

球関数級数展開

中井三留

数学教室

(1992年8月25日受理)

Expansions into Series of Spherical Harmonics

Mitsuru NAKAI

Department of Mathematics

(Received August 25, 1992)

The purpose of this paper is to establish the following result: If f is a function on the unit sphere in the Euclidean space of dimension d greater than or equal to 3 which is at least $-2[-d/4]$ times continuously differentiable, then f can be expanded into the absolutely and uniformly convergent Fourier series of spherical harmonics on the unit sphere, where $[\]$ is the Gaussian symbol.

d 次元ユークリッド空間 R^d ($d \geq 2$) の単位球 B^d の表面である単位球面 ∂B^d の点を ω , 又 ∂B^d 上の曲面要素を $d\omega$ と記す。 ∂B^d 上の n 位球関数の正規直交基底

$$\{S_{nj}(\omega) : j = 1, \dots, N(n)\}$$

を一つ定め, $L_2(\partial B^d, d\omega)$ の正規直交系

$$(1) \quad S = \{S_{nj}(\omega) : j = 1, \dots, N(n); n = 0, 1, \dots\}$$

を考える。 $f \in L_2(\partial B^d, d\omega)$ の S に関するフーリエ係数

$$c_{nj} = \int_{\partial B^d} f(\omega) S_{nj}(\omega) d\omega$$

に依り作った級数

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} c_{nj} S_{nj} \right]$$

を f の S に関するフーリエ級数と言う。 f のフーリエ級数 (2) が ∂B^d 上絶対かつ一様に収束して f に一致すると言う状況は応用上非常に重要である。本論文では f にどのような条件を課せば上述のようになるかを考える。

次元 d が 2 の場合, $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$ となる様な変数 $\theta \in (R^1 \bmod 2\pi)$ を用いると, (1) は正規直交三角関数系となり, (2) は通常の三角関数系のフーリエ級数となるので, 周知の標準的基礎知識は, $f \in C^1(\partial B^2)$ ならば, (2) は f に ∂B^2 上絶対かつ一様に収束する, と言うものである (例えば [7, p.278] 参照)。又次元 d が 3 の場合には $f \in C^2(\partial B^3)$ ならば, (2) は f に ∂B^3 上絶対かつ一様に収束することが, 広く読まれている古典的文献 [1, p.513] に述べられている。

本論文では, $d \geq 3$ の場合

$$f \in C^{2|d/4|}(\partial B^d)$$

ならば, (2) は ∂B^d 上絶対かつ一様に収束して f を表すことを示す, 但し $|\xi|$ は実数 ξ 以上の最小の整数を表す記号である。従って, $2|3/4| = 2$ だから, 我々の結果は, 3次元の場合の上述の古典的結果を含む。

本論文は五つのそれぞれに短い章からなり, 各章は複数個の節からなる。第1章では ∂B^d 上の自然なりーマン計量を具体的に計算し付随するラプラス・ベルトラミ作用素を求める。初等的な内容であるが記録しておくくと便利である。第2章では球関数の三通りの定義を与える。解説的な内容である。第3章で球関数系の正規直交系 S を構成し,

関連する基本的な性質を述べる。フーリエ係数の評価式が中心的な主張である。S の完全性の手短な証明を第4章で紹介する。最後の第5章で本論文の上述の主要結果が述べられかつ証明される。

1. 単位球面のリーマン計量

1.1. d 次元 ($d \geq 2$) ユークリッド空間 R^d の点 $x = (x_1, \dots, x_d)$ の原点 $0 = (0, \dots, 0)$ からの距離, 即ち位置ベクトル x の長さ, を

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^d x_j^2 \right)^{1/2}$$

とかく。 R^d の単位球 $B^d = \{x \in R^d : |x| < 1\}$ の境界

$$\partial B^d = \{x \in R^d : |x| = 1\}$$

が R^d の単位球面で, $d-1$ 次元の C^∞ 多様体である。 ∂B^d の点 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ に於て, その最も自然な ∂B^d 上の局所座標は ξ_1, \dots, ξ_{d-1} から適当な $d-1$ 個を取ったものである。即ち ∂B^d の点 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$ に対して $|\eta| = (\sum_{j=1}^d \eta_j^2)^{1/2} = 1$ だから, η_1, \dots, η_d のうち少なくとも一つは 0 でない。例えば $\eta_d \neq 0$ とするとき, $\eta_d > 0$ ならば

$$\Omega(\eta) = (\partial B^d) \cap \{x_d > 0\},$$

$\eta_d < 0$ ならば

$$\Omega(\eta) = (\partial B^d) \cap \{x_d < 0\},$$

とおく。 $\Omega(\eta)$ は ∂B^d 上の η の開近傍である。

$$U = \{x \in R^d : |x| < 1, x_d = 0\}$$

は R^{d-1} 内の開球と考えられる。すると $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ とするとき, $\xi_i(\xi) = \xi_i$ ($i < d$) に依る $\xi \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$ は同相写像 $\Omega(\eta) \rightarrow U$ を与える。これを η に於ける局所座標にとればよい。 ∂B^d は R^d の自然な計量に関するユークリッド空間の部分多様体としてリーマン空間である。この局所座標 $(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$ に関する計量テンソル

$$g_{ij} = g_{ij}(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) \quad (i, j < d),$$

$g = g(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) = \det(g_{ij})$, 共役テンソル $g^{ij} = g^{ij}(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$, 及びラプラス・ベルトラミ作用素 Δ^* を計算しよう。

∂B^d の2点 (ξ_1, \dots, ξ_d) と $(\xi_1 + d\xi_1, \dots, \xi_d + d\xi_d)$ を結ぶ線素の長さを ds とすると

$$ds^2 = \sum_{i,j < d} g_{ij} d\xi_i d\xi_j$$

であるから, g_{ij} の計算には ds^2 を具体的に計算すれば良い。すると

$$ds^2 = \sum_{i=1}^d (d\xi_i)^2$$

である。ここで $\sum_{i=1}^d \xi_i^2 = 1$ により, 順次

$$\sum_{i=1}^d \xi_i d\xi_i = 0, \quad d\xi_d = \xi_d^{-1} \sum_{i < d} \xi_i d\xi_i$$

だから

$$(d\xi_d)^2 = \xi_d^{-2} \left(\sum_{i < d} \xi_i d\xi_i \right)^2 = \xi_d^{-2} \sum_{i,j < d} \xi_i \xi_j d\xi_i d\xi_j$$

である。従って

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i,j < d} \delta_{ij} d\xi_i d\xi_j + (d\xi_d)^2 = \sum_{i,j < d} \delta_{ij} d\xi_i d\xi_j + \sum_{i,j < d} \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_d^2} d\xi_i d\xi_j \\ &= \sum_{i,j < d} \left(\delta_{ij} + \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_d^2} \right) d\xi_i d\xi_j \end{aligned}$$

となる。こうして

$$(1.1) \quad g_{ij} = g_{ij}(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) = \delta_{ij} + \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_d^2} \quad (i, j < d)$$

である。

$$\partial \xi / \partial \xi_i = (\partial \xi_1 / \partial \xi_i, \dots, \partial \xi_d / \partial \xi_i) \quad (i < d)$$

と記すと、 $\sum_{j \leq d} \xi_j^2 = 1$ より $2\xi_i + 2\xi_d(\partial \xi_d / \partial \xi_i) = 0$ であるから、

$$\partial \xi_d / \partial \xi_i = -\xi_i / \xi_d$$

であり

$$\partial \xi / \partial \xi_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{i,d-1}, -\xi_i / \xi_d)$$

となり、 $(\partial \xi / \partial \xi_i) \cdot (\partial \xi / \partial \xi_j)$ を内積とすると

$$\frac{\partial \xi}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \xi_j} = \sum_{k < d} \delta_{ik} \delta_{jk} + \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_d^2} = \delta_{ij} + \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_d^2}$$

となるから、(1.1) は又

$$g_{ij} = g_{ij}(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) = \frac{\partial \xi}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \xi_j} \quad (i, j < d)$$

と印象的に表示出来ることを付記する。

1.2. (1.1) の (g_{ij}) からその行列式 $g = \det(g_{ij})$ およびその逆行列 $(g_{ij})^{-1} \equiv (g^{ij})$ を計算する。その為の準備として (i, j) 要素が $\delta_{ij} + a_i a_j$ である m 次正方行列 A を考える：

$$A = (\delta_{ij} + a_i a_j)_{i:1 \dots m; j:1 \dots m}$$

この行列式 $|A| = \det(\delta_{ij} + a_i a_j)$ と逆行列 A^{-1} を計算すると

$$(1.2) \quad |A| = 1 + \sum_{i \leq m} a_i^2$$

であり、又

$$(1.3) \quad A^{-1} = \left(\delta_{ij} - \frac{a_i a_j}{|A|} \right)_{i:1 \dots m; j:1 \dots m}$$

となることを示そう。

最初 (1.2) を m についての帰納法で示す。 $m=1$ については明らかに正しい。 $m-1$ のとき成立するとして m の場合を考える。 $|A|$ の第 m 行ベクトルを $(0, \dots, 0, 1) + a_m(a_1, \dots, a_m)$ とみて、 $|A|$ の第 m 行についての加法性を使い、 $|A|$ の第 m 行をそれぞれ $(0, \dots, 0, 1)$ 及び $a_m(a_1, \dots, a_m)$ とする行列式 B 及び C の和として表す： $|A| = B + C$ 。 B を第 m 行について展開すると、帰納法の仮定により、

$$B = 1 + \sum_{i < m} a_i^2$$

となる。 C では第 m 行についての斉次性から a_m をくくり出し、その後の第 m 行 (a_1, \dots, a_m) にそれぞれ a_1, \dots, a_{m-1} をかけて第 1 行, ..., 第 $m-1$ 行から引けば

$$C = a_m \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \end{vmatrix} = a_m^2$$

となる。そこで $B + C$ を合わせて (1.2) が得られる。

次に (1.3) の証明に進む。(1.2) により $|A| \neq 0$ だから確かに A^{-1} が存在する。 A^{-1} の (i, j) 要素を A_{ij} とすると、 A は対称行列だから、 A^{-1} もそうであって $A_{ij} = A_{ji}$ である。各 i ($1 \leq i \leq m$) について、 A_{ii} は A の i 行 i 列を取り除いて出来る小行列式を $|A|$ でわったものだから、(1.2) より

$$|A| A_{ii} = 1 + \sum_{k \leq m, k \neq i} a_k^2 = |A| - a_i^2 = |A| \delta_{ii} - a_i a_i$$

となり $A_{ii} = \delta_{ii} - a_i a_i / |A|$ だから (1.3) の形となる。今度は A_{ij} ($i \neq j$) も (1.3) の形となることを示したい。同じ事だから、書き易いために、 $m=4$ として、例えば A_{32} で見てみよう。 A_{32} は A の 2 行 3 列を取り除いて出来る小行列式に $(-1)^{3+2} = -1$ をかけて $|A|$ でわったものだから

$$-|A| A_{32} = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_4 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3 a_4 \\ a_4 a_1 & a_4 a_2 & 1+a_4^2 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_4 \\ a_1 & a_2 & a_4 \\ a_4 a_1 & a_4 a_2 & 1+a_4^2 \end{vmatrix}$$

となる。第 2 行にそれぞれ a_1, a_4 をかけてそれぞれ第 1 行、第 3 行から引くと

$$-|A| A_{32} = a_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 a_2 & a_2 & a_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

である。このそれぞれ第 1 行、第 3 行にそれぞれ a_1, a_4 をかけて第 2 行から引くと

$$-|A| A_{32} = a_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_3 a_2$$

となる。よって $A_{32} = -a_3 a_2 / |A| = \delta_{32} - a_3 a_2 / |A|$ となり (1.3) の形となる。

1.3. 前節 1.2 で $m=d-1$, $a_i = \xi_i / \xi_d$ とおけば、(1.1) により $(g_{ij}) = A$ である。そこで (1.2) によると

$$|A| = 1 + \sum_{i < d} \xi_i^2 / \xi_d^2 = (\sum_{i \leq d} \xi_i^2) / \xi_d^2 = 1 / \xi_d^2$$

であるから、 $|A| = g$ により

$$(1.4) \quad g = g(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) = \xi_d^{-2}$$

となる。(1.3) によれば、 $A^{-1} = (g^{ij})$ だから、

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \xi_i \xi_j / |A| = \delta_{ij} - \xi_d^2 \xi_i \xi_j$$

である。よって

$$(1.5) \quad g^{ij} = g^{ij}(\xi_1, \dots, \xi_{d-1}) = \delta_{ij} - \xi_d^2 \xi_i \xi_j \quad (i, j < d)。$$

リーマン空間 ∂B^d 上の計量テンソル g_{ij} に関するラプラス・ベルトラミ作用素 Δ^* は

$$\Delta^* u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i, j < d} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \right]$$

で与えられる (Δ^* の代わりに $-\Delta^*$ を採る事もある)。これに (1.4), (1.5) を代入して具体的に計算すると

$$(1.6) \quad \Delta^* u = \sum_{i,j < d} (\delta_{ij} - \xi_i \xi_j) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + (2-d) \sum_{j < d} \xi_j \frac{\partial u}{\partial \xi_j}$$

の形を取ることを以下確かめよう。事実 $\sqrt{g} = |\xi_d|^{-1}$ だから

$$\Delta^* u = |\xi_d| \sum_{i,j < d} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{\delta_{ij} - \xi_i \xi_j}{|\xi_d|} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \right)$$

である。座標近傍内 $\xi_d > 0$ 又は $\xi_d < 0$ であるから、何れの場合でも

$$\begin{aligned} \Delta^* u &= \xi_d \sum_{i,j < d} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\frac{\delta_{ij} - \xi_i \xi_j}{\xi_d} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \right) \\ &= \sum_{i,j < d} (\delta_{ij} - \xi_i \xi_j) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \sum_{j < d} \left(\sum_{i < d} \xi_d \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\delta_{ij} - \xi_i \xi_j}{\xi_d} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \end{aligned}$$

となるので、(1.6) を示す為には

$$(1.7) \quad \sum_{i < d} \xi_d \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\delta_{ij} - \xi_i \xi_j}{\xi_d} = (2-d) \xi_j \quad (j < d)$$

を示せば良い。先ず 1.1 の (1.1) のすぐ下の所で見たと様に $\partial \xi_d / \partial \xi_i = -\xi_i / \xi_d$ ($i < d$) なので

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\delta_{ij} - \xi_i \xi_j}{\xi_d} = \frac{-\xi_j \xi_d + (\xi_i / \xi_d) (\delta_{ij} - \xi_i \xi_j)}{\xi_d^2} = -\xi_d^{-1} \xi_j + \xi_d^{-3} \delta_{ij} \xi_i - \xi_d^{-3} \xi_j \xi_i^2$$

であるから、 $\sum_{i < d} \xi_i^2 = 1 - \xi_d^2$ に注意して

$$\begin{aligned} \sum_{i < d} \xi_d \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\delta_{ij} - \xi_i \xi_j}{\xi_d} &= -\sum_{i < d} \xi_j + \xi_d^{-2} \sum_{i < d} \delta_{ij} \xi_i - \xi_d^{-2} \xi_j \sum_{i < d} \xi_i^2 \\ &= -(d-1) \xi_j + \xi_d^{-2} \xi_j - \xi_d^{-2} \xi_j (1 - \xi_d^2) = -(d-1) \xi_j + \xi_j = (2-d) \xi_j \end{aligned}$$

となって (1.7) が導かれる。

1.4. $R^d \setminus \{0\}$ の任意の x に対して、有向半直線 $0x$ は ∂B^d と唯 1 点 ξ で交わる。 $|x| = r$ とすると $x = r\xi$ と表示できる。これを x の極座標表示と言う。 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ は ξ_1, \dots, ξ_d 内の $d-1$ 個により定まるので、例えばそれを ξ_1, \dots, ξ_{d-1} とすると、 x は極座標 $(r, \xi_1, \dots, \xi_{d-1})$ で定まる。 R^d のラプラス作用素 $\Delta = \sum_{i \leq d} \partial^2 / \partial x_i^2$ を極座標で示すと

$$(1.8) \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta^* u,$$

即ち Δu は $u(x) = u(r\xi) = u(r, \xi_1, \dots, \xi_{d-1})$ を球面上の点 ξ を固定して、 r だけのいわゆる半径関数 $u(r\xi)$ に $\partial^2 / \partial r^2 + (d-1)r^{-1} \partial / \partial r$ を施したものと、 r を固定した球面 ∂B^d 上の球面関数 $u(r\xi)$ に ∂B^d 上のラプラス・ベルトラミ作用素 Δ^* を施したものの r^{-2} 倍の和に分解できる。この公式を検証しよう。

x の各成分 x_k ($k \leq d$) を $x = r\xi$ から $(r, \xi_1, \dots, \xi_{d-1})$ の関数とみて連鎖律により

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \sum_{i < d} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \quad (k \leq d)$$

となる。再び連鎖律により、各 $k \leq d$ に対して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \sum_{i < d} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial r} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \right| \frac{\partial r}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x_k^2} + \sum_{i < d} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \xi_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \sum_{j < d} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right] \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k^2}$$

となる。だから u は C^2 級として微分順序を自由に変更してよいとすると、

$$\Delta u = \sum_{k \leq d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sum_{k \leq d} \left| \frac{\partial r}{\partial x_k} \right|^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \sum_{k \leq d} \frac{\partial^2 r}{\partial x_k^2} + \sum_{i, j < d} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \sum_{k \leq d} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} + 2 \sum_{i < d} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \xi_i} \sum_{k \leq d} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \sum_{i < d} \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \sum_{k \leq d} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k^2}$$

となる。故に $\sum_{k \leq d} (\partial r / \partial x_k)^2$, $\sum_{k \leq d} \partial^2 r / \partial x_k^2$, \dots 等を以下順次計算して上式に代入する。先ず, $r = |x| = (\sum_{k \leq d} x_k^2)^{1/2}$ 及び $\xi_k = r^{-1} x_k$ ($k \leq d$) だから、

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = r^{-1} x_k = \xi_k, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_k^2} = r^{-1} - r^{-3} x_k^2 = r^{-1} (1 - \xi_k^2)$$

であり、又

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = r^{-1} \delta_{ik} - r^{-3} x_i x_k = r^{-1} (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k),$$

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k^2} = -r^{-3} \delta_{ik} x_k - r^{-3} x_i + 3r^{-5} x_i x_k^2 = r^{-2} (3\xi_i \xi_k^2 - \xi_i - \delta_{ik} \xi_k)$$

である。従って順次計算して

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq d} \left| \frac{\partial r}{\partial x_k} \right|^2 &= \sum_{k \leq d} \xi_k^2 = 1, \\ \sum_{k \leq d} \frac{\partial^2 r}{\partial x_k^2} &= r^{-1} \sum_{k \leq d} (1 - \xi_k^2) = r^{-1} (d-1) \\ \sum_{k \leq d} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} &= r^{-2} \sum_{k \leq d} (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k) (\delta_{jk} - \xi_j \xi_k) \\ &= r^{-2} \sum_{k \leq d} \delta_{ik} \delta_{jk} - r^{-2} \sum_{k \leq d} (\delta_{ik} \xi_j + \delta_{jk} \xi_i) \xi_k + r^{-2} \xi_i \xi_j \sum_{k \leq d} \xi_k^2 \\ &= r^{-2} (\delta_{ij} - 2\xi_i \xi_j + \xi_i \xi_j) = r^{-2} (\delta_{ij} - \xi_i \xi_j), \\ \sum_{k \leq d} \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} &= \sum_{k \leq d} \xi_k r^{-1} (\delta_{ik} - \xi_i \xi_k) \\ &= r^{-1} \sum_{k \leq d} \delta_{ik} \xi_k - r^{-1} \xi_i \sum_{k \leq d} \xi_k^2 = r^{-1} \xi_i - r^{-1} \xi_i = 0, \\ \sum_{k \leq d} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k^2} &= r^{-2} \sum_{k \leq d} (3\xi_i \xi_k^2 - \xi_i - \delta_{ik} \xi_k) \\ &= 3r^{-2} \xi_i \sum_{k \leq d} \xi_k^2 - r^{-2} \sum_{k \leq d} \xi_i - r^{-2} \sum_{k \leq d} \delta_{ik} \xi_k \\ &= 3\xi_i r^{-2} - d \cdot \xi_i r^{-2} - \xi_i r^{-2} = r^{-2} (2-d) \xi_i \end{aligned}$$

を得る。これらを上の Δu に代入すると

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\sum_{i, j \leq d} (\delta_{ij} - \xi_i \xi_j) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + (2-d) \sum_{i < d} \xi_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right]$$

となる。ここで (1.6) を用いると上の最後の項は $r^{-2} \Delta^* u$ となるので (1.8) が導かれた。

2. 球関数の定義

2.1. d 次元ユークリッド空間 R^d ($d \geq 2$) の単位球 B^d の表面である単位球面 ∂B^d の点を $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)$ と記すと R^d の点 x は極座標で $x = r\omega$ ($r = |x|$) と表される。 ∂B^d は、例えば $\omega_d > 0$ の部分に於ては $(\omega_1, \dots, \omega_{d-1})$ を局所座標に取ったときには

$$g_{ij}(\omega) = \delta_{ij} + \omega_i \omega_j / \omega_d^2 \quad (i, j < d)$$

で与えられる計量テンソル (g_{ij}) をもつ完閉リーマン空間で ((1.1) 参照)

$$g(\omega) = \det(g_{ij}(\omega)) = \omega_d^{-2}$$

だから ((1.4) 参照), ∂B^d の体積要素 (即ち曲面要素) は

$$d\omega = \sqrt{g(\omega)} d\omega_1 \cdots d\omega_{d-1} = \omega_d^{-1} d\omega_1 \cdots d\omega_{d-1}$$

で与えられる。 ∂B^d の全体積 (即ち全表面積) を表すのに記号

$$\Omega_d = \int_{\partial B^d} d\omega$$

を用いる。 R^d のラプラス作用素 Δ は極座標 $x = r\omega$ ($r = |x|$) で書くと

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta^* u$$

となり, ここで Δ^* は ∂B^d 上のラプラス・ベルトラミ作用素

$$\Delta^* u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j < d} \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left[\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial \omega_j} \right] \quad ((g^{ij}) = (g_{ij})^{-1})$$

である ((1.8) 参照)。

2.2. 完閉リーマン空間 ∂B^d 上の関数 $S_n(\omega)$ が n 位球関数 ($n = 0, 1, \dots$) であることの代表的な定義を3つ述べる:

第1の定義 $S_n(\omega)$ は作用素 $-\Delta^*$ の固有値 $n(n+d-2)$ に対応する固有関数である, 即ち

$$(2.1) \quad -\Delta^* S_n(\omega) = n(n+d-2) S_n(\omega);$$

第2の定義 $r^n S_n(\omega)$ は $x = r\omega$ ($r = |x|$) に関して R^d 上調和関数である, 即ち

$$\Delta(r^n S_n(\omega)) = 0;$$

第3の定義 $S_n(\omega)$ は R^d 上の d 変数の n 次斉次調和多項式に拡張出来る (この拡張は実は一意であることが示される)。

以下に於て以上の3個の定義が互いに同値であることを示す。第1の定義と第2の定義が同等であることは, (1.8)式から導かれる恒等式

$$\Delta(r^n S_n(\omega)) = r^{n-2} (\Delta^* S_n(\omega) + n(n+d-2) S_n(\omega))$$

により, 直ちにわかる。

$S_n(\omega)$ が第3の定義を満たすとす, 即ち $S_n(\omega)$ が n 次斉次調和多項式 $H_n(x)$ に拡張できたとする: $H_n|_{\partial B^d} = S_n$. $x = r\omega$ ($r = |x|$), 即ち $x_k = r\omega_k$ ($k = 1, \dots, d$), と置くと, $H_n(x)$ は n 次斉次多項式だから

$$H_n(x) = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha x^\alpha = r^n \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha \omega^\alpha$$

となる。ここに $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ は非負整数の d 組で, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, かつ

$$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad \omega^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots \omega_d^{\alpha_d}$$

を意味するとし、又 c_{α} は定数である。

$$S_n(\omega) = H_n(\omega) = \sum_{|\alpha|=n} c_{\alpha} \omega^{\alpha}$$

だから、 $H_n(r\omega) = r^n S_n(\omega)$ となり、これが調和だから、第2の定義が導かれた。つまり第3の定義から第2の定義が出る。

ついでに第3の定義に於ける $S_n(\omega)$ の拡張である n 次齊次調和多項式は

$$r^n S_n(\omega)$$

の形のものでこれに限ることもわかった。

第2の定義と第3の定義の同等であることを示すためには、従って $r^n S_n(\omega)$ が R^d 上調和であると仮定して、これが n 次齊次多項式となることを示せば良い。簡単な証明を思い付かぬので次の様な大がかりな道筋を取る。一般に u が R^d の a 中心で半径 ρ の閉球 $|x - a| \leq \rho$ を含む領域で調和とするとき、開球

$$|x - a| < (\sqrt{2} - 1)\rho$$

に於て u は

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x-a)$$

の形の絶対かつ広義一様収束する級数にただ1通りに展開される。ここで、 $H_k(x)$ は k 次齊次調和多項式 ($k = 0, 1, \dots$) である ([3, p.78] 参照)。この結果を我々の $r^n S_n(\omega)$ に適用するとき $a=0$ で $\rho = \infty$ である。上でも見たように k 次齊次調和多項式 $H_k(x)$ に対して

$$H_k(r\omega) = r^k H_k(\omega) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

である。従って上の結果から R^d に於て

$$r^n S_n(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k H_k(\omega) \quad (\omega \in \partial B^d, 0 \leq r < \infty)$$

の形に k 次齊次調和多項式 $r^k H_k(\omega)$ ($k = 0, 1, \dots$) の和に唯一通りに展開され、この級数は R^d 上絶対かつ広義一様収束する。 $0 \leq r < \infty$ で収束する r のべき級数の一意性により $r^n S_n(\omega) = r^n H_n(\omega)$ となり、 $r^n S_n(\omega)$ が n 次齊次調和多項式となることがわかる。

3. 球関数の正規直交系

3.1. ∂B^d 上の n 位球関数の全体がベクトル空間を作ることは、前節の3個の何れの定義にしたがっても直ちに分かる。その次元を

$$N(n) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

と記す。 $N(n)$ の計算法は色々知られているが、何れも第3の定義に基づく。例えば、数列 $\{N(n) : n = 0, 1, \dots\}$ は次のように定まる ([4, p.4] 参照)：この数列の母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(n) t^n = \frac{1+t}{(1-t)^{d-1}}$$

で与えられる。一般2項定理で直接右辺の展開係数を計算して

$$N(n) = \begin{cases} \frac{(2n+d-2)\Gamma(n+d-2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(d-1)} & (n \geq 1) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

が得られる。

勿論直接に組合せ論的に $N(n)$ を数え上げることも容易である。先ず n 次齊次多項式の空間の次元 $M(n)$ は単項 n 次齊次多項式の数と一致するので、これは d 個のものから n 個取る重複組合せの数 ${}_dH_n = \Gamma(d+n)/\Gamma(d)\Gamma(n+1)$ に等しいから

$$M(n) = \frac{\Gamma(d+n)}{\Gamma(d)\Gamma(n+1)}$$

となる。 n 次齊次多項式の中に調和なものがどれくらいあるかについては、例えば後節 4.2 で説明する公式 (4.2) に依ると

$$N(n) = M(n) - M(n-2)$$

が分かる。勿論 $n \geq 2$ としての話であって、 $N(0) = M(0)$, $N(1) = M(1)$ は自明である。とにかくこれからも $N(n)$ についての上の公式が得られる。

後で我々が使うのは $N(n)$ の具体的な表示と言うよりは $N(n)$ の n に関する増大の位数である。 $N(n)$ に関して上の公式から次の評価式が得られる：

$$(3.1) \quad N(n) \leq Kn^{d-2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

但し K は例えば 2^{d-1} に取れる。

3.2. m 位球関数 $S_m(\omega)$ と n 位球関数 $S_n(\omega)$ について、 m と n が異なるとき、それらの直交性

$$(3.2) \quad \int_{\partial B^d} S_m(\omega) S_n(\omega) d\omega = 0 \quad (m \neq n)$$

を示す。その為には第1の定義に従うとよい。完閉リーマン空間 ∂B^d は境界を持たぬので、グリーンの公式により

$$\int_{\partial B^d} [\Delta^* S_m(\omega) \cdot S_n(\omega) - S_n(\omega) \Delta^* S_m(\omega)] d\omega = 0$$

となる。(2.1) により

$$\begin{aligned} & S_n(\omega) \Delta^* S_m(\omega) - S_m(\omega) \Delta^* S_n(\omega) \\ &= S_n(\omega) \cdot m(m+d-2) S_m(\omega) - S_m(\omega) \cdot n(n+d-2) S_n(\omega) \\ &= (m-n)(m+n+d-2) S_m(\omega) S_n(\omega) \end{aligned}$$

だから、これを上式に代入して

$$(m-n)(m+n+d-2) \int_{\partial B^d} S_m(\omega) S_n(\omega) d\omega = 0$$

となり $(m-n)(m+n+d-2) \neq 0$ に依り (3.2) が導かれる。

3.3. n 位球関数の全体 ($n = 0, 1, \dots$) は、ヒルベルト空間

$$L_2(\partial B^d) = L_2(\partial B^d, d\omega)$$

の $N(n)$ 次元部分空間と考えられるので、その一つの正規直交系

$$S_{nj}(\omega) \quad (j = 1, \dots, N(n))$$

を固定する。(3.2) により

$$(3.3) \quad \mathbf{S} = \{S_{nj}(\omega) : j = 1, \dots, N(n) ; n = 0, 1, \dots\}$$

は $L_2(\partial B^d)$ の一つの正規直交系を作る。以下この様な \mathbf{S} を一つ固定して考える。 $f \in L_2(\partial B^d)$ に対して

$$(3.4) \quad c_{nj} = c_{nj}(f) = \int_{\partial B^d} f(\omega) S_{nj}(\omega) d\omega$$

($j = 1, \dots, N(n) ; n = 0, 1, \dots$) を f の \mathbf{S} に関するフーリエ係数と言ひ

$$(3.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} c_{nj}(f) S_{nj}(\omega) \right]$$

を f の \mathbf{S} に関するフーリエ級数と言ふ。

3.4. 特に $f \in C^2(\partial B^d)$ として、そのフーリエ係数と $\Delta^* f$ のフーリエ係数との関係を調べよう。 ∂B^d は完閉リーマン多様体でその境界は空集合であるから、グリーンの公式により

$$\int_{\partial B^d} [\Delta^* f(\omega) \cdot S_{nj}(\omega) - f(\omega) \Delta^* S_{nj}(\omega)] d\omega = 0$$

となる。(2.1) により $\Delta^* S_{nj}(\omega) = -n(n+d-2) S_{nj}(\omega)$ だから、上式より

$$\int_{\partial B^d} \Delta^* f(\omega) \cdot S_{nj}(\omega) d\omega = -n(n+d-2) \int_{\partial B^d} f(\omega) S_{nj}(\omega) d\omega$$

となる。更に k を自然数として $f \in C^{2k}(\partial B^d)$ とすると、上式を繰り返し使つて

$$\int_{\partial B^d} (\Delta^*)^k f(\omega) \cdot S_{nj}(\omega) d\omega = \{-n(n+d-2)\}^k \int_{\partial B^d} f(\omega) S_{nj}(\omega) d\omega$$

となる。従つてフーリエ係数の言葉では

$$c_{nj}((\Delta^*)^k f) = \{-n(n+d-2)\}^k c_{nj}(f)$$

となる。これから次の評価式が得られる：

$$(3.6) \quad |c_{nj}(f)| \leq n^{-2k} |c_{nj}((\Delta^*)^k f)| \quad (j = 1, \dots, N(n) ; n = 0, 1, \dots).$$

此の簡単な仕組みが、しかしながら、我々の主要結果を保証する為の本質的な役割を果たす。

3.5. n 位球関数に関する加法定理を説明する為に、 d 位の n 次のルジャンドルの多項式 $P_n(t)$ を考える。つまり

$$\{P_n(t) : n = 0, 1, \dots\}$$

は次の3性質

(a) $P_n(t)$ は t の n 次多項式、

$$(b) \int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) (1-t^2)^{(d-3)/2} dt = 0 \quad (n \neq m),$$

(c) $P_n(1) = 1$

を持つものとして漸化的に決定される。更に具体的にはロドリゲの公式 ([4,p.17] 参照)

$$P_n(t) = \left[-\frac{1}{2} \right]^n \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(n + \frac{d-1}{2})} (1-t^2)^{\frac{3-d}{2}} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^{\frac{2n+d-3}{2}} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

で与えられる。

n 位球関数の正規直交系

$$S_{nj}(\omega) \quad (j = 1, \dots, N(n))$$

に対しては、次の加法定理が成り立つ ([4, p.10] 参照) :

$$\sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\xi) S_{nj}(\eta) = \frac{N(n)}{\Omega_d} P_n(\xi \cdot \eta),$$

ここで ξ, η は ∂B^d の任意の点であり、 Ω_d は ∂B^d の全表面積であった。この式に於て、特に $\xi = \eta = \omega \in \partial B^d$ に取るならば、 $\omega \cdot \omega = |\omega|^2 = 1$ であり、又 $P_n(1) = 1$ であるから

$$(3.7) \quad \sum_{j=1}^{N(n)} S_{nj}(\omega)^2 = \frac{N(n)}{\Omega_d}$$

が得られる。これは $d = 2$ ならば、実質的には $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ を意味する (後節 5.1 参照)。

4. 球関数の正規直交系の完全性

4.1. (3.3) の S は $L_2(\partial B^d)$ の一つの正規直交系であった。フーリエ係数をこの S について考えるとき、ヒルベルト空間の一般論により、すべての $f \in L_2(\partial B^d)$ に対してベッセルの不等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} |c_{nj}(f)|^2 \right] \leq \|f; L_2(\partial B^d)\|^2$$

が成り立つが、更に、もしすべての $f \in L_2(\partial B^d)$ についてパーセバルの等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} |c_{nj}(f)|^2 \right] = \|f; L_2(\partial B^d)\|^2$$

が成り立つとき、正規直交系 S は完全であると言う。次の3条件が互いに同値となることは、やはりヒルベルト空間の一般論である：

(α) S は完全である；

(β) S の元の有限1次結合の全体は $L_2(\partial B^d)$ 内稠密である；

(γ) $L_2(\partial B^d)$ の2つの関数 f と g について

$$c_{nj}(f) = c_{nj}(g) \quad (j = 1, \dots, N(n); n = 0, 1, \dots)$$

となるならば、 $L_2(\partial B^d)$ の元として $f = g$ となる。

実際には、正規直交系 S については次の重要な結果が成り立つ。

完全性定理 ∂B^d 上の球関数の正規直交系

$$S = \{S_{nj}(\omega) : j = 1, \dots, N(n); n = 0, 1, \dots\}$$

は完全である。

事実此の結果は S について最も重要なものであるから、その証明は色々知られている。例えば、[4, p.43] に与えられている様に、ポアソン積分やアーベル和の定理を使う証明が簡単ではないがいかにも自然なものである。ここではいささか技巧的ではあるが手短な1つの証明を述べる。

4.2. R^d 上の d 変数 $x = (x_1, \dots, x_d)$ の n 次斉次多項式

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha x^\alpha$$

の全体を P_n と記す。ここで 2.2 節と同様に $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ は複合添字で

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$$

はその長さを示し

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$$

であって、又 c_α は定数である。 P_n の元の内調和なものを H_n と記す：

$$H_n = \{P \in P_n : \Delta P = 0\}.$$

H_n はベクトル空間 P_n のベクトル部分空間である。 P_n の構造を H_n に基づいて明らかにしたい。

まず $\Delta P_n = \{0\}$ ($n = 0, 1$) であるから

$$(4.1) \quad \begin{cases} P_0 = H_0 \\ P_1 = H_1 \end{cases}$$

となる。

P_n ($n \geq 2$) については、次の直和分解

$$(4.2) \quad P_n = H_n \oplus |x|^2 P_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

が成り立つ。即ち任意の $P \in P_n$ に対して唯一通りに $H \in H_n$ と $Q \in P_{n-2}$ が求まって

$$P(x) = H(x) + |x|^2 Q(x)$$

の形に表される。

さて (4.2) を繰り返し使えば、ついには (4.1) に到達し、次の興味深くてしかも重要な基礎的結果であるシュタイン・ワイスの直和分解 ([6, p.139] 参照)

$$(4.3) \quad \begin{cases} P_{2n} = H_{2n} \oplus |x|^2 H_{2n-2} \oplus \cdots \oplus |x|^{2n} H_0 \\ P_{2n+1} = H_{2n+1} \oplus |x|^2 H_{2n-1} \oplus \cdots \oplus |x|^{2n} H_1 \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

が得られる。

以下に念の為 (4.2) の証明を与えるが、その為の準備的考察を行う。 $P \in P_n$ が

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha x^\alpha$$

で与えられるとき、記号ベクトル $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_d)$ (即ち勾配ベクトル) に対して ∇ の多項式

$$P(\nabla) = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha \nabla^\alpha$$

で与えられる微分作用素を考える。 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ に対して、通常通り

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$$

と記すならば、 $|\alpha| = |\beta| = n$ のとき

$$\nabla^\alpha x^\beta = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ \alpha! & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

となることが容易にわかる。だから $P, Q \in P_n$ に対して

$$\langle P, Q \rangle = P(\nabla) Q$$

と定めるが、これが P_n 上の内積となることが直ちに示される。こうして P_n は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を内積とする有限次元ヒルベルト空間である。

さてここで $\Delta : P_n \rightarrow P_{n-2}$ は上への写像であることを言う。そうでないと零でない $Q \in P_{n-2} \ominus \Delta P_n$ (直交補空間) が存在する。従って、すべての $P \in P_n$ に対して

$$\langle Q, \Delta P \rangle = 0$$

となる。特に $P(x) = |x|^2 Q(x)$ とすると、 $P \in P_n$ であり、

$$\Delta Q(\nabla) = |\nabla|^2 Q(\nabla) = P(\nabla)$$

に注意すると

$$0 = \langle Q, \Delta P \rangle = Q(\nabla) \Delta P = \Delta Q(\nabla) P = P(\nabla) P = \langle P, P \rangle$$

となる。これから $P=0$ となるから $Q=0$ と言う矛盾が出る。

(4.2) の証明 $G_n = P_n \ominus |x|^2 P_{n-2}$ (直交補空間) において、 $G_n = H_n$ を示せば (4.2) が示されたことになる。任意に $P \in P_n$ を取るとき、 $P \in G_n$ となる条件を書き表そう。その為任意の $Q \in P_{n-2}$ をとり $R(x) = |x|^2 Q(x)$ とするとき

$$\langle P, R \rangle = 0$$

が必要十分な条件となる。ここで

$$R(\nabla) = |\nabla|^2 Q(\nabla) = \Delta Q(\nabla)$$

であるから

$$\langle P, R \rangle = \langle R, P \rangle = R(\nabla) P = \Delta Q(\nabla) P = Q(\nabla) \Delta P = \langle Q, \Delta P \rangle = \langle \Delta P, Q \rangle$$

となり、結局 $P \in G_n$ となる為の必要十分条件は、すべての $Q \in P_{n-2}$ に対して

$$\langle \Delta P, Q \rangle = 0$$

となること、つまり $\Delta P = 0$ となることである。よって $P \in G_n$ と $P \in H_n$ とは同値であり、 $G_n = H_n$ となって (4.2) が示された。 終

4.3. 完全性定理の証明 [S] を S の元の有限1次結合の全体とし、これが $L_2(\partial B^d)$ 内稠密なことを言えば、4.1節の (β) により、S が完全であると結論出来る。任意の n 位球関数は S_{n_j} ($j=1, \dots, N(n)$) の1次結合で表されるので [S] に入る。よって [S] はすべての球関数の有限1次結合全体とも一致する。

そこで任意の $f \in L_2(\partial B^d)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$(4.4) \quad \|f - h; L_2(\partial B^d)\| < \epsilon$$

となる様な $h \in [S]$ が取れることを言えば良い。良く知られた様に $C(\partial B^d)$ は $L_2(\partial B^d)$ 内稠密なので

$$(4.5) \quad \|f - g; L_2(\partial B^d)\| < \epsilon/2$$

となる $g \in C(\partial B^d)$ が取れる。ワイエルシェトラスの多項式近似定理により、 R^d 上の d 変数の多項式 h で

$$\|g - h; L_\infty(\partial B^d)\| < \epsilon/2 \Omega_d$$

となるものが取れる、但し Ω_d は ∂B^d の全面積であった。従って

$$(4.6) \quad \|g - h; L_2(\partial B^d)\| \leq \Omega_d \|g - h; L_\infty(\partial B^d)\| < \epsilon/2$$

となり、(4.5) と (4.6) と三角不等式から (4.4) が得られる。後 $h \in [S]$ を示せば証明は完結する。さて h を m 次多項式として

$$h = \sum_{k=0}^m h_k$$

を h の k 次斉次多項式 h_k ($k=0, \dots, m$) への分解とする。(4.3) を ∂B^d 上で考えると分かる様に、各 h_k は球関数の和として表されるので $h_k \in [S]$ 、従ってそれらの有限1次結合として $h \in [S]$ が結論される。 終

5. 主要結果

5.1. (3.3) の S は $L_2(\partial B^d)$ ($d \geq 2$) の完全正規直交系であるから、任意の $f \in L_2(\partial B^d)$ に対して、(3.4) により定めるフーリエ係数によるフーリエ級数 (3.5) によって

$$(5.1) \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} c_{nj}(f) S_{nj} \right]$$

の様に $L_2(\partial B^d)$ 内の収束の意味でフーリエ展開出来ることが分かる。此の結果は十分に一般で、多くの様々な応用があるけれど、更に精密に、(5.1) が ∂B^d 上絶対かつ一様収束の意味で成り立つ為には f にどのような条件を課したら良いかを論じたい。通常 f が十分に滑らかならば良いと言い表されている。例えば f が C^∞ 級ならば良いと言うことであろうが、これではあまりにも大雑把過ぎるので、いまして精密な限界を与えるを試みる。

次元 $d=2$ の場合には $N(0)=1$ で、 $N(n)=2$ ($n=1, 2, \dots$) となり、更に $\omega \in \partial B^2$ を $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$ と補助変数 $\theta \in (R^1 \bmod 2\pi)$ を用いて表すと

$$S_{01}(\omega) = 1/\sqrt{2\pi}, \\ S_{n1}(\omega) = (1/\sqrt{\pi}) \cos n\theta, \quad S_{n2}(\omega) = (1/\sqrt{\pi}) \sin n\theta \quad (n=1, 2, \dots)$$

に取れる。リーマン空間 ∂B^2 の体積用素 (線素) $d\omega = d\theta$ であるから、(3.3) の S は通常の正規直交三角関数系、 ∂B^2 上の関数 $f(\omega) = f(\cos \theta, \sin \theta) = f(\theta)$ とみると、(3.4) は f の通常の三角関数系のフーリエ係数、(3.5) は f の通常の三角関数系のフーリエ級数なので、三角級数に関する標準的知識 ([7, p.278] 参照) によれば、 f が C^1 級ならば、(3.5) の級数への展開

$$f(\omega) = c_{01}(f) S_{01}(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_{n1}(f) S_{n1}(\omega) + c_{n2}(f) S_{n2}(\omega) \right]$$

は ∂B^2 上絶対かつ一様収束の意味で成り立つ。これは随分と良い結果で、 $d=2$ の場合のみに有効な特殊事情に基づく。即ち $d=2$ の場合には

$$|c_{nj}(f)| = n^{-1} \left| c_{nj} \left[\frac{d}{d\theta} f \right] \right| \quad ((i, j) = (1, 2) \text{ 及び } (2, 1))$$

が成立し、(3.6) と見較べてみると、一般には $\Delta^* f = (d^2/d\theta^2) f$ で考えなくてはならぬ所が $(d/d\theta) f$ で良い点、滑らかさが1階節約される。以下で行う $d \geq 3$ に対する我々の議論を $d=2$ に適用すると、 f は C^1 級では不足で C^2 級としなければならず、従って我々の所論は $d \geq 3$ の時だけ意味がある。

5.2. 本論文の主要結果を述べるために、記号 $\{\xi\}$ で実数 ξ 以上の最小の整数を表すことにする。実数 ξ 以下の最大の整数を表す常用のガウスの記号 $[\xi]$ を用いて書けば

$$\{\xi\} = -[-\xi]$$

である。此の記号を使って我々の結果は次のように述べられる：

主要定理 f が ∂B^d ($d \geq 3$) 上の $C^{2\{d/4\}}$ 級の関数ならば、 f は ∂B^d 上絶対かつ一様収束する完全正規直交球関数系のフーリエ級数

$$f(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} c_{nj}(f) S_{nj}(\omega) \right]$$

に展開出来る。

次元 $d=3$ の場合 f が C^2 級ならば、 f は ∂B^3 上絶対かつ一様収束する完全正規直交球関数系のフーリエ級数に展開出来ることが [1, p.513] に述べられている。

$$C^{2\{3/4\}} = C^2$$

なので、我々の結果はこれを含む。 $d = 4$ の場合でも $C^{2|d/4|} = C^2$ 級で良いことがわかる。 $d = 5$ になると $C^{2|5/4|} = C^4$ 級に一挙にふえる。

しかし $d = 3$ の時、絶対収束性を不問にすれば、 f を単に C^1 級とするだけで、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=0}^m \left[\sum_{j=1}^{N(n)} c_{nj}(f) S_{nj} \right]; L_{\infty}(\partial B^3) \right\| = 0$$

となることが [2, p.259] 又は [5, p.254] に述べられている。絶対収束性が保証されぬのだから、級数の任意の部分
和でなく上の形の部分和だけが f に一様収束するのであり、又勿論項の順序を入れ換える訳にはゆかぬ。この様に絶対
かつ一様収束する C^2 級の場合に較べて非常に使いにくいのが、他方 C^1 級だけで良い点は注目に値する。此の方向
への一般化 ($d \geq 3$) については他日を期したい。

5.3. 主要定理の証明 $|d/4| = k \geq 1$ と置くと、 $f \in C^{2k}(\partial B^d)$ ならば、 f は絶対かつ一様収束する (3.3)
の S に関する f のフーリエ級数 (3.5) に展開出来ることを示したい。

先ず (3.5) が絶対かつ一様に収束することを示すためには

$$R_m(\omega) = \sum_{n=m}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} |c_{nj}(f) S_{nj}(\omega)| \right] \quad (m = 1, 2, \dots)$$

と置くと

$$(5.2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \| R_m; L_{\infty}(\partial B^d) \| = 0$$

を示せば良い。

$f \in C^{2k}(\partial B^d)$ だから $(\Delta^*)^k f \in C(\partial B^d) \subset L_2(\partial B^d)$ であって、そのフーリエ係数

$$b_{nj} = c_{nj}((\Delta^*)^k f) \quad (j = 1, \dots, N(n); n = 0, 1, \dots)$$

を考えることが出来る。ベッセルの不等式に依れば

$$(5.3) \quad B \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} b_{nj}^2 \right] \leq \| (\Delta^*)^k f; L_2(\partial B^d) \|^2 < \infty$$

である。(3.6) により

$$|c_{nj}(f)| \leq n^{-2k} |c_{nj}((\Delta^*)^k f)| = n^{-2k} |b_{nj}|$$

であるから、

$$R_m(\omega) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} n^{-2k} |b_{nj}| |S_{nj}(\omega)| \right]$$

となる。シュワルツの不等式に依れば

$$R_m(\omega) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} n^{-4k} b_{nj}^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} |S_{nj}(\omega)|^2 \right]^{1/2}$$

となる。上の右辺の各項の第2の因子の括弧の中は、加法定理の特別の場合である (3.7) に依れば、 $N(n)/\Omega_d$ であるから

$$R_m(\omega) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \left[\frac{n^{-4k} N(n)}{\Omega_d} \right]^{1/2} \left[\sum_{j=1}^{N(n)} b_{nj}^2 \right]^{1/2}$$

となる。再びシュワルツの不等式を使い、更に (5.3) を使うと

$$R_m(\omega) \leq \left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{n^{-4k} N(n)}{\Omega_d} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{N(n)} b_{nj}^2 \right| \right)^{1/2} \\ \leq (B/\Omega_d)^{1/2} \left(\sum_{n=m}^{\infty} n^{-4k} N(n) \right)^{1/2}$$

となる。ここで (3.1) により $N(n) \leq Kn^{d-2}$ なので

$$R_m(\omega) \leq (B/\Omega_d)^{1/2} \left(\sum_{n=m}^{\infty} n^{-4k} \cdot Kn^{d-2} \right)^{1/2} \\ = (BK/\Omega_d)^{1/2} \left(\sum_{n=m}^{\infty} n^{-(4k-d+2)} \right)^{1/2}$$

となる。 k の定義により

$$4k - d + 2 = 4 \lfloor d/4 \rfloor - d + 2 \geq 4 \cdot (d/4) - d + 2 = 2$$

であるから

$$\sum_{n=m}^{\infty} n^{-(4k-d+2)} \leq \sum_{n=m}^{\infty} n^{-2}$$

により

$$\|R_m; L_\infty(\partial B^d)\| \leq (BK/\Omega_d)^{1/2} \left(\sum_{n=m}^{\infty} n^{-2} \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

となるので (5.2) が示された。

従って f の S に関するフーリエ級数

$$g(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{N(n)} c_{nj}(f) S_{nj}(\omega) \right)$$

は ∂B^d 上絶対かつ一様収束するので $g \in C(\partial B^d)$ を定める。故に、両辺に $S_{nj}(\omega)$ を掛けて ∂B^d 上 $d\omega$ で積分するとき、項別積分と S の正規直交性により

$$c_{nj}(g) = c_{nj}(f) \quad (j=1, \dots, N(n); n=0, 1, \dots)$$

となる。 S の完全性 (4.1 の (γ) 参照) から、 $L_2(\partial B^d)$ の元として $f = g$ 、ついで、連続性から ∂B^d 上 $f \equiv g$ となる。 終

参 照 文 献

- [1] R. COURANT AND D. HILBERT: *Methods of Mathematical Physics*, I, Interscience, 1953.
- [2] O. D. KELLOGG: *Foundations of Potential Theory*, Frederic Unger, 1929.
- [3] 岸正倫: ポテンシャル論, 森北出版, 1974.
- [4] C. MÜLLER: *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Math., 17, Springer, 1966.
- [5] W. J. STERNBERG AND T. L. SMITH: *The Theory of Potential and Spherical Harmonics*, The University of Toronto Press, 1952.
- [6] E. M. STEIN AND G. WEISS: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton, 1975.
- [7] 高木貞治: 解析概論, 岩波書店, 1961.

本研究は一部分文部省科研費 (一般 C, 課題番号 04640050) の援助に依る。

1991 *Mathematics Subject Classification*, Primary 31B99; Secondary 42C10.