかる。任意の $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ に対して

$$\begin{aligned} \int_a^b \bar{w} (r^{d-1}u^2\varphi')' dr &= - \int_a^b r^{d-1}u^2\varphi' d\left(w_0 + \int_c^r s^{1-d}u^{-2}z ds\right) = - \int_a^b \varphi' z dr \\ &= \int_a^b \varphi d\left(z_0 + \int_{I(c,r)} t^{d-1}u(t)^2w(t)d(\nu - \mu)(t)\right) = \int_a^b r^{d-1}u^2w\varphi d(\nu - \mu)(r) \end{aligned}$$

となる。 w は (2.16) をみたすので, $h = w - \bar{w}$ とおくと, h は可成り滑らかで $(r^{d-1}u^2h')' = 0$ をみたす。従って, $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ に対して

$$\int_a^b (r^{d-1}u^2h')\varphi' dr = \int_a^b h'(r^{d-1}u^2\varphi') dr = - \int_a^b h(r^{d-1}u^2\varphi')' dr = 0$$

となる。 (a,b) の任意の点 α, β ($\alpha < \beta$) を $(|\nu| + |\mu|)$ -通常点とし, $0 < 2\eta < \beta - \alpha$ にとり, (a,b) 上の連続関数 φ を $[\alpha, \beta]$ の外では 0, $[\alpha + \eta, \beta - \eta]$ 上 1, 残りでは線形となるように作る。 $\varepsilon > 0$ を十分小にとり, φ_ε を φ の正則化とすると, $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(a,b)$ なので $\int_a^b (r^{d-1}u^2h')\varphi_\varepsilon' dr = 0$ となる。 $\varepsilon \downarrow 0$ とすることにより

$$\int_a^b (r^{d-1}u(r)^2h'(r))\varphi'(r) dr = 0$$

となる。 h' は α, β で連続で $(\alpha, \alpha + \eta), (\beta - \eta, \beta)$ で φ' は夫々 $1/\eta, -1/\eta$, そこ以外 (a,b) 上 0 なので, 上式で $\eta \downarrow 0$ とすることにより, $r^{d-1}u(r)^2h'(r)$ が α と β で同じ値をとることがわかる。つまり $r^{d-1}u(r)^2h'(r)$ は $(|\nu| + |\mu|)$ -特異点 (可算個) 以外では一定であり, $w'(c)$ を調べて, $h'(c) = 0$ がわかるから, $r^{d-1}u^2h' = 0$ となり, $h' = 0$ となる。 $h(\bar{c}) = 0$ もわかるから, $h \equiv 0$ 即ち $w \equiv \bar{w}$ となる。□

3. 陪単位

3.1. $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度 μ をとり, その $(0, \infty)$ 上の半径成分も又 μ とかく: $d\mu(r\xi) = r^{d-1}d\mu(r)d\xi$ ($r \in (0, \infty), \xi \in S^{d-1}$). $(r^{d-1}y')' = r^{d-1}y\mu$ の解 f_μ で $(f_\mu(1), f_\mu'(1)) = (0, -1)$ となるものが唯一つ存在する。 $f_\mu(1) = 0$ だから必然的に $f_\mu'(1)$ が存在する ((2.10) 参照)。 f_μ を $(0, 1]$ 上で考えて μ -陪単位と呼ぶ。ハルナック不等式により $(0, 1)$ 上 f_μ が負の値を取らぬと $f_\mu > 0$ となる。 f_μ が $(0, 1)$ 上負の値を取るとき μ は楕円型, そうでないとき μ を非楕円型と言う。定数 0 は $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度と考えることもできる。0-陪単位 f_0 は $(r^{d-1}f_0')' = 0$ を解いて

$$f_0(r) = \begin{cases} \frac{1}{d-2} \left(\frac{1}{r^{d-2}} - 1 \right) & (d \geq 3), \\ \log \frac{1}{r} & (d = 2) \end{cases}$$

となることがわかるので, 0 は非楕円型である。色々の μ に対する f_μ を互いに比較する必要がしばしば起きる。その時次の結果は有用である。 ν も μ 同様 $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度とする。

定理3.1 (比較原理). $(0, 1]$ 上 $\mu \leq \nu$ (又は $\mu < \nu$) で $(0, 1)$ 上 $f_\mu > 0$ とする。 $(0, 1)$ 上 f_ν/f_μ は減少関数 (又は真に減少関数) で $f_\nu(r)/f_\mu(r) \downarrow 1$ ($r \uparrow 1$) である。とくに $(0, 1)$ 上 $f_\nu \geq f_\mu$ (又は $f_\nu > f_\mu$) となる。

証明. (0,1) 上 $w = f_\nu/f_\mu$ とおくと, 命題2.1により, w は

$$(r^{d-1}f_\mu^2 w')' = r^{d-1}f_\mu^2 w (\nu - \mu)$$

の解となる。($|\nu|+|\mu|$)-通常点 $a \in (0,1)$ を任意にとる. ついで($|\nu|+|\mu|$)-通常点 $r \in (0,a)$ を任意にとると (2.19) により

$$r^{d-1}f_\mu(r)^2 w'(r) = a^{d-1}f_\mu(a)^2 w'(a) - \int_{(r,a)} t^{d-1}f_\mu(t)^2 w(t) d(\nu - \mu)(t)$$

となる. $f_\mu(t)^2 w(t) = f_\mu(t)f_\nu(t) \rightarrow 0 (t \uparrow 1)$, $f_\mu(a)^2 w'(a) = f_\nu'(a)f_\mu(a) - f_\nu(a)f_\mu'(a) \rightarrow 0 (a \uparrow 1)$ に注意して, 上式で $a \uparrow 1$ とすると

$$(3.1) \quad r^{d-1}f_\mu(r)^2 w'(r) = - \int_{(r,1)} t^{d-1}f_\mu(t)^2 w(t) d(\nu - \mu)(t)$$

となる. もし f_ν が (0,1) で負の値を取るとすると, $f_\nu(b) = 0$ かつ $(b,1)$ 上 $f_\nu > 0$ となる $b \in (0,1)$ が定まる. (3.1) から $[b,1)$ 上の($|\nu|+|\mu|$)-通常点 r で $w'(r) \leq 0$ となる. しかも

$$\lim_{r \uparrow 1} w(r) = \lim_{r \uparrow 1} \frac{(f_\nu(r) - f_\nu(1))/(r-1)}{(f_\mu(r) - f_\mu(1))/(r-1)} = \frac{f_\nu'(1)}{f_\mu'(1)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

なので $w(1) = 1$ と定めて $w \in C(0,1]$ となる. そこで $b \leq r_1 < r_2 \leq 1$ を任意にとると

$$w(r_2) - w(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} w'(r) dr \leq 0$$

だから, w は $[b,1]$ 上減少関数となる. すると $0 = w(b) \geq w(1) = 1$ と言う矛盾が出るから, 結局, (0,1) 上 $f_\nu > 0$ でないといけない. 再び (3.1) により($|\nu|+|\mu|$)-特異点(可算個)を除くと, $\mu \leq \nu$ (又は $\mu < \nu$) に従って, $w'(r) \leq 0$ (又は $w'(r) < 0$) となり, w は減少(又は真に減少)となることがわかり, 定理の主張するところがすべて導かれる. □

系3.1. μ が非楕円型で $\mu \leq \nu$ なら ν も非楕円型である.

3.2. μ を非楕円型とし, $\mu \leq \nu$ とすると ν も非楕円型で, f_ν/f_μ は (0,1] 上減少関数で $f_\nu(r)/f_\mu(r) \downarrow 1 (r \uparrow 1)$ であるので $\lim_{r \downarrow 0} f_\nu(r)/f_\mu(r) \in [1, \infty]$ が定まる.

定理3.2 (同位定理). $\lim_{r \downarrow 0} f_\nu(r)/f_\mu(r) < \infty$ となる為の必要十分条件は

$$(3.2) \quad \int \int_{0 < s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 ds d(\nu - \mu)(t) < \infty.$$

証明. (0,1) 上 $w = f_\nu/f_\mu$ とおくと $w \in C(0,1]$ に拡張できて $w(1) = 1$ であり, (3.1) が成り立つことを定理3.1の証明でみた.(3.1) をかきかえて, s が($|\nu|+|\mu|$)-通常点ならば

$$w'(s) = - \int_{(s,1)} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 w(t) d(\nu - \mu)(t)$$

となる. 上式を $[r,1]$ 上 ds で積分して, $w(1) = 1$ を使い, 2重積分になおして,

$$w(r) = 1 + \int \int_{r < s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 w(t) ds d(\nu - \mu)(t)$$

を得る. $w(+0) = \lim_{r \downarrow 0} f_\nu(r)/f_\mu(r)$ を調べたいから, 上式で $r \downarrow 0$ として

$$w(+0) = 1 + \int \int_{0 < s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 w(t) ds d(\nu - \mu)(t)$$

である。 $w(t) \geq 1$ だから、上式から

$$w(+0) \geq \int \int_{0 < s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 ds d(\nu - \mu)(t)$$

となる。故に $w(+0) < \infty$ を仮定すると (3.2) が導かれる。

逆に (3.2) を仮定して、 $w(+0) < \infty$ を出したい。(3.2) より $\rho \in (0, 1)$ を十分に小さく取って固定すれば、任意の $r \in (0, \rho)$ に対して

$$\int \int_{r < s < \rho, s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 ds d(\nu - \mu)(t) < \frac{1}{2}$$

となるように出来る。これと $w(\rho) \leq w(t) \leq w(r)$ ($r \leq t \leq \rho$) により

$$\begin{aligned} w(r) &= 1 + \left(\int \int_{r < s < \rho, s < t < 1} + \int \int_{\rho < s < t < 1} \right) \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 w(t) ds d(\nu - \mu)(t) \\ &= w(\rho) + \int \int_{r < s < \rho, s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 w(t) ds d(\nu - \mu)(t) \\ &\leq w(\rho) + \left(\int \int_{r < s < \rho, s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 ds d(\nu - \mu)(t) \right) w(r) \\ &\leq w(\rho) + w(r)/2 \end{aligned}$$

となる。ゆえに $w(r) \leq 2w(\rho)$ となり $w(+0) \leq 2w(\rho) < \infty$ が示される。 □

3.3. $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の非楕円型回転不変ラドン測度 μ に対して、新らしく同種のラドン測度

$$(3.3) \quad \mu_n = \mu + \frac{n(n+d-2)}{r^2} \lambda \quad (n = 0, 1, \dots)$$

を考える。ただし λ は $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上のルベグ測度である。

$$\mu = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \mu_{n+1} < \dots$$

なので、定理3.1により、各 μ_n も非楕円型であって、 $(0, 1)$ 上

$$(3.4) \quad 0 < f_\mu = f_{\mu_0} < f_{\mu_1} < \dots < f_{\mu_n} < f_{\mu_{n+1}} < \dots$$

となり、更に $f_\mu/f_{\mu_n} = f_{\mu_0}/f_{\mu_n}$ は $(0, 1)$ 上増加で $\uparrow 1$ ($r \uparrow 1$) となるから

$$(3.5) \quad \alpha_n(\mu) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{f_\mu(r)}{f_{\mu_n}(r)} \in [0, 1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が定義できる。 $\alpha_n(\mu)$ を μ の n 位特異性指数 ($n = 1, 2, \dots$)、とくに $\alpha(\mu) = \alpha_0(\mu)$ を μ の特異性指数と呼ぶ。(3.4) より直ちに

$$(3.6) \quad 1 > \alpha(\mu) = \alpha_1(\mu) \geq \alpha_2(\mu) \geq \dots \geq \alpha_n(\mu) \geq \alpha_{n+1}(\mu) \geq \dots$$

となることがわかる。この特異性指数列 $\{\alpha_n(\mu)\}$ のもつ重要な性質として次の結果が成り立つ。

定理3.3. $\alpha(\mu) > 0$ ならば $\alpha_n(\mu) > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) であり, $\alpha(\mu) = 0$ ならば $\alpha_n(\mu) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) である。

証明. $\mu_1 - \mu_0 = (d-1)r^{-2}\lambda$ であるから, 定理3.2により $\alpha(\mu) = \alpha_1(\mu) > 0$ は

$$\begin{aligned} & \int \int_{0 < s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 ds d(\mu_1 - \mu_0)(t) \\ &= (d-1) \int \int_{0 < s < t < 1} t^{-2} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 ds dt < \infty \end{aligned}$$

と同値であり, 任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $\mu_n - \mu_0 = n(n+d-2)r^{-2}\lambda$ だから $\alpha_n(\mu) > 0$ は

$$\begin{aligned} & \int \int_{0 < s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 ds d(\mu_n - \mu_0)(t) \\ &= n(n+d-2) \int \int_{0 < s < t < 1} t^{-2} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_\mu(s)}\right)^2 ds dt < \infty \end{aligned}$$

と同値である。上の2つの積分条件は互いに同値だから, $\alpha(\mu) > 0$ と任意の n に対する $\alpha_n(\mu) > 0$ の同値性がわかる。□

3.4. $f_{\mu_n}(r)$ の大きさをできるだけ具体的に評価したい。特に $f_{0n}(r)$ については具体的にわかっている, つまり $(r^{d-1}y')' = r^{d-1}n(n+d-2)r^{-2}y$ を初期値 $(y(1), y'(1)) = (0, -1)$ で具体的にとける:

$$(3.7) \quad f_{0n}(r) = \frac{1}{2n+d-2} \left(\frac{1}{r^{n+d-2}} - r^n \right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

上式は $n = 0$ でも $d \geq 3$ なら正しいが, 即ち $f_{0n}(r) = f_0(r) = (d-2)^{-1}(r^{2-d} - 1)$ であったが, $d = 2$ のときは $f_{0n}(r) = f_0(r) = \log(1/r)$ と修正せねばならなかった。 $f_{\mu_n}(r)$ を f_{0n} と比較することにより, $f_{\mu_n}(r)$ を具体的に評価する式を与える。

定理3.4 (基本評価). 定数 $\kappa \in (1, \infty)$ と点 $R \in (1, \infty)$ を任意に与えるとき, 番号 $\bar{n} = \bar{n}(\mu, \kappa, R)$ が定まって, 次の評価が成り立つ:

$$(3.8) \quad \kappa^{-1}f_{0n}(r) \leq f_{\mu_n}(r) \leq \kappa f_{0n}(r) \quad (r \in [R, 1]; n \geq \bar{n}).$$

証明. $w = f_{\mu_n}/f_{0n}$ とおくと, 定理3.2の証明と同様にして, $r \in (0, 1)$ のとき

$$w(r) - 1 = \int \int_{r < s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_{0n}(t)}{f_{0n}(s)}\right)^2 w(t) ds d\mu(t)$$

が成り立つ。ここで $r \in [R, 1]$ に限定すると

$$\begin{aligned} |w(r) - 1| &\leq \int \int_{r < s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_{0n}(t)}{f_{0n}(s)}\right)^2 w(t) ds d|\mu|(t) \\ &\leq \int \int_{R < s < t < 1} \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_{0n}(t)}{f_{0n}(s)}\right)^2 w(t) ds d|\mu|(t) = \int_{(R, 1)} I(t) w(t) d|\mu|(t) \end{aligned}$$

となる, たゞし

$$I(t) = \int_R^t \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{f_{0n}(t)}{f_{0n}(s)}\right)^2 ds$$

とする, (3.7) に注意すると

$$I(t) = \int_R^t \left(\frac{t}{s}\right)^{d-1} \left(\frac{t^{-n-d+2}-t^n}{s^{-n-d+2}-s^n}\right)^2 ds = \frac{(1-t^{2n+d-2})^2}{t^{2n+d-3}} J(t)$$

となる、ただし

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_R^t \frac{s^{2n+d-3}}{(1-s^{2n+d-2})^2} ds = \left[\frac{1}{2n+d-2} \cdot \frac{1}{1-s^{2n+d-2}} \right]_R^t \\ &= \frac{1}{(2n+d-2)(1-R^{2n+d-2})} \cdot \frac{t^{2n+d-2}-R^{2n+d-2}}{1-t^{2n+d-2}} \end{aligned}$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1-t^{2n+d-2}}{t^{2n+d-3}} \cdot \frac{1}{(2n+d-2)(1-R^{2n+d-2})} (t^{2n+d-2}-R^{2n+d-2}) \\ &\leq \frac{t}{(2n+d-2)(1-R^{2n+d-2})} \end{aligned}$$

となる。これを $|w(r)-1|$ の評価式に代入して

$$|w(r)-1| \leq \int_{(R,1)} \frac{t}{(2n+d-2)(1-R^{2n+d-2})} w(t) d|\mu|(t)$$

である。こゝで

$$M(R,n) := \int_{(R,1)} \frac{t}{(2n+d-2)(1-R^{2n+d-2})} d|\mu|(t) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、 $\bar{n} = \bar{n}(\mu, \kappa, R)$ を十分大きくとると、すべての $n \geq \bar{n}$ に対して

$$\kappa^{-1} \leq \frac{1-2M(R,n)}{1-M(R,n)} \leq \frac{1}{1-M(R,n)} \leq \kappa$$

となる様になる。 $K = \max_{t \in [R,1]} w(t)$ とおくと $|w(r)-1| \leq M(R,n)K$ となり、 $w(r) \leq 1 + M(R,n)K$ ($r \in [R,1]$)、従って $K \leq 1 + M(R,n)K$ 又は $K \leq 1/(1-M(R,n))$ となり、これから、 $|w(r)-1| \leq M(R,n)/(1-M(R,n))$ となる。故に

$$\kappa^{-1} \leq \frac{1-2M(R,n)}{1-M(R,n)} \leq w(r) \leq \frac{1}{1-M(R,n)} \leq \kappa \quad (r \in [R,1]; n \geq \bar{n})$$

となるが、これは (3.8) に他ならない。 □

4. 単位

4.1. μ は非楕円型とすると、 $(0,1)$ 上 μ -陪単位 $f_\mu > 0$ である。そのとき、任意の $R \in (0,1)$ を定めて、 f_μ の次のダランベール変換を考える：

$$(4.1) \quad e_{\mu R}(r) = f_\mu(r) \int_R^r \frac{dt}{t^{d-1} f_\mu(t)^2} \quad (r \in [R,1]).$$

初期値問題の解の一意性により $e_{\mu R}$ は $(0, \infty)$ 上の $(r^{d-1}y')' = r^{d-1}y\mu$ の解であって、 $[R,1)$ 上では (4.1) の表示をもつものと理解する。これは $(R,1)$ 上次の境界値をもつ：

$$(4.2) \quad (e_{\mu R}(R), e_{\mu R}(1)) = (0,1).$$

事実、 $e_{\mu R}(R) = 0$ は明らかなので、 $e_{\mu R}(1) = 1$ を示す。(4.1) の両辺を $f_\mu(r)$ でわって、 $(R,1)$ の μ -通常点で微分

することにより

$$e_{\mu R}^I(r)f_{\mu}(r) - e_{\mu R}(r)f_{\mu}^I(r) = r^{1-d}$$

となる。 $(f_{\mu}(1), f_{\mu}^I(1)) = (0, -1)$ なので、上式で $r \uparrow 1$ とすることにより、 $e_{\mu R}(1) = 1$ が結論できる。

上の考察によりわかることは、 $\varepsilon \in (0, 1)$ をどんなに小さくとっても、 $[\varepsilon, 1]$ 上 $(r^{d-1}y')' = r^{d-1}y\mu$ の正の解の存在することである。これにより次の2性質が成り立つ。まず、 $(\varepsilon, 1)$ 上最小値原理が成り立つ： $(r^{d-1}y')' = r^{d-1}y\mu$ の解 y について $y(\varepsilon)$ と $y(1)$ が非負なら y は $(\varepsilon, 1)$ 上非負である。ついで、ディリクレ問題の可解性が成り立つ：任意の実数の組 (α, β) に対して $(r^{d-1}y')' = r^{d-1}y\mu$ で $(y(\varepsilon), y(1)) = (\alpha, \beta)$ となるものが唯一存在する。この見方をすれば、 $e_{\mu R}$ は境界値 (4.2) で定まる唯一の解であると定めてもよい。

最小値原理により、あるいは直接 (4.1) の形から、 $(0, 1]$ 上 $\{e_{\mu R}\} \uparrow (R \downarrow 0)$ であるから、ハルナック原理により $(0, 1]$ 上 $\lim_{R \downarrow 0} e_{\mu R}$ は $(0, 1]$ の各コンパクト集合上解に一様収束するか、又は $+\infty$ に一様収束する。前者の成り立つとき μ は双曲型、後者のとき放物型であると言う。故に $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変ラドン測度の族は、 $B^d \setminus \{0\}$ に限定して、次の様に分類される：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{楕円型} \\ \text{非楕円型} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{放物型} \\ \text{双曲型} \end{array} \right.$$

さて μ が双曲型ならば

$$(4.3) \quad e_{\mu}(r) = \lim_{R \downarrow 0} e_{\mu R}(r) \quad (r \in (0, 1])$$

とおき、 e_{μ} を μ -単位という。特に $e_{\mu}(1) = 1$ である。(4.1) と (4.3) から直ちに次の結論が出る：

命題4.1. 非楕円型の μ が双曲型となるための必要十分条件は

$$(4.4) \quad \int_0^r \frac{dt}{t^{d-1}f_{\mu}(t)^2} < \infty$$

が1つの、従ってすべての $r \in (0, 1)$ について成り立つことである。そのとき

$$(4.5) \quad e_{\mu}(r) = f_{\mu}(r) \int_0^r \frac{dt}{t^{d-1}f_{\mu}(t)^2} \quad (r \in (0, 1)).$$

直接に (4.5) から、両辺を $f_{\mu}(r)$ でわって、 μ -通常点で微分して、 $r \uparrow 1$ とすることにより、 $e_{\mu R}(1) = 1$ を導いたと同様にして、 $e_{\mu}(1) = 1$ を出すこともできる。

4.2. μ -陪単位 f_{μ} は $B^d \setminus \{0\}$ の外側の境界 S^{d-1} で0となる $B^d \setminus \{0\}$ 上の正の μ -調和関数であり、 μ -単位 e_{μ} は $B^d \setminus \{0\}$ の内側の境界 $\{0\}$ で“境界値0”となる $B^d \setminus \{0\}$ 上の正の μ -調和関数である。勿論後者の“境界値0”は実際の0となるわけではない(実際の境界値は ∞ となることもある。ただし、 $\lim_{r \downarrow 0} e_{\mu}(r)/f_{\mu}(r) = 0$ ではある)。しかし e_{μ} は $\{0\}$ で0となる気分の挙動であると考え、以下の所論が理解しやすい。

関数 u がある $\{\varepsilon < |x| < 1\}$ ($\varepsilon \in (0, 1)$) で定義されており、ある $\eta \in (\varepsilon, 1)$ と正数 C があって、 $\{\eta < |x| < 1\}$ 上 $u \leq Cf_{\mu}$ となるとき、 $u < f_{\mu}$ と記すことにする。 $u \geq 0$ なら u は S^{d-1} で境界値0である。又 u がある $\{0 < |x| < \varepsilon\}$ ($\varepsilon \in (0, 1)$) で定義された関数で、ある $\eta \in (0, \varepsilon)$ と正数 C があって、 $\{0 < |x| < \eta\}$ 上 $u \leq Ce_{\mu}$ となるとき、 $u < e_{\mu}$ と記すことにする。 $u \geq 0$ なら u は $\{0\}$ で“境界値0”となる訳である。

さて簡単の為 $B^d \setminus \{0\}$ を Ω と記すことにする： $\Omega = B^d \setminus \{0\}$ 。 $H_{\mu}(\Omega)$ に含まれる非負関数の全体を $H_{\mu}^+(\Omega)$ とかくことにする。 $u \in H_{\mu}^+(\Omega)$ に対して $u < e_{\mu}$ なら、 u はたしかに $\{0\}$ で“0となる”と言って良いことが、次の結果

により了解される。

補題4.1. $u \in H_\mu^+(\Omega)$ が $u \triangleleft f_\mu$ かつ $u \triangleleft e_\mu$ なら $u \equiv 0$ である。

証明. u の代わりに u の正数倍を考えるとよいから、 $0 < |x| < \eta$ 上 $u(x) \leq e_\mu(x) (= e_\mu(|x|))$ としてよい。 $u \triangleleft f_\mu$ から S^{d-1} における u の境界値は 0 となることに注意して、それぞれの境界値を較らべて、最小値の原理から $\eta \leq |x| \leq 1$ 上 $u(x) \leq e_\mu(x)$ だから、結局 Ω 上 $u \leq e_\mu$ である。任意の $R \in (0, 1)$ を取るとき、境界値を較らべて、再度最小値の原理を使うと、 $R \leq |x| \leq 1$ 上 $e_{\mu R}(x) \leq e_\mu(x) - u(x)$ となることがわかる。 $R \downarrow 0$ として $e_\mu \leq e_\mu - u$ となり、 $u \equiv 0$ がわかる。□

$H_\mu^+(\Omega)$ の元 0 は無論、 $0 \triangleleft f_\mu, 0 \triangleleft e_\mu$ であるが、逆にこの性質をもつ $H_\mu^+(\Omega)$ の元は 0 のみであることが示された。これに基づいて次の結果が出る：

定理4.1 (分解定理). 任意の $u \in H_\mu^+(\Omega)$ は唯一通りに $u = u_0 + u_1$ ($u_0 \in H_\mu^+(\Omega)$ で $u_0 \triangleleft e_\mu$, $u_1 \in H_\mu^+(\Omega)$ で $u_1 \triangleleft f_\mu$) の形に分解される。

証明. 任意に $0 < R < S < 1$ をとり、 u_{RS} を $R < |x| < S$ で μ -調和、 $R \leq |x| \leq S$ で連続、 $|x| = R$ 上 $u_{RS} = 0$ かつ $|x| = S$ 上 $u_{RS} = u$ となるものとする。最小値原理とハルナック原理で $u_{RS} \downarrow u_R$ ($S \uparrow 1$) となる $u_R \in H_\mu^+(R < |x| < 1)$ が定まる。次に v_R を $R < |x| < 1$ 上 μ -調和、 $R \leq |x| \leq 1$ 上連続、 $|x| = R$ 上 $v_R = u$ 、かつ $|x| = 1$ 上 $v_R = 0$ となるものとする。すると最小値原理より $0 \leq u - u_{RS} \leq v_R$ だから $S \uparrow 1$ として $0 \leq u - u_R \leq v_R$ となる。これから S^{d-1} 上の境界値として $u - u_R = 0$ となる。再び最小値原理とハルナック原理により $u_R \uparrow u_0$ ($R \downarrow 0$) となる $u_0 \in H_\mu^+(\Omega)$ が定まる。 $R \in (0, 1/2)$ として、最小値原理により

$$u_R(x) \leq \left\{ \left(\max_{|x|=1/2} u \right) / e_\mu(1/2) \right\} e_\mu(x) \quad (R \leq |x| \leq 1/2)$$

だから、上の e_μ の係数を C として、 $R \downarrow 0$ とすると $u_0(x) \leq C e_\mu(x)$ ($0 < |x| < 1/2$) となり $u_0 \triangleleft e_\mu$ である。そこで $u - u_0 = u_1$ とおくと $u_1 \in H_\mu^+(\Omega)$ で、 S^{d-1} 上の境界値 $u - u_R = 0$ だから、 $R \downarrow 0$ として S^{d-1} 上の境界値 $u - u_0 = 0$ となり、 u_1 は S^{d-1} 上境界値 0 をとる。すると、最小値原理で、例えば

$$u_1(x) \leq \left\{ \left(\max_{|x|=1/2} u \right) / f_\mu(1/2) \right\} f_\mu(x) \quad (1/2 < |x| < 1)$$

となるから $u_1 \triangleleft f_\mu$ である。分解 $u = u_0 + u_1$ の一意性は補題4.1からわかる。□

4.3. $0 \leq \rho < 1$ と $\rho < |y| < 1$ を任意にとる。 $\{\rho < |x| < 1\}$ 上の関数 (値 ∞ も許す) $G_{\mu\rho}$ が $\{\rho < |x| < 1\}$ 上の μ -ポテンシャル即ち正值 μ -優調和で、その最大 μ -調和劣関数が 0 となるもの) で、超関数の意味で $\{\rho < |x| < 1\}$ 上

$$(-\Delta + \mu)G_{\mu\rho}(\cdot, y) = \delta_y \quad (y \text{ におけるディラック測度})$$

となるとき、 $G_{\mu\rho}(\cdot, y)$ を y に極をもつ $\{\rho < |x| < 1\}$ 上の μ -グリーン関数と言う。 μ -グリーン関数は対称となることがわかるので、2変数の関数 $G_{\mu\rho}(\cdot, \cdot)$ とみて、これを μ -グリーン核とも言う。 $G_{\mu\rho}(x, x) = \infty$ (対角線挙動の詳細は [2], [12] 等参照) で、2変数関数として広義連続であり、対角線を除いて2変数関数として有限値連続である。

$0 < R < 1$ の時は $s_R(x) = \min(f_\mu(|x|), e_{\mu R}(|x|))$ で s_R を定めると、これが $\{R < |x| < 1\}$ 上のポテンシャルである。エルベの定理により、 μ -ポテンシャルの存在と μ -グリーン関数の存在は同値なので (例えば [4] 参照)、 $0 < R < 1$ のとき $G_{\mu R}(\cdot, \cdot)$ は常に存在して、 $\{R < |x| < 1\}$ の境界で $G_{\mu R}(\cdot, y) = 0$ となる。 $G_{\mu 0}$ 即ち $\Omega = \{0 < |x| < 1\}$ の μ -グリーン関数を簡単に G_μ と記そう。すると

命題4.2. Ω 上 μ -グリーン関数が存在するための必要十分条件は μ が双曲型となることである。

証明. 上でも使った, Ω 上の μ -ポテンシャル s の存在と μ -グリーン関数 G_μ の存在が同値となることを利用する. まず Ω 上 μ -ポテンシャル s があつたとする. $0 < R < 1/2 < S < 1$ を任意にとり, $(r^{d-1}y')' = r^{d-1}y\mu$ の解 g_{RS} で $g_{RS}(R) = 0$, $g_{RS}(S) = \inf_{x=S} s(x)$ となるものをとると, 最小値原理とハルナック原理により $(R, S]$ 上 $0 < g_{RS} \leq s$ で $g_{RS} \uparrow g_S (R \downarrow 0)$ となる解 g_S が定まり, $(0, S]$ 上 $0 < g_S \leq s$ である. $h_S = (s(1/2)/g_S(1/2))g_S$ とおくと, $(0, 1/2]$ 上 $0 < h_S \leq s$ で $h_S(1/2) = s(1/2)$ なので, ハルナック不等式とアルゼラ・アスコリの定理により部分列 $S_n \uparrow 1$ に対して, $(0, 1)$ 上広義一様に $h_{S_n} \rightarrow h (n \rightarrow \infty)$ となる解 h が定まり, $(0, 1)$ 上 $h > 0$ となり, $(0, 1/2]$ 上 $0 < h \leq s$ である. もし $h(1) = 0$ なら最小値原理により $(1/2, 1)$ 上も $h \leq s$ となり, 従って $(0, 1)$ 上 $0 \leq h \leq s$ となり, $h \equiv 0$ でなければならぬと言う矛盾がでる. ゆえに $h(1) > 0$ でないといけなから, $(R, 1)$ 上 $e_{\mu R} \leq h(1)^{-1}h$ となることにより, $e_\mu = \lim_{R \downarrow 0} e_{\mu R} \leq h(1)^{-1}h$ が存在するので, μ は双曲型である. 逆に μ を双曲型とすると, $s(x) = \min(f_\mu(|x|), e_\mu(|x|))$ を Ω で考えることが出来る. これが μ -ポテンシャルであることが補題4.1よりわかる. \square

以下特に断らぬかぎり常に μ は双曲型と仮定するので, μ -グリーン関数 G_μ が Ω 上に存在する. しかも

$$(4.6) \quad G_\mu(x, y) = \lim_{R \downarrow 0} G_{\mu R}(x, y)$$

であることがすぐにわかるので, $G_\mu(\cdot, y) \triangleq e_\mu$ かつ $G_\mu(\cdot, y) \triangleq f_\mu$ である.

4.4. 特異性指数列 $\{\alpha_n(\mu) : n = 1, 2, \dots\}$ を3.3で μ_n -陪単位 f_{μ_n} を使って導入した. 今度はこれらの μ_n -単位 e_{μ_n} を使う同種の表示を導く. その為の準備として, 又後程くりかえし利用する簡単なが重要な次の不等式をのべる:

補題4.2 (混合不等式). 各 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$(4.7) \quad e_{\mu_n}(r) \leq \frac{f_\mu(r)}{f_{\mu_n}(r)} e_\mu(r) \quad (0 < r \leq 1).$$

証明. 比較原理により (定理3.1), $f_\mu(t)/f_{\mu_n}(t) \leq f_\mu(r)/f_{\mu_n}(r) (t \leq r)$ であるので,

$$\begin{aligned} e_{\mu_n}(r) &= f_{\mu_n}(r) \int_0^r \frac{dt}{t^{d-1}f_{\mu_n}(t)^2} = f_{\mu_n}(r) \int_0^r \frac{1}{t^{d-1}f_\mu(t)^2} \left(\frac{f_\mu(t)}{f_{\mu_n}(t)}\right)^2 dt \\ &\leq f_{\mu_n}(r) \int_0^r \frac{1}{t^{d-1}f_\mu(t)^2} \left(\frac{f_\mu(r)}{f_{\mu_n}(r)}\right)^2 dt \\ &= \frac{f_\mu(r)}{f_{\mu_n}(r)} f_\mu(r) \int_0^r \frac{dt}{t^{d-1}f_\mu(t)^2} = \frac{f_\mu(r)}{f_{\mu_n}(r)} e_\mu(r). \end{aligned} \quad \square$$

命題4.3. n 位特異性指数 $\alpha_n(\mu)$ は次の表示をもつ:

$$(4.8) \quad \alpha_n(\mu) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{e_{\mu_n}(r)}{e_\mu(r)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

証明. まず $\alpha_n(\mu) = 0$ の場合には (4.7) と (3.5) により

$$0 \leq \frac{e_{\mu_n}(r)}{e_\mu(r)} \leq \frac{f_\mu(r)}{f_{\mu_n}(r)} \downarrow \alpha_n(\mu) = 0 \quad (r \downarrow 0)$$

だから (4.8) が直ちに従う. 次に $\alpha_n = \alpha_n(\mu) > 0$ の場合を考える. 任意に $\tau > 1$ を与える. $f_\mu(t)/f_{\mu_n}(t) \downarrow \alpha_n(t \downarrow 0)$ だから, 十分小さな $\rho > 0$ をとると, $0 < t < \rho$ であるかぎり

$$\alpha_n \leq \frac{f_\mu(t)}{f_{\mu_n}(t)} \leq \tau \alpha_n$$

となる. ゆえに $0 < t < r < \rho$ であるかぎり

$$\alpha_n^2/f_\mu(t)^2 \leq 1/f_{\mu n}(t)^2 \leq \tau^2 \alpha_n^2/f_\mu(t)^2$$

となる。これから

$$\alpha_n^2 \int_0^r \frac{dt}{t^{d-1}f_\mu(t)^2} \leq \int_0^r \frac{dt}{t^{d-1}f_{\mu n}(t)^2} \leq \tau^2 \alpha_n^2 \int_0^r \frac{dt}{t^{d-1}f_\mu(t)^2}$$

となり、これと $(1/\tau\alpha_n)f_\mu(r) \leq f_{\mu n}(r) \leq (1/\alpha_n)f_\mu(r)$ とを掛け合わせて

$$\frac{\alpha_n}{\tau} e_\mu(r) \leq e_{\mu n}(r) \leq \tau^2 \alpha_n e_\mu(r)$$

となる。上の両辺を $e_\mu(r)$ でわって $r \downarrow 0$ の極限を考える：

$$\frac{\alpha_n}{\tau} \leq \liminf_{r \downarrow 0} \frac{e_{\mu n}(r)}{e_\mu(r)} \leq \limsup_{r \downarrow 0} \frac{e_{\mu n}(r)}{e_\mu(r)} \leq \tau^2 \alpha_n.$$

こゝで $\tau \downarrow 1$ とすることにより (4.8) が従う。 □

5. グリーン関数のフーリエ級数展開

5.1. 単位球面 $S^{d-1} = \{|\xi|=1\}$ 上の自然なリーマン計量に関する体積要素、即ち S^{d-1} 上の曲面要素を $d\sigma(\xi) = d\xi$ とかき、ラプラス・ベルトラミ作用素を Δ_ξ とする。 Δ_ξ の固有値 $-n(n+d-2)$ に対する固有関数 $S_n(\xi)$ 、即ち $\Delta_\xi S_n(\xi) = -n(n+d-2)S_n(\xi)$ となる S^{d-1} 上の関数が n 位球関数で、その全体は $L_2(S^{d-1}) = L_2(S^{d-1}, d\sigma)$ の有限 $N(n)$ 次元の部分空間となる。この部分空間の正規直交基底 $\{S_{nj}(\xi); j=1, \dots, N(n)\}$ を任意に1つ定め、以下固定する。こゝで $N(n)$ は具体的には $N(n) = (2n+d-2)\Gamma(n+d-2)/\Gamma(n+1)\Gamma(d-1)$ ($n \geq 1$), $N(0) = 1$ であるが、我々の必要とする所は評価

$$(5.1) \quad N(n) \leq 2^{d-1} n^{d-2} \quad (n = 1, 2, \dots; N(0) = 1)$$

である。 $S_{nj}(\xi)$ の取り方にかゝらず常に加法定理

$$(5.2) \quad \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta) = \frac{N(n)}{\sigma_d} P_n(\xi \cdot \eta)$$

が成り立つ。こゝで $\sigma_d = \int_{S^{d-1}} d\sigma(\xi)$ 、 $P_n(t)$ は d 次元 n 位ルジャンドル多項式である。 $P_n(t)$ は具体的には、例えばロドリゲスの公式

$$P_n(t) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{d-1}{2}\right)} (1-t^2)^{\frac{3-d}{2}} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^{\frac{n+d-3}{2}} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

でも与えられるし、又次の母関数表示からも決定できる：

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(n) P_n(t) x^n = \frac{1-x^2}{(1+x^2-2xt)^{d/2}} \quad (0 \leq x < 1, |t| \leq 1).$$

シュワルツの不等式を (5.2) に施せば、次の評価式が得られる ($P_n(1) = 1$ に注意)：

$$(5.3) \quad \frac{N(n)}{\sigma_d} |P_n(\xi \cdot \eta)| \leq \sum_{j=1}^{N(n)} |S_{nj}(\xi)| |S_{nj}(\eta)| \leq \frac{N(n)}{\sigma_d}.$$

以下 $\{S_{nj}(\xi); j=1, \dots, N(n); n=0, 1, \dots\}$ を固定する。これが $L_2(S^{d-1})$ の完全正規直交系となることが示される。これによりグリーン関数 $G_\mu(r\xi, s\eta)$ をフーリエ展開し、その絶対一様収束性を論ずる。球関数の詳細については、[9]、[15]等を参照する。球関数のフーリエ級数の絶対一様収束性に関する一般論については[13]を参照せよ。

5.2. 本論文の主目的は次の結果を証明することである：

主要定理. $R^d \setminus \{0\}$ 上の任意の回転不変ラドン測度 μ に対して $B^d \setminus \{0\}$ 上グリーン関数 G_μ が存在すると、 G_μ は

$$(5.4) \quad G_\mu(r\xi, s\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e_{\mu n}(r) f_{\mu n}(s) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta) \right) \quad (0 < r < s \leq 1)$$

の形の表示をもつ。こゝで右辺の級数は $(\xi, \eta) \in S^{d-1} \times S^{d-1}$ の関数として絶対かつ一様に収束する。更に任意の $0 < R < 1$ に対して定数 $p = p(R) > 0$ と番号 $q = q(R)$ が定まって、すべての $0 < r \leq R < s \leq 1$ と $(\xi, \eta) \in S^{d-1} \times S^{d-1}$ に対して

$$(5.5) \quad e_{\mu n}(r) f_{\mu n}(s) \sum_{j=1}^{N(n)} |S_{nj}(\xi)| |S_{nj}(\eta)| \leq p e_\mu(r) n^{d-2} \left(\frac{R}{s}\right)^n \quad (n \geq q).$$

又任意の $0 < R < S < 1$ に対して定数 $p = p(R, S) > 0$ と番号 $q = q(R)$ が定まって、すべての $R \leq r < S \leq s \leq 1$ と $(\xi, \eta) \in S^{d-1} \times S^{d-1}$ に対して

$$(5.6) \quad e_{\mu n}(r) f_{\mu n}(s) \sum_{j=1}^{N(n)} |S_{nj}(\xi)| |S_{nj}(\eta)| \leq p f_\mu(s) n^{d-2} \left(\frac{r}{S}\right)^n \quad (n \geq q).$$

証明のプラン. 上記定理の証明の心臓部分は次の公式を示すことにある： $0 < r < s \leq 1$ と $1 \leq j \leq N(n)$ および $1 \leq i \leq N(m)$ に対して

$$(5.7) \quad \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} G_\mu(r\xi, s\eta) S_{nj}(\xi) S_{mi}(\eta) d\xi d\eta = \delta_{nj, mi} e_{\mu n}(r) f_{\mu m}(s) \quad (0 < r < s \leq 1)$$

となる、こゝに $\delta_{nj, mi}$ は 2 重添字 $nj = mi$ なら 1, $nj \neq mi$ (即ち $n \neq m$ 又は $j \neq i$) なら 0 を意味する。これを使って、 ξ 又は η についての G_μ の $L_2(S^{d-1})$ におけるフーリエ展開が (5.4) であることがわかる。(5.5) 又は (5.6) により、このフーリエ展開が絶対かつ一様に収束することがわかる。よって (5.5) と (5.6) を証明することで、主要定理の証明が完了する。

5.3. 最初 (5.7) の証明に必要な技術的な準備をする。任意に $0 < R < 1$ を固定して、球環 $A = \{R < |x| < 1\}$ を考える。任意の $u \in H_\mu(A) \cap C(\bar{A})$ で $|x| = R$ 上 $u(x) = 0$ となるものを取り、各 $R \leq s < 1$ に対して \bar{A} 上の関数

$$U_s(x) = \int_{S^{d-1}} \frac{G_{\mu R}(x, s\eta)}{f_\mu(s)} u(\eta) d\eta \quad (x \in \bar{A})$$

を考える。そのとき次の結果が成り立つ。

補題5.1. \bar{A} 上の関数族 $\{U_s\}_{R \leq s < 1}$ は \bar{A} 上一様有界で、 $\lim_{s \uparrow 1} U_s(x) = u(x)$ ($x \in A$) となる。

証明. u の 0-調和対応物 v を考える。即ち $v \in H_0(A) \cap C(\bar{A})$ で ∂A 上 $v = u$ となるものをとる。よく知られた様に

$$(5.8) \quad u(x) = v(x) - \int_A G_{\mu R}(x, y) v(y) d\mu(y)$$

となる (例えば [12] 参照)。そこで U_s に対応して

$$V_s(x) = \int_{S^{d-1}} \frac{G_{0R}(x, s\eta)}{f_0(s)} v(\eta) d\eta$$

とおく。上の積分の中で $v(\eta) = u(\eta)$ ($\eta \in S^{d-1}$) であることに注意しておく。任意の $x \in \bar{A}$ に対して $s \in [R, 1]$

の関数

$$g_x(s) = \int_{S^{d-1}} G_{0R}(x, s\eta) d\eta$$

を考える。すると、任意に $x \in \bar{A}$ を固定するとき、 $g_x \in C[R, 1]$ である。 $[R, 1]$ 上点 $|x| \in [R, 1]$ 以外の点における連続性は明白である。 $s = |x|$ における連続性は、 \bar{A} 上 $|x - y| < 1/2$ のとき、 $G_{0R}(x, y) \leq c_d N(x, y)$ ($c_d = 1/2\pi (d = 2), c_d = 1/(d-2)\sigma_d (d \geq 3)$) であることを使って、曲面分布のニュートンポテンシャルの連続性の証明と同様にして示せる。又 g_x は定理 1.5 (又はその証明) により $[R, 1] \setminus \{|x|\}$ 上 $(r^{d-1}y')' = r^{d-1}y_0$ の解である。 $x \in \partial A$ なら $g_x(s) \equiv 0$ である。 $x \in A$ の場合、まず $[|x|, 1]$ において、 g_x と f_0 を較らべる。その為

$$\begin{aligned} g_x'(1) &= \int_{S^{d-1}} \left[\frac{\partial}{\partial s} G_{0R}(x, s\eta) \right]_{s=1} d\eta = \int_{S^{d-1}} e_{0R}(|\eta|) \frac{\partial}{\partial \nu_\eta} G_{0R}(x, \eta) d\eta \\ &= \int_{\partial A} e_{0R}(|y|) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{0R}(x, y) ds_y = -e_{0R}(|x|), \end{aligned}$$

たゞし $\partial/\partial \nu$ は ∂A 上の外法線微分で ds は ∂A 上の曲面要素とする、となることに注目する。よって $g_x'(1)/e_{0R}(|x|) = -1$ であり、又明らかに $g_x(1) = 0$ なので、 $g_x(s)/e_{0R}(|x|) \equiv f_0(s)$ ($s \in [|x|, 1]$) となる。次に $[R, |x|]$ 上で、境界値を較らべて (即ち、 $g_x(|x|)/e_{0R}(|x|) = f_0(|x|), g_x(R)/e_{0R}(|x|) = 0 < f_0(R)$)、最小値原理を使うと、 $g_x(s)/e_{0R}(|x|) \leq f_0(s)$ ($s \in [R, |x|]$) となる。ゆえに総合して、 $g_x(s) \leq f_0(s)e_{0R}(|x|)$ ($x \in \bar{A}, s \in [R, 1]$) となる。かきかえると

$$\int_{S^{d-1}} \frac{G_{0R}(x, s\eta)}{f_0(s)} d\eta \leq e_{0R}(|x|) \quad (x \in \bar{A}, s \in [R, 1])$$

である。従って

$$|V_s(x)| \leq \int_{S^{d-1}} \frac{G_{0R}(x, s\eta)}{f_0(s)} |v(\eta)| d\eta \leq e_{0R}(|x|) \sup_{S^{d-1}} |v| \quad (x \in \bar{A})$$

となる。 $e_{0R}(|x|) \leq 1$ で S^{d-1} 上 $v = u$ なので

$$(5.9) \quad |V_s(x)| \leq \sup_{S^{d-1}} |u| \quad (x \in \bar{A}, s \in [R, 1])$$

となる。さて $x \in A$ を任意に固定し、 $c = (|x| + 1)/2$ とするとき

$$K = \left(\sup_{|y|=c} G_{0R}(x, y) \right) / f_0(c) < \infty$$

であり、境界値を較らべて最小値原理を使うと、

$$G_{0R}(x, y) \leq K f_0(|y|) \quad (c \leq |y| \leq 1)$$

となる。ゆえにすべての $\eta \in S^{d-1}$ に対し

$$G_{0R}(x, s\eta) / f_0(s) \leq K \quad (s \in [c, 1])$$

であり、又ロピタルの定理によると

$$\begin{aligned} \lim_{s \uparrow 1} \frac{G_{0R}(x, s\eta)}{f_0(s)} &= \lim_{s \uparrow 1} \frac{\frac{\partial}{\partial s} G_{0R}(x, s\eta)}{f_0'(s)} \\ &= - \left[\frac{\partial}{\partial s} G_{0R}(x, s\eta) \right]_{s=1} = - \frac{\partial}{\partial \nu_\eta} G_{0R}(x, \eta) \end{aligned}$$

となる。よってルベッグの収束定理により

$$\begin{aligned} \lim_{s \uparrow 1} V_s(x) &= \int_{S^{d-1}} \left(\lim_{s \uparrow 1} \frac{G_{OR}(x, s\eta)}{f_0(s)} \right) v(\eta) d\eta \\ &= - \int_{S^{d-1}} v(\eta) \frac{\partial}{\partial \nu_\eta} G_{OR}(x, \eta) d\eta = - \int_A v(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{OR}(x, y) ds_y = v(x) \end{aligned}$$

となる。つまり次式が示された：

$$(5.10) \quad \lim_{s \uparrow 1} V_s(x) = v(x) \quad (x \in A).$$

次に周知のレゾルベント方程式 (例えば[12]参照)

$$G_{\mu R}(x, s\eta) = G_{OR}(x, s\eta) - \int_A G_{\mu R}(x, z) G_{OR}(z, s\eta) d\mu(z)$$

の両辺に $u(\eta)/f_0(s)$ をかけて S^{d-1} 上で積分し、フビニの定理を使うと、

$$(5.11) \quad \frac{f_\mu(s)}{f_0(s)} U_s(x) = V_s(x) - \int_A G_{\mu R}(x, z) V_s(z) d\mu(z)$$

となる。右辺の積分項は絶対値に於て、(5.9) を使うと、

$$\int_A G_{\mu R}(x, z) |V_s(z)| d|\mu|(z) \leq (\sup_{S^{d-1}} |u|) \int_A G_{\mu R}(x, z) d|\mu|(z)$$

でおさえられる。A上 $|x-z|$ が十分小さければ、例えば $G_{\mu R}(x, z) \leq 2c_d N(x, z)$ と出来る ([12]参照) ことと、 μ のカトー族なことから、 $\int_A G_{\mu R}(x, z) d|\mu|(z)$ は x について \bar{A} 上連続、従って \bar{A} 上有界となる。今一度 (5.9) を使えば、(5.11) の右辺は、従って左辺は、すべての $(x, s) \in \bar{A} \times [R, 1)$ について有界となる。何度も見た様に

$$\lim_{s \uparrow 1} \frac{f_\mu(s)}{f_0(s)} = \lim_{s \uparrow 1} \frac{(f_\mu(s) - f_\mu(1)) / (s-1)}{(f_0(s) - f_0(1)) / (s-1)} = \frac{f'_\mu(1)}{f'_0(1)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

であるから、結局 $U_s(x)$ はすべての $(x, s) \in \bar{A} \times [R, 1)$ について有界となる。更に (5.9), (5.10) により、 $s \uparrow 1$ のとき、ルベッグの収束定理を (5.11) に施して

$$\left(\lim_{s \uparrow 1} \frac{f_\mu(s)}{f_0(s)} \right) \cdot \left(\lim_{s \uparrow 1} U_s(x) \right) = v(x) - \int_A G_{\mu R}(x, z) v(z) d\mu(z)$$

となり、(5.8) から $\lim_{s \uparrow 1} U_s(x) = u(x)$ がわかる。 □

5.4. いよいよ (5.7) を補題5.1を使って証明する。その為には、任意の $R \in (0, 1)$ に対して次の等式を導きさえすればよい：

$$(5.12) \quad \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} G_{\mu R}(r\xi, s\eta) S_{nj}(\xi) S_{mi}(\eta) d\xi d\eta = \delta_{nj, mi} e_{\mu n}(r) f_{\mu m}(s) \quad (R < r < s \leq 1).$$

なぜなら上式で $R \downarrow 0$ とすることにより (5.7) が出るからである。 r と ξ を固定して

$$h(r\xi, s) = \int_{S^{d-1}} G_{\mu R}(r\xi, s\eta) S_{mi}(\eta) d\eta$$

を $s \in (r, 1]$ の関数とみると、定理1.5 (又はその証明) により、 $h(r\xi, \cdot)$ は $(r, 1]$ 上 $(r^{d-1}y')' = r^{d-1}y\mu_m$ の解で、

$h(r\xi, 1) = 0$ となるから, $f_{\mu m}$ と比較して, $h(r\xi, s) = c(r\xi)f_{\mu m}(s)$ の形となる。この両辺に $S_{nj}(\xi)$ をかけて, その両辺を S^{d-1} 上 $d\xi$ で積分して, $\int_{S^{d-1}} c(r\xi)S_{nj}(\xi)d\xi = c(r)$ とおき, フビニの定理によれば, (5.12) の左辺は $c(r)f_{\mu m}(s)$ となることがわかる。再びフビニの定理で

$$c(r) = \frac{f_{\mu}(s)}{f_{\mu m}(s)} \int_{S^{d-1}} \left(\int_{S^{d-1}} \frac{G_{\mu R}(r\xi, s\eta)}{f_{\mu}(s)} S_{mi}(\eta) d\eta \right) S_{nj}(\xi) d\xi$$

となる。こゝで $u(s\eta) = e_{\mu m R}(s)S_{mi}(\eta)$ とおくと, $u(x)$ は A 上 μ -調和, \bar{A} 上連続, $|x|=R$ 上 $u(x) = 0$, $|x|=1$ 上 $u(x) = u(1x) = e_{\mu m R}(1)S_{mi}(x) = S_{mi}(x)$ となる。ゆゑに $S_{mi}(\eta) = u(\eta)$ なので, (5.3) の記号を使えば

$$c(r) = \frac{f_{\mu}(s)}{f_{\mu m}(s)} \int_{S^{d-1}} U_s(r\xi) S_{nj}(\xi) d\xi$$

であるから, 補題5.1とルベグの収束定理を使えば, 上式で $s \uparrow 1$ として $f_{\mu}(s)/f_{\mu m}(s) \rightarrow 1 (s \uparrow 1)$ を使うことにより

$$\begin{aligned} c(r) &= \int_{S^{d-1}} u(r\xi) S_{nj}(\xi) d\xi = e_{\mu m}(r) \int_{S^{d-1}} S_{mi}(\xi) S_{nj}(\xi) d\xi \\ &= \delta_{nj, mi} e_{\mu m}(r) = \delta_{nj, mi} e_{\mu n}(r) \end{aligned}$$

となる。よって (5.12) が導かれた。

5.5. $0 < r < s \leq 1$ を任意に固定する。更に $\xi \in S^{d-1}$ を任意に固定して $G_{\mu}(r\xi, s\eta)$ を η の関数と考えたときの $L_2(S^{d-1})$ の完全正規直交系 $\{S_{nj}(\eta) : j = 1, \dots, N(n); n = 0, 1, \dots\}$ に関するフーリエ係数

$$c_{nj}(r\xi, s) = \int_{S^{d-1}} G_{\mu}(r\xi, s\eta) S_{nj}(\eta) d\eta \quad (j = 1, \dots, N(n); n = 0, 1, \dots)$$

を使うと, $L_2(S^{d-1})$ 内のフーリエ展開

$$(5.13) \quad G_{\mu}(r\xi, s\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N(n)} c_{nj}(r\xi, s) S_{nj}(\eta)$$

がえられる。各 n_j について, $c_{nj}(r\xi, s)$ を ξ の関数と考えてのフーリエ係数

$$c_{nj, mi}(r, s) = \int_{S^{d-1}} c_{nj}(r\xi, s) S_{mi}(\xi) d\xi \quad (i = 1, \dots, N(m); m = 0, 1, \dots)$$

を使うと, $L_2(S^{d-1})$ 内の等式としてのフーリエ展開

$$c_{nj}(r\xi, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N(m)} c_{nj, mi}(r, s) S_{mi}(\xi)$$

がえられる。こゝで (5.7) を使えば

$$\begin{aligned} c_{nj, mi}(r, s) &= \int_{S^{d-1}} \left(\int_{S^{d-1}} G_{\mu}(r\xi, s\eta) S_{nj}(\eta) d\eta \right) S_{mi}(\xi) d\xi \\ &= \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} G_{\mu}(r\xi, s\eta) S_{mi}(\xi) S_{nj}(\eta) d\xi d\eta = \delta_{mi, nj} e_{\mu m}(r) f_{\mu n}(s) \end{aligned}$$

であるから, これを上を展開式に代入すると

$$c_{nj}(r\xi, s) = c_{nj, nj}(r, s) S_{nj}(\xi) = e_{\mu n}(r) f_{\mu n}(s) S_{nj}(\xi)$$

となり, これを (5.13) に代入して, $L_2(S^{d-1})$ の等式とみて (5.4) がえられる。

$0 < r < s \leq 1$ を任意に固定し, 更に $\xi \in S^{d-1}$ (又は $\eta \in S^{d-1}$) を任意に固定するとき, $\eta \in S^{d-1}$ (又は $\xi \in S^{d-1}$) の関数とみて, $G_\mu(r\xi, s\eta)$ が $L_2(S^{d-1})$ 内で (5.4) の形のフーリエ展開ができることが示された。(5.4) の右辺を $\xi \in S^{d-1}$ (又は $\eta \in S^{d-1}$) の関数項の級数とみて, $0 < r < R < s \leq 1$ となる R (又は $0 < R < r < S < s \leq 1$ となる R と S) をとって (5.5) (又は (5.6)) を使えば, ワイエルシュトラスの優級数原理から, それらの絶対かつ一様収束なことがわかり, 点関数としての等式 (5.4) がえられて, 主要定理の前半の証明が完結する。故に残るところは (5.5) と (5.6) を示せばよい。

5.6. 不等式 (5.5) と (5.6) の証明. まず (5.5) の証明をする。混合不等式 (補題4.2) $e_{\mu n}(r) \leq (f_\mu(r)/f_{\mu n}(r))e_\mu(r)$ ($0 < r \leq 1$) を基礎とする。 $0 < r \leq R < s \leq 1$ として, 混合不等式により

$$e_{\mu n}(r)f_{\mu n}(s) \leq \frac{f_\mu(r)}{f_{\mu n}(r)} e_\mu(r) \cdot f_{\mu n}(s)$$

となる。比較原理 (定理3.1) により, $f_\mu/f_{\mu n}$ は増加関数だから, $f_\mu(r)/f_{\mu n}(r) \leq f_\mu(R)/f_{\mu n}(R)$ により

$$e_{\mu n}(r)f_{\mu n}(s) \leq \frac{f_\mu(R)}{f_{\mu n}(R)} e_\mu(r) \cdot f_{\mu n}(s) = e_\mu(r)f_\mu(R) \frac{f_{\mu n}(s)}{f_{\mu n}(R)}$$

となる。基本評価 (定理3.4) を $\kappa = 2$ で使って, 番号 $\bar{n} = \bar{n}(\mu, 2, R)$ が定まり, $n \geq \bar{n}$ ならば

$$f_{\mu n}(s) \leq 2 \frac{1}{2n+d-2} \left(\frac{1}{s^{n+d-2}} - s^n \right), f_{\mu n}(R) \geq 2^{-1} \frac{1}{2n+d-2} \left(\frac{1}{R^{n+d-2}} - R^n \right)$$

となる。これらの商を作って

$$\frac{f_{\mu n}(s)}{f_{\mu n}(R)} \leq 4 \left(\frac{R}{s} \right)^{n+d-2} \frac{1-s^{2n+d-2}}{1-R^{2n+d-2}} \leq 4 \left(\frac{R}{s} \right)^n$$

をうる。以上により $e_{\mu n}(r)f_{\mu n}(s) \leq 4e_\mu(r)f_\mu(R)(R/s)^n$ となり, (5.1) と (5.3) と合わせると, (5.5) の左辺は

$$4e_\mu(r)f_\mu(R) \left(\frac{R}{s} \right)^n \frac{1}{\delta_d} 2^{d-1} n^{d-2}$$

でおさえられる。ゆえに, $p = p(R) = 2^{d+1}f_\mu(R)/\sigma_d, q = q(R) = \bar{n}$ にとることにより, (5.5) が導かれる。

次に (5.6) の証明をする。 $R \leq r < S \leq s \leq 1$ として, 混合不等式と $f_{\mu n}/f_\mu$ が減少関数であることを使い, (5.5) の証明の時と同様にして,

$$\begin{aligned} e_{\mu n}(r)f_{\mu n}(s) &\leq \frac{f_\mu(r)}{f_{\mu n}(r)} e_\mu(r) \cdot \frac{f_{\mu n}(s)}{f_\mu(s)} f_\mu(s) \leq \frac{f_\mu(r)}{f_{\mu n}(r)} e_\mu(r) \cdot \frac{f_{\mu n}(S)}{f_\mu(S)} f_\mu(s) \\ &= f_\mu(s) (e_\mu(r)f_\mu(r)/f_\mu(S)) \frac{f_{\mu n}(S)}{f_{\mu n}(r)} \end{aligned}$$

となる。基本評価を $\kappa = 2$ で使うと, 番号 $\bar{n} = \bar{n}(\mu, 2, R)$ が定まり, $n \geq \bar{n}$ ならば

$$f_{\mu n}(S) \leq 2 \frac{1}{2n+d-2} \left(\frac{1}{S^{n+d-2}} - S^n \right), f_{\mu n}(r) \geq 2^{-1} \frac{1}{2n+d-2} \left(\frac{1}{r^{n+d-2}} - r^n \right)$$

となる。これらの商を作って

$$\frac{f_{\mu n}(S)}{f_{\mu n}(r)} \leq 4 \left(\frac{r}{S} \right)^{n+d-2} \frac{1-S^{2n+d-2}}{1-r^{2n+d-2}} \leq 4 \left(\frac{r}{S} \right)^n$$

をうる。以上により $e_{\mu n}(r)f_{\mu n}(s) \leq 4f_\mu(s) (e_\mu(r)f_\mu(r)/f_\mu(S)) (r/S)^n$ となり, (5.1) と (5.3) と合わせると, (5.6) の左辺は

$$4f_\mu(s)(e_\mu(r)f_\mu(r)/f_\mu(S))\left(\frac{r}{S}\right)^n \frac{1}{\sigma_d} 2^{d-1} n^{d-2}$$

でおさえられる, ゆえに, $p = p(R, S) = 2^{d+1}\sigma_d^{-1}(\sup_{R \leq r \leq 1} e_\mu(r)f_\mu(r))f_\mu(S)^{-1}, q = q(R) = \bar{n}$ にとることにより, (5.6) が導かれる。

6. 応用: マルチン理論

6.1. D を \mathbf{R}^d の任意部分領域とし, μ を D 上のカトー族のラドン測度で D 上に μ -グリーン関数 $G = G_\mu$ が存在するものとする。 $H_\mu^+(D)$ の元 u が極小であるとは, まず D 上 $u > 0$ で, かつ $u \geq v$ となる任意の $v \in H_\mu^+(D)$ は常に $v = Cu$ (C : 定数) の形となることである。 $H_\mu^+(D)$ の構造を, $H_\mu^+(D)$ の極小関数で記述することを目的とするのがマルチン理論である。任意の点 $a \in D$ を固定する。 $u(a) = 1$ となっている関数 u は正規化されていると言う。 D 上の a を参照点とする μ -マルチン核を次のように定める: $x, y \in D$ として

$$K(x, y) = \begin{cases} G(x, y)/G(a, y) & (y \neq a), \\ 0 & (y = a, x \neq a), \\ 1 & (y = a, x = a). \end{cases}$$

D 内の点列 $\{y_m\}$ が μ -基本列であるとは, $\{y_m\}$ が D 内に集積点をもたず, $\{K(\cdot, y_m)\}$ が $H_\mu^+(D)$ のある元に D 上広義一様収束することである。基本列 $\{y_m\}$ と $\{y_m^l\}$ は $\{K(\cdot, y_m)\}$ と $\{K(\cdot, y_m^l)\}$ が同一の極限を定めるとき同値であると言ひ, 基本列の同値類 ω^* の全体を $\Delta = \Delta_\mu(D)$ とし, $D^* = D_\mu^* = D \cup \Delta$ と記す。 $\omega^* \in \Delta$ に対しても, 各 $x \in D$ について,

$$K(x, \omega^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} K(x, y_m) \quad (\{y_m\} \in \omega^*)$$

と定めると, K は $D \times D^*$ に拡張できる。これを改めて μ -マルチン核と呼ぶ。 D 内に任意に相対コンパクトな球 U を固定し, D^* の 2 点 p, q の距離を

$$d(p, q) = \int_U \frac{|K(x, p) - K(x, q)|}{1 + |K(x, p) - K(x, q)|} dx$$

で与える, dx は \mathbf{R}^d 上の体積要素である。すると次の結果が成り立つ:

マルチン理論の基本定理. 次の 5 性質が成立する。

- (a) (D^*, d) は距離空間で, $\{y_m\} \in \omega^*$ は $\lim_{m \rightarrow \infty} d(y_m, \omega^*) = 0$ と同値で, D^* はコンパクトで, D は D^* 内開かつ稠密, 従って Δ は D の境界である;
- (b) $K(x, p)$ は $D \times D^* \setminus \{(x, x) : x \in D\}$ 上連続である;
- (c) 任意の正規化極小な $u \in H_\mu^+(D)$ に対しては $u = K(\cdot, \omega^*)$ となる $\omega^* \in \Delta$ が存在する;
- (d) $\Delta_1 = \{\omega^* \in \Delta : K(\cdot, \omega^*) \text{ は極小}\}$ は Δ の G_δ 部分集合である;
- (e) 任意の $u \in H_\mu^+(D)$ はマルチン積分表示をもつ, 即ち u に対して Δ 上のボレル測度 $\nu = \nu_u$ で次の性質をもつものが唯一つ定まる:

$$(6.1) \quad u = \int_{\Delta_1} K(\cdot, \omega^*) d\nu(\omega^*), \nu(\Delta \setminus \Delta_1) = 0.$$

関連する論文数は膨大で上記定理そのもの、証明を含むもの、存在非存在の特定は困難であるが、調和空間 (D, H_μ) に関する諸性質にもとづいてマルチンの原論文[7]の方向に従えば容易に証明できる。 $D^* = D_\mu^*$ を D の μ -マルチン・コンパクト化, $\Delta = \Delta_\mu(D)$ を D の μ -マルチン境界, $\Delta_1 = \Delta_{\mu 1}(D)$ を D の μ -マルチン極小境界と呼ぶ。

以下では, D としては具体的な $\Omega = B^d \setminus \{0\}$ にとり, μ は $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ 上の回転不変なラドン測度で $B^d \setminus \{0\}$ 上双曲的とし, μ -グリーン関数 $G = G_\mu$ の級数表示 (5.4) の応用として μ -マルチン核 $K = K_\mu$ と μ -マルチン・コンパクト

ト化 $\Omega^* = \Omega_\mu^*$ を具体的に構成する。これらは回転不変な μ に関する限り、文献上、もっともゆるい条件下での結果である。 Ω の μ -マルチン境界を $\Delta = \Delta_\mu(\Omega)$, μ -マルチン極小境界を $\Delta_1 = \Delta_{\mu_1}(\Omega)$ と記す (実は $\Delta = \Delta_1$ とこの場合にはなることが以下でわかる)。 Ω^* はコンパクトだから、 Ω の任意の点列 $\{x_m\}$ で内部に集積せぬものは必ずその部分列 $\{y_m\}$ で基本列となるものを含むことに注意する。そして $\{y_m\}$ は Δ のある点 ω^* に収束する (即ち $\{y_m\} \in \omega^*$)。

さて、任意の基本列 $\{y_m\}$ をとると、 $\{|y_m|\}$ は 0 又は 1 に収束することを示す。そうでないと、 $\{y_m\}$ の部分列 $\{y_{m^i}\}$ と $\{y_{m^{ii}}\}$ で、 $|y_{m^i}| \rightarrow 0, |y_{m^{ii}}| \rightarrow 1$ となるものがとれる。 $|y_{m^i}| < |a| < |y_{m^{ii}}|$ としてよい。するとある定数 C があって $|x|=a$ 上 $K(x, y_{m^i}), K(x, y_{m^{ii}}) \leq C$ と出来る。最小値の原理から

$$K(x, y_{m^i}) \leq C f_\mu(|x|) / f_\mu(|a|) \quad (|a| \leq |x| \leq 1)$$

となり、 $y_m \rightarrow \omega^* \in \Delta$ として、上で $m^i \uparrow \infty$ として

$$K(x, \omega^*) \leq (C / f_\mu(|a|)) f_\mu(|x|) \quad (|a| \leq |x| \leq 1)$$

となるから $K(\cdot, \omega^*) \triangleleft f_\mu$ である。次に任意に $R \in (0, |a|)$ をとると $R < |x| < |a|$ に対して

$$G_{\mu R}(x, y_{m^{ii}}) / G(a, y_{m^{ii}}) \leq K(x, y_{m^{ii}}) \leq C \quad (|x|=a)$$

であるから、最小値の原理により

$$G_{\mu R}(x, y_{m^{ii}}) / G(a, y_{m^{ii}}) \leq C e_\mu(|x|) / e_\mu(|a|) \quad (R \leq |x| \leq |a|)$$

となり、 $R \downarrow 0$ とすることで

$$K(x, y_{m^{ii}}) \leq (C / e_\mu(|a|)) e_\mu(|x|) \quad (0 \leq |x| \leq |a|)$$

がわかる。そこで $m^{ii} \rightarrow \infty$ として

$$K(x, \omega^*) \leq (C / e_\mu(|a|)) e_\mu(|x|) \quad (0 \leq |x| \leq |a|)$$

となる。ゆえに $K(\cdot, \omega^*) \triangleleft e_\mu$ となる。 $K(\cdot, \omega^*) \in H_\mu^+(\Omega)$ だから、補題4.1により $K(\cdot, \omega^*) \equiv 0$ となり、 $K(a, \omega^*) = 1$ に反する。

$\omega^* \in \Delta$ で $\{y_m\} \in \omega^*$ が $\{|y_m|\} \rightarrow 0$ (又は 1) となる時、 ω^* は $\{0\}$ (又は S^{d-1}) の上にあると言って、その様な ω^* の全体を Δ' (又は Δ'') と記す。よって Δ' は $\{0\}$ の上にあり、 Δ'' は S^{d-1} の上にあり、 Δ は互いに素なコンパクト集合 Δ' と Δ'' の和に分解される: $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ 。

以下 Δ' と Δ'' をそれぞれ独立に決定することにより $\Omega^* = \Delta' \cup \Omega \cup \Delta''$ を決定する。 $\alpha = \alpha(\mu) \in [0, 1]$ を μ の特異性指数 ((3.5), (4.8) 参照) とし、 $x \in \Omega$ の極表示を $x = r\xi$ ($r > 0, \xi \in S^{d-1}$) として

$$\pi(x) = \pi(r\xi) = (\alpha + (1 - \alpha)r)\xi$$

と定め、球環 $A = \{x \in \mathbf{R}^d : \alpha < |x| < 1\}$ をとると $\pi: \Omega \rightarrow A$ は位相写像である。これが Ω^* まで連続拡張出来て

$$\pi^*: \Omega^* \rightarrow \bar{A} = \{x \in \mathbf{R}^d : \alpha \leq |x| \leq 1\}$$

が位相写像となり

$$\pi^*(\Delta') = \{|x| = \alpha\}, \quad \pi^*(\Delta'') = \{|x| = 1\}$$

であることを以下に示す。以上の意味をすべてこめて簡単に

定理6.1. $\Omega_\mu^* = \{\alpha(\mu) \leq |x| \leq 1\}$

と述べたら印象的である。これは第1著者[11]が1974年に $0 \leq \mu \ll \lambda$ ($\ll \lambda$ は λ -絶対連続) かつ $d\mu/d\lambda$ が回転不変局所ヘルダー連続のときに証明し、1986年に村田[10]が $\mu \ll \lambda$ かつ $d\mu/d\lambda$ が回転不変で $d\mu/d\lambda \in L_{p,loc}$ ($p > d/2$) のとき、実質的に、証明した。これらの正則性の仮定が回転不変と言う以外一切必要ないことがわかった点大進歩であると自負する。

6.2. まず $\eta^* \in \Delta''$ に対する $K(\cdot, \eta^*)$ を決定して Δ'' を明らかにする。 μ は S^{d-1} 上もカトー族で特異点をもたぬので、本来こゝには何等本質的な問題のない部分である。たゞし我々の場合微積分法が自由には使えぬ状況なので自明な議論ではない。

$x, y \in \Omega$ に対し、 $L(x, y) = G(x, y)/f_\mu(|y|)$ で L 核を導入する ($K(x, y) = L(x, y)/L(a, y)$ である)。すると (5.4) により

$$L(r\xi, s\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e_{\mu_n}(r) \frac{f_{\mu_n}(s)}{f_\mu(s)} \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta) \right) \quad (0 < r < s < 1; \xi, \eta \in S^{d-1})$$

である。そこで L 核の範囲を

$$L(r\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e_{\mu_n}(r) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta) \right) \quad (0 < r < 1; \xi, \eta \in S^{d-1})$$

まで広げておく ((5.6) 参照)。以下 L 核に関する基本的性質を列記する。

補題6.1. $y_m \in \Omega$ で $y_m \rightarrow \eta \in S^{d-1}$ とすると Ω 上広義一様に $\{L(\cdot, y_m)\}$ は $L(\cdot, \eta)$ に収束する。

証明. $f_{\mu_n}(s)/f_\mu(s) \rightarrow 1$ ($s \rightarrow 1$) と、 $y_m = s_m \eta_m$ とするとき $s_m \rightarrow 1$ かつ $\eta_m \rightarrow \eta$ であることにより、(5.6) を使えば直ちにわかる。□

補題6.2. $L(\cdot, \eta) \equiv L(\cdot, \eta')$ ($\eta, \eta' \in S^{d-1}$) と $\eta = \eta'$ が同値である。

証明. $L(r\xi, \eta), L(r\xi, \eta')$ を $S_{nj}(\xi)$ に関するフーリエ級数とみたとき、展開の一意性により $S_{nj}(\eta) = S_{nj}(\eta')$ ($j = 1, \dots, N(n); n = 0, 1, \dots$) がわかる。これから ($n = 1$ の場合のみで十分であるが) $\eta = \eta'$ がわかる。□

補題6.3. x の関数として $L(g^{-1} \cdot x, \eta) \equiv L(x, g \cdot \eta)$ がすべての $g \in O(d)$ とすべての $\eta \in S^{d-1}$ に対して成り立つ。

証明. 加法定理 $\sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta) = (N(n)/\sigma_d) P_n(\xi \cdot \eta)$ により

$$L(r\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} e_{\mu_n}(r) \frac{N(n)}{\sigma_d} P_n(\xi \cdot \eta)$$

であること、 $g^{-1} \cdot (r\xi) = r(g^{-1} \cdot \xi)$ と $(g \cdot (g^{-1} \cdot \xi)) \cdot (g \cdot \eta) = \xi \cdot (g \cdot \eta)$ によりわかる。□

補題6.4. $\int_{S^{d-1}} L(r\xi, \eta) d\xi = e_\mu(r)$ ($r \in (0, 1), \eta \in S^{d-1}$).

証明. (5.6) の帰結としての $L(r\xi, \eta)$ の級数の一様収束性と、 $N(0) = 1, S_{01}(\xi) \equiv 1/\sigma_d^{1/2}$ よりわかる。□

補題6.5. $L(\cdot, \eta) \leq e_\mu(\eta \in S^{d-1})$.

証明. $L(\cdot, \eta) \in H_\mu^+(\Omega)$ なので, 補題4.1により $L(\cdot, \eta) = u_0 + u_1(u_0 \triangleleft e_\mu, u_1 \triangleleft f_\mu)$ と分解する。 $\tilde{u}_i(r) = \int_{S^{d-1}} u_i(r\xi) d\xi$ ($i=0,1$)は又回転不変な $H_\mu^+(\Omega)$ の元と考えられ, 明らかに $\tilde{u}_0 \triangleleft e_\mu, \tilde{u}_1 \triangleleft f_\mu$ なので, 補題6.4によると $e_\mu = \tilde{u}_0 + \tilde{u}_1$ となり, 分解の一意性により $\tilde{u}_1 \equiv 0$ となり, 従って $u_1 \equiv 0$ であるから $L(\cdot, \eta) = u_0 \triangleleft e_\mu$ となる。□

定理6.2. 次の性質をもつ唯一つの位相写像 $\pi'' : \Delta'' \rightarrow S^{d-1}$ が存在する, 即ち $\pi''(\eta^*) = \eta$ とすると, (i) $\{y_m\} \subset \Omega$ に対して, Ω^* において $y_m \rightarrow \eta^*$ となること, $\bar{\Omega}$ において $y_m \rightarrow \eta$ となることとは同値である; (ii) $K(\cdot, \eta^*) \equiv L(\cdot, \eta)/L(a, \eta)$ 。

証明. 任意に $\eta^* \in \Delta''$ をとる。どんなに $\{y_m\} \in \eta^*$ をとっても, 一定の $\eta \in S^{d-1}$ があつて $y_m \rightarrow \eta$ となることを示す。そうでないと $y_m' \rightarrow \eta' \in S^{d-1}, y_m'' \rightarrow \eta'' \in S^{d-1}, \eta' \neq \eta''$ となる $\{y_m'\}, \{y_m''\} \in \eta^*$ がとれる。 $L(x, y_m')/L(a, y_m') = K(x, y_m')$ 等で $m \rightarrow \infty$ として補題6.1を使うと

$$L(x, \eta')/L(a, \eta') \equiv L(x, \eta'')/L(a, \eta'') (\equiv K(x, \eta^*)) (x \in \Omega)$$

となる。 $x = r\xi$ ($r \in (0,1)$)とし, S^{d-1} で上式の両辺を $d\xi$ で積分して補題6.4を使うと $e_\mu(r)/L(a, \eta') = e_\mu(r)/L(a, \eta'')$ となり, Ω 上 $L(\cdot, \eta') \equiv L(\cdot, \eta'')$ となり, 補題6.2から $\eta' = \eta''$ と言う矛盾がでる。

こうして $\pi''(\eta^*) = \eta$ により写像 $\pi'' : \Delta'' \rightarrow S^{d-1}$ が定まり, (ii)と(i)の必要部分と, π'' の単射なことがわかる。 $\eta \in S^{d-1}$ をとり $\bar{\Omega}$ 内で η に収束する Ω 内の点列 $\{y_m\}$ をどんなにとっても, $L(x, y_m)/L(a, y_m) = K(x, y_m)$ の左辺は補題6.1から $L(x, \eta)/L(a, \eta)$ に収束するので, $\{y_m\}$ は基本列となり, $\{y_m\} \rightarrow \eta^* \in \Delta''$ とすると, $\pi''(\eta^*) = \eta$ であるから, $\pi'' : \Delta'' \rightarrow S^{d-1}$ は全単射となる。しかも(i)の十分性部分も示された。最後に, 各 $x \in \Omega$ に対し, $L(x, \cdot)$ は S^{d-1} 上連続なことが (5.6)よりわかり, 又明らかに $K(x, \cdot)$ が Δ'' 上連続なことから, π'' の同相性が出る。

各 $x \in \Omega$ に対して $\pi^*(x) = \pi(x)$, 各 $\eta^* \in \Delta''$ に対して $\pi^*(\eta^*) = \pi''(\eta^*)$ とすると, 写像 $\pi^* : \Omega \cup \Delta'' \rightarrow \{\alpha < |x| \leq 1\}$ が定まり, これは明らかに位相写像となる。とくに

$$(6.2) \quad K(x, \eta^*) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(e_{\mu_n}(|x|) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj} \left(\frac{x}{|x|} \right) S_{nj}(\pi^*(\eta^*)) \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(e_{\mu_n}(|a|) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj} \left(\frac{a}{|a|} \right) S_{nj}(\pi^*(\eta^*)) \right)} \quad (x \in \Omega, \eta^* \in \Delta'')$$

6.3. $\xi^* \in \Delta'$ に対する $K(\cdot, \xi^*)$ を決定し, Δ' を明らかにする。一般に μ が境界 $\{0\}$ に特異点をもつので, この部分の議論は本質的なものである。よつて特異性指数 $\alpha = \alpha(\mu)$ が重大な役割を演ずる。先ず易しい場合である, $\alpha = \alpha(\mu) = 0$ の場合, を考える。このとき, すべての n について, (4.8)と定理3.3により $\lim_{r \rightarrow 0} (e_{\mu_n}(r)/e_\mu(r)) = \alpha_n(\mu) = 0$ となることに注意する。 $\xi^* \in \Delta'$ を任意にとるとき, どんな $\{y_m\} \in \xi^*$ をとっても $y_m \rightarrow 0$ である。(5.4)より

$$K(s\eta, y_m) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e_{\mu_n}(|y_m|)}{e_\mu(|y_m|)} f_{\mu_n}(s) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj} \left(\frac{y_m}{|y_m|} \right) S_{nj}(\eta) \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e_{\mu_n}(|y_m|)}{e_\mu(|y_m|)} f_{\mu_n}(|a|) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj} \left(\frac{y_m}{|y_m|} \right) S_{nj} \left(\frac{a}{|a|} \right) \right)}$$

であるので, (5.5)により, $m \rightarrow \infty$ とすると $K(s\eta, \xi^*) = f_\mu(s)/f_\mu(|a|)$ となる。右辺は ξ^* に関係せぬ一定の関数なので, ξ^* は Δ' の唯一つの点であることがわかる。ゆえに $\Delta' = \{0^*\}$ の形であつて

$$(6.3) \quad K(x, 0^*) = f_\mu(|x|)/f_\mu(|a|)$$

となる。 $\pi^*(0^*) = 0$ とすると, 6.2の最後の所と合わせて, 次のことがわかる:

$$\pi^* : \Omega^* = \Delta' \cup \Delta \cup \Delta'' \rightarrow \bar{A} = \{0 \leq |x| \leq 1\}$$

は同相写像である。

6.4. $\xi^* \in \Delta^1$ に対する $K(\cdot, \xi^*)$ と Δ^1 自身の決定を、本質的な場合である、 $\alpha = \alpha(\mu) > 0$ の場合、で考える。
 (4.8) と定理3.3により $\lim_{r \downarrow 0} (e_{\mu_n}(r)/e_\mu(r)) = \alpha_n(\mu) = \alpha_n$ であって

$$1 > \alpha = \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq \alpha_{n+1} \geq \dots > 0$$

であることを想起する。さて x, y に対して $M(y, x) = G(x, y)/e_\mu(|y|)$ で M 核を導入する ($K(x, y) = M(y, x)/M(y, a)$ である)。すると (5.4) により

$$M(r\xi, s\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e_{\mu_n}(r)}{e_\mu(r)} f_{\mu_n}(s) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta) \right) \quad (0 < r < s < 1; \xi, \eta \in S^{d-1})$$

である。そこで M 核の範囲を

$$M(\xi, s\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n(\mu) f_{\mu_n}(s) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta) \right) \quad (0 < s < 1; \xi, \eta \in S^{d-1}; \alpha_0(\mu) = 1)$$

まで広げておく ((5.5) 参照)。以下 M に関する基本的性質を列記する。

補題6.6. $y_m \in \Omega, y_m \rightarrow 0, y_m/|y_m| \rightarrow \xi \in S^{d-1}$ とすると Ω 上広義一様に $\{M(y_m, \cdot)\}$ は $M(\xi, \cdot)$ に収束する。

証明. $y_m = r_m \xi_m (r_m \in (0, 1), \xi_m \in S^{d-1})$ とすると $r_m \rightarrow 0$ かつ $\xi_m \rightarrow \xi$ であり、 $e_{\mu_n}(r_m)/e_\mu(r_m) \rightarrow \alpha_n (m \rightarrow \infty)$ であることにより、(5.5) を使えば直ちにわかる。□

補題6.7. $M(\xi, \cdot) \equiv M(\xi', \cdot) (\xi, \xi' \in S^{d-1})$ と $\xi = \xi'$ が同値である。

証明. $M(\xi, s\eta), M(\xi', s\eta)$ を $S_{nj}(\eta)$ に関するフーリエ級数とみると、展開の一意性により、 $S_{nj}(\xi) = S_{nj}(\xi') (j = 1, \dots, N(n); n = 0, 1, \dots)$ がわかる。これから ($n = 1$ の場合のみで十分であるが) $\xi = \xi'$ がわかる。□

補題6.8. x の関数として $M(\xi, g^{-1} \cdot x) = M(g \cdot \xi, x)$ がどんな $g \in O(d)$ と $\xi \in S^{d-1}$ に対しても成り立つ。

証明. 加法定理 $\sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta) = (N(n)/\sigma_d) P_n(\xi \cdot \eta)$ により

$$M(\xi, s\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_{\mu_n}(s) \frac{N(n)}{\sigma_d} P_n(\xi \cdot \eta)$$

であることより、 $g^{-1} \cdot (s\eta) = s(g^{-1} \cdot \eta)$ と、 $\xi \cdot (g^{-1} \cdot \eta) = (g \cdot \xi)(g \cdot (g^{-1} \cdot \eta)) = (g \cdot \xi) \cdot \eta$ よりわかる。□

補題6.9. $\int_{S^{d-1}} M(\xi, s\eta) d\eta = f_\mu(s) (s \in (0, 1), \xi \in S^{d-1})$.

証明. (5.5) の帰結としての $M(\xi, s\eta)$ の級数の一様収束性と、 $N(0) = 1, S_{01}(\xi) \equiv 1/\sigma_d^{1/2}$ よりわかる。□

補題6.10. $M(\xi, \cdot) \in H_\mu^+(\xi \in S^{d-1})$.

証明. $M(\xi, \cdot) \in H_\mu^+(\Omega)$ なので、補題に4.1より $M(\xi, \cdot) = u_0 + u_1 (u_0 \in e_\mu, u_1 \in f_\mu)$ と分解する。 $\bar{u}_i(s) = \int_{S^{d-1}} u_i(s\eta) d\eta (i = 0, 1)$ は又回転不変な $H_\mu^+(\Omega)$ の元と考えられ、明らかに $\bar{u}_0 \in e_\mu, \bar{u}_1 \in f_\mu$ なので、補題6.9によると $f_\mu = \bar{u}_0 + \bar{u}_1$ となり、分解の一意性により $\bar{u}_0 \equiv 0$ となり、従って $u_0 \equiv 0$ であり、 $M(\xi, \cdot) = u_1 \in f_\mu$ となる。□

定理6.3. 次の性質をもつ唯一つの位相写像 $\pi': \Delta^1 \rightarrow S^{d-1}$ が存在する、即ち $\pi'(\xi^*) = \xi$ とすると、(i) $\{y_m\} \subset \Omega$

に対して, Ω^* において $y_m \rightarrow \xi^*$ となること, $A = \{\alpha < |x| < 1\}$ とするとき \bar{A} において $\pi(y_m) = (\alpha + (1 - \alpha)|y_m|)(y_m/|y_m|) \rightarrow \alpha\xi$ となること (即ち S^{d-1} に於て $y_m/|y_m| \rightarrow \xi$ となること) とは同値である; (ii) $K(\cdot, \xi^*) = M(\xi, \cdot)/M(\xi, a)$.

証明. 任意に $\xi^* \in \Delta'$ をとる. どんなに $\{y_m\} \in \xi^*$ をとつても, 一定の $\xi \in S^{d-1}$ があつて $y_m/|y_m| \rightarrow \xi$ となることを示す. そうでないとき $y'_m/|y'_m| \rightarrow \xi' \in S^{d-1}, y''_m/|y''_m| \rightarrow \xi'' \in S^{d-1}, \xi' \neq \xi''$, となる $\{y'_m\}, \{y''_m\} \in \xi^*$ がとれる. $M(y'_m, x)/M(y'_m, a) = K(x, y'_m)$ 等で $m \rightarrow \infty$ として補題6.6によると

$$M(\xi', x)/M(\xi', a) \equiv M(\xi'', x)/M(\xi'', a) (\equiv K(x, \xi^*)) \quad (x \in \Omega)$$

となる. $x = s\eta$ ($s \in (0, 1)$) とし, S^{d-1} で上式の両辺を $d\eta$ で積分して補題6.9を使うと $f_\mu(s)/M(\xi', a) = f_\mu(s)/M(\xi'', a)$ となり, Ω 上 $M(\xi', \cdot) \equiv M(\xi'', \cdot)$ となり, 補題6.7から $\xi' = \xi''$ と言う矛盾がでる.

こうして $\pi'(\xi') = \xi$ により写像 $\pi': \Delta' \rightarrow S^{d-1}$ が定まり, (ii) と, (i) の必要部分と, π' の単射なことがわかる. 次に $\xi \in S^{d-1}$ をとり, Ω 内の 0 に収束する点列 $\{y_m\}$ で $y_m/|y_m| \rightarrow \xi$ となるものをどんなにとつても, $M(y_m, x)/M(y_m, a) = K(x, y_m)$ の左辺は補題6.6により $M(\xi, x)/M(\xi, a)$ に収束するので, $\{y_m\}$ は基本列で $\{y_m\} \rightarrow \xi^* \in \Delta'$ とすると, $\pi'(\xi^*) = \xi$ であるから, $\pi': \Delta' \rightarrow S^{d-1}$ は全単射である. しかも (i) の十分性部分も示された. 最後に, 各 $x \in \Omega$ に対して, $M(\cdot, x)$ は S^{d-1} 上連続なことが (5.5) よりわかり, 又明らかに $K(x, \cdot)$ が Δ' 上連続なことから, π' の同相性がでる. \square

6.2の最後の所で位相写像 $\pi^*: \Omega \cup \Delta'' \rightarrow \{\alpha < |x| \leq 1\}$ を与えた. そこで $\xi^* \in \Delta'$ に対して $\pi^*(\xi^*) = \alpha\pi'(\xi^*)$ とすると, $\pi^*: \Omega^* = \Delta' \cup \Omega \cup \Delta'' \rightarrow \bar{A} = \{\alpha \leq |x| \leq 1\}$ が定まり, これが位相写像となることがわかる. とくに

$$(6.4) \quad K(x, \xi^*) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n(\mu) f_{\mu n}(|x|) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\alpha^{-1}\pi^*(\xi^*)) S_{nj}\left(\frac{x}{|x|}\right) \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n(\mu) f_{\mu n}(|a|) \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\alpha^{-1}\pi^*(\xi^*)) S_{nj}\left(\frac{a}{|a|}\right) \right)}$$

$$(x \in \Omega, \xi^* \in \Delta').$$

6.5. 6.2, 6.3, 6.4の最後の所を総合すると定理6.1の証明が完結したことになる. 最後に $\Delta = \Delta_1$ を示す. $\alpha(\mu) > 0$ のときで証明する. $\alpha(\mu) = 0$ 場合も同一思想でより容易に出来る.

まず $\Delta_1 \cap \Delta'$ も $\Delta_1 \cap \Delta''$ も空でないことを示す. 仮に $\Delta_1 \cap \Delta' = \emptyset$ とすると $\Delta_1 = \Delta_1 \cap \Delta''$ となる. $f_\mu(x) = f_\mu(|x|)$ として $f_\mu \in H_\mu^+(\Omega)$ と考えられるので, 基本定理の (6.1) により $\Delta_1 = \Delta_1 \cap \Delta''$ 上にあるボレル測度 ν により

$$f_\mu(s) = \int_{\Delta_1 \cap \Delta''} K(s\eta, \xi^*) d\nu(\xi^*)$$

となる. 両辺を S^{d-1} 上 $d\eta$ で積分し, フビニの定理と定理6.2の(ii)と補題6.4によると

$$\begin{aligned} \sigma_\mu f_\mu(s) &= \int_{S^{d-1}} \left(\int_{\Delta_1 \cap \Delta''} K(s\eta, \xi^*) d\nu(\xi^*) \right) d\eta \\ &= \int_{\Delta_1 \cap \Delta''} \left(\int_{S^{d-1}} (L(s\eta, \pi''(\xi^*))/L(a, \pi''(\xi^*))) d\eta \right) d\nu(\xi^*) \\ &= \left(\int_{\Delta_1 \cap \Delta''} L(a, \pi''(\xi^*))^{-1} d\nu(\xi^*) \right) e_\mu(s), \end{aligned}$$

即ち $f_\mu(s)/e_\mu(s)$ ($0 < s < 1$) が定数という矛盾が出る. ゆえに $\Delta_1 \cap \Delta' \neq \emptyset$ である. 同様にして, 仮に $\Delta_1 \cap \Delta'' = \emptyset$ とすると $\Delta_1 = \Delta_1 \cap \Delta'$ である. $e_\mu(x) = e_\mu(|x|)$ として $e_\mu \in H_\mu^+(\Omega)$ と考えられるので, 基本定理の (6.1) により $\Delta_1 = \Delta_1 \cap \Delta'$ 上にあるボレル測度 ν により

$$e_\mu(r) = \int_{\Delta_1 \cap \Delta'} K(r\xi, \eta^*) d\nu(\eta^*)$$

となる。両辺を S^{d-1} 上 $d\xi$ で積分し、フビニの定理と定理6.3(ii)と補題6.9によると

$$\begin{aligned}\sigma_d e_\mu(r) &= \int_{S^{d-1}} \left(\int_{\Delta_1 \cap \Delta'} K(r\xi, \eta^*) d\nu(\eta^*) \right) d\xi \\ &= \int_{\Delta_1 \cap \Delta'} \left(\int_{S^{d-1}} (M(\pi'(\eta^*), r\xi) / M(\pi'(\eta^*), a)) d\xi \right) d\nu(\eta^*) \\ &= \left(\int_{\Delta_1 \cap \Delta'} M(\pi'(\eta^*), a)^{-1} d\nu(\eta^*) \right) f_\mu(r),\end{aligned}$$

即ち $e_\mu(r)/f_\mu(r)$ ($0 < r < 1$) が定数という矛盾が出る。故に $\Delta_1 \cap \Delta'' \neq \emptyset$ である。

さて任意に $\xi^* \in \Delta_1 \cap \Delta'$ をとるとき $\pi'(\xi^*) = \xi \in S^{d-1}$ とすると、定理6.3(ii)から $M(\xi, \cdot)$ が極小となる。補題6.8により任意の $\xi \in S^{d-1}$ について $M(\xi, \cdot)$ が極小となり再び定理6.3からすべての $\xi^* \in \Delta'$ が極小となる： $\Delta_1 \cap \Delta' = \Delta'$ 。同様に $\eta^* \in \Delta_1 \cap \Delta''$ をとるとき $\pi''(\eta^*) = \eta \in S^{d-1}$ とすると、定理6.2(ii)から $L(\cdot, \eta)$ が極小となる。補題6.3により任意の $\eta \in S^{d-1}$ について $L(\cdot, \eta)$ が極小となり再び定理6.2(ii)からすべての $\eta^* \in \Delta''$ が極小となる： $\Delta_1 \cap \Delta'' = \Delta''$ 。以上により $\Delta_1 = \Delta$ となる。

参 照 文 献

- [1] A. BOUKRICHIA: *Das Picard-Prinzip und Verwandte Fragen bei Störung von harmonischen Räumen*, Math. Ann., 239 (1979), 247-270.
- [2] A. BOUKRICHIA, W. HANSEN AND H. HUEBER: *Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces*, Exposition Math., 5(1987), 97-135.
- [3] C. CONSTANTINESCU AND A. CORNEA: *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer, 1971.
- [4] A. LAHTINEN: *On the existence of singular solutions of $\Delta u = Pu$ on Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI Math., 546(1973), 1-15.
- [5] L. H. LOOMIS: *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, 1953.
- [6] F.-Y. MAEDA: *Dirichlet Integrals on Harmonic Spaces*, Lecture Notes in Math. 803, Springer, 1980.
- [7] R. S. MARTIN: *Minimal positive harmonic functions*, Tran. Amer. Math. Soc., 49(1941), 137-172.
- [8] 松島与三: *多様体入門*, 裳華房, 1965.
- [9] C. MÜLLER: *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Math. 17, Springer, 1966.
- [10] M. MURATA: *Structure of positive solutions to $(-\Delta + V)u = 0$ in \mathbf{R}^d* , Duke Math. J., 53(1986), 869-943.
- [11] M. NAKAI: *Martin boundary over an isolated singularity of rotation free density*, J. Math. Soc. Japan, 26(1974), 483-507.
- [12] M. NAKAI: *Continuity of solutions of Schrödinger equations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 110(1991), 581-597.
- [13] 中井三留: *球関数級数展開*, 名古屋工業大学紀要, 44(1992), 101-116.
- [14] H. L. ROYDEN: *Real Analysis*, Macmillan, 1963.
- [15] E. M. STEIN AND G. WEISS: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton, 1975.
- [16] A. WELL: *L'intégration dans les Groupes Topologique et ses Applications*, Actualités Sci. Indust., Hermann, 1940.

本研究は一部分文部省科研費 (一般C, 課題番号05640258) の援助による。

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 31B35; Secondary 31C35.