回転不変一般符号密度のピカール次元

中井三留，多田俊政*
数学教室
（1991年8月26日受理）

Picard Dimensions of Rotation Free Signed Densities

Mitsuru NAKAI and Toshimasa TADA*
Department of Mathematics
(Received August 26, 1991)

A density P on the punctured open unit disc is a locally Hölder continuous real function on the punctured closed unit disc which may take both positive and negative values. The Picard dimension of a density P, dim P in notation, is the cardinal number of the set of extremal rays of the convex cone of nonnegative solutions of the time independent Schrödinger equation with the density P as its potential on the punctured open unit disc with boundary values zero on the unit circle. The main purpose of this paper is to establish the monotoneity of the Picard dimension dim P in P for rotation free densities P: The larger P gives the larger dim P for rotation free densities P. In the course of proving this result the structure of the above convex cone of nonnegative solutions is also clarified from the view point of the Choquet-Martin theory for rotation free densities P by representing the Green function of the Schrödinger equation concretely.

本論文の目的とする所はポテンシャル P の孤立特異点のまわりの定常シュレーディンガー方程式

$$(-\Delta+P)\,u=0 \tag{1}$$

の正解の構造を研究することである。空間の次元 $n\geqq 2$ には本質的に依存せぬ性質の研究であるので，$n=2$ の場合，即ち複素平面 C を基礎空間とする。孤立特異点としては $z=0$ にとる。$z=0$ のまわりでの挙動に興味があるので，穴あき単位円板 $0<|z|<1$ 上で考える。記号

$$\Omega:\ 0<|z|<1,\quad \Gamma:\ |z|=1$$

を固定する，シュレーディンガー作用素 $-\Delta+P$ のポテンシャル P としては，本論文では，Ω 上の**密度** P をとる。即ち P は $\Omega\cup\Gamma$ 上の実関数 $P(z)$ で，$\Omega\cup\Gamma$ 上の局所ヘルダー連続なものとする。一般に C の部分集合 X 上の関数 $f(z)$ が X 上で**局所ヘルダー連続**であるとは，各 $w\in X$ に対して，$0<\rho\leqq\infty$，$0<K<\infty$，$0<\alpha\leqq 1$ となる実数 ρ, K, α が定まって

$$|f(z_1)-f(z_2)|\leqq K|z_1-z_2|^{\alpha}$$

がすべての $z_1, z_2\in\{z\in X:\ |z-w|<\rho\}$ に対して成り立つことである。P のヘルダー連続性により，（1）の解が本来の解，即ち C^2 級となる（例えば［3］参照）。P が Ω 上の密度と言うとき，その定義域が Ω ではなく $\Omega\cup\Gamma$ であって，そこで局所ヘルダー連続なことに再度注意する。本論文では，更に P は中心力のポテンシャル，即ち密度 P は**回転不変**とする。つまり

$$P(z)=P(|z|)$$

が全ての $z\in\Omega\cup\Gamma$ に対して成り立つものとする。Ω 上の回転不変密度 P の定義域は $0<|z|\leqq 1$ であるが，$1<|z|<\infty$ となる z に対しても，本論文では常に $P(z)$ を

$$P(z)=P(1/\bar{z})/|z|^4$$

によって定める。すると $P(z)$ は $0<|z|<\infty$ 上の回転不変な局所ヘルダー連続な関数となる。よって（1）は $0<|z|<\infty$ 上の回転不変密度 P をポテンシャルとする $\mathrm{C}\setminus\{0\}$ 上の定常シュレディンガー方程式と考えてよい。更に，回転不変性により，密度 P は $(0,\infty)$ 上の局所ヘルダー連続な1変数関数 $P(r)$ を定め，またそのようなも

* 大同工業大学・数学教室

ので定められている。

Ωにおける（1）の正解の$z=0$に於ける挙動を観察するために，$\Omega\cup\Gamma$上連続な実関数uで，Ω上（1）の解で，Ω上$u\geqq 0$であり，更にΓ上$u=0$となるもの全体の族を

$$PP\ (\Omega\ ;\ \Gamma)$$

と記す。最初のPは密度Pを，第二のPは正値（positive）の頭文字のPを表す。よって密度Qによるものならば$QP(\Omega\ ;\ \Gamma)$と記すわけである。鏡像の原理によれば$u\in PP(\Omega\ ;\ \Gamma)$は$\mathbf{C}\setminus\{0\}$上（1）の解に拡張できる。よって$u\in PP(\Omega\ ;\ \Gamma)$の$\Gamma$に於ける法線微分$[\partial u/\partial r]_{r=1}$が存在して，$u>0$なら法線微分は真に負となる（例えば［3］参照）。そこで各uに対して

$$\sigma(u)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}u\,(re^{i\theta})\right]_{r=1}d\theta$$

が定義され$u>0$ならば$\sigma(u)>0$である。全く自明な$PP(\Omega\ ;\ \Gamma)=\{0\}$の場合を除けば，凸錐$PP(\Omega\ ;\ \Gamma)$の構造は，凸集合

$$PP_1\ (\Omega\ ;\ \Gamma)=\{u\in PP\ (\Omega\ ;\ \Gamma):\sigma\,(u)=1\}$$

により定まるが，ショッケ理論（例えば［10］参照）により，$PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$はその端点集合$\mathrm{ex}.\,PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$により定まる：広義一様収束により$PP(\Omega\ ;\ \Gamma)$に位相を与えたとき，$PP(\Omega\ ;\ \Gamma)$から$\mathrm{ex}.\,PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$上のボレル測度全体への全単射$u\mapsto\mu$が定まって

$$u=\int_{\mathrm{ex}.\,PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)}v\,d\mu\,(v)$$

となる。$\mathrm{ex}.\,PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$を具体的に（1）のグリーン関数を利用して表示することが本論文の１つの目的である。これらと深い関連にある文献としては［5］，［1］，［4］等を参照。更に詳しい文献的経過については［12］参照。上の表示により$\mathrm{ex}.\,PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$の濃度$\#(\mathrm{ex}.\,PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma))$が$PP(\Omega\ ;\ \Gamma)$の構造の解明上重要である。この濃度を$\dim P$と記し$P$の**ピカール次元**と言う：

$$\dim P=\#(\mathrm{ex}.\,PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)).$$

一般に$0\leqq\dim P\leqq\mathrm{c}$（連続体濃度）である。回転不変密度$P$のピカール次元$\dim P$は実は０，１，cの３個の濃度のみをとることが本論文で示される。とくに$\dim P=1$となるときPについて**ピカール原理**が成り立つと言う。恒等関数０としての密度０（いわゆる**調和密度**）についてピカール原理が成り立つことをフランス人ピカールが最初に示したことにちなんだブーリガンの命名であるとブルローが述べている。実は米国人ボッフェルがより早くより一般にこの事実を発表していたのであるが，今ではピカール原理と言う呼び方が定着しているのでこれに従う。この様なことはよくあることである。ピカール次元の**単調性**，つまり２つの密度PとQがあって

$$P\leqq Q\quad ならば\quad \dim P\leqq\dim Q$$

となるか否かについて著者らは長年研究を続けている。最もはっきりした結果としては，Ω上$P,Q\geqq 0$となるいわゆるΩ上の**正値**回転不変密度P,Qについては単調性が成り立つことが知られている（［6］，［2］参照）。これが必ずしも正値とは限らない**一般符号**の回転不変密度P,Qの場合でも成立することを示すのが，本論文の主目標である。単調性は回転不変でない場合には全く成立せぬ事も付言する（［8］，［9］，［11］等参照）。

初めに述べたように本論文の結果は定性的には空間の次元$n\geqq 2$に本質的には関係しないという理由で簡単のため$n=2$として議論するのであるが，技術的には$n\geqq 3$となると無論やはり本質的ではないながら複雑で表面的には変更が必要となる。例えばフーリエ級数展開で語られる所は球関数級数展開で置き換えなければならないと言った具合である。これについては他日を期すことにする。

１．楕円型と陪単位

１．１．回転不変密度Pに対して次のような常微分作用素L_Pを考える：

$$L_P\,w\,(r)=w''(r)+\frac{1}{r}w'(r)-P(r)\,w\,(r),$$

ただし$w'=dw/dr$等とする。次の基本初等事項は繰り返し使われる：

初期値問題の一意存在定理． 任意の$c\in(0,\infty)$と実数a,bに対して$(0,\infty)$上$L_P\,w=0$で$w(c)=a$,

$w'(c)=b$ となる $(0,\infty)$ 上の解 w が唯一つ存在する。

これによれば，$(0,\infty)$ 上の任意部分区間上の $L_P w=0$ の解 w は $(0,\infty)$ 上の解に一意的に拡張できる。

与えられた Ω 上の密度 P に対して同じく Ω 上の密度列 P_j を

$$P_j(r)=P(r)+j^2/r^2 \quad (j=0,1,2,\cdots)$$

によって与える。簡単のため，P が了解されているときには，$L_{P_j}=L_j$ とも記す。$(0,\infty)$ の部分区間 (s,t) 上の $L_j w=0$ の解 $w(r)$ に対して常に

$$w(z)=w(|z|) \quad (s<|z|<t)$$

と定める約束にするとき $w(z)$ は $s<|z|<t$ 上の $(-\Delta+P_j)u=0$ の解となる。勿論 $w(r)$ は $(0,\infty)$ 上の解に接続され，従って $w(z)$ は $C\setminus\{0\}$ 上の解に接続されている。逆に u を $0\leqq s<|z|<t\leqq\infty$ 上の $(-\Delta+P_j)u=0$ の解とするとき，そのフリーエ係数

$$a_0(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\,d\theta,$$

$$a_n(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\cos n\theta\,d\theta \qquad (n=1,2,\cdots),$$

$$b_n(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\sin n\theta\,d\theta \qquad (n=1,2,\cdots),$$

を (s,t) 上の関数と考えて (s,t) 上

$$L_0 a_0=0,\ L_n a_n=0,\ L_n b_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

となる。例えば，積分記号下の微分法により $\Delta_r=u_{rr}+r^{-1}u_r$ と書くことにすれば

$$L_n a_n(r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(\Delta_r u(re^{i\theta})-P_n(r)u(re^{i\theta}))\cos n\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(-\Delta+P)u\cos n\theta\,d\theta-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}(re^{i\theta})+\frac{n^2}{r^2}u(re^{i\theta})\right]\cos n\theta\,d\theta$$

において最右辺の第一項は $(-\Delta+P)u=0$ により 0，第二項 I は，二度の部分積分で

$$\int_0^{2\pi}u_{\theta\theta}(re^{i\theta})\cos n\theta\,d\theta=-\int_0^{2\pi}n^2u(re^{i\theta})\cos n\theta\,d\theta$$

だから，$I=0$ となり $L_n a_n=0$ となる。

1.2. 回転不変密度 P について，Ω 上の $(-\Delta+P)u=0$ の正解（0を含む）の全体を $PP(\Omega)$ と記す。$PP(\Omega)=\{0\}$ となるとき P を**楕円型**と言う。そうでないとき**非楕円型**と言う。$f_j=f_{P_j}$ $(j=0,1,2,\cdots)$ を次の初期値問題の解を $(0,1]$ に限定して考えたものとする：

$$L_j f_j=0,\ f_j(1)=0,\ f_j'(1)=-1.$$

特に $f_0=f_{P_0}$ のことを f_P ともかき P **陪単位**と言う：$f_P=f_0$. P 陪単位は次のごとく楕円型の判定に本質的である：

定理　1.1. 次の3条件は互いに同値である：

(a) $PP(\Omega)\neq\{0\}$；

(b) $PP(\Omega;\Gamma)\neq\{0\}$；

(c) $f_P(r)=f_0(r)>0 \quad (0<r<1)$.

証明. 最初（c）を仮定する。$f_0(z)=f_0(|z|)$ と定めて $f_0\in PP(\Omega;\Gamma)$ なので（c）→（b）となる。$PP(\Omega)\supset PP(\Omega;\Gamma)$ 故（b）→（a）は自明である。最後に（a）を仮定する。$PP(\Omega)\setminus\{0\}$ から任意に一つ u をとり固定する。

$$w(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\,d\theta$$

とおくと $(0,1)$ 上 $L_0 w=0$ で $w>0$ である。よって w は $(0,\infty)$ 上の解に拡張される。$w(1)=0$ ならば，$w'(1)\leqq 0$ により $w'(1)<0$（そうでないと $w\equiv 0$ となってしまい矛盾である！）となり，

$$f_0(r)=-w(r)/w'(1)$$

だから$f_0(r)>0$ $(0<r<1)$ となる。残る可能性としては$w(1)>0$であるが，このときは

$$w_0(r)=w(r)\int_r^1\frac{dt}{tw(t)^2}$$

とおくと，直接の計算で，$(0,1)$ 上$L_0 w_0=0$かつ$w_0>0$であり，さらにまた$w_0(1)=0$で$w_0'(1)=-1/w(1)<0$だからやはり

$$f_0(r)=-w_0(r)/w_0'(1)$$

となり $(0,1)$ 上$f_0(r)>0$となる。故に (a)→(c) が示された。 終

1.3. P,QをΩ上の回転不変密度とし，f_P,f_QはそれぞれP,Qの陪単位とする。次の結果は本研究の鍵である：

定理 1.2. $0\leqq\rho<|z|<1$上$P\leqq Q$（又は$P<Q$）とする。$(\rho,1)$ 上$f_P>0$とするとf_Q/f_Pは $(\rho,1)$ 上減少関数（又は真の減少関数）で$\lim_{r\uparrow 1}f_Q/f_P=1$となる。特に $(\rho,1)$ 上$f_Q\geqq f_P$（又は$f_Q>f_P$）である。

証明. $w(r)=f_Q(r)/f_P(r)$ $(\rho<r<1)$ とおくと直接の計算で

(1.1) $$\{rf_P(r)^2w'(r)\}'=r(Q(r)-P(r))f_P(r)f_Q(r),$$

(1.2) $$\lim_{r\uparrow 1}rf_P(r)^2w'(r)=0.$$

まず $(\rho,1)$ 上$f_Q>0$となることを言う。$f_Q(1)=0$，$f_Q'(1)=-1<0$だから，十分1に近い$t\in(0,1)$ に対しては $(t,1)$ 上$f_Q>0$である。そこで

$$\tau=\inf\{t\in(\rho,1):(t,1)\text{ 上 }f_Q>0\}\in[\rho,1)$$

とおくとき，$\tau=\rho$を言えば良い。もし$\tau>\rho$とすると，$f_Q(\tau)=0$で，$(\tau,1)$ 上で$f_Q>0$故 (1.1) より $(\tau,1)$ 上 $rf_P(r)^2w'(r)$ は増加関数で (1.2) より非正となる。故に $(\tau,1)$ 上$w'\leqq 0$だからwは減少関数である。所がロピタルの定理より

$$\lim_{r\uparrow 1}w(r)=\lim_{r\uparrow 1}f_Q'(r)/f_P'(r)=(-1)/(-1)=1$$

だから，$w(\tau)\geqq 1$であり$f_Q(\tau)=0$，$f_P(\tau)>0$に反する。故に$\tau=\rho$で，$(\rho,1)$ 上$f_Q>0$となる。残るところは上に論じたところから明白である。 終

Pを固定し，P_j $(j=0,1,2,\cdots)$ を考えると，$(0,1)$ 上$P_j\leqq P_k$ $(j\leqq k)$ なので，次の二つの定理1.2の系は明白である：

系 1.1. $f_j>0$ならば不等式$f_k(r)/f_j(r)>f_k(s)/f_j(s)$が全ての$0<r<s<1$と$j<k$について成立する。

系 1.2. $f_j>0$なら$f_j<f_k$ $(j<k)$.

各$R\in(0,1)$ に対して

(1.3) $$C=C(P,R)=\max_{R\leqq r\leqq 1}r\sqrt{|P(r)|}$$

とおく。定理1.2の今一つの帰結として

系 1.3. $f_j(s)/f_j(r)\leqq(r/s)^{j-C}$ $(R\leqq r\leqq s<1,\ j>C=C(P,R))$.

証明. $R\leqq r\leqq 1$上の$r\sqrt{|P(r)|}\leqq C$より$P(r)\geqq -C^2/r^2$だから

$$P_j(r)=P(r)+j^2/r^2\geqq(j^2-C^2)/r^2\qquad(R\leqq r\leqq 1)$$

となる。$j>C$に対して$\lambda=(j^2-C^2)^{1/2}$とおくと$P_j(r)\geqq\lambda^2/r^2$ $(R\leqq r\leqq 1)$ である。(λ^2/r^2) 陪単位は $(0,1)$ 上

$$(r^{-\lambda}-r^{\lambda})/2\lambda>0$$

であることが直接の計算により分かる。従って定理1．2により $R \leqq r \leqq s < 1$ に対して

$$f_j(r) / \{(r^{-\lambda}-r^{\lambda}) / 2\lambda\} \geqq f_j(s) / \{(s^{-\lambda}-s^{\lambda}) / 2\lambda\}$$

となり，$\lambda > j-C$ だから

$$f_j(s)/f_j(r) \leqq (s^{-\lambda}-s^{\lambda})/(r^{-\lambda}-r^{\lambda})$$
$$=(r/s)^{\lambda}(1-s^{2\lambda})/(1-r^{2\lambda}) \leqq (r/s)^{\lambda} \leqq (r/s)^{j-C}.$$

終

1．4．P が楕円型であると $PP(\Omega;\Gamma)=\{0\}$ で興味は何もない。そこで以下では P を非楕円型と仮定する。すると定理1．1と系1．2より（0，1）上

$$0 < f_0 < f_1 < f_2 < \cdots < f_{j-1} < f_j < \cdots$$

であるので，f_0/f_j は系1．1より増加関数となり

(1．4) $$\alpha_j=\alpha_j(P)=\lim_{r\downarrow 0} f_0(r)/f_j(r) \in [0,1) \quad (j=1,2,\cdots)$$

が定義できる。特に $\alpha_1=\alpha_1(P)$ を $\alpha(P)$ ともかき P の**特異性示数**と言う。明らかに

$$1 > \alpha(P)=\alpha_1(P) \geqq \alpha_2(P) \geqq \cdots \geqq \alpha_j(P) \geqq \alpha_{j+1}(P) \geqq \cdots \geqq 0$$

であるので $\alpha(P)=0$ なら $\alpha_j(P)=0$ $(j=1,2,\cdots)$ となることに注意する。

P が非楕円型ならば $f_0 \in PP_1(\Omega;\Gamma)$ （P が楕円型ならば $PP_1(\Omega;\Gamma)=\Phi$）であるが，いつ $PP_1(\Omega;\Gamma)=\{f_0\}$ となるかは興味深い。$PP_1(\Omega;\Gamma)=\{f_0\}$ となるとき P に対して**ピカール原理**が成立すると言う。特異性示数 $\alpha(P)$ はこの決定に本質的な量である：

定理　1．3．P に対してピカール原理が成り立つ（即ち $PP_1(\Omega;\Gamma)=\{f_0\}$ 又は $\dim P=1$）為の必要十分条件は P の特異性示数 $\alpha(P)=0$ となることである。

証明. まず $\alpha(P)=0$ とする。そのとき任意の $u \in PP_1(\Omega;\Gamma)$ をとると $u=f_0$ となることを示す。$r \in (0,1]$ に対して $u(re^{i\theta})$ のフーリエ展開

$$u(re^{i\theta})=a_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\sin n\theta)$$

に於て，フーリエ係数 $a_n(r)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，$b_n(r)$ $(n=1,2,\cdots)$ は $L_n w=0$ の（0，1）上の解で $a_n(1)=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$，$b_n(1)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ である。更に $u \in PP_1(\Omega;\Gamma)$ により

$$a_0'(1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}u(re^{i\theta})\right]_{r=1}d\theta=-\sigma(u)=-1$$

なので，（0，1）上恒等的に $a_0=f_0$，$a_n=-a_n'(1)f_n$，$b_n=-b_n'(1)f_n$ $(n=1,2,\cdots)$ がわかる。よって

$$u(re^{i\theta})=f_0(r)-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'(1)\cos n\theta+b_n'(1)\sin n\theta)f_n(r)$$

となる。$u(re^{i\theta})(1 \pm \cos n\theta) \geqq 0$ だから

$$0 \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})(1 \pm \cos n\theta)\,d\theta=f_0(r) \mp \frac{1}{2}a_n'(1)f_n(r)$$

となり，$|a_n'(1)| \leqq 2(f_0(r)/f_n(r))$ $(0 < r \leqq 1)$ となる。ここで $r \downarrow 0$ とすることにより $|a_n'(1)| \leqq 2\alpha(P)$ だから，$a_n'(1)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ が出る。全く同様に $u(re^{i\theta})(1 \pm \sin n\theta)$ について同じ事を繰り返せば $b_n'(1)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ も出る。故に $u=f_0$ となる。

次に $\alpha(P)>0$ とすると $PP_1(\Omega;\Gamma)\setminus\{f_0\} \neq \Phi$ であることを示す。

$$u(re^{i\theta})=f_0(r)+\alpha(P)f_1(r)\cos\theta$$

とおくと，直接の計算で Ω 上 $(-\Delta+P)u=0$ となることがわかる。更に $\alpha(P)(f_1/f_0)$ は真の減少関数なので

$$0 \leqq \alpha(P)(f_1(r)/f_0(r)) < \lim_{r\downarrow 0}\alpha(P)(f_1(r)/f_0(r))=1 \quad (0 < r \leqq 1)$$

であるから

$$u(re^{i\theta})=f_0(r)(1+\alpha(P)(f_1(r)/f_0(r))\cos\theta)$$
$$\geqq f_0(r)(1-\alpha(P)(f_1(r)/f_0(r)))>0$$

となり，$u \in PP(\Omega;\Gamma)$ がわかる。更に

$$\sigma(u)=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}u(re^{i\theta})\right]_{r=1}d\theta=-f_0'(1)-\frac{1}{2\pi}\alpha(P)f_1'(1)\int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta=1$$

となるので $u\in PP_1(\Omega;\Gamma)$ である。明らかに $u\neq f_0$ であり $u\in PP_1(\Omega;\Gamma)\setminus\{f_0\}$ となる。 終

$\alpha(P)=0$ となる判定条件は定理1．3により重要である。後で使う次の判定条件を考える。2重積分又はその反復積分により

(1．5) $$\beta(P)=\iint_{0<s\leqq t\leqq 1}\frac{1}{st}\left[\frac{f_0(t)}{f_0(s)}\right]^2 dsdt=\int_0^1\frac{f_0(t)^2}{t}\int_0^t\frac{ds}{sf_0(s)^2}\,dt$$

を定義する。$0<\beta(P)\leqq\infty$ である。

定理 1．4．$\alpha(P)=0$ となる必要十分条件は $\beta(P)=\infty$ である。

証明. $w(r)=f_1(r)/f_0(r)$ とおくと，直接の計算で

$$\{rf_0(r)^2w'(r)\}'=(f_0(r)^2/r)\,w(r),\quad \lim_{r\uparrow 1}rf_0(r)^2w'(r)=0$$

となる。$[r,1]$ 上で積分して

$$-rf_0(r)^2w'(r)=\int_r^1(f_0(t)^2/t)w(t)dt.$$

これを $w'(r)$ について解き，両辺を $[r,1]$ 上で積分して

$$w(1)-w(r)=-\int_r^1\frac{1}{sf_0(s)^2}\left[\int_s^1\frac{f_0(t)^2}{t}w(t)\,dt\right]ds.$$

$w(1)=1$ に注意し，又反復積分を2重積分になおして

(1．6) $$w(r)=1+\iint_{r\leqq s\leqq t\leqq 1}\frac{1}{st}\left[\frac{f_0(t)}{f_0(s)}\right]^2 w(t)\,dsdt.$$

ここで定理1．2により $w(t)\geqq 1$ だから

$$w(r)\geqq 1+\iint_{r\leqq s\leqq t\leqq 1}\frac{1}{st}\left[\frac{f_0(t)}{f_0(s)}\right]^2 dsdt$$

となり，$r\downarrow 0$ とすることにより $1/\alpha(P)\geqq 1+\beta(P)$ となる。故に $\beta(P)=\infty$ ならば $\alpha(P)=0$ となる。次に $\beta(P)<\infty$ ならば $\alpha(P)>0$ となることを示す。その為

$$\beta(r,\rho)=\iint_{r\leqq s\leqq\rho,\ s\leqq t\leqq 1}\frac{1}{st}\left[\frac{f_0(t)}{f_0(s)}\right]^2 dsdt\qquad(0\leqq r<\rho\leqq 1)$$

と記す。$\beta(P)=\beta(0,1)<\infty$ だから $\beta(0,\rho)\downarrow 0$ $(\rho\downarrow 0)$ であるので $\beta(0,\rho)<1/2$ となる $\rho\in(0,1)$ が求まる。すると $\beta(r,\rho)<1/2$ $(0<r<\rho)$ である。$0<r<\rho$ に対して（1．6）より

$$w(r)=1+\iint_{\rho\leqq s\leqq t\leqq 1}\frac{1}{st}\left[\frac{f_0(t)}{f_0(s)}\right]^2 w(t)\,dsdt+\iint_{r\leqq s\leqq\rho,\, s\leqq t\leqq 1}\frac{1}{st}\left[\frac{f_0(t)}{f_0(s)}\right]^2 w(t)\,dsdt.$$

$[r,\rho]$ 上 w は減少関数なので $w\leqq w(r)$ であるから

$$w(r)\leqq w(\rho)+w(r)\beta(r,\rho)\leqq w(\rho)+w(r)/2$$

となり $w(r)\leqq 2w(\rho)$ となる。$r\downarrow 0$ として $1/\alpha(P)\leqq 2w(\rho)$ なので $\alpha(P)>0$ が結論される。 終

2．局所グリーン関数

2．1．P を非楕円型，従って P の陪単位 $f_P>0$ とする。又 P_j 陪単位を f_j $(j=0,1,2,\cdots)$ とする。特に $f_0=f_P$ である。すると各 $j=0,1,2,\cdots$ について，$f_j>0$ だから，各 $R\in(0,1)$ に対し $(R,1)$ 上の $L_jw=0$ の解

(2．1) $$e_{jR}(r)=f_j(r)\int_R^r\frac{dt}{tf_j(t)^2}$$

が定義可能である。e_{jR} は $(0,\infty)$ 上の $L_jw=0$ の解に拡張可能であることに注意する。$(R,1)$ 上では $e_{jR}>0$ である。

命題　2．1．　　$e_{jR}(R)=0$，$e_{jR}(1)=1$．

証明. $e_{jR}(R)=0$ は自明なので $e_{jR}(1)=1$ を示す。等式

$$e_{jR}'(r)=f_j'(r)\int_R^r \frac{dt}{tf_j(t)^2}+1/rf_j(r)$$

において $e_{jR}'(1)$，$f_j'(1)$（$=-1$）は共に有限で $\lim_{r\uparrow 1} 1/rf_j(r)=\infty$ により

$$\lim_{r\uparrow 1}\int_R^r \frac{dt}{tf_j(t)^2}=\infty$$

となる。よって

$$e_{jR}(1)=\lim_{r\uparrow 1} e_{jR}(r)=\lim_{r\uparrow 1}\left[\int_R^r \frac{dt}{tf_j(t)^2}\right]/(1/f_j(r))$$

の最右辺は∞／∞型の不定形だから，ロピタルの定理により

$$e_{jR}(1)=\lim_{r\uparrow 1}(1/rf_j(r)^2)/(-f_j'(r)/f_j(r)^2)=\lim_{r\uparrow 1}(-1/rf_j'(r))=1.$$ 終

命題　2．2．$e_{jR}'(r)f_j(r)-e_{jR}(r)f_j'(r)=1/r$　$(R\leqq r\leqq 1)$．

証明. $e_{jR}(r)/f_j(r)=\int_R^r (1/tf_j(t)^2)\,dt$ の両辺を r で微分すると直ちに得られる。 終

命題　2．3．$e_{jR}(r)f_j(s)\leqq \dfrac{1}{2(j-C)}\left[\dfrac{r}{s}\right]^{j-c}$ $(R\leqq r\leqq s\leqq 1$，$j>C=C(P,R))$．

証明. 系1．3により $j>C$ ならば

$$e_{jR}(r)f_j(s)=\int_R^r \frac{1}{t}\cdot\frac{f_j(r)}{f_j(t)}\cdot\frac{f_j(s)}{f_j(t)}\,dt\leqq\int_R^r\frac{1}{t}\left[\frac{t}{r}\right]^{j-c}\left[\frac{t}{s}\right]^{j-c}dt$$

$$=\int_R^r \frac{t^{2(j-c)-1}}{(rs)^{j-c}}\,dt=\frac{1}{2(j-C)}\left[\left[\frac{r}{s}\right]^{j-c}-\left[\frac{R^2}{rs}\right]^{j-c}\right]\leqq\frac{1}{2(j-C)}\left[\frac{r}{s}\right]^{j-c}.$$ 終

命題　2．4．$e_{jR}(r)\leqq \dfrac{f_0(r)}{f_j(r)}e_{0R}(r)$　$(R\leqq r\leqq 1$，$j=0,1,2,\cdots)$．

証明. 系1．1により

$$e_{jR}(r)=f_j(r)\int_R^r\frac{1}{tf_0(t)^2}\left[\frac{f_0(t)}{f_j(t)}\right]^2dt$$

$$\leqq f_j(r)\int_R^r\frac{1}{tf_0(t)^2}\left[\frac{f_0(r)}{f_j(r)}\right]^2dt=\frac{f_0(r)}{f_j(r)}e_{0R}(r).$$ 終

命題　2．5．　$0<S<R<1$，$C=C(P,R)$ とすると

$$e_{jS}(r)f_j(s)\leqq e_{0S}(r)f_0(R)\left[\frac{R}{s}\right]^{j-c}\ (S\leqq r\leqq R\leqq s<1,\ j>C).$$

証明. 命題2．4と系1．1と系1．3により

$$e_{jS}(r)f_j(s)\leqq\frac{f_0(r)}{f_j(r)}e_{0S}(r)f_j(s)\leqq e_{0S}(r)f_j(s)\frac{f_0(R)}{f_j(R)}$$

$$=e_{0S}(r)f_0(R)\frac{f_j(s)}{f_j(R)}\leqq e_{0S}(r)f_0(R)\left[\frac{R}{s}\right]^{j-c}.$$ 終

2．2．P を非楕円型とすると，各 $R\in(0,1)$ につき e_{0R} が定義でき，その効果として次の事が言える。X が Ω の正則領域であるとは，本論文では，X は Ω の部分領域で，境界 ∂X は有限個の互いに交わらぬ滑らかなジョルダ

ン曲線よりなり，X の閉被 $\overline{X}\subset\Omega\cup\Gamma$ となるものとする。すると $\overline{X}\subset\{R<|z|\leqq 1\}$ となる $R\in(0,1)$ がとれる。そこで $h=e_{0R}$ とおくと，h は $\overline{X}$ を含む領域で $(-\Delta+P)u=0$ の解で，$\inf_{\overline{X}} h>0$ となる。X がこの様な h をもつときには，X は次の諸性質を持つ（例えば［3］参照）；

1．**最小値原理**. $u,v\in C(\overline{X})$ が X 上 $(-\Delta+P)w=0$ の解であって，∂X 上 $u\leqq v$ であれば X 全体で $u\leqq v$ となる；

2．**ディリクレ問題の可解性**. 任意の $\nu\in C(\partial X)$ に対し，X 上 $(-\Delta+P)u=0$ の解 $u\in C(\overline{X})$ で ∂X 上 $u=\nu$ となるものが唯一つ存在する；

3．**グリーン関数の存在**. X 上 $(-\Delta+P)u=0$ のグリーン関数が存在する。

ここで X 上 $(-\Delta+P)u=0$ のグリーン関数 $G(z,\zeta)$ とは，各 $\zeta\in X$ について $G(\cdot,\zeta)\in C(X\setminus\{\zeta\})$ で，∂X 上 $G(\cdot,\zeta)=0$ となり，更に超関数の意味で X 上

$$(-\Delta+P)G(\cdot,\zeta)=\delta_\zeta$$

となるものとする。ただし δ_ζ は ζ に於けるディラック関数とする。すると $G(\cdot,\zeta)$ は更に次の性質を持つことがわかる。まず $X\setminus\{\zeta\}$ 上 $G(\cdot,\zeta)>0$ で，$G(\cdot,\zeta)\in PP(X\setminus\{\zeta\})$，又 $z,\zeta\in X$ で $z\neq\zeta$ のとき対称性 $G(z,\zeta)=G(\zeta,z)$ があり，かつ

$$G(\zeta,\zeta)=\lim_{z\neq\zeta,\ z\to\zeta}G(z,\zeta)=\infty\cdot$$

2．3．$R\in(0,1)$ とすると $X=\{R<|z|<1\}$ は Ω の正則領域なので，$(-\Delta+P)u=0$ のグリーン関数 $G_R(z,\zeta)$ を持つ。G_R を e_{jR}，f_j を使って次のように具体的に表示できる：

定理 2．1．$0<R<r<s<1$ と実数 θ，σ に対して，$z=re^{i\theta}$，$\zeta=se^{i\sigma}$ と置くと

$$G_R(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\{e_{0R}(r)f_0(s)+2\sum_{j=1}^{\infty}e_{jR}(r)f_j(s)\cos j(\theta-\sigma)\}. \tag{2.2}$$

証明. 命題2．3によると右辺の級数は任意の $s\in(R,1)$ を固定すると $r\in[R,s)$ について広義一様収束，任意の $r\in(R,1)$ を固定すると $s\in(r,1]$ について広義一様収束する。そこで $z=re^{i\theta}$，$\zeta=se^{i\sigma}$ に対して，右辺の級数を $F_0(z,\zeta)$ としるし，$\zeta=se^{i\sigma}$ を固定して

$$Y_s=\{R\leqq|z|\leqq 1\}\setminus\{|z|=s\}$$

とかくことにする。この Y_s 上の関数 $F(z)$ を

$$F(z)=\begin{cases}F_0(z,\zeta) & (R\leqq|z|<s),\\ F_0(\zeta,z) & (s<|z|\leqq 1)\end{cases}$$

で定める。$F(Re^{i\theta})=F(e^{i\theta})=0$ で，$F\in C(Y_s)$ となる。決まりをつけるために，例えば，$F(z)=\infty$ $(|z|=s)$ とでも定めて，F を $Y=\{R\leqq|z|\leqq 1\}$ 上の可測関数と考えることにする。再び命題2．3により $j>C+2$ ならば

$$\int_R^s e_{jR}(r)f_j(s)\,rdr\leqq\frac{1}{2(j-C)}\int_R^s\left[\frac{r}{s}\right]^{j-C}rdr\leqq\frac{1}{2(j-C)(j-C+2)},$$

$$\int_s^1 e_{jR}(s)f_j(r)\,rdr\leqq\frac{1}{2(j-C)}\int_s^1\left[\frac{s}{r}\right]^{j-C}rdr\leqq\frac{1}{2(j-C)(j-C-2)}$$

だから $F\in L_1(Y_s)$，従って $F\in L_1(Y)$ と考えらえる。そこで超関数の意味で

$$(-\Delta+P)F=\delta_\zeta \tag{2.3}$$

となる事が示したい。その為に $v\in C_0^\infty(X)$ をとり

$$\iint_{R<|z|<1}F(z)\ (-\Delta+P(z))\,v(z)\,dxdy=v(\zeta)\quad(z=x+iy)$$

を示す。上の左辺 A は積分を $R<|z|<s$ で行ったものをI，$s<|z|<1$ 上で行ったものをIIとすると，$A=\mathrm{I}+\mathrm{II}$ である。簡単のため $\Delta_r=\partial^2/\partial r^2-(1/r)\partial/\partial r$ と記すと

$$2\pi\,\mathrm{I}=\int_0^{2\pi}\int_R^s e_{0R}(r)f_0(s)(-\Delta_r v-\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}+P(r)v)\,rdrd\theta$$

$$+2\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_R^s e_{jR}(r)\,f_j(s)\,(-\Delta_r v-\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}+P(r)\,v)\cos j\,(\theta-\sigma)\,rdrd\theta.$$

ここで

$$\int_0^{2\pi}\int_R^s e_{0R}(r)\,f_0\,(s)\,\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}\,rdrd\theta=\int_R^s e_{0R}(r)\,f_0\,(s)\,\left[\int_0^{2\pi}v_{\theta\theta}\,d\theta\right]\frac{dr}{r}=0$$

は明かであるし，又

$$\int_0^{2\pi}\int_R^s e_{jR}(r)\,f_j\,(s)\,\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}\cos j\,(\theta-\sigma)\,rdrd\theta$$

$$=\int_R^s e_{jR}(r)\,f_j\,(s)\,\left[\int_0^{2\pi}v_{\theta\theta}\cos j\,(\theta-\sigma)\,d\theta\right]\frac{dr}{r}$$

$$=-\int_0^{2\pi}\int_R^s e_{jR}(r)\,f_j\,(s)\,\frac{j^2}{r^2}v\cos j\,(\theta-\sigma)\,rdrd\theta$$

となる。これは二度部分積分を使って

$$\int_0^{2\pi}v_{\theta\theta}\,(re^{i\theta})\cos j\,(\theta-\sigma)\,d\theta=-j^2\int_0^{2\pi}v\,(re^{i\theta})\cos j\,(\theta-\sigma)\,d\theta$$

となることに依る。以上から

$$2\pi\,\mathrm{I}=\int_0^{2\pi}\int_R^s e_{0R}(r)\,f_0\,(s)\,(-\Delta_r v+Pv)\,rdrd\theta$$

$$+2\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_R^s e_{jR}(r)\,f_j\,(s)\,(-\Delta_r+P_j v)\cos j\,(\theta-\sigma)\,rdrd\theta$$

となる。さて $e''_{0R}+\frac{1}{r}e'_{0R}=Pe_{0R}$, $e''_{jR}+\frac{1}{r}e'_{jR}=P_je_{jR}$ により

$$\{r\,(e'_{0R}v-e_{0R}v_r)\}'=e_{0R}\,(-\Delta_r v+Pv)\,r,$$

$$\{r\,(e'_{jR}v-e_{jR}v_r)\}'=e_{jR}\,(-\Delta_r v+P_jv)\,r$$

であるから，上の $2\pi\,\mathrm{I}$ の右辺の第１項は $v\,(Re^{i\theta})=v_r\,(Re^{i\theta})=0$ により

$$\int_0^{2\pi}f_0\,(s)\,\left[\int_R^s\{r\,(e'_{0R}v-e_{0R}v_r)\}'\,dr\right]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}s\,\{e'_{0R}(s)\,f_0\,(s)\,v\,(se^{i\theta})-e_{0R}(s)\,f_0\,(s)\,v_r\,(se^{i\theta})\}\,d\theta$$

となる。$2\pi\,\mathrm{I}$ の右辺のシグマの第 j 項は $v\,(Re^{i\theta})=v_r\,(Re^{i\theta})=0$ により

$$\int_0^{2\pi}f_j\,(s)\,\left[\int_R^s\{r\,(e'_{jR}v-e_{jR}v_r)\}'\,dr\right]\cos j\,(\theta-\sigma)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}s\,\{e'_{jR}\,(s)\,f_j\,(s)\,v\,(se^{i\theta})-e_{jR}(s)\,f_j\,(s)\,v_r\,(se^{i\theta})\}\cos j\,(\theta-\sigma)\,d\theta$$

である。以上により

$$2\pi\,\mathrm{I}=\int_0^{2\pi}s\,\{e'_{0R}\,(s)\,f_0\,(s)\,v\,(se^{i\theta})-e_{0R}(s)\,f_0\,(s)\,v_r\,(se^{i\theta})\}\,d\theta$$

$$+2\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}s\,\{e'_{jR}\,(s)\,f_j\,(s)\,v\,(se^{i\theta})-e_{jR}(s)\,f_j\,(s)\,v_r\,(se^{i\theta})\}\cos j\,(\theta-\sigma)\,d\theta$$

となる。IIについても e_{0R} と f_0，e_{jR} と f_j の役割を入れ換えて，今度は $v\,(e^{i\theta})=v_r\,(e^{i\theta})=0$ に注意して全く同様の計算をすれば

$$2\pi\,\mathrm{II}=\int_0^{2\pi}s\,\{e_{0R}\,(s)\,f_0\,(s)\,v_r\,(se^{i\theta})-e_{0R}(s)\,f'_0\,(s)\,v\,(se^{i\theta})\}\,d\theta$$

$$+2\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}s\,\{e_{jR}\,(s)\,f_j\,(s)\,v_r\,(se^{i\theta})-e_{jR}(s)\,f'_j\,(s)\,v\,(se^{i\theta})\}\cos j\,(\theta-\sigma)\,d\theta$$

が得られる。故に $2\pi A=2\pi\,\mathrm{I}+2\pi\,\mathrm{II}$ により

$$2\pi A=\int_0^{2\pi} s\ \{e_{0R}'(s) f_0(s)-e_{0R}(s) f_0'(s)\}\ v(se^{i\theta})\ d\theta$$

$$+2\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} s\ \{e_{jR}'(s) f_j(s)-e_{jR}(s) f_j'(s)\}\ v(se^{i\theta}) \cos j(\theta-\sigma) d\theta$$

となる。ここで命題2．2：$e_{jR}'(s) f_j(s)-e_{jR}(s) f_j'(s)=1/s\ (j=0,1,2,\cdots)$ を使えば

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(se^{i\theta})\ d\theta+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(se^{i\theta}) \cos j(\theta-\sigma) d\theta .$$

この右辺はC^2級関数 $v(se^{i\sigma})$ のフーリエ展開であり，$A=v(se^{i\sigma})=v(\zeta)$ となって（2．3）の証明が終了する。

$u=F-G_R$ とおけば X 上超関数の意味で $(-\Delta+P)u=0$ となるから，X 上 $(-\Delta+P)h=0$ の真の解 h があって，殆ど到る所 $u=h$ となる。しかし $u\in C(Y_s)$ だから Y_s 上 $u\equiv h$ となり，$u(Re^{i\theta})=u(e^{i\theta})=0$ だから同じ事が h についても言え，最小値の原理により $h\equiv 0$ となる。よって Y_s 上 $u\equiv 0$ だから $G_R\equiv F$ が結論される。 終

3．放物型と双曲型

3．1．P を非楕円型とすると，各 $R\in(0,1)$ に対して方程式 $(-\Delta+P)u=0$ のグリーン関数 $G_R(z,\zeta)$ が定義出来る。$0<S<R<1$ のとき $u=G_S(\cdot,\zeta)-G_R(\cdot,\zeta)$ は $R<|z|<1$ で超関数の意味で $(-\Delta+P)u=0$ を満たし，ζ 以外で連続だから，$R<|z|<1$ で u は本来の意味で解となり，最小値の原理により $u>0$ となる。即ち $R<|\zeta|<1$ である各 ζ に対して

$$G_R(z,\zeta)<G_S(z,\zeta)\quad (R<|z|<1)$$

となる。故にハルナックの原理により，$\zeta\in\Omega$ をとめるとき z の関数として Ω 上広義一様に

$$\lim_{S\downarrow 0} G_S(z,\zeta)\equiv\infty,\ \lim_{S\downarrow 0} G_S(z,\zeta)\equiv G(z,\zeta)<\infty\ \ (z\neq\zeta)$$

の何れかが起こる。下に見るように，この性質は $\zeta\in\Omega$ の取りかたに依存しない。そこで前者の成り立つときに P は**放物型**であると言い，後者が成り立つときに P は**双曲型**であると言って，$G(z,\zeta)$ を $(-\Delta+P)u=0$ に関する Ω 上の**グリーン関数**と呼ぶ。$0<R<|z|<1$ において

$$h_\zeta(z)=G(z,\zeta)-G_R(z,\zeta)=\lim_{S\downarrow 0}(G_S(z,\zeta)-G_R(z,\zeta))$$

が $(-\Delta+P)u=0$ の解であるから，$R<|z|<1$ 上の

$$G(z,\zeta)=G_R(z,\zeta)+h_\zeta(z)$$

の表示から，G は G_R と同じ様な性質を持つことが分かる。例えば最小値の原理より，$0<S<R<|z|<1$ において

$$0<G_S(\cdot,\zeta)-G_R(\cdot,\zeta)\leqq(\max_{|z|=R} G(z,\zeta)) f_0^{-1}(R) f_0$$

だから，$0\leqq h_\zeta\leqq(\max_{|z|=R} G(z,\zeta)) f_0^{-1}(R) f_0$ となり，$G(\cdot,\zeta)\in C(\Omega\cup\Gamma\setminus\{\zeta\})$ で Γ 上 $G(\cdot,\zeta)=0$ となることがわかる。

以下 P を非楕円形とする。よって P 倍単位 $f_P=f_0>0$ である。

定理　3．1．次の4条件は互いに同値である：

（a）P は双曲型である，即ち全ての $\zeta\in\Omega$ に対して，どれか1つの，従って全ての $z\in\Omega$ に対して $\lim_{s\downarrow 0} G_s(z,\zeta)=G(z,\zeta)<\infty$；

（b）どれか1つの $\zeta\in\Omega$ に対して，どれか1つの，従って全ての $z\in\Omega$ に対して $\lim_{s\downarrow 0} G_s(z,\zeta)=G(z,\zeta)<\infty$；

（c）1つの，従って全ての $r\in(0,1)$ について $\int_0^r \frac{dt}{tf_0(t)^2}<\infty$；

（d）1つの，従って全ての $r\in(0,1)$ について $\lim_{s\downarrow 0} e_{0s}(r)<\infty$.

証明. $e_{0S}(r)=f_0(r)\int_S^r(1/tf_0(t)^2)\,dt\ (0<S<1)$ に於て $S\downarrow 0$ とすれば最後の2つの条件（c）と（d）の同値なことがわかる。（a）→（b）は自明である。$\zeta=se^{i\sigma}$ とおく。（b）を仮定すると，定理2．1より，

$0<S<r<s<1$とするとき

$$G_S(re^{i\theta},\zeta)=G_S(r,s)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\{e_{0S}(r)f_0(s)+2\sum_{j=1}^{\infty}e_{jS}(r)f_0(s)\}\geqq\frac{1}{2\pi}e_{0S}(r)f_0(s)$$

だから$\lim_{S\downarrow 0}e_{0S}(r)\leqq 2\pi f_0(s)^{-1}G(re^{i\theta},\zeta)<\infty$で，$(b)\to(d)$ が示された。同じく定理２．１と命題２．４及び２．５により，$0<S<r<R<s<1$に対して（１．３）の定数$C=C(P,R)$ を取れば

$$G_S(r,\zeta)\leqq G_S(r,s)$$
$$\leqq\frac{1}{2\pi}\{e_{0S}(r)f_0(s)+2\sum_{j\leqq C}\frac{f_0(r)}{f_j(r)}e_{0S}(r)f_j(s)+2\sum_{j>C}e_{0S}(r)f_0(R)\left[\frac{R}{s}\right]^{j-C}\}$$

となり，ここで$S\downarrow 0$として（d）→（a）がわかる。　終

３．２．回転不変密度Pは楕円型，非楕円型に分類され，更に後者は放物型と双曲型に分類される。これと$PP_1(\Omega;\Gamma)$の関わりは，Pが楕円型ならば$PP_1(\Omega;\Gamma)=\Phi$となるので，非楕円型の場合のみが興味があった。そこで先ず

定理　３．２．Pが放物型ならば，Pについてピカール原理が成立する，即ちPのピカール次元 $\dim P=1$，又は同じ事ながら$PP_1(\Omega;\Gamma)=\{f_0\}$.

証明. 定理３．１によりPが放物型ならば$\int_0^r(1/tf_0(t)^2)\,dt=\infty$（$0<r<1$）となる。すると（１．５）より$\beta(P)=\infty$となり，定理１．４より$\alpha(P)=0$となる。定理１．３から$P$についてピカール原理の成り立つことが分かる。　終

この定理により以下Pが双曲型の時のみが興味の対象となる。Pを双曲型とすると，$0<f_0<f_1<\cdots$と定理３．１により

（３．１）
$$e_j(r)=\lim_{S\downarrow 0}e_{jS}(r)=f_j(r)\int_0^r\frac{dt}{tf_j(t)^2}\qquad(j=0,1,2,\cdots)$$

が（０，１）上定義できて$L_je_j=0$をみたす。$e_0=e_P$を特にP単位と呼ぶ。$e_{jS}\uparrow e_j$だから，e_jの性質は対応するe_{jS}の性質から$S\downarrow 0$とすることにより導かれる。例えば，$e_j(1)=1$である。その他，命題２．４，２．５から次の性質が出る：

命題　３．１．　$e_j(r)\leqq\frac{f_0(r)}{f_j(r)}e_0(r)$　$(0<r\leqq 1)$.

命題　３．２．任意に$R\in(0,1)$を固定し，$C=C(P,R)$とするとき

$$e_j(r)f_j(s)\leqq e_0(r)f_0(R)\left[\frac{R}{s}\right]^{j-C}(0<r<R<s<1,\ j>C).$$

直接計算して確かめるとすぐ分かるように，（３．１）に双対的に（０，１）上

（３．２）
$$f_j(r)=e_j(r)\int_r^1\frac{dt}{te_j(t)^2}\qquad(j=0,1,2,\cdots)$$

となる。この様なP単位とP倍単位の関係から，（１．５）の$\beta(P)$の別の表示を導くために

$$\beta(P)=\int_0^1\frac{f_0(t)^2}{t}\int_0^t\frac{ds}{sf_0(s)^2}dt=\int_0^1\frac{f_0(t)}{t}\left[f_0(t)\int_0^t\frac{ds}{sf_0(s)^2}\right]dt$$

と見ることにより次の公式が得られる：

（３．３）
$$\beta(P)=\int_0^1\frac{f_0(t)e_0(t)}{t}dt=\int_0^1\frac{e_0(t)^2}{t}\int_t^1\frac{ds}{se_0(s)^2}dt$$
$$=\iint_{0<t\leqq s\leqq 1}\frac{1}{st}\left[\frac{e_0(t)}{e_0(s)}\right]^2dsdt.$$

e_j と f_j の果たす色々な役割の中で１番重要なものは次のグリーン関数の具体的な表示に於けるものである：

定理　３．３．$0<r<s<1$、実数θ, σに対して

$$G(re^{i\theta}, se^{i\sigma})=\frac{1}{2\pi}\{e_0(r)f_0(s)+2\sum_{j=1}^{\infty}e_j(r)f_j(s)\cos j(\theta-\sigma)\}. \tag{3.4}$$

証明. 命題３．１と３．２により（３．４）の右辺の級数は絶対収束する。整数Rをとり$R<r<s<1$とすると

$$e_{jR}(r)f_j(s)\leqq e_j(r)f_j(s) \qquad (j=0, 1, 2, \cdots)$$

だから，（２．２）で$R\downarrow 0$とすると，ルベッグの収束定理により（３．４）が得られる。　終

数列 $\{\alpha_j(P)\}_{j=1}^{\infty}$ を（１．４）により定義した。双曲型のPについては，これをe_j により定義する事もできる。これが本来の $\{\alpha_j(P)\}$ の定義法であった。

定理　３．４．　$\alpha_j(P)=\lim_{r\downarrow 0}\frac{e_j(r)}{e_0(r)}$　$(j=1, 2, \cdots)$.

証明. $\alpha_j=0$のとき，命題３．１より$e_j(r)/e_0(r)\leqq f_0(r)/f_j(r)\to\alpha_j=0$ $(r\downarrow 0)$ であるから $\lim_{r\downarrow 0}e_j(r)/e_0(r)=0=\alpha_j$ が得られる。$\alpha_j>0$のときは，ロピタルの定理により

$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{e_j(r)}{e_0(r)}=\lim_{r\downarrow 0}\left[f_j(r)\int_0^r\frac{dt}{tf_j(t)^2}\right]\Big/\left[f_0(r)\int_0^r\frac{dt}{tf_0(t)^2}\right]$$

$$=\left[\lim_{r\downarrow 0}\frac{f_j(r)}{f_0(r)}\right]\cdot\left[\lim_{r\downarrow 0}\left[\int_0^r\frac{dt}{tf_j(t)^2}\right]\Big/\left[\int_0^r\frac{dt}{tf_0(t)^2}\right]\right]$$

$$=\frac{1}{\alpha_j}\cdot\lim_{r\downarrow 0}\frac{1/rf_j(r)^2}{1/rf_0(r)^2}=\frac{1}{\alpha_j}\left[\lim_{r\downarrow 0}\frac{f_0(r)}{f_j(r)}\right]^2=\frac{1}{\alpha_j}\cdot\alpha_j^2=\alpha_j.$$

終

４．端点表示

４．１．β を Γ のコピーとする。即ち対応 $\xi\mapsto b(\xi)$ は Γ から β の上への同相写像とする。$\zeta\to 0$ かつ $\zeta/|\zeta|\to\xi\in\Gamma$ のとき $\zeta\to b(\xi)$（ζは $b(\xi)$ へ近付く）と位相を定めて Ω に β を付加することにより $\beta\cup\Omega\cup\Gamma$ はコムパクト空間となる。Pを双曲型として，$PP_1(\Omega;\Gamma)$ を研究するのに $PP_1(\Omega;\Gamma)=\{f_0\}$ の場合は興味が無いから，そうでない，従って $\alpha(P)=\alpha_1(P)>0$ とする（定理１．３参照)。さて $z=re^{i\theta}$, $\zeta=se^{i\sigma}$ を Ω の点とするとき（３．４）により $|\zeta|<|z|$ ならば

$$2\pi G(z,\zeta)/e_0(\zeta)=f_0(r)+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{e_j(s)}{e_0(s)}f_j(r)\cos j(\theta-\sigma)$$

である。命題３．２により，$R\in(0, 1)$ を固定して$0<s<R<r$とすると

$$\left|\frac{e_j(s)}{e_0(s)}f_j(r)\right|\leqq f_0(R)\left[\frac{R}{r}\right]^{j-C}\quad (j>C=C(P,R))$$

であるから，$e_j(s)/e_0(s)\to\alpha_j=\alpha_j(P)$　$(s\downarrow 0)$ により

$$\lim_{\zeta\to b(e^{i\nu})}2\pi G(z,\zeta)/e_0(\zeta)=f_0(r)+2\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_jf_j(r)\cos j(\theta-\nu),$$

ただし $\zeta=se^{i\sigma}\to b(e^{i\nu})$ とは$s\to 0$で$\sigma\to\nu$のことであった。この右辺の級数を

$$K(z,b(e^{i\nu}))$$

と記す。ハルナックの原理により$K(\cdot,b(e^{i\nu}))\in PP(\Omega;\Gamma)$ となることがわかる。$\alpha_1>0$とフーリエ級数の一意性から，$K(\cdot,b(e^{i\nu}))\equiv K(\cdot,b(e^{i\phi}))$ と $e^{i\nu}=e^{i\phi}$ は同等である（各々のフーリエ展開に於て$\cos\theta$，$\sin\theta$の係数を較べ $(\cos\nu, \sin\nu)=(\cos\phi,\sin\phi)$ がわかるから)。これにより$\zeta\to 0$のときの$2\pi G(\cdot,\zeta)/e_0(\zeta)$ のあらゆる可能な極限は，$\zeta\to\zeta^*=b(\xi)$ $(\xi\in\Gamma)$ の形の近づき方のときの$K(\cdot,\zeta^*)$ の形のものに限ることが分かる。他方グリーンの公式から$R\in(0, 1)$ のとき

$$e_{jR}(\zeta)=-\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}G_R(re^{i\theta},\zeta)\right]_{r=1}d\theta$$

となる。$R\downarrow 0$とすることにより

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(2\pi G(re^{i\theta},\zeta)/e_0(\zeta))\right]_{r=1}d\theta=1$$

となる。ここで$\zeta\to\zeta^*\in\beta$とすることにより

$$\sigma(K(\cdot,\zeta^*))=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}K(re^{i\theta},\zeta^*)\right]_{r=1}d\theta=1$$

であるから，$K(\cdot,\zeta^*)\in PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$ がわかる。しかしショッケ的マルチン理論（例えば［7，pp. 8－12］参照）により

$$\mathrm{ex.}PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)\subset\{K(\cdot,\zeta^*):\zeta^*\in\beta\}\subset PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$$

である。所が$K(re^{i\theta},b(e^{i\nu}))$ の具体的表示

(4.1) $$K(re^{i\theta},b(e^{i\nu}))=f_0(r)+2\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j f_j(r)\cos j(\theta-\nu)$$

より直ちに分かるように

$$K(e^{i\phi}z,b(e^{i\nu}))\equiv K(z,b(e^{i(\nu-\phi)}))\quad(z\in\Omega)$$

である。$u_\phi(z)=u(e^{i\phi}z)$ のとき，$u\in\mathrm{ex.}PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$ なら$u_\phi\in\mathrm{ex.}PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$ であるから，実は

(4.2) $$\mathrm{ex.}PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)=\{K(\cdot,\zeta^*):\zeta^*\in\beta\}$$

であることがわかる。（4.1）と（4.2）から$\mathrm{ex.}PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$ が完全に記述されたことになる。特に$\dim P=\#\beta=\mathrm{c}$（連続体濃度）なので

(4.3) $$\dim P=\mathrm{c}\quad(P\text{は双曲型で}\alpha(P)>0)$$

がわかる（Pが双曲型で$\alpha(P)=0$なら$\dim P=1$（定理1.3），Pが放物型なら$\alpha(P)=0$で$\dim P=1$（定理3.2），Pが楕円型なら$\dim P=0$である)。ついでながら再びショッケ的マルチン理論（例えば上にもあげた［7，pp. 8－12］参照）によると，$u\in PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$ とΓ上の確率測度μの間に次の様な1：1の対応がある：

(4.4) $$u(z)=\int_0^{2\pi}K(z,b(e^{i\theta}))\,d\mu(e^{i\theta})\quad(z\in\Omega)$$

とあらわされる。（4.1)，（4.2)，（4.4）により$PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$，従って$PP(\Omega\ ;\ \Gamma)=R^+PP_1(\Omega\ ;\ \Gamma)$ の構造が完全に明らかになった。

4.2．以上本論文でこれまで論じたところの総合として，我々の主目標の結果が証明出来る：

主定理．P及びQをΩ上の任意の回転不変密度とする。Ω上$P\leqq Q$ならば$\dim P\leqq\dim Q$である。

証明． Pが楕円型ならば$\dim P=0$，$\dim Q\geqq 0$により主張は正しい。そこでPを非楕円型とする。定理1.2によりQも非楕円型で$\dim Q\geqq 1$である。もしPを放物型とすると定理3.2から$\dim P=1$なので，やはり主張は正しい。故にPを双曲型とする。定理1.3から，すべての$r\in(0,1)$に対して

$$\int_0^r\frac{dt}{tf_P(t)^2}<\infty$$

であるが，再び定理1.2より（0，1）上$f_P\leqq f_Q$なので，上の不等式より

$$\int_0^r\frac{dt}{tf_Q(t)^2}<\infty$$

となる。依って再び定理3.1からQも又双曲型である。こうしてP,Q共に双曲型の時のみ論じたらよい。まず$\alpha(P)=0$とすると定理3.1から$\dim P=1$で，$\dim Q\geqq 1$により主張は正しい。依って$\alpha(P)>0$とする。（4.3）より$\dim P=\mathrm{c}$であるが，もし$\alpha(Q)>0$がわかると，同じ理由で$\dim Q=\mathrm{c}$となり主張が従う。依って$\alpha(Q)>0$が示したい。定理1.4により$\alpha(P)>0$は

$$\beta(P)=\iint_{0<s<t\leqq 1}\frac{1}{st}\left[\frac{f_P(t)}{f_P(s)}\right]^2dsdt<\infty$$

と同値である。定理1．2により$f_Q(t)/f_P(t) \leqq f_Q(s)/f_P(s)$　$(0<s\leqq t<1)$であるから

$$(f_Q(t)/f_Q(s))^2 \leqq (f_P(t)/f_P(s))^2 \quad (0<s\leqq t<1)$$

となり，$\beta(Q)\leqq\beta(P)<\infty$ である。依って再び定理1．4により$\alpha(Q)>0$となって主張が従う。 **終**

例えば，水素原子の方程式，或は原子炉設計に現れる方程式など理工学に現れる具体的な密度の中には，負定符号の，中心力のポテンシャルや又定数ポテンシャル等が数多い。負定符号の場合は，正定符号や一般符号の場合に較べて，正解空間の構造は，次に見るように極めて単純である：

系　4．1．P をΩ上の負定符号回転不変密度，即ちΩ上$P\leqq 0$であるとすると，$\dim P\leqq 1$である。

証明. 0は恒等関数0としてΩ上の最も単純な密度（いわゆる調和密度）である。密度0に対するf_j $(j=0,1)$は，その定義より

$$f_j'' + (1/r)f_j' - (j^2/r^2)f_j = 0 \qquad (j=0,1)$$

を初期値$f_j(1)=0$，$f_j'(1)=-1$で解けば良い。すると

$$f_0(r) = -\log r,\ f_1(r) = (1/r-r)/2$$

であり，$f_0(r)>0$　$(0<r<1)$　なので定理1．1より密度0は非楕円型でその特異性示数$\alpha(0)$　は

$$\alpha(0) = \lim_{r\downarrow 0}(f_0(r)/f_1(r)) = \lim_{r\downarrow 0} 2r(\log r)/(1-r) = 0$$

故，定理1．3により$\dim 0=1$となる。これが本来の古典的ピカール原理（正特異点の原理）である。よって主定理を使うと，$P\leqq 0$より$\dim P\leqq \dim 0=1$となる。 **終**

5．付録

定理1．3の証明に於て$\alpha(P)>0$なら$\dim P>1$を示したが，もう一頑張りで，その時点で既に$\dim P = \mathrm{c}$（連続体濃度）を直接導くことも出来ることを以下述べる。その為

$$PP'(\Omega;\Gamma) = \{u-v:\ u,v\in PP(\Omega;\Gamma)\}$$

に広義一様収束を与えて得られる局所凸線形位相空間を考える。その部分集合として$PP_1(\Omega;\Gamma)$は完閉凸集合となるので，クレイン・ミルマンの定理（例えばN.Dunford and J.T. Schwartz: *Linear Operators,* Part Ⅰ, Interscience の 440 頁参照）により

(5．1)　$$\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}.PP_1(\Omega;\Gamma)) = PP_1(\Omega;\Gamma),$$

但し$\overline{\mathrm{co}}$は閉凸包をしめす，となる。これから特に

(5．2)　$$\mathrm{ex}.PP_1(\Omega;\Gamma)\neq\Phi$$

が分かる。実際の所欲しいのは（5．1）でなく（5．2）なので，これの証明だけならツォルンの補題により極めて容易に出来る（上挙書 439 頁参照)。そこで（5．2）の集合から1つのuをとり固定する。uが回転不変なら$u=f_0$であるが，そうなら

$$u^{\pm}(re^{i\theta}) = f_0(r)\pm\alpha(P)f_1(r)\cos\theta$$

は$PP_1(\Omega;\Gamma)$に入り（定理1．3の証明参照）$u^+\neq u^-$であって$u=f_0=(u^++u^-)/2$となり端点性に反するから，uは回転不変$u=f_0$ではない。だから$u(re^{i\theta})$の複素フーリエ係数$c_n(r)$　$(|n|=0,1,2,\cdots;\ c_0(r)=f_0(r))$に於て

(5．3)　$c_n(r)\neq 0$となる整数$n\neq 0$が存在する

事が分かる。さてΓを乗法群と考え，各$\xi\in\Gamma$に対して$u_\xi(z)\equiv u(\xi z)$　$(z\in\Omega)$　とするとuと共に$u_\xi\in\mathrm{ex}.PP_1(\Omega;\Gamma)$である。そこで

$$\Gamma_u = \{\xi\in\Gamma:\ \Omega\text{上}\,u_\xi\equiv u\}$$

とするとき，一般にu_ξの複素フーリエ係数は$c_n(r)\xi^n$　$(|n|=0,1,2,\cdots)$　となるから，$\xi\in\Gamma_u$ならフーリエ係数の一意性より$c_n(r)\xi^n=c_n(r)$　となり（5．3）によりある整数$n\neq 0$について$\xi^n=1$となる，即ちΓ_uは1の原始n乗根$(n=0,1,2,\cdots)$の全体の部分群だから

(5．4)　$$\#\Gamma_u\leqq \mathrm{a}\ (\text{可算濃度})$$

となる。$\xi^*\in\Gamma/\Gamma_u$に対して$u_{\xi^*}=u_\xi$　$(\xi\in\xi^*)$　と定めると，$u_{\xi^*}\equiv u_{\eta^*}$と$\xi^*=\eta^*$　$(\xi\in\xi^*,\ \eta\in\eta^*$とする

と $\xi\eta^{-1}\in\Gamma_u$）は同等であるので

$$\{u_{\xi^*}:\xi^*\in\Gamma/\Gamma_u\}\subset \mathrm{ex}.PP_1(\Omega;\Gamma)$$

に於て，左辺の集合の濃度が Γ/Γ_u の濃度と一致することにより，

$$\#(\Gamma/\Gamma_u)\leqq \dim P\leqq c \tag{5.5}$$

となる。しかし $(\#(\Gamma/\Gamma_u))\cdot(\#\Gamma_u)=\#\Gamma$，つまり（5.4）と $\#\Gamma=c$ とによれば $a\cdot(\#(\Gamma/\Gamma_u))\geqq c$ だから，$\#(\Gamma/\Gamma_u)=c$ となり（5.5）から $\dim P=c$ が導かれる。

参　考　文　献

[1] A. Boukricha and H. Hueber: *The Poisson space ${}^cP_X$ for $\Delta u=cu$ with rotation-free c*, Bull. Classe Sci., 64 (1978), 651−658.

[2] M. Kawamura and M. Nakai: *A test of Picard principle for rotation free densities*, II, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 323−342.

[3] C. Miranda: *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, Springer, 1970.

[4] M. Murata: *Structure of positive solutions to $(-\Delta+P)u=0$ in $\mathbb{R}^n$*, Duke Math. J., 53 (1986), 869−943.

[5] M. Nakai: *Martin boundary over an isolated singularity of rotation free density*, J. Math. Soc. Japan, 26 (1974), 483−507.

[6] M. Nakai: *A test of Picard principle for rotation free density*, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 412−431.

[7] M. Nakai: *Picard principle for finite densities*, Nagoya Math. J., 70 (1978), 7−24.

[8] M. Nakai and T. Tada: *Nonmonotoneity of Picard principle*, Trans. Amer. Math. Soc., 292 (1985), 629−644.

[9] M. Nakai and T. Tada: *Extreme nonmonotoneity of Picard principle*, Math. Ann., 281 (1988), 279−293.

[10] R. Phelps: *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand Math. Studies #7, 1965.

[11] T. Tada: *Nonmonotoneity of Picard principle for Schrödinger operators*, Proc. Japan Acad., 66 (1990), 19−21.

[12] 多田俊政：シュレーディンガー作用素のポテンシャルの特異点に於けるマルチン理想境界の構造に関する研究，博士論文（名古屋工業大学），1991年.

本研究は一部分文部省科研費（一般C，課題番号03640042）の援助に依る。

1980 *Mathematics Subject Classification.* Primary 31C35; Secondary 31A35, 30F25.