

## 集中荷重の局所拡大分布力による表示

中村卓次, 小林保\*

社会開発工学科 (土木系)

(1993年9月3日受理)

### Concentrated Loading Expressed by Locally Magnified Distributed Force

Takuji NAKAMURA and Tamotsu KOBAYASHI

Department of Civil Engineering

(Received September 3, 1993)

In the present paper, the authors try to replace a concentrated loading with a distributed force. The shearing force is not exactly defined at the point where the concentrated loading is applied. If the concentrated loading is expressed by the distributed force, the shearing force is defined exactly even at the point where the concentrated loading is applied. A calculation method of deflection using the differential equation of a flexural curve can not be used for the beam under the concentrated loading. However, if the concentrated loading is expressed by the distributed force, the differential equation can be used even at the point where the concentrated loading is applied. In the present paper, the concentrated loading is locally magnified at the applied point and expressed by the distributed force.

#### 1. まえがき

本報告は、分布力を用いて集中荷重を表現することを試みたものである。分布力を用いて集中荷重を表現することができれば、集中荷重の作用点についても次の式を適用することができる。

$$\frac{d}{dx} S(x) = -q(x) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} M(x) = S(x) \quad (2)$$

ここに、 $x$  ははりの材軸に沿う座標、 $M(x)$  は曲げモーメント、 $S(x)$  はせん断力、 $q(x)$  は分布外力である。せん断力は、集中荷重の作用点において定義があいまいであるが、分布力を用いて集中荷重を表現できると、集中荷重作用点におけるせん断力の状態をうまく説明できる。たわみ曲線の微分方程式を用いて変形を計算する方法は、集中荷重が作用するはりには適用できないが、分布力を用いて集中荷重を表現することができれば、適用が可能になる。そこで、本報告では、集中荷重

の作用点付近を局所的に拡大してることにより、分布力を用いて集中荷重を表現することを試みた。

#### 2. 集中荷重の分布力による表示

集中荷重の例として自動車の輪荷重を考え、Fig. 1の中心Aで半径ABの車輪が点Bで路面CDと接しているとする。CDに沿って座標 $x$ を設定し、Bの座標を $x = a$ とする。輪荷重は $x = a$ に作用する大きさ $P$ の集中力である。この集中力は関数 $\pi(x)$ により表わされ、単位は [kgw]、その分布は離散的である。

$$\pi(x) = \begin{cases} 0, & (x < a) \\ P, & (x = a) \\ 0, & (a < x) \end{cases} \quad (3)$$

点Bの近くを局所的に拡大してみると、Fig. 2のようになる。車輪は曲線EBGが変形してEHGになり、路面は直線EFGが変形してEHGになり、EHGを通して輪荷重が路面に伝えられている。対称性から $EF = FG$ で、この長さを $\varepsilon$ とすると、 $\varepsilon$ は非常に小さな正の数である。

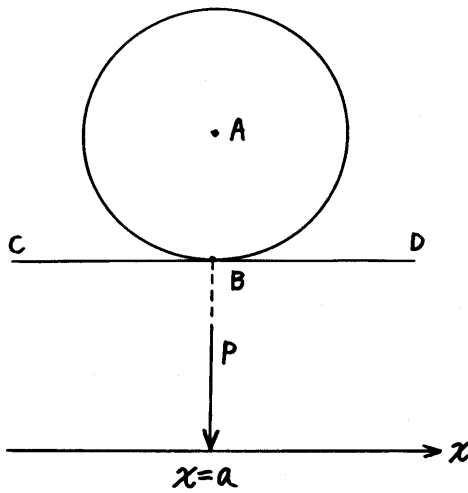


Fig. 1 Wheel load

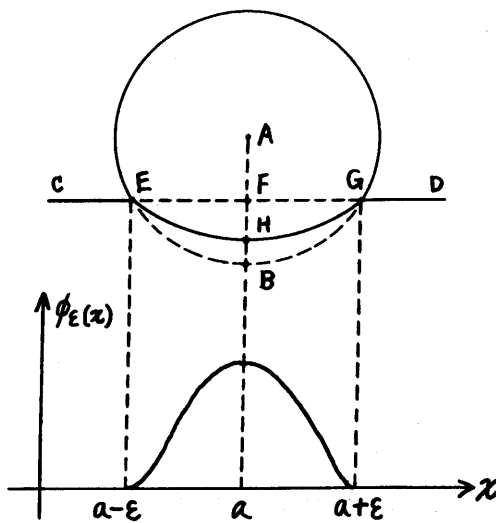


Fig. 2 Locally magnified distributed-force for concentrated load

3点F, H, Bの座標はすべて  $x = a$  で, Eは  $x = a - \epsilon$ , Gは  $x = a + \epsilon$  となる。輪荷重は  $a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$  に分布する力で, 関数  $\phi_\epsilon(x)$  で表示し, 概形は Fig. 2 のようになる。分布力  $\phi_\epsilon(x)$  は  $a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$  以外にはないので,

$$\phi_\epsilon(x) = 0, \quad (x \leq a - \epsilon, a + \epsilon \leq x) \quad (4)$$

$\phi_\epsilon(x)$  の合力は集中力Pと一致する。

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \phi_\epsilon(x) dx = P \quad (5)$$

荷重の対称性から, Fig. 3 のような偏った分布にはならない。偏った分布を排除するには,  $x = a$  のまわりのモーメントを0にすればよい。次式(6)の左辺は力学的に1次

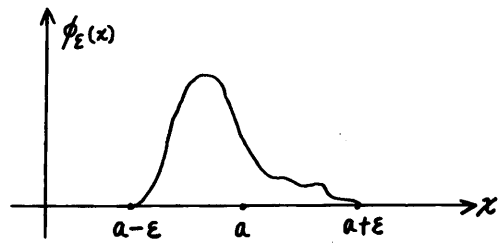


Fig. 3 Eccentric distribution

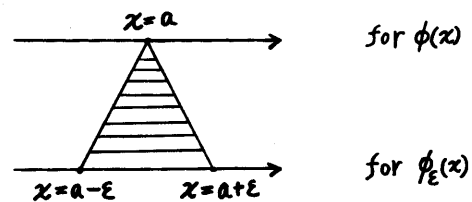


Fig. 4 Correspondence of variable

モーメント, 式(7)の左辺は高次のモーメントで, 力学的に具体的な意味はないが, 偏った分布を避けるのに必要な条件である。

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} (a-x) \{-\phi_\epsilon(x)\} dx = 0 \quad (6)$$

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} (a-x)^n \{-\phi_\epsilon(x)\} dx = 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (7)$$

Fig. 2 において,  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限を考えると区間  $a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$  が点  $x = a$ , ( $a - 0 \leq x \leq a + 0$ ) に収束し, Fig. 2 は Fig. 1 になる。 $\epsilon \rightarrow 0$  における  $\phi_\epsilon(x)$  を  $\phi(x)$  と定義すると, Fig. 4 に示すように  $\phi(x)$  の点  $x = a$  が,  $\phi_\epsilon(x)$  の区間  $a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$  に対応する。式(5), (6), (7)に  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限を考えると, 次式(8), (9), (10)となる。

$$\int_{a-0}^{a+0} \phi(x) dx = P \quad (8)$$

$$\int_{a-0}^{a+0} (a-x) \{-\phi(x)\} dx = 0 \quad (9)$$

$$\int_{a-0}^{a+0} (a-x)^n \{-\phi(x)\} dx = 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (10)$$

式(8)は  $\phi(x)$  の  $x = a$  における積分が0でないことを意味し  $\phi(x)$  の特徴である。これを積分の集中とよぶことにする。式(8), (9), (10)は  $\phi(x)$  の  $x = a$  における状態を表わし,  $\phi(a)$  と表示する。式(8)の両辺の単位は [kgw], 式(9)は [kgw · m], 式(10)は [kgw · m<sup>n</sup>] である。

$$\phi(x) \text{ の単位は [kgw/m] だから, } \phi(a) \text{ は,}$$

$$\phi(a) \text{ [kgw/m]} = P \text{ [kgw]} + 0 \text{ [kgw} \cdot \text{m]} + 0 \text{ [kgw} \cdot \text{m}^2] + \dots \quad (11)$$

となり, 整理すれば,

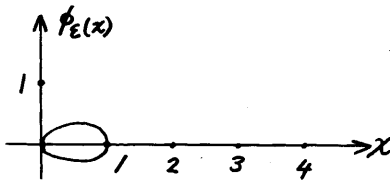


Fig. 5 Horizontal-axis unit

$$\phi(a) = P [m] \tag{12}$$

となる。式(12)の右辺で消去されずに残っている単位 [m] は、変数 x の単位で、横軸単位と呼び記号 H で表示する。単位とは、x 軸上で x = 0 と x = 1 の間の長さのことである。Fig. 5 は、その部分に○印をつけて示したものである。横軸単位 H を用いると式(12)は、

$$\phi(a) = P \cdot H \tag{13}$$

となる。式(13)と(14)から

$$\phi(x) = 0, (x \neq a) \tag{14}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ P \cdot H & (x = a) \\ 0 & (a < x) \end{cases} \tag{15}$$

となる。式(3)の  $\pi(x)$  と式(15)の  $\phi(x)$  はともに  $x = a$  に作用する集中力 P を表わしているが、その表現が異っている。 $\pi(x)$  が直接的であるのに対し、 $\phi(x)$  は  $\phi_\epsilon(x)$  の分布幅  $2\epsilon$  を 0 とした極限として表示され間接的である。

### 3. 等価な局所拡大分布力

Fig. 2 で、路面と車輪の剛性が変わると、曲線  $\widehat{EHG}$  も変化する。BH が車輪の、FH が路面の、BF が合計の変形量である。車輪の剛性が大きく路面の剛性が小さければ、BH は小さく FH が大きい。逆に車輪の剛性が小さく路面の剛性が大きければ、BH が大きく FH は小さい。両者が共に大きければ BF は小さく、逆に共に小さければ BF は大きい。 $\widehat{EHG}$  が異なれば  $\phi_\epsilon(x)$  も異なり、集中力の大きさと作用点と同じでも  $\phi_\epsilon(x)$  は異なる。集中力とその分布力の対応は 1 対 1 ではないが、同一の集中力に対応する分布力は互に“等価”であるとする。等価な分布力の条件は、式(4)~(7)を満足することである。車輪と路面を特定すれば、剛性などの物理的性質が定まり、実際の分布力が求められる。しかし、集中力を分布力に置換して考える場合に、必ずしも実際の分布力を用いる必要はない。等価な分布力が同一の集中力に対応しているから、任意のひとつを用いることができる。次の式(16)の形、n 次多項式は取扱いが容易である。

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{16}$$

また次の式(17)のような  $\phi_\epsilon(x)$  は、4 次多項式で、

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a - \epsilon) \\ \frac{15}{16} \frac{P}{\epsilon^5} \{(x - a)^2 - \epsilon^2\}^2 & (a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon) \\ 0 & (a + \epsilon \leq x) \end{cases} \tag{17}$$

式(4)~(7)を満足するので、等価な分布力のひとつである。分布力として式(17)の多項式を用いると、計算はより簡単になる。式(17)が、式(4), (5), (6)を満足することは、代入することで確かめられるが、式(7)については少し説明が必要である。式(17)を式(7)の左辺に代入すれば

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} (a-x)^n \{-\phi_\epsilon(x)\} dx = \frac{-15 \cdot P \cdot \epsilon^n}{(n+5)(n+3)(n+1)} \tag{18}$$

(n = 2, 4, 6, ...)

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} (a-x)^n \{-\phi_\epsilon(x)\} dx = 0 \tag{19}$$

(n = 3, 5, 7, ...)

式(18)の右辺は、 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限において 0 に収束する。式(17)は、次の式(20)で  $\lambda = 2$  とした場合で、

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a - \epsilon) \\ \frac{(-1)^\lambda (2\lambda + 1)!}{2^{2\lambda + 1} (\lambda!)^2} \frac{P}{\epsilon^{2\lambda + 1}} \{(x - a)^2 - \epsilon^2\}^\lambda & (a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon) \\ 0 & (a + \epsilon \leq x) \end{cases} \tag{20}$$

$\lambda = 0, 1$ , あるいは  $\lambda = 3, 4, 5, \dots$  とした場合も、式(4)~(7)を満足し、等価な分布力である。式(20)の  $\phi_\epsilon(x)$  は、 $x = a - \epsilon$  と  $x = a + \epsilon$  の間で、 $\lambda = 0, 1$  のときは微分できないが、 $\lambda \geq 2$  のとき微分可能である。適当に大きな  $\lambda$  を選べば、その極限  $\phi(x)$  も微分可能となる。

等価な分布力を多項式で表わされるものは、式(20)の他にも存在する。例えば次の式(21)の  $\phi_\epsilon(x)$  も、式(4)~(7)を満足し、

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a - \epsilon) \\ -\frac{15}{4} \frac{P}{\epsilon^5} (x - a)^2 \{(x - a)^2 - \epsilon^2\} & (a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon) \\ 0 & (a + \epsilon \leq x) \end{cases} \tag{21}$$

その形状は Fig. 6 のようになる。Fig. 2 とはかなり異っているが、等価で、次のように考えられる。Fig. 7 (a) に示すように、AB 上の  $2\delta$  離れた D, E に  $P/2$  が作用し、D, E の中点を C とする。2つの力の合力は P で、 $\delta \rightarrow 0$  の極限を考えると、Fig. 7 (b) の C に作用する集中力 P と一致する。Fig. 7 の (a) と (b) の関係は、式(21)と(17)の関係と似ている。a と P を変数と考えれば、 $x = a$  に作用する P は、任意の集中力を表わしている。a, P に特定の数値を代入することにより、特定の集中力を表わすことができる。原点 ( $x = 0$ ) に作用する、単位の力 ( $P = 1$ ) の分布力を  $\delta_\epsilon(x)$ , 極限を  $\delta(x)$  とする。式(17)に  $a = 0, P = 1$  を代入すれば、

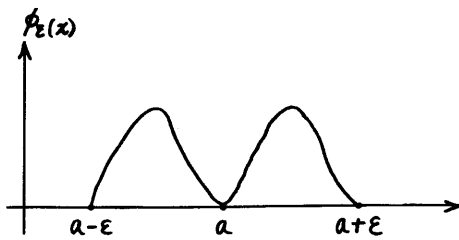


Fig. 6 Two magnified distributed-force

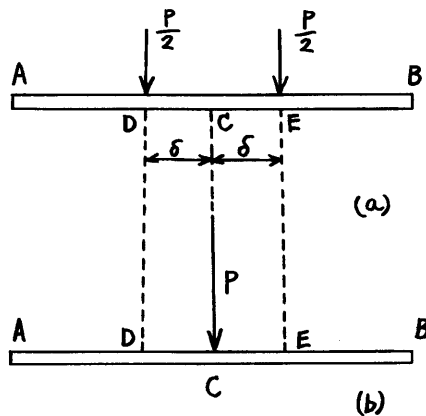


Fig. 7 Equivalent concentrated-load

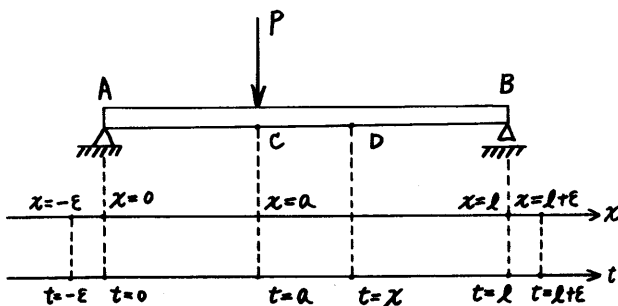


Fig. 8 Simple beam under concentrated load

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -\epsilon) \\ \frac{15}{16} \frac{1}{\epsilon^5} (x^2 - \epsilon^2) & (-\epsilon \leq x \leq \epsilon) \\ 0 & (\epsilon \leq x) \end{cases} \quad (22)$$

となる。δ<sub>ε</sub>(x) の a を横に移動させ、P を定数倍すれば、任意の集中力に対する φ<sub>ε</sub>(x) が次のように求められる。

$$\phi_\epsilon(x) = p \cdot \delta_\epsilon(x - a) \quad (23)$$

4. 分布力の極限表示による断面力の計算

Fig. 8 に示す長さ l のはり AB 上の点 C に、集中力

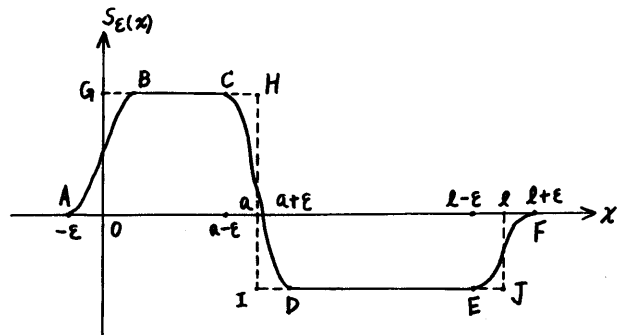


Fig. 9 Shearing force

P が作用している場合を考える。材軸線に沿う座標 x 上で、A を x = 0, B を x = l, C を x = a とする。A, B にはそれぞれ  $\{(1 - a) / l\} P$ ,  $\{a / l\} P$  の支点反力が生ずる。3つの集中力を、式(17)の分布力で置き換えた外力 F<sub>ε</sub>(x) は、

$$F_\epsilon(x) = \begin{cases} -\frac{15}{16} \frac{1-a}{l} \frac{P}{\epsilon^5} (x^2 - \epsilon^2)^2 & (-\epsilon \leq x \leq +\epsilon) \\ 0 & (+\epsilon \leq x \leq a + \epsilon) \\ \frac{15}{16} \frac{P}{\epsilon^5} \{(x - a)^2 - \epsilon^2\}^2 & (a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon) \\ 0 & (a + \epsilon \leq x \leq l - \epsilon) \\ -\frac{15}{16} \frac{a}{l} \frac{P}{\epsilon^5} \{(x - l)^2 - \epsilon^2\}^2 & (l - \epsilon \leq x \leq l + \epsilon) \end{cases} \quad (24)$$

となる。ε → 0 の F<sub>ε</sub>(x) の極限 F(x) は、横軸単位 H を用いて、

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1-a}{l} \cdot P \cdot H & (x = 0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ P \cdot H & (x = a) \\ 0 & (a < x < l) \\ -\frac{a}{l} \cdot P \cdot H & (x = l) \end{cases} \quad (25)$$

となる。外力 F<sub>ε</sub>(x) が作用している場合のせん断力 S<sub>ε</sub>(x), 曲げモーメント M<sub>ε</sub>(x) は、式(1), (2)を用いて、

$$\frac{d}{dx} S_\epsilon(x) = -F_\epsilon(x) \quad (26)$$

$$\frac{d}{dx} M_\epsilon(x) = S_\epsilon(x) \quad (27)$$

になる。Fig. 8 に示すように、積分変数を t, 点 D の座標 t = x とすると、D のせん断力と曲げモーメントは、

$$S_\epsilon(x) = \int_{-\epsilon}^x \{-F_\epsilon(t)\} dt \quad (28)$$

$$M_\epsilon(x) = \int_{-\epsilon}^x (x - t) \{-F_\epsilon(t)\} dt \quad (29)$$

となる。式(26)の両辺を積分し、境界条件 S<sub>ε</sub>(-ε) = 0 を用いれば式(28)となる。式(27)の両辺を積分し、M<sub>ε</sub>(-ε)

$\epsilon) = 0$  を用いれば,

$$M_\epsilon(x) = \int_{-\epsilon}^x S_\epsilon(t) dx \quad (30)$$

となり実質的には(29)と同じである。式(28)に(24)を代入すれば、次の(31)となる。

$$S_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{15}{16} \frac{1-a}{1} \frac{P}{\epsilon^5} \left( \frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{3} \epsilon^2 x^3 + \epsilon^4 x + \frac{8}{15} \epsilon^5 \right) & (-\epsilon \leq x \leq +\epsilon) \\ \{(1-a)/l\} \cdot P & (+\epsilon \leq x \leq a-\epsilon) \\ \frac{1-a}{1} P - \frac{15}{16} \frac{P}{\epsilon^5} \left\{ \frac{(x-a)^5}{5} - \frac{2}{3} \epsilon^2 (x-a) + \frac{8}{15} \epsilon^5 \right\} & (a-\epsilon \leq x \leq a+\epsilon) \\ \{-a/l\} \cdot P & (a+\epsilon \leq x \leq l-\epsilon) \\ -\frac{a}{1} P + \frac{15}{16} \frac{a}{1} \frac{P}{\epsilon^5} \left\{ \frac{(x-l)^5}{5} - \frac{2}{3} \epsilon^2 (x-l) + \frac{8}{15} \epsilon^5 \right\} & (l-\epsilon \leq x \leq l+\epsilon) \end{cases} \quad (31)$$

Fig. 9 で、ABCDEF を連ねた実線が  $S_\epsilon(x)$  である。 $S_\epsilon(x)$  は  $-\epsilon \leq x \leq l+\epsilon$  の全域で微分可能で、 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限  $S(x)$  がはり AB のせん断力である。 $\epsilon \rightarrow 0$  のとき微分の可能性を失わずに  $S_\epsilon(x) \rightarrow S(x)$  と考える。 $S(x)$  は  $x=0$  で、 $S_\epsilon(-\epsilon) = 0$  から  $S_\epsilon(+\epsilon) = \{(1-a)/l\} \cdot P$  まで急に増加しており、 $S(x)$  の特徴である。これを増加の集中とよぶことにする。 $S(x)$  は、 $x=1$  においても、さらに減少を負の増加と考えると、 $x=a$  においても増加の集中が生じている。増加の集中を表示するため、横軸単位の 0 乗  $H^0$  を用いると、

$$S(x) = \begin{cases} \{(1-a)/l\} \cdot PH^0 & (x=0) \\ \{(1-a)/l\} \cdot P & (0 < x < a) \\ \{(1-a)/l\} \cdot P - PH^0 & (x=a) \\ \{-a/l\} \cdot P & (a < x < l) \\ \{-a/l\} \cdot P + (a/l) \cdot PH^0 & (x=l) \end{cases} \quad (32)$$

式(30)に(31)を代入すれば(33)となる。Fig.10 で、ABCDEF を連ねた実線が  $M_\epsilon(x)$  である。 $M_\epsilon(x)$  は  $-\epsilon \leq x \leq l+\epsilon$  の全域で微分が可能で、 $\epsilon \rightarrow 0$  の極限  $M(x)$  がはりの曲げモーメントである。

$$M_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{15}{16} \frac{1-a}{1} \frac{P}{\epsilon^5} \left( \frac{1}{30} x^6 - \frac{\epsilon^2}{6} x^4 + \frac{\epsilon^4}{2} x^2 + \frac{8\epsilon^5}{15} x + \frac{\epsilon^6}{6} \right) & (-\epsilon \leq x \leq +\epsilon) \\ \{(1-a)/l\} \cdot P \cdot x & (+\epsilon \leq x \leq a-\epsilon) \\ \frac{1-a}{1} P \cdot x - \frac{15}{16} P \left\{ -\frac{1}{30} (x-a)^6 - \frac{\epsilon^2}{6} (x-a)^4 + \frac{\epsilon^4}{2} (x-a)^2 + \frac{8\epsilon^5}{15} (x-a) + \frac{\epsilon^6}{6} \right\} & (a-\epsilon \leq x \leq a+\epsilon) \\ P \cdot a - (a/l) \cdot P \cdot x & (a+\epsilon \leq x \leq l-\epsilon) \\ P \cdot a - \frac{a}{1} P \cdot x + \frac{15}{16} \frac{a}{1} \frac{P}{\epsilon^5} \left\{ \frac{1}{30} (x-l)^6 - \frac{\epsilon^2}{6} (x-l)^4 + \frac{\epsilon^4}{2} (x-l)^2 + \frac{8\epsilon^5}{15} (x-l) + \frac{\epsilon^6}{6} \right\} & (l-\epsilon \leq x \leq l+\epsilon) \end{cases} \quad (33)$$

$\epsilon \rightarrow 0$  のとき、微分の可能性を失わず  $M_\epsilon(x) \rightarrow M(x)$  と考え次の式(34)のようになる。

$$M(x) = \begin{cases} \{(1-a)/l\} \cdot P \cdot x & (0 \leq x \leq a) \\ P \cdot a - (a/l) \cdot P \cdot x & (a \leq x \leq l) \end{cases} \quad (34)$$

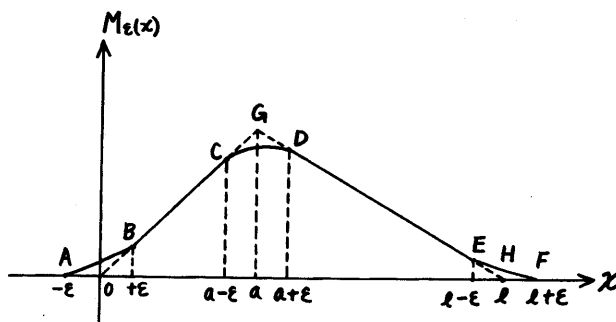


Fig.10 Bending moment

### 5. 直接表示による断面力の計算

Fig. 8 のはり AB に作用している外力の直接表示を  $G(x)$  とすれば、次の式(35)となる。

$$G(x) = \begin{cases} \{- (1-a)/l\} \cdot P & (x=0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ P & (x=a) \\ 0 & (a < x < l) \\ \{- (a/l) \cdot P & (x=l) \end{cases} \quad (35)$$

この場合のせん断力を  $T(x)$  とすると、点 D、( $t=x$ ) での  $T(x)$  は定義があいまいなため次の 2 通りになる。

$$T(x) = \sum_{t < x} \{- G(t) \} \quad (36)$$

$$T(x) = \sum_{t \leq x} \{- G(t) \} \quad (37)$$

式(28)では  $S_\epsilon(x)$  の  $-\epsilon < t < x$  での積分と、 $-\epsilon \leq t \leq x$  での積分が区別されないため、(36)と(37)のような結果は生じない。3点  $x=0$ 、 $x=a$ 、 $x=l$  では、(36)と(37)の計算結果が異なるので、 $T(x)$  は定義されない。しかし、これら3点を除けば両式の結果が一致し、次の(38)のようになる。

$$T(x) = \begin{cases} \{(1-a)/l\} \cdot P & (0 < x < a) \\ \{- (a/l) \cdot P & (a < x < l) \end{cases} \quad (38)$$

Fig. 9 で GH と IJ が、この  $T(x)$  である。式(38)の  $T(x)$  は、3点  $x=0$ 、 $x=a$ 、 $x=l$  で不連続で微分できない。これに対し、(32)の  $S(x)$  はこれら3点でも微分可能である。これら3点を除けば  $S(x)$  と  $T(x)$  は一致する。曲げモーメント  $N(x)$  は、次の 2 通りに書ける。

$$N(x) = \sum_{t < x} (x-t) \{- G(t) \} \quad (39)$$

$$N(x) = \sum_{t \leq x} (x-t) \{- G(t) \} \quad (40)$$

式(38)と(39)は一致し、次のように表わされる。

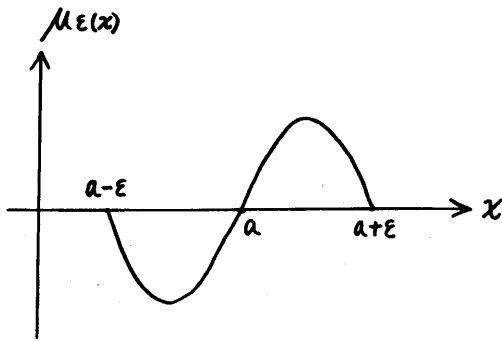


Fig. 11 Distributed-force for moment

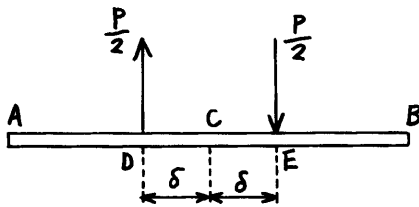


Fig. 12 Moment expressed by couple

$$N(x) = \begin{cases} \{(1-a)/l\} \cdot P \cdot x & (0 \leq x \leq a) \\ P \cdot a - (a/l)P \cdot x & (a \leq x \leq l) \end{cases} \quad (41)$$

Fig. 10の OGH が  $N(x)$  で、3点  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = l$  では微分できない。これに対し、(34)の  $M(x)$  はこれら3点でも微分できる。これら3点を除いて  $M(x)$  と  $N(x)$  は一致する。

分布力の極限表示  $F(x)$  から計算した  $S(x)$  と  $M(x)$  は全域で微分可能で、(1), (2)を適用できる。これに対し、直接表示  $G(x)$  から計算した  $T(x)$  と  $N(x)$  は、集中力の作用点で微分できないので、(1), (2)を適用できない。

6. 集中モーメントと部分等分布荷重

集中モーメントについても、集中力と同じように、分布力の極限表示を考えることができる。点  $x = a$  に作用する集中モーメント  $Q$  の局所拡大分布力を  $\mu_\epsilon(x)$  とする。分布範囲を  $a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon$  とすると、この範囲外では、次式が成立つ。

$$\mu_\epsilon(x) = 0 \quad (x \leq a - \epsilon, a + \epsilon \leq x) \quad (42)$$

$\mu_\epsilon(x)$  の合力は0で、積分で計算される。

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \mu_\epsilon(x) dx = 0 \quad (43)$$

$\mu_\epsilon(x)$  による  $x = a$  のまわりのモーメントは  $Q$  なので、

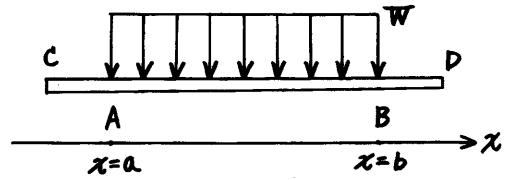


Fig. 13 Partial uniform load

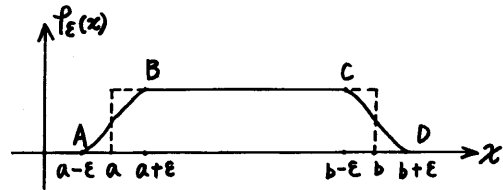


Fig. 14 Locally magnified distributed-force for partial uniform load

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} (a-x) \{-\mu_\epsilon(x)\} dx = Q \quad (44)$$

となり、偏りを除くため、

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} (a-x)^n \{-\mu_\epsilon(x)\} dx = 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (45)$$

が必要である。 $\epsilon \rightarrow 0$  での  $\mu_\epsilon(x)$  の極限を  $\mu(x)$  とする。式(44)の  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限を考えると、

$$\int_{a-0}^{a+0} (a-x) \{-\mu(x)\} dx = Q \quad (46)$$

となる。これは  $\mu(x)$  のモーメント  $(a-x) \{-\mu(x)\}$  の、 $x = a$  での積分が0でないことを意味し、 $\mu(x)$  の特徴である。これを、モーメント積分の集中とよぶことにする。集中力について(4)~(7)から(15)を導びいたのと同様に、(42)~(45)から次の式が導びかれる。

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ Q \cdot H^2 & (x = a) \\ 0 & (a < x) \end{cases} \quad (47)$$

式(15), (32), (47)を比べると、横軸単位  $H$  と冪指数の組合せで、冪指数0が増加の集中、1が積分の集中、2がモーメント積分の集中を示す。集中力の場合と同様、集中モーメントとその局所拡大分布力の対応は、1対1ではないが、等価な分布力の条件は(42)~(45)を満足することである。

$$\mu_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a - \epsilon) \\ -\frac{15}{4} \frac{Q}{\epsilon^5} (x-a) \{(x-a)^2 - \epsilon^2\} & (a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon) \\ 0 & (a + \epsilon \leq x) \end{cases} \quad (48)$$

式(48)の  $\mu_\epsilon(x)$  は、 $x$  の3次式で、(42)~(45)を満足するので、等価な局所拡大分布力のひとつである。(17)の  $\phi_\epsilon(x)$  が(4)

~(7)を満足したように、(48)の  $\mu_\varepsilon(x)$  が、(42)~(45)を満足するのを確かめることができる。(48)を図示すると Fig.11 のようになる。 $\mu_\varepsilon(x)$  は偏った分布であるため、(44)でモーメント  $Q$  が生じる。一般に、集中モーメントの分布力  $\mu_\varepsilon(x)$  は、次の式で表わされる。

$$\mu_\varepsilon(x) = -Q \cdot x \cdot \frac{d}{dx} \delta_\varepsilon(x - a) \quad (49)$$

ここで、 $\delta_\varepsilon(x)$  は単位集中力の、微分可能な任意の局所拡大分布力である。

集中モーメントを集中力で表わせば、Fig.12 のようになる。部材 AB の C 点から  $\delta$  離れた D, E に、 $P/2$  の集中力が反対向に作用する。このとき、D, E に  $Q = P \cdot \delta$  のモーメントを生じ、 $\delta \rightarrow 0$  の極限を考えると、C に作用する集中モーメント  $Q$  になる。Fig.11 と 12 を比較すると、集中モーメントの意味を理解しやすい。

Fig.13 に示す部材 CD の一部 AB に、烈度  $W$  の等分布荷重を考える。材軸に沿う座標  $x$  で、A を  $x = a$ 、B を  $x = b$  とする。この荷重の両端で、増加の集中が生じている。 $x = a$  と  $x = b$  を、区間  $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$  と  $b - \varepsilon \leq x \leq b + \varepsilon$  に対応させ、分布力を  $\rho_\varepsilon(x)$  とする。分布荷重とその局所拡大分布力の対応は、次の 5 次式で表わされる。

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a - \varepsilon) \\ \frac{15}{16} \frac{W}{\varepsilon^5} \left\{ \frac{1}{5} (x - a)^5 - \frac{2}{3} \varepsilon^2 (x - a)^3 + \varepsilon^4 (x - a) + \frac{8}{15} \varepsilon^5 \right\} & (a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon) \\ W & (a + \varepsilon \leq x \leq b - \varepsilon) \\ W - \frac{15}{16} \frac{W}{\varepsilon^5} \left\{ \frac{1}{5} (x - a)^5 - \frac{2}{3} \varepsilon^2 (x - b)^3 + \varepsilon^4 (x - a) + \frac{8}{15} \varepsilon^5 \right\} & (b - \varepsilon \leq x \leq b + \varepsilon) \\ 0 & (b + \varepsilon \leq x) \end{cases} \quad (50)$$

式(50)を図示すると、Fig.14 で ABCD を連ねた実線となる。 $\rho_\varepsilon(x)$  は次式で表わされる。

$$\rho_\varepsilon(x) = W \left\{ \int_{a-\varepsilon}^x \delta_\varepsilon(x - a) dx - \int_{b-\varepsilon}^x \delta_\varepsilon(x - b) dx \right\} \quad (51)$$

ここに  $\delta_\varepsilon(x)$  は原点に作用する単位の集中力の、局所拡大分布力である。

## 7. あとがき

分布力を用いて集中力を表現するとき、集中力を作用点の近くで局所的に拡大すると、非常に小さいけれどもある広がりを持っている。その広がりを持つ力を、局所拡大分布力とよび、この分布力を用いて集中力を表現することができる。集中力の大きさは同じでも、材質によって分布関数が異なることがあるため、集中力と拡大分布力の対応は一对一ではない。同じ集中力に対応する局所拡大分布力は等価であるとして、判別条件を調べた。等価な分布力のうち、分布関数が多項式で表示されるものを用いると計算が簡単になる。はりに作用する曲げモーメントとせん断力について、集中力を局所拡大分布力に置き換えて考えるとき、はりの長さが局所拡大に相当する分だけ長いものと考えてことになる。その時、曲げモーメントとせん断力は、はりの全域で微分可能である。

集中モーメントについても局所拡大分布力を用いて表現することができる。また部分等分布荷重の端部について、微分可能な分布関数をもつ局所拡大分布力を用いて表現することができる。