在庫理論とサプライチェインへの展開[1]

中出　康一

生産には不確定な要素が数多く存在する．その中でも需要が変動するシステムにおいて，どの程度在庫を持てば，需要に対応しながら最小の在庫数で抑えることができるかが重要になる．ここでは，まず基本的な1段階在庫システムの在庫理論について述べる．このモデルを拡張した生産・在庫システムについて，多段，多品種モデルなどこれまで数多くの研究がなされているが，ここでは特にサプライチェインにおける競合に関する基本モデルと，その近年の成果について述べていく．

1　在庫理論と新聞売り子問題

在庫理論の基礎となる単一品種・単位在庫システムに関する問題として新聞売り子問題(newsvendor problem)が知られている（図1）．一度限り新聞を仕入れ，販売をし，売り残りは処分する．どれだけ発注すれば利益を最大にすることができるかという問題である．実際には新聞に限らず，日持ちのしない(perishable)生鮮品などにも適用される．

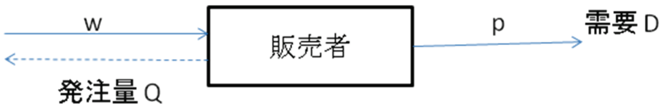

図1　新聞売り子問題

製品の販売価格をp，仕入れ価格をwとし，新聞を購入する客数（ここでは連続量で考える）の確率分布関数を$F(x)$，売れ残りに対する処分売り上げ(salvage)をv，品切れで購入しようとした客が購入できなかったことによる損失費用をg とする．ここで，

$$p>w>0,\ w>v,\ g>0$$

と仮定する．問題は，期待利得が最大になるように，発注量Qを求めることである．

発注量（仕入れ量）をQ，実際の販売量をあらわす確率変数をDとするとき，実際に売れる量はQとDの小さい方の値であり，$\min(Q,D)$と表す．売れ残りの量は$\max(Q-D,0)$であり，購入できなかった客の数は$\max(D-Q,0)$である．ここで，$\min(a,b)$はaとbの小さい方の値を，$\max(a,b)$は大きい方の値を表す．このとき，$a+b=\min(a,b)+\max(a,b)$, $\max(a-b,0)=\max(a,b)-b$が成り立つことに注意する．

仕入れ量Qが与えられたとき，販売量の期待値$S(Q)=E[\min(Q,D)]$，売れ残りの数の期待値$I(Q)=E[\max(Q-D,0)]$，期待品切れの数を$L(Q)=E[\max(D-Q,0)]$とすると，販売者の総利益$\Pi_r(Q)$は

$$\Pi_r(Q)=pS(Q)+vI(Q)-gL(Q)-wQ=(p+g-v)S(Q)-(w-v)Q-gE[D]$$

と表現される．ここで

$$S(Q)+I(Q)=E[\min(Q,D)]+E[\max(Q,D)]-E[D]=Q+E[D]-E[D]=Q\ ,$$

$$S(Q)+L(Q)=E[\min(Q,D)]+E[\max(D,Q)]-Q=Q+E[D]-Q=E[D]$$

を用いた．$\Pi_r(Q)$はQに関して凹関数になることから，$\Pi_r(Q)$を最大にするQが満たす式は，$\frac{d}{dQ}S(Q)=1-F(Q)$ より

$$1-F(Q)=\frac{w-v}{p+g-v}$$

となる．すなわち最適発注量Q^*は

$$Q^*=F^{-1}\left(\frac{p+g-w}{p+g-v}\right)$$

となる．ここでF^{-1} は確率分布関数Fの逆関数である．

2 初期在庫量が与えられたときの最適発注量

初期在庫量xが与えられたときの在庫システムにおける最適発注量を求める．まず一期間問題について述べ，その後多期間問題に拡張する．発注量に関係無く発注1回ごとにかかる費用がKであるとする．

2.1 一期間問題

一期間費用，すなわち発注1回とその後の在庫・品切れに関する費用に関して最適な発注量を求める．費用については１節と同様とする．

K=0のときをまず考える．y-xだけ発注する，すなわち発注直後の在庫水準をyまで引き上げるとする．ここで在庫水準とは，手持ちの在庫量から，発注済みの量を足して，確定した需要量を引いた値である．この例では，リードタイムを考えていないため，手持ちの在庫量と発注量を足した値である．このときの総期待利得は

$$pS(y)+vI(y)-gL(y)-w(y-x)=\Pi_r(y)+wx$$

となる．すなわち，前節の式と異なる項はwxのみである．したがって，

$x<Q^*$ならば，Q^*-xだけ発注する．　$x>Q^*$ならば，発注しない．

ことが最適となる．

固定費用Kが正の値をとるとき，在庫水準をyまであげるときの期待利得は

$$\pi(x,y)=pS(y)+vI(y)-gL(y)-w(y-x)-K\delta(y-x)=G(y)-K\delta(y-x)+wx$$

となる．ここで$\delta(x)$はx>0のとき１，x=0のとき0をとる関数である．また，$G(y)=pS(y)+vI(y)-gL(y)-wy$はyについて凹関数である．したがって，$x<Q^*$のとき，発注するならば，$y=Q^*$となるように発注することが最適となる．このときの期待利得は

$$\pi(x,Q^*)=G(Q^*)+wx-K$$

である．このことより，

$\pi(x,Q^*)=G(Q^*)+wx-K<\pi(x,x)=G(x)+wx$，すなわち$G(Q^*)-K<G(x)$ならば，発注しないことが最適，

$G(Q^*)-K>G(x)$ならば，Q^*-xだけ発注することが最適

となる．

2.2　多期間問題

次に離散期間上の多期間問題を取り上げる．$h_t(x)$を時刻t，在庫量xから開始したときの時刻Tまでの最大総期待利得とする．動的計画法を用いると，

$$h_t(x)=\max_{y\geq x}\{G(y)-K\delta(y-x)+wx+\int_0^\infty h_{t+1}(y-z)f(z)dz\},\quad t=0,1,\ldots,T,$$

$$h_{T+1}(x)=0$$

となる．ただし，G(y)の式（前節で定義した）にある利得vは負の値を取り，その絶対値は在庫管理費用に相当する．y>xの範囲で右辺を最大にするyをS_tとする．さらに

$$H_t(y)=G(y)+\int_0^\infty h_{t+1}(y-z)f(z)dz$$

とする．このとき動的計画法の性質と，前節と同様の議論より，T期間問題の時刻tにおける在庫量がxのとき

$H_t(S_t)-K+wx>H_t(x)+wx$ならば，S_t-x分発注する，そうでなければ発注しない

ことが最適となる．

G(y)が凹関数（-G(y)が凸関数）のとき，$-H_t(x)$は次に示すK-凸性をもつ．

$$-H_t(x)-aH_t{}'(x)\leq -H_t(a+x)+K\quad \text{for all } a\geq 0$$

このことから

・$H_t(S_t)-K=H_t(x)$となる$x=s_t(<S_t)$が唯一存在 する．

（したがって，$x\in(s_t,S_t)$のとき発注することはない）

・$x>S_t$について，$H_t(S')-K>H_t(x)$となる組$(x,S')(S'>x)$ は存在しない．

ことがわかる．従って，次の(s,S)政策が最適となる(Scarf (1960)他)．

$x<s_t$ ならばS_t-x発注，$x>s_t$ならば発注しない．

3　2 段階サプライチェインモデル（一期間問題）

次に，図2に示す2段階サプライチェインモデルを考える．

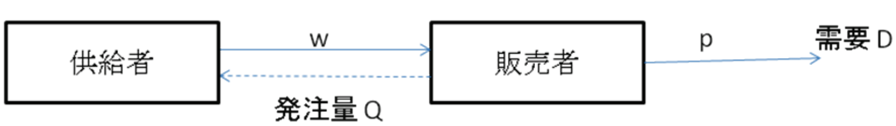

図2　2段階システム

このモデルはWholesale price Modelと呼ばれている．以下の記号を用いる．

p: 販売価格

w: 卸売り価格

f(x): 需要密度関数　（分布関数F(x))　$L\le x\le U$上で$f(x)>0$とする．

v: salvage 価格（売れ残りに対する処理売上：販売者に対する）

g: 品切れに対する損失費用

c: 製品原価(供給者)

さらに次の不等式を仮定する．

$p\ge w>c>0,\ w>v,\ c>v,\ g\ge 0.$

次の２つの問題を考える．

(a)　分散最適化

供給者が卸売価格wを定めたとき，販売者は自己の利益を最大にする発注量を決定する．

供給者は販売者がこの発注量をするとことを既知として，自己の利益最大になるように卸売価格wを決定したい．

(b)　全体最適化

販売者と供給者の総期待利益を最大にする販売者の発注量を決定する．

3.1 分散最適化

販売者の期待利益は，これまでと同様の議論より次の式となる

$$\Pi_r(w,Q)=(p+g-v)S(Q)-(w-v)Q-gE[D]$$

したがって，wを固定したときの最適発注量は

$$Q^*(w)=F^{-1}\left(\frac{p+g-w}{p+g-v}\right)$$

となる．この式を書き直すと

$$w=p+g-(p+g-v)F(Q^*(w))$$

すなわち，wと最適発注量Q(w)は1対1の関係がある．

供給者の期待利益は

$$\Pi_s(w)=(w-c)Q^*(w)$$

となる．先の式の1対1の関係より，供給者の期待利益を販売者の発注量Qの関数としてみなすと

$$\Pi_s(Q)=(p+g-(p+g-v)F(Q)-c)Q=((p+g-v)(1-F(Q))+(v-c))Q$$

となり，これを微分すると

$$\Pi_s'(Q)=(p+g-v)(1-F(Q))+v-c+(p+g-v)(-f(Q))Q$$

$$=(p+g-v)(1-F(Q))\left(1-\frac{Qf(Q)}{1-F(Q)}\right)+v-c$$

となる．ここで，$xf(x)/(1-F(x))$は分布関数F(x)のgeneralized failure rate (GFR)とよぶ．F(x)のGFRが増加関数ならば，$\Pi_s'(Q)$ は単調減少関数である．したがって，供給者の期待利益を最大とするQが存在する（単峰性，Lariviere and Porteus(2001)）．

3.2 全体最適化

全体の総利益は次の式となる．卸売価格は総利益には影響を与えないことに注意する．

$$\Pi_I(Q)=(p+g-v)S(Q)-(c-v)Q-gE[D]$$

したがって，最適な発注量は，2節と同様の議論により次の式で与えられる．

$$Q_I^*=F^{-1}\left(\frac{p+g-c}{p+g-v}\right)$$

3.3　分散最適化と全体最適化の総期待利益の比較

例として，需要分布関数F(x)が[a,b]上の一様分布である場合を考える．すなわち，

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a}\quad (a<x<b)$$

である．

分散最適化の場合，供給者にとり最適な卸売価格に対し，1対1対応する販売者の最適発注量は次の式を満たす．

$$(p+g-v)(1-\frac{Q-a}{b-a})+v-c+(p+g-v)\frac{-Q}{b-a}=0$$

したがって，供給者の最適卸売価格に対応する販売者の最適発注量は3.1節より

$$Q_s^*=\frac{1}{2}\left(b+\frac{b-a}{p+g-v}(v-c)\right)=\frac{1}{2}a+\frac{b-a}{2}\left(\frac{p+g-c}{p+g-v}\right)$$

で与えられる．

全体最適となる発注量は3.2節より

$$Q_I^*=a+(b-a)\left(\frac{p+g-c}{p+g-v}\right)=2Q_S^*$$

となる．すなわち，分散最適で個々が最適化を図ろうとする場合，全体最適の場合の半分の量しか販売者は発注しなくなる．

全体の総利益について比較する．たとえば，a=0, g=0の場合，総期待利益の間には次の式が成り立つ．

$$\Pi_I(Q_S^*)=\frac{3}{4}\Pi_I(Q_I^*)$$

したがって，分散最適化による総期待利益は全体最適な発注をするときの3/4しか得られない．このように，意思決定者が複数存在する（分散最適）とき，全体最適とは異なる意思決定となり，総利益は全体最適のときの総利益より低くなる．この現象はdouble marginalization と呼ばれている．

4. 需要が販売価格に依存する場合

2節，3節で取り上げた問題は，販売価格が一定であるとした．以下では，販売価格に需要が依存し，販売価格が高くなるほど需要が減る場合を考える．

価格と需要の関係を表す需要関数d(p)として以下がよく用いられる．

Iso-elastic　$d(p)=ap^{-k}\qquad (a>0,k>1)$

Linear-power　$d(p)=(a-kp)^{\gamma}\qquad (a>0,k>0,\gamma>0,0<p<a/k)$

Exponential　$d(p)=ae^{-kp}\qquad (a>0,k>0)$

需要が確率的な場合，販売価格がpであるときの需要D(p)として以下の形が用いられる．

乗法型　$D(p)=d(p)\varepsilon$,

加法型　$D(p)=d(p)+\varepsilon$.

ここでεは変動部分を表す確率変数であり，　その分布関数を$F(x)=P(\varepsilon\le x)$ とする（図3）．

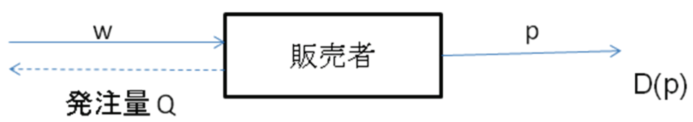

図3　需要が販売価格に依存する場合

4.1 販売者にとっての最適発注量と最適販売価格

販売者が自己の利益を最大にするように，最適発注量と最適販売価格を同時に定めたい．

p: 販売価格

w: 仕入れ価格

v: salvage 価格（売れ残りに対する処理売上）

g: 品切れに対する損失費用

次の仮定をする．

$p>w>0,\ w>v,\quad g\ge 0.$

1期間問題の例として乗法型を取り上げる．販売価格p，発注量Qが与えられたときの利益は次の式で与えられる．

$$\Pi_r(p,Q) = (p+g-v)S(p,Q) - (w-v)Q - gE[D(p)]$$

ここで $S(p,Q) = E[\min(Q, d(p)\varepsilon)]$ は価格p，発注量Qのときの期待販売量である．しかし，この式のまま微分・差分により解析しても最適発注量等は求められない．そこで以下のstocking factorと呼ばれるパラメータを用いる．

$$z=Q/d(p)$$

以下ではpとzを決定変数とする． $S(z) = E[\min(z,\varepsilon)]$ とする．このとき

$$S(p,Q) = E[\min(Q, d(p)\varepsilon)] = d(p)E[\min(z,\varepsilon)] = d(p)S(z)$$

となり，販売者の期待利益は次の式で与えられる．

$$\Pi_r(p,z) = (p+g-v)d(p)S(z) - (w-v)d(p)z - gE[d(p)\varepsilon]$$

これをzについて微分すると

$$\frac{\partial}{\partial z}\Pi_r(p,z) = d(p)\big((p+g-v)(1-F(z)) - (w-v)\big) = 0$$

となる．この式は需要が価格依存でないときと同様の形をしている．従って，販売価格pが与えられたときの最適なstocking factor zの値は

$$z^*(p) = F^{-1}\left(\frac{p+g-w}{p+g-v}\right)$$

となる．これより期待利益は $\Pi_r(p) = \Pi_r(p, z^*(p))$ とpの関数となるので，このpの値を変えることにより最適な販売価格がさだまり，

それとともに最適なzの値，すなわち最適な発注量Qの値が定まる．ただし，この期待利益はpに関して単峰性（極値最大点が一つのみ）をもつことの証明は容易ではなく，また条件が必要になることが多い．Pertruzzi and Dada(1999)にその統一的アプローチが示されている．

4.2 発注費用を持つ場合

Son, Ray and Boyaci (2009)は発注費用を持つモデルを扱った．需要は乗算型とし，d(p)が以下の条件を満たすとする．

$$\lim_{p\to\infty} pd(p) = 0, \quad \eta(p) = -p\frac{d'(p)}{d(p)} \text{ is increasing}$$

$$\frac{p}{\eta(p)} \text{ is monotone, convex, } \ p\left(1-\frac{1}{\eta(p)}\right) \text{ is strictly increasing}$$

F(x)は非減少のGFRをもつ．

ここで $\eta(p) = -p\dfrac{d'(p)}{d(p)}$ は弾力性(elasticity)と呼ばれるもので，次のような意味をもつ．g(p)=pd(p)とおく．これは単純に需要が価格によって確定する場合の価格pが与えられたときの売上高をあらわす．このとき，

$$g'(p)=d(p)(1-\eta(p))$$

となる．η(p)がpに関して増加するならば，η(p)が1に近いとき売上高が高くなる．特に，η(p)は次の性質をもつ．

・η(p)=0: 価格が変動しても需要一定（inelastic）

・|η(p)|大：価格pに対して需要が急激に変化（too elastic）

後者は，100円を自分の通帳につけるのに101円払うことはないが，99円でよいなら誰でも払うといった場合に対応する．

この問題について，次の(s,S,P)政策が販売者の期待利益を最大にすることが示された．

在庫水準x<sならばS-xだけ発注する．x>sならば発注しない．

販売価格は発注後の在庫レベルyが与えたときの最適価格とする．ここで，最適価格は，前節で述べたpとzの関係を用いてy(すなわちQ)からzを通して逆関数により求められる値である．

4.3 多期間問題

近年，多期間問題について，様々なモデル（乗算型，加法型，lost sale, backlogつきなど）で最適政策が求められている．たとえばChen and Simchi-Levi(2004), Huh and Janakiraman(2008), Song, Ray, Boyaci(2009)などである．

時刻t，在庫量xから開始したときの時刻Tまでの最大総期待利得は次の最適性方程式を満足する．

$$h_t(x) = \max_{(p,y(\geq x))}\{G(y,p) - K\delta(y-x) + wx + \int_0^\infty h_{t+1}([y-d(p)z]^+)f(z)dz\}$$

さらに

$p_t(y)$: yが与えられたときの右辺最大とするp,　右辺の｛｝の中　$H_t(y,p)$

S_t: $H_t(y,p_t(y))$最大とするy, s_t: $H_t(y,p_t(y)) < H_t(y,p_t(y))$-Kをみたす最大のx(<$S_t$)

とする．次の政策の最適性が示されている．

(a)　有限時間期待利得最大化

次の(s,S,p,A)政策が最適 であることが示される．

$x_t<s_t$のときはStまで発注，価格を$p_t(S_t)$とする．

$s_t<x<S_t$のとき，もし発注するのであればS_tまで発注，価格$p_t(S_t)$とする．

それ以外は発注しない．価格は$p_t(x_t)$とする．

A: $s_t<x<S_t$内で発注する範囲 を表す．

(b)　平均期待利得最大化　(加法型では有限期間期待利得についても)

次の(s,S,p)政策が最適であることが示されている．

x>Sならば何もしない．

x<sならば，S-sだけ発注する．

そのときの価格は注文到着後の在庫水準y に関する最適価格p*(y)で決定.

5.　2段階最適化問題への応用

4節で述べた販売価格を意思決定に組み入れた問題の解析結果をもとに販売者と供給者が競合するモデルを考える（図4）.

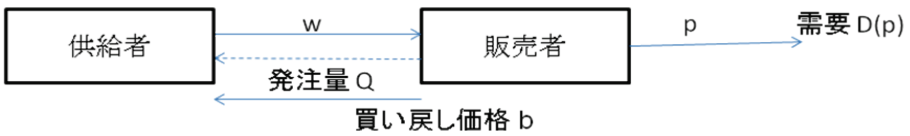

図4　2段階システム（販売価格が決定変数の場合）

売れ残った製品は供給者に買い戻させるとする．このモデルは Buyback Modelと呼ばれる．

p: 販売価格

w: 卸売り価格

D(p)=d(p)ε　（εの分布関数F(x))

b: 買い戻し価格（売れ残りは供給者に返す.）

g: 品切れに対する損失費用

c: 製品原価(供給者)

次の不等式を仮定する．

$p>w>c>0, w>b, g\geq 0$.

販売者はw,　bが与えられたとき，自己の利益を最大にする発注量と販売価格を決定する．

供給者は販売者がこの発注量をするという前提で，自己の利益最大になるように卸売価格wと買い戻し価格bを決定したい．

Song, Ray and Li(2008)は，４節で示した仮定（Song, Ray and Boyaci(2009)）の下で，　w,bが与えられたとき，

yを固定したときの販売者期待利益はpについて単峰であり，

販売者期待利益を最大にする（p，y）が唯一存在する

ことが示されている．ここで，w, bとp, yの関係は次の式で与えられる．

$$\begin{pmatrix} w \\ b \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1-\dfrac{1}{\eta(p)}F\left(\dfrac{y}{d(p)}\right)V\left(\dfrac{y}{d(p)}\right) \\ 1-\dfrac{1}{\eta(p)}V\left(\dfrac{y}{d(p)}\right) \end{pmatrix},\ \text{ここで}\ V(z)=\left(1-\frac{z(1-F(z))}{1-\Theta(z)}\right)^{-1},\quad \Theta(z)=E[[\varepsilon-z]^{+}].$$

この関係式より，供給者の利益$\pi_s(w,b)$について，p，yの関すると考え$\pi_s(p,y)$と置き換えることができる．このとき，次の結果が得られる．

前記条件のもとで，yが与えられたとき供給者の期待利益 $\pi_s(p,y)$ を最大にする唯一の販売価格p(y)が存在する．

$\pi_s(p(y),y)$を最大にする唯一のyが存在する．（このときの供給者が決定する卸売価格，買い戻し価格は上式で与えられる）

6. 一般化

これまで述べたシステムを拡張した様々なモデルが解析されてきている．例えば次のような拡張モデルがある．

・リードタイムを含めた最適化

リードタイムが長くなるほど，需要は減るとする．リードタイムと販売価格，注文量が自己の利益にとって最適となるように定める．(Ibtinen and Nakade(2011) 他)

・契約モデルの一般化

3，5節の供給，販売競合モデルは様々な形で一般化されている．たとえば，利益配分を販売価格に応じてある割合で生産者に返却する(revenue sharing)とき，ある条件のもとで全体利益最大と一致することがわかっている．ただし，この場合，供給者と販売者との利益配分をどのように決めるかは両者間の力量で決まるところがある．

・販売者が競合するモデル

販売者が互いに競合し，Nashゲーム均衡価格が存在する条件と，その価格を求める．さらに，この供給者を加えて販売者との競合をおこない，供給者は自己の利益を最大にするように各販売者への卸売価格の最適化を行う．全体の総利益を最適となるシステムとの比較をおこない，やはりdouble marginalization は存在するが，販売者間の競争で販売価格が低下して利益が増加し，全体最適の場合と比べたときの総利益の低下率は小さいことが示されている(Bernstein and Federgruen(2005), Nakade et al.(2010)他).

注

1 本稿は日本オペレーションズ・リサーチ学会待ち行列研究部会でのチュートリアル講演（2009.6）をもとに作成されている．

参考文献

Bernstein, F. and Federgruen, A. Decentralized Supply Chains with Competing Retailers under Demand Uncertainty, *Management Science*, 51, 2005, 18-29.

Chen, X. Simchi-Levi, D. Coordinating Inventory Control and Pricing Strategies with Random Demand and Fixed Ordering Cost: The Finite Horizon Case, *Operations Research*, 52, 2004, 887-896.

Huh, W. T. and Janakiraman, G. (s,S) Optimality in Joint Inventory-Pricing Control: An Alternate Approach, *Operations Research*, 56, 2008, 783-790.

Ibtinen, S. and Nakade, K. Impact of Lead-time Decision in a Decentralized Supply Chain under Price and Lead-time Sensitive Demand , to appear in *Journal of the Japan Industrial Management Association*, 2011

Lariviere, M. A. and Porteus, E. L. Selling to the Newsvendor: An Analysis of Price-Only Contracts, *Manufacturing and Service Operations Management*, 3, 2001, 293-305.

Nakade, K., Tsubouchi, S. and Ibtinen, S. Properties of Nash Equilibrium Retail Prices in Contract Model with a Supplier, Multiple Retailers and Price-Dependent Demand , *Journal of Software Engineering and Applications* , 3, 2010, 27-33.

Petruzzi, N.C. and Dada, M. Pricing and the Newsvendor Problem: A Review with Extensions, *Operations Research*, 47, 1999, 183-194.

Scarf, H. The Optimality of (S,s) Policies in the Dynamic Inventory Problem, *Proc. of 1st Stanford Symposium on Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1960, Stanford University Press, 196-202.

Song, Y., Ray, S. and Boyaci, T. Optimal Dynamic Joint Inventory-Pricing Control for Multiplicative Demand with Fixed Order Costs and Lost Sales, *Operations Research* , 57, 2009, 245-250.

Song, Y., Ray, S. and Li, S. Structural Properties of Buyback Contracts for Price-Setting Newsvendors, *Manufacturing and Service Operations Management*, 10, 2008, 1-18.

de Kok, A. G., Graves, S.C. Eds. *Supply Chain Management: Design Coordination and Operation*, Elsevier, 2003; 黒田充・大野勝久監訳『サプライチェーンハンドブック』朝倉書店, 2008