

アーチの塑性座屈後挙動
に関する研究

1988

伊藤智啓

目 次

第1章 序 論	1
記 号	8
第2章 剛体ばねモデルによるアーチの座屈後挙動の解析法	11
§ 2. 1 緒言	11
§ 2. 2 剛体・ばねモデル	12
§ 2. 3 剛性方程式の導出	13
§ 2. 4 境界点の処理	20
§ 2. 5 数値計算法	22
§ 2. 6 結言	24
第3章 対称座屈モードを伴うアーチの座屈後挙動の数値解析	25
§ 3. 1 緒言	25
§ 3. 2 解析対象	26
§ 3. 3 応力-ひずみ関係	27
§ 3. 4 本解析法の妥当性の検討	29
3. 4. 1 要素数による荷重-たわみ曲線の差異 および解析解との比較	29
3. 4. 2 たわみ増分の大きさによる 荷重-たわみ曲線の差異	30
§ 3. 5 集中荷重を受ける弾塑性アーチ	31
3. 5. 1 回転端アーチの荷重-たわみ曲線に及ぼす アーチ形状の影響	31
3. 5. 2 回転端アーチの塑性域の進展	

およびたわみ形状の変化	34
3.5.3 固定端アーチの荷重-たわみ曲線	37
§ 3.6 鉛直等分布荷重を受ける弾塑性円弧アーチ	38
3.6.1 回転端アーチの荷重-たわみ曲線に及ぼす 材料特性の影響	38
3.6.2 固定端アーチの荷重-たわみ曲線に及ぼす 支持条件の影響	39
3.6.3 塑性域の進展	40
3.6.4 応力分布	42
3.6.5 アーチのたわみ形状	44
§ 3.7 結言	45
 第4章 非対称荷重を受けるアーチの座屈後挙動の数値解析	 46
§ 4.1 緒言	46
§ 4.2 計算対象	47
§ 4.3 荷重作用点の影響	48
§ 4.4 アーチの厚さの荷重-たわみ曲線への影響	50
§ 4.5 アーチの材料特性の臨界荷重への影響	51
§ 4.6 塑性域の進展	52
§ 4.7 応力分布	54
§ 4.8 たわみ曲線	57
§ 4.9 結言	57
 第5章 アーチの飛び移り座屈に関する実験	 59
§ 5.1 緒言	59
§ 5.2 実験装置および方法	60
5.2.1 実験装置	60
5.2.2 アーチ試験片	64

5. 2. 3	アーチ材料の応力-ひずみ特性	65
5. 2. 4	実験方法	67
§ 5. 3	数値解析結果との比較	68
5. 3. 1	荷重-たわみ曲線	69
5. 3. 2	アーチのたわみ形状	71
5. 3. 3	ひずみとたわみの関係	72
5. 3. 4	たわみと応力, 軸力, 曲げモーメントの関係	74
5. 3. 5	応力分布	76
§ 5. 4	結言	78
第6章	結 論	79
	参考文献	82
	謝 辞	87

第1章 序 論

本論文は、弾塑性状態におけるアーチ状構造物の安全性を明らかにするため、剛体と非線形ばねで構成される離散化モデルを用いて、アーチの座屈および座屈後挙動を数値的に解析するとともに、たわみ制御の実験によりアーチの飛び移り座屈過程を詳細に追跡し、上記の数値解析結果と比較したものである。

アーチ状構造部材は、梁が曲げ剛性により横荷重を支えるのに対し、荷重を曲げ剛性と軸圧縮力によって支えるので、一般に、梁に比較して軽量の構造により、同一の荷重に耐えることができる。このため、橋梁、建築ばかりではなく、航空機、車両、船舶等の構造部材としても広く用いられている。

最近の有限要素法、境界要素法等の数値構造解析法の進歩により、与えられた外力に対する構造物の変形ならびにそこに生ずる応力はきわめて正確に評価できるようになり、構造の軽量化が進んでいる。一方、外力の予測は、応力解析法ほどの進歩はなく、多分に経験的事実に依存している。このため、何らかの原因による予測を越える過大荷重が軽量化した構造物に作用すると、構造部材は弾性範囲内でそれを支えることができず、塑性状態まで変形することが起こり得る。実際に、地震等により建物が完全に破壊または崩壊に至らなくても、かなりの塑性変形を受けて使用できなくなることがしばしば生じている。

とりわけ、地震のような変位規定型で、しかも反復する負荷を受ける構造要素の弾塑性変形については、単調に増大する塑性変形、例えば引張塑性、に加えて、引張塑性状態からの弾性除荷とそれに引き続く逆符号の塑性、圧縮塑性、も考慮する必要がある。この逆負荷塑性は、いわゆるバウシニング効果のため、先行塑性変形より小さい応力の下で容易に進行する。

単調に増大する横荷重を受ける梁の塑性曲げにおいては、同一符号の

塑性状態が進行するのみであるが、圧縮荷重を受ける柱の塑性座屈過程においては、柱のたわみの増大に伴い凸側にて弾性除荷に続く引張塑性状態が出現し、それによって、柱の耐荷力が急激に低下することが知られている⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾。

アーチ構造では、前述のように、荷重のかなりの部分を軸圧縮力として支えているため、設計においては、特に座屈に対する強度を問題にする場合が多い。軸圧縮状態が支配的であるところに、曲げ変形による引張応力、または圧縮応力が加わるので、弾塑性変形過程においては、圧縮塑性状態から弾性除荷を経て引張塑性状態が起こり得る。このため、座屈後の挙動を予測するには逆負荷塑性の考慮が不可欠であると考えられる。

また、実際に用いられる構造物では、必ず何らかの初期不整（理想形状からの偏り）や荷重の偏心を避けることができない。柱の座屈については、弾性座屈においても⁽⁵⁾塑性座屈においても⁽⁶⁾初期不整の存在により座屈荷重は著しく低下することはよく知られている。従って、比較的簡単に評価し得る不整を伴わない構造物の強度に対して、初期不整や荷重の偏心を伴う構造物の強度や変形がどの程度異なるかを知ることはきわめて重要である。

しかし、アーチの座屈後挙動のように、変形モードがたわみの増大とともに次第に変化することにより生ずる幾何学的非線形性と、逆負荷塑性を含む材料非線形性を伴う問題を解析的に解くことは極めて困難であり、一般に何らかの数値計算法に依らざるを得ない。

現在では、有限要素法により、種々の非線形問題を解析することが可能である。しかし、有限要素法により履歴依存性の著しい逆負荷塑性変形を含む解析を行おうとすれば、十分細かい要素分割を必要とし、これにともない計算時間も著しく増大するので、別の有効な数値解法が望まれる状況である。

このための一つの方法として、川井ら⁽⁷⁾によって提案された、剛体

要素とばね要素で構成される，離散モデルが考えられる。

この種の集中系モデルは，梁の剛塑性曲げ解析における塑性関節のモデル化⁽⁸⁾，I型断面柱の弾塑性座屈⁽⁹⁾・⁽²⁾，中実断面柱の座屈⁽¹⁰⁾，板の座屈⁽¹¹⁾，等において以前から用いられてきたが，川井らは，この集中系モデルを有限要素法の枠内で定式化し，幾つかの問題に応用してきた⁽¹²⁾ - ⁽¹⁵⁾。

ところで，弾塑性構造物の座屈は，柱の座屈に代表される分岐型と薄肉部材の曲げに現れる屈服およびアーチ，球殻等に生ずる飛び移り座屈に大別される。

軸圧縮力を受ける柱についての分岐型弾塑性座屈の解析は，弾性座屈に関するEulerの座屈荷重を与える式の縦弾性係数（ヤング率）を分岐荷重時の応力-ひずみ関係の接線係数（塑性係数）で置き換えた接線係数理論⁽¹⁶⁾（tangent modulus theory）に始まり，次いで一定荷重のもとで分岐が始まるとの仮定のもとで，分岐後に生ずる弾性除荷を考慮した換算係数理論⁽¹⁷⁾（reduced modulus theory）が提案された。その後Shanley⁽⁹⁾は，2本の剛体棒を2つの弾塑性ばねで結合した2自由度の単純なモデルを用いて，軸圧縮力を受ける弾塑性柱は接線係数荷重においてたわみ可能な状態となり，その後のたわみの進行過程は荷重の増大を伴うことを明らかにした。

Hillは，一連の論文⁽¹⁸⁾ - ⁽²⁵⁾において，剛塑性または弾塑性連続体を対象に任意のつりあい状態における増分解（速度解）の唯一性および安定性に関する一般的諸定理を誘導した。ShanleyとHillの研究により，接線係数荷重点が分岐の発生し得る最小荷重値であること，接線係数荷重点は安定なつりあい状態であること，たわみのない釣り合い状態を表す経路上で安定性を喪失する最小荷重の状態点は換算係数荷重点であることが明らかになった。

塑性状態における分岐後挙動に対しては，Hutchinson⁽²⁶⁾により，接線係数荷重点から発する分岐直後の経路について弾性除荷域

の連続的伝播を考慮した定式化が示され、摂動法を適用して級数展開によって解を得る方法が示された。

一方、弾塑性状態におけるアーチの飛び移り座屈の解析がなされるようになったのは最近であり、初期には極限解析の手法を用いてアーチの崩壊荷重が求められた。Onatら⁽²⁷⁾は、軸力と曲げモーメントを受ける完全塑性の2つのヒンジを持つアーチについて臨界荷重の実用解を求めた。ついで、同様な手法を用いて、横尾らは集中荷重⁽²⁸⁾および分布荷重⁽²⁹⁾を受ける固定、2ヒンジ、3ヒンジアーチについて、アーチの高さの変化に伴う崩壊の挙動を解析した。しかし、これらの解法は、弾性変形を無視した完全塑性体を仮定しており、また座屈後挙動を扱うことはできない。

アーチの弾塑性座屈の臨界荷重を求める解析としては、断面の完全塑性域の広がりを考慮して、弾性アーチの解析法である ϕ -法を修正した山崎らの研究⁽³⁰⁾がある。この ϕ -法では曲率 ϕ を荷重と見なしたときのせん断力がたわみ角を、曲げモーメントがたわみを表す。このような解析的方法の適用範囲はきわめて限定されるため、一般には何らかの数値解法が必要となる。

Mikkola⁽³¹⁾は、bilinearな応力-ひずみ関係に従う2つの弾塑性セルを持つ4節リンクモデルアーチについて、セル上に独立な2つの力が作用するときの座屈過程を解析し、非対称座屈モードの発生と、それに伴う臨界荷重の変化を明らかにしている。弾塑性アーチの座屈を解析解を求めることは、上述のように単純化されたモデルと簡単な材料特性を用いなければ不可能である。

一方、弾塑性アーチの臨界荷重までの挙動を扱った数値解析としては、新家ら⁽³²⁾による伝達マトリックス法を用いた完全弾塑性体アーチに対する塑性域のひろがりやを考慮した解析、Leeら⁽³³⁾による差分法を用いた弾性除荷までを考慮した解析、Harries⁽³⁴⁾によるアーチ軸線のつりあいに関する微分方程式を数値積分により解き、繰返し計算に

よりたわみや除荷域を収束させることにより，変形の影響や除荷域の拡大を考慮した解析が報告されている。

弾塑性飛び移り座屈過程の数値解析については，最近いくつかの研究が報告されている。Padovanら⁽³⁵⁾はクリープ飛び移り座屈をupdated Lagrange法により定式化した有限要素法を用い，修正Newton Raphson法と組み合わせて解析した。Batozら⁽³⁶⁾はtotal Lagrange法により定式化した離散化法により，薄い殻要素からなる環やアーチの弾塑性構造物について，塑性域の拡大を考慮した飛び移り座屈後挙動を解析している。

以上の弾塑性アーチの座屈解析は，塑性負荷後の弾性除荷までを考慮したものであり，逆負荷塑性は考慮されていない。前述のように，逆負荷による降伏を無視した解析では，飛び移り座屈後に生ずる逆負荷塑性域を弾性域とみなすため剛性を過大評価することになり，危険側の評価を与える。

逆負荷塑性を考慮した飛び移り座屈後挙動の数値解析としては，吉田ら⁽³⁷⁾による三角形薄板要素で構成される弾塑性構造物の座屈後挙動を求めた研究や，伊藤ら⁽³⁸⁾による剛体ばね要素を用い履歴型完全弾塑性体アーチの面内座屈後挙動を示した解析がある。前者は薄板要素によるものであり，断面内の厚さ方向の応力の分布は考慮していない。後者は残留応力を有する材料について，降伏による剛性の低下を考慮した飛び移り座屈後挙動を解析している。なお，これは本論文と同様な解析法を用いた研究であるが，これらは全く独立に研究されたものである。

一方，弾塑性アーチの座屈に関する実験としては，これまで非対称な分布荷重を受ける放物線アーチ⁽³⁹⁾，箱形断面の円弧アーチ⁽⁴⁰⁾等について報告されているが，いずれも限界荷重までの挙動を検討したものであり座屈後挙動を扱っていない。またこれらの研究においては，試験片に設けた穴に軸を通すことにより回転支持の条件を実現しているが，穴を設けた端部の厚さの影響や，軸力による軸と穴との接点に生じる局所

的な塑性変形の影響は明らかにされていない。

実験により飛び移り座屈過程のアーチの挙動を明らかにするためには、荷重制御の実験ではなく、たわみ制御の実験により、臨界荷重に達した後の荷重の低下する過程をも連続して追跡することが必要である。

以上述べてきたように、弾塑性状態におけるアーチの飛び移り座屈後挙動については、逆負荷までを考慮した詳しい解析はほとんど行われておらず、さらに飛び移り座屈過程を明らかにした実験は全く報告されていない。

そこで本研究では、剛体・ばねモデルを用いて、アーチの軸線を含む平面内の弾塑性座屈過程を増分的に解析する方法を導く。この方法では、要素内での変位場を仮定する通常の有限要素法とは異なり、要素は剛体であり、それらの端面に分布する無限小長さの非線形ばねによって要素の大きさに相当する領域の変形を代表させる。この非線形ばねによって、ひずみ履歴に依存した応力状態を表わす。アーチ、梁、板、殻等のように厚み方向に応力成分を積分した一般化力によって平衡方程式が表される場合、厚さ方向に変化する応力、ひずみ状態に依存した接線係数を厚みについて数値積分して得られる剛性変数を用いることにより、解くべき方程式の次数を大幅に減少させることができる。

上述の数値解法を用いて、対称モードおよび非対称モードを伴う、単調増大塑性負荷についてべき硬化の応力-ひずみ関係に従い、逆負荷の塑性変形が単純移動硬化則に従う円弧アーチの飛び移り座屈過程を解析し、さらにたわみ制御の座屈実験によって、導いた解析法の妥当性を検討するとともに、座屈過程の詳細を明らかにする。

以下に本論文の概要を述べる。

第2章では、アーチを剛体棒と非線形ばねによってモデル化し、せん断変形を無視した梁の曲げ理論と増分型の応力-ひずみ関係を用いて、
u p d a t e d L a g r a n g e法による増分形の剛性方程式を導い

た。また、座屈後挙動を正確に追跡するため、荷重増分の代わりにアーチの一部の変位増分を規定する、荷重増分法を用いた。

第3章では、第2章で導いた剛性方程式を用いて、アーチ軸線を含む平面内の対称モードを伴う飛び移り座屈過程を解析した。弾性アーチの座屈後挙動に関する解析解と比較することにより、本解法の妥当性を確認した後、座屈後挙動に及ぼす材料特性、アーチ形状、支持条件、負荷条件の影響について検討し、座屈後挙動の解析には逆負荷塑性の考慮が必要なことを示した。

第4章では、集中荷重の作用点がアーチ中央から外れ、非対称座屈モードを伴う場合について解析結果を示すとともに、非対称座屈後挙動に及ぼす荷重の作用点の位置、降伏応力、加工硬化指数の影響について検討した。さらに荷重作用点がアーチ中央に近い場合について、対称モードから非対称座屈モードへの移行過程を明らかにした。

第5章では、飛び移り座屈前における圧縮の支点反力と飛び移り後の引張の支点反力の両方を支えることのできる実験装置を用いて、回転端円弧アーチ試験片についてたわみ制御の実験を行い、飛び移り過程における、横荷重および水平支点反力とたわみの関係、たわみ形状、およびひずみ履歴を明らかにするとともに、本解法の妥当性を確認した。

第6章は結論であり、各章で得られた結果をまとめた。

記 号

本論文で用いる主な記号は次の通りである。

x, y	: 直交座標
z	: 厚さ方向の局部座標
σ	: 応力
ε	: ひずみ
e	: 平均軸ひずみ
κ	: 曲率
$E t$: 接線係数
F	: 軸力
M	: 曲げモーメント
A	: アーチの横断面積
k_{mi}	: 断面 i の剛性を表すパラメータ
$[A]$: 剛性方程式に表れる係数行列
$[B]$: 剛性方程式で表れる係数行列
N	: 要素数
i	: 節点 i
j	: 節点 j
\mathbf{x}	: 節点の位置ベクトル
\mathbf{x}^0	: 節点の初期位置ベクトル
L_i	: 節点 i から $i + 1$ へのベクトル

\bar{L}_j : 節点 j から i へのベクトル
 u : 節点変位ベクトル
 u : 節点変位の x 方向成分
 v : 節点変位の y 方向成分
 P : 節点力ベクトル
 P^x : 節点力の x 方向成分
 P^y : 節点力の y 方向成分
 n : 法線方向ベクトル

$()_i$: 節点 i の値
 $d ()$: 微小増分

α : 円弧アーチの開き角
 R : 円弧アーチの半径
 L : アーチのスパン
 H : アーチの厚さ
 I : 断面 2 次モーメント
 z : 断面係数
 h : 荷重作用点のアーチ高さ
 h_0 : アーチ中央の高さ
 w : たわみ
 w_0 : アーチ中央のたわみ

P : 鉛直集中力
 Q : 水平反力
 q : 鉛直等分布荷重
 d : 集中荷重の偏心量

- $\sigma +$: 負荷側と反対表面の応力
 $\sigma -$: 負荷側表面の応力

 E : 縦弾性係数 (ヤング率)
 n : 加工硬化指数

 σ_Y : 降伏応力
 ε_Y : 降伏ひずみ
 $\bar{\sigma}$: 除荷開始時の応力
 $\bar{\varepsilon}$: 除荷開始時のひずみ
 σ_Y^* : 逆負荷降伏応力
 ε_Y^* : 逆負荷降伏ひずみ

 $f(\varepsilon)$: 単調負荷の応力-ひずみ関係
 C : 定常軟化量
 g : 逆負荷の無次元化応力-ひずみ曲線

第2章 剛体ばねモデルによるアーチの座屈後挙動の解析法^{(41)・(42)}

§ 2. 1 緒言

アーチを含めた一般の構造物の弾塑性座屈後挙動の解析においては、材料非線形性と幾何学的非線形性を同時に考慮しなければならない。

前者は塑性変形がひずみ履歴依存性を有することに起因し、最も簡単な単軸引張りにおいてさえも、多くの材料は非線形な応力-ひずみ関係を呈する。また、塑性座屈後挙動においては、単調に増大する塑性負荷過程だけでなく、引張（または圧縮）塑性状態から弾性除荷後の逆方向負荷における降伏と塑性変形、圧縮（または引張）塑性、が現れるので、これを考慮した解析をおこなう必要がある^{(2)・(4)}。

後者の幾何学的非線形性は、座屈後挙動が必然的に大変形を伴うことにより生ずる。

これらの非線形性のため、きわめて単純化したモデルと応力-ひずみ関係を仮定する^{(2)・(11)}場合以外に、弾塑性座屈後挙動の解析解を得ることは不可能であり、現実的問題を処理するためには何らかの数値解析法を用いなければならない。

現在最も広範に使用されている有限要素法を用いてこの種の問題を解析しようとする時、構造部材内の各点毎に異なるひずみ履歴を考慮するため十分細かい要素分割を必要とし、それに伴って剛性行列の次元が大きくなり、計算時間も増大する。このため、精度のよい解を経済的に得ることのできる数値計算法が必要となる。

連続体の変形を一断面に集中させる剛体・ばねモデルは、これまで梁の塑性曲げ、柱の塑性座屈⁽⁹⁾、柱の塑性座屈に及ぼす初期不整⁽¹⁰⁾の解析、板の座屈⁽¹¹⁾などにおいて、解析解を得るための理想化モデルとして用いられてきた。これらの場合には、構造部材の一断面またはごく少数の断面にだけ変形が集中すると考えていた。

一方、川井らはこのモデルを二次元に拡張するとともに有限要素法の枠内で定式化し、幾つかの問題に応用してきた⁽¹²⁾⁻⁽¹⁵⁾。

本章では、この剛体・ばねモデルを用いて、せん断変形を無視した棒の曲げ理論に基づき、アーチの軸線を含む平面内での座屈過程を増分的に解析する方法を定式化する。座屈後挙動を明らかにするためには、荷重-たわみ曲線の傾きが零となる臨界荷重点を含めて連続的に解析することが必要であるので、通常の荷重増分法の代わりに、アーチの一部の変位増分を規定する計算法を用いる。

§ 2. 2 剛体・ばねモデル

図 2. 1 に示すように、連続体のアーチを剛体棒とその端面に分布する非線形ばねからなる剛体・ばねモデルを用いて表すものとする。図に示すように剛体棒要素の中間にばねが存在するものとし、ばねの長さは剛体棒の長さに対して十分に短いものとする。個々のばねは伸縮の自由度のみを持つが、横断面上の各点のばねの伸縮の差により剛体棒は軸方向の伸縮と曲げの自由度を持つ。

塑性ひずみ履歴に依存するアーチ材料の応力-ひずみ特性は、非線形ばねによって表されるものとする。連続体のアーチではアーチの縦断面内の各点毎に応力-ひずみ状態が異なるが、このモデルでは、アーチの軸線方向には剛体棒の長さ、アーチの厚さ方向には、応力とひずみを評価する点の数でアーチ厚さを割った大きさについて、応力-ひずみ状態は同一とみなす。

アーチの形状および変形は、剛体棒端面の図心に位置する節点の座標およびその変位で表わし、アーチに作用する外力は、等価節点力に置き換えて扱うものとする。また、アーチ端を除いて節点に作用する偶力は考えないものとする。

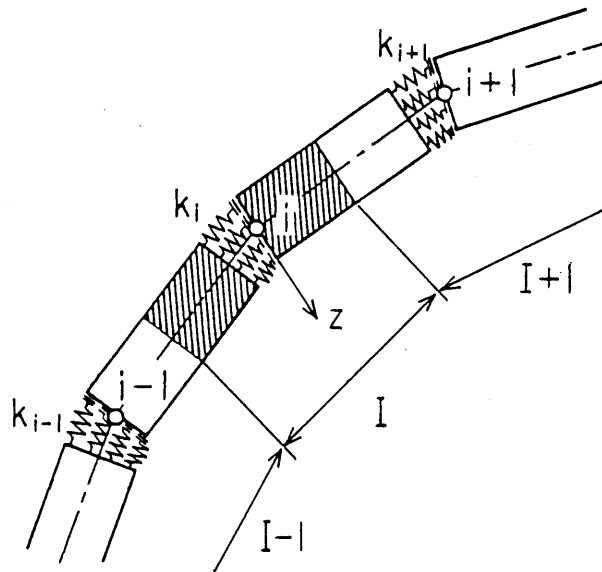


図 2. 1 剛体・ばねモデル

§ 2. 3 剛性方程式の導出

図 2. 2 に示すように、アーチの初期形状が節点の位置ベクトル \mathbf{x}^0_i で表されるものとする。節点力 \mathbf{P}_i を受けて、初期形状から各節点が \mathbf{u}_i だけ変位した平衡状態が既知であるとする。この状態から各節点力が微小量 $d\mathbf{P}_i$ だけ変化したとき、 $\mathbf{P}_i + d\mathbf{P}_i$ の荷重と釣り合う新しい平衡状態に対応する変位増分 $d\mathbf{u}_i$ を求める。すなわち、直前の平衡状態を基準にして、それに引き続く平衡状態を求める updated Lagrange 法による増分形の剛性方程式を導出する。この方法では、十分小さな増分を用いるとき、要素の回転に伴う変位とひずみの関係の非線形性を無視でき、剛性方程式は簡単な形になる。

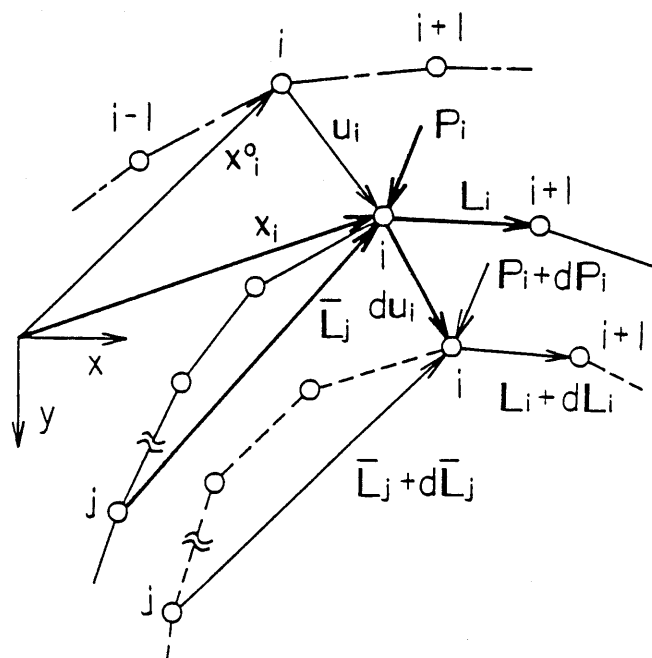


図 2. 2 座標・変位のベクトル表記

せん断変形を無視したはりの曲げ理論を用いれば、アーチの任意の位置におけるひずみ増分は次式で表すことができる。

$$d\varepsilon = de + d\kappa \cdot z \quad (2. 1)$$

ここで、 de と $d\kappa$ はそれぞれ平均軸ひずみの増分およびアーチ軸線の曲率の増分を、 z はアーチ軸線から厚さ方向の局部座標（内向き正）を表す（図 2. 1 参照）。

式 (2. 1) に含まれる平均ひずみおよび曲率増分を、剛体・ばねモデルにおいて以下のように定義する。

変位 u_i を伴う平衡状態における、節点 i から $i+1$ への相対位置ベクトルと、新しい平衡状態へのその増分が次式で表されるとき、

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1}^0 + \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{x}_i^0 - \mathbf{u}_i \quad (2.2)$$

$$d\mathbf{L}_i = d\mathbf{u}_{i+1} - d\mathbf{u}_i \quad (2.3)$$

\mathbf{L}_i 方向の伸びは $d\mathbf{L}_i$ と \mathbf{L}_i 方向の単位ベクトルとの内積として求められる。

$$d\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{L}_i / |\mathbf{L}_i| \quad (2.4)$$

節点 i における平均軸ひずみ増分 de_i を、節点 i に隣接する節点 $i-1$ と $i+1$ の間のひずみの平均として次式のように定義する。

$$de_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{L}_{i-1} \cdot d\mathbf{L}_{i-1}}{|\mathbf{L}_{i-1}|^2} + \frac{\mathbf{L}_i \cdot d\mathbf{L}_i}{|\mathbf{L}_i|^2} \right) \quad (2.5)$$

一方、節点 i を含む相対位置ベクトル \mathbf{L}_{i-1} と \mathbf{L}_i のなす角の変化を要素 l の長さで割った値を曲率の変化と見なしうる。直前の平衡状態から新しい平衡状態へ移る間にベクトル \mathbf{L}_i が $d\mathbf{L}_i$ だけ変化したときの回転角の変化は、 $d\mathbf{L}_i$ と \mathbf{L}_i 方向の単位ベクトルとの外積として表わされる。

$$\mathbf{L}_i \times d\mathbf{L}_i / |\mathbf{L}_i|^2 \quad (2.6)$$

そこで節点 i における曲率増分 $d\kappa_i$ を次式で定義する。

$$d\kappa_i = \frac{2}{|\mathbf{L}_{i-1}| + |\mathbf{L}_i|} \left(\frac{\mathbf{L}_{i-1} \times d\mathbf{L}_{i-1}}{|\mathbf{L}_{i-1}|^2} - \frac{\mathbf{L}_i \times d\mathbf{L}_i}{|\mathbf{L}_i|^2} \right) \quad (2.7)$$

なお、曲率の符号は下向き凸の曲がりを正とする。

式(2.1)のひずみ増分 $d\varepsilon$ に対する応力増分 $d\sigma$ を、ひずみ履歴に依存する接線係数 E_t を用いて表す。

$$d\sigma = E_t d\varepsilon \quad (2.8)$$

E_t の具体的表現は、与えられた応力-ひずみ関係 (§3.3) より得られる。

式(2.8)に式(2.1)を代入し、横断面について積分することにより、節点 i を含む横断面(以下、断面 i と記す)に生ずる合応力(軸力) F_i と応力のモーメント M_i の増分 dF_i 、および dM_i を、平均ひずみ増分および曲率増分を用いて、次式で表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} dF_i \\ dM_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_3 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} de_i \\ d\kappa_i \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

$$k_n = \int E_t z^{n-1} dA \quad (n=1,2,3) \quad (2.10)$$

ここで、 A はアーチの横断面積である。

式(2.9)に式(2.5)(2.7)を代入すれば、軸力および曲げモーメント増分が変位および変位増分を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} dF_i &= k_{1i} de_i + k_{2i} d\kappa_i \\ &= \frac{k_{1i}}{2} \left(\frac{L_{i-1} \cdot dL_{i-1}}{|L_{i-1}|^2} + \frac{L_i \cdot dL_i}{|L_i|^2} \right) \\ &\quad + \frac{2k_{2i}}{|L_{i-1}| + |L_i|} \left(\frac{L_{i-1} \times dL_{i-1}}{|L_{i-1}|^2} - \frac{L_i \times dL_i}{|L_i|^2} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
dM_i &= k_{2i} de_i + k_{3i} d\kappa_i \\
&= \frac{k_{2i}}{2} \left(\frac{\mathbf{L}_{i-1} \cdot d\mathbf{L}_{i-1}}{|\mathbf{L}_{i-1}|^2} + \frac{\mathbf{L}_i \cdot d\mathbf{L}_i}{|\mathbf{L}_i|^2} \right) \\
&\quad + \frac{2k_{3i}}{|\mathbf{L}_{i-1}| + |\mathbf{L}_i|} \left(\frac{\mathbf{L}_{i-1} \times d\mathbf{L}_{i-1}}{|\mathbf{L}_{i-1}|^2} - \frac{\mathbf{L}_i \times d\mathbf{L}_i}{|\mathbf{L}_i|^2} \right) \quad (2.12)
\end{aligned}$$

一方、断面 i に働く軸力および曲げモーメントは、断面 i より左側に働く節点力 \mathbf{P}_j ($0 \leq j \leq i$) を用いて、以下のように定義できる。すなわち、軸力 F_i は節点 i を有する剛体棒に働く力の軸方向分力であり、曲げモーメント M_i は節点 i まわりのモーメントであり、以下のように表される。

$$F_i = -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{P}_j \cdot \frac{\mathbf{L}_{i-1}}{|\mathbf{L}_{i-1}|} + \sum_{j=0}^i \mathbf{P}_j \cdot \frac{\mathbf{L}_i}{|\mathbf{L}_i|} \right) \quad (2.13)$$

$$M_i = \sum_{j=0}^i (\mathbf{P}_j \times \bar{\mathbf{L}}_j) + M_0 \quad (2.14)$$

$$\text{ここで、} \bar{\mathbf{L}}_j = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \quad (2.15)$$

は、考えている節点 i より左方の、節点力 \mathbf{P}_j を受ける節点 j から節点 i へ向かうベクトルである。また、 M_0 は節点 0 (アーチ端) に働く曲げモーメントである。荷重増分に対応する軸力および曲げモーメント増分は、式 (2.13) および (2.14) より、次式で表される。

$$dF_i = -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{d\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{L}_{i-1} + \mathbf{P}_j \cdot d\mathbf{L}_{i-1}}{|\mathbf{L}_{i-1}|} \right)$$

$$+ \sum_{j=0}^i \frac{dP_j \cdot L_i + P_j \cdot dL_i}{|L_{i-1}|} \quad (2.16)$$

$$dM_i = \sum_{j=0}^i (dP_j \times \bar{L}_j + P_j \times d\bar{L}_j) + dM_0 \quad (2.17)$$

$$\text{ここで, } d\bar{L}_j = du_i - du_j \quad (2.18)$$

外力の増分にともなう軸力および曲げモーメントの増分, 式(2.16)および(2.17)は断面*i*における合応力の増分とそれによるモーメント増分, (2.11), (2.12), と等しくなければならないから節点*i*において, 節点力増分を変位増分で表す増分形の次の剛性方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{i-1} dP_j \cdot \frac{L_{i-1}}{|L_{i-1}|} + \sum_{j=0}^i dP_j \cdot \frac{L_i}{|L_i|} \right) = \\ & \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{i-1} P_j \cdot \frac{dL_{i-1}}{|L_{i-1}|} + \sum_{j=0}^i P_j \cdot \frac{dL_i}{|L_i|} \right) \\ & + \frac{k_{1i}}{2} \left(\frac{L_{i-1} \cdot dL_{i-1}}{|L_{i-1}|^2} + \frac{L_i \cdot dL_i}{|L_i|^2} \right) \\ & + \frac{2k_{2i}}{|L_{i-1}| + |L_i|} \left(\frac{L_{i-1} \times dL_{i-1}}{|L_{i-1}|^2} - \frac{L_i \times dL_i}{|L_i|^2} \right) \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^i (dP_j \times \bar{L}_j) = -\sum_{j=0}^i (P_j \times d\bar{L}_j) - dM_0$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k_{2i}}{2} \left(\frac{\mathbf{L}_{i-1} \cdot d\mathbf{L}_{i-1}}{|\mathbf{L}_{i-1}|^2} + \frac{\mathbf{L}_i \cdot d\mathbf{L}_i}{|\mathbf{L}_i|^2} \right) \\
& + \frac{2k_{3i}}{|\mathbf{L}_{i-1}| + |\mathbf{L}_i|} \left(\frac{\mathbf{L}_{i-1} \times d\mathbf{L}_{i-1}}{|\mathbf{L}_{i-1}|^2} - \frac{\mathbf{L}_i \times d\mathbf{L}_i}{|\mathbf{L}_i|^2} \right) \quad (2.20)
\end{aligned}$$

これらの式は節点 i に関する剛性方程式である。ここで $d\mathbf{L}_i$ 及び $d\bar{\mathbf{L}}_i$ は式 (2.3) (2.18) の関係により、変位増分を用いて表されるので、アーチ構造を N 個の要素で表すとき、式 (2.19) (2.20) を節点 1 から N までについて加算することにより次の形の行列による全体剛性方程式が得られる。

$$\mathbf{A}d\mathbf{P} = \mathbf{B}d\mathbf{u} \quad (2.21)$$

ここで

$$d\mathbf{P} = \{dP^x_0, dP^y_0, \dots, dP^y_N\} \quad (2.22)$$

$$d\mathbf{u} = \{du_0, dv_0, \dots, dv_{N+1}\} \quad (2.23)$$

である。ここで、 dP^x_i 、 dP^y_i 、 du_i 、 dv_i は $d\mathbf{P}_i$ および $d\mathbf{u}_i$ の x 、 y 方向成分である。行列 \mathbf{A} ($2N$ 、 $2N+2$) の成分は \mathbf{L} と $\bar{\mathbf{L}}$ の成分のみを、また行列 \mathbf{B} ($2N$ 、 $2N+4$) の成分は、 \mathbf{L} 、 $\bar{\mathbf{L}}$ 、 \mathbf{P} および材料特性を表す k_m を含む。 $d\mathbf{P}$ は $2N+2$ 次元のベクトルであるが、 x 、 y 方向の力の釣合より、独立な成分は $2N$ 個となる。 $d\mathbf{u}$ は $2N+4$ 次元のベクトルである。この節点変位は次節に述べるアーチ端の境界条件を用いて処理することにより、 $d\mathbf{P}$ と同様に、 $2N$ 次元に帰着される。

§ 2. 4 境界点の処理

式(2.23)に示すように、アーチをN個の要素で表したとき、節
点N+1の変位増分が全体剛性方程式に含まれる。

そこで図2.3に示すように、アーチ端Nの外部に仮想節点N+1を
考える。アーチ端が回転端の場合には、剛体棒要素はその点のまわりに
自由に回転できるので仮想節点は支持節点に対し点対称な位置にくる。
したがって、仮想節点N+1の変位増分は節点N-1の変位増分を用い
て、

$$d u_{N+1} = -d u_{N-1} \quad (2.24)$$

で表される。また節点Nが固定端のときには、連続体のアーチは固定面
に対して常に垂直に支持される。固定面に対して節点N-1と面对称な
位置に仮想節点N+1を考える。節点の座標により規定される連続体ア
ーチの軸線は常に固定面に対して対称であり、固定面に対し垂直に保た
れる。したがって、仮想節点N+1の変位増分は節点N-1の変位増分
を用いて、

$$d u_{N+1} = d u_{N-1} - 2n (d u_{N-1} \cdot n) \quad (2.25)$$

で表される。ここでnは固定面の単位法線ベクトルである。特に、対称
モードを伴う変形に限定すれば、節点Nが対称面に位置するとして、以
下の関係が成り立つ。

$$\begin{Bmatrix} d u_{N+1} \\ d v_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -d u_{N-1} \\ d v_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

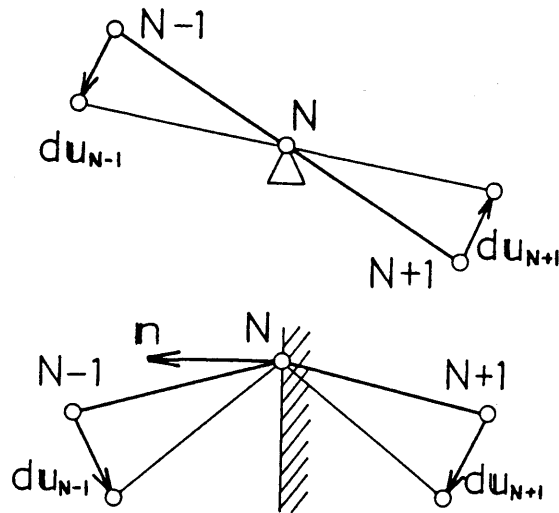


図 2. 3 境界点の変位増分

式 (2. 20) における dM_0 は節点 0 に働く曲げモーメント増分であり、節点 0 が回転支持の時 $dM_0=0$ である。また節点 0 が固定されているとき、式 (2. 25) と同様に境界外の仮想節点 -1 を固定面に対して節点 1 と面对称の位置に考える。 L_{-1} と L_0 は対称であるので、 L_{-1} の伸びは L_0 のそれに等しく、 L_{-1} の回転角は L_0 のそのの -1 倍である。したがって、

$$|L_{-1}| = |L_0| \quad (2. 27)$$

$$L_{-1} \cdot dL_{-1} = L_0 \cdot dL_0 \quad (2. 28)$$

$$L_{-1} \times dL_{-1} = -L_0 \times dL_0 \quad (2. 29)$$

より, dM_0 は式 (2. 1 2) で $i=0$ として,

$$\begin{aligned} dM_0 &= k_{20} d e_0 + k_{30} d \kappa_0 \\ &= k_{20} \frac{\mathbf{L}_0 \cdot d\mathbf{L}_0}{|\mathbf{L}_0|^2} - 2 k_{30} \frac{\mathbf{L}_0 \times d\mathbf{L}_0}{|\mathbf{L}_0|^3} \end{aligned} \quad (2. 3 0)$$

で表される。式 (2. 2 4) ~ (2. 2 6) および式 (2. 3 0) を式 (2. 2 1) に用いて整理すれば, 式 (2. 2 1) の行列 A および B は (2 N, 2 N) の正方行列となり, ベクトル $d\mathbf{P}$ および $d\mathbf{u}$ は 2 N 次元のベクトルとなる。

$$A d\mathbf{P} = B d\mathbf{u} \quad (2. 3 1)$$

A, B : (2 N, 2 N) 次元の行列
 $d\mathbf{P}$, $d\mathbf{u}$: {2 N} 次元のベクトル

なお, これは 2 N 個の独立な方程式からなるので, 未知数が 2 N 個 (1 節点につき 2 個) のとき解が得られる。例えば, アーチに複数の荷重が作用する場合でも, それらが一つのパラメータに比例するならば, ある一点の変位の一成分を規定することにより, 2 N - 1 個の変位増分と荷重増分の, 合計 2 N 個の変数を決定でき, 解が得られる。

§ 2. 5 数値計算法

本研究では, ある既知の平衡状態から微小量だけ変形した次の平衡状態を求める, updated Lagrange 法を用いて増分解を求める。

荷重増分を規定して対応する変位増分を求める荷重増分法では、臨界荷重点において式(2.31)の行列Bが特異になるため解が得られず、それ以降の計算ができない。そこで、特定の節点(本論文では集中荷重を受ける場合については荷重点、分布荷重の場合についてはアーチの中央)の変位増分を規定し、それに伴う荷重増分、およびその他の節点の変位増分を求めることにする。このため、式(2.32)に示すように、式(2.31)の変位増分ベクトル du の中の変位を規定する s 番目の変位増分(ここでは荷重点の y 方向変位増分) du_s と行列Bのこれにかかる第 s 列の成分を、荷重増分ベクトル dP の中の未知成分である r 番目の荷重増分(ここでは荷重点の y 方向荷重増分) dP_r とこれにかかる行列Aの第 r 列の成分と入れ替える。このような、変位増分法を用いれば、臨界荷重付近で数値計算上の特別な処理を必要とせず、またそれ以降の変形も困難なく計算できる。

$$\begin{aligned}
 dP_r &:= du_s \\
 du_s &:= dP_r \\
 A_{tr} &:= -B_{ts} \\
 B_{ts} &:= -A_{tr}
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

($t=1, 2N$)

ここで、記号 $:=$ は代入を表わす。

なお、本数値解析においては、数値計算の精度を向上させる目的で、荷重-たわみ関係の傾きが大きい範囲では、変位増分法の代わりに荷重増分法を用いて計算した。これは、近似的な孤長増分法(Riks法⁽⁴³⁾)と考えられる。

式(2.10)で表される、軸方向剛性および曲げ剛性を表すパラメータ k_m は、アーチ厚さ方向に等間隔に22点とり、各点の接線係数 E_t を各点を受けた履歴に基づき§3.3で示す応力-ひずみ関係より計算し、シンプソンの数値積分公式を用いて評価する。

逆方向負荷に対する接線係数はひずみ履歴，特に除荷開始時の状態（ $\bar{\sigma}$ ， $\bar{\varepsilon}$ ）に著しく依存する。このため，変位増分をできるだけ小さく設定することが望ましい。そこで，以下では接線係数 E_t を収束させるための繰返し計算は行わず，増分を小さくとることにより，接線係数の誤差を小さくした。

§ 2. 6 結言

本章では，アーチの弾塑性座屈後挙動を解析するため，アーチを剛体棒と非線形分布ばねによってモデル化し，せん断変形を無視した梁の曲げ理論と増分形の応力-ひずみ関係を用いて，updated Lagrange法による増分形の剛体方程式を導出した。このモデルでは，アーチの横断面内の応力-ひずみ状態に依存する軸方向剛性および曲げ剛性は，横断面上の接線係数の厚さ方向座標についての0，1および2次モーメントの組み合わせとして表現される。これらの剛性はアーチの厚さ方向に変化する応力-ひずみ状態を考慮した量であるので，有限要素法と異なり，厚さ方向の要素分割は不用となる。このため，有限要素法より大幅な計算時間の短縮が可能と考えられる。また，座屈後挙動を連続して追跡するために，荷重増分を規定する代わりに，一部の变位増分を規定する方法を用いた。

§ 3. 1 緒言

序論で述べたように、アーチ状構造は荷重を圧縮軸力と曲げによって支えるため、梁構造より経済的である。しかし、圧縮軸力が大きいとき座屈の危険性が生じ、特に薄いアーチでは、臨界荷重に達したとき一定の荷重の下で別の安定な状態へ急激に移行する、飛び移り座屈が起こり得る。このため、与えられた形状のアーチについて臨界荷重および飛び移り座屈後の挙動を求める解析が、弾性アーチについては多数なされている^{(44)・(45)}。

しかし、塑性状態で負荷を受けるアーチについては、塑性状態の応力-ひずみ関係が履歴依存性であるため、理想化した応力-ひずみ関係を仮定し臨界荷重を求める、少数の解析的扱い^{(27)・(31)}を除いて、数値解析が主である。

アーチの弾塑性座屈の数値解析は、差分法⁽³³⁾、伝達マトリックス法⁽³²⁾、Newton Raphson法による有限要素法⁽³⁵⁾、離散化法⁽³⁶⁾などの方法を用いて数値解析がなされているが、これらでは逆負荷塑性は考慮されていない。

本章では、第2章で示した数値解析法を用いて、アーチの軸線を含む平面内での対称モードを伴う弾塑性座屈後挙動を数値的に解析する。

解析では、最も基本的な形状である回転端または固定端円弧アーチに、鉛直分布荷重または中央に集中荷重が作用する場合を扱う。

鉛直等分布荷重を受ける回転支持の半正弦曲線状アーチの弾性飛び移り座屈過程について、既知の解析解と比較することにより本解析法の妥当性を検証した後、同一の荷重を受ける両端回転端の弾塑性円弧アーチの荷重-たわみ曲線に及ぼす、逆負荷塑性、降伏応力および加工硬化指数等の材料特性、およびアーチの厚さ、開き角等の形状の影響を明らか

にする。また，中央に鉛直集中荷重または鉛直等分布荷重を受ける，回転端あるいは固定端の弾塑性円弧アーチの荷重－たわみ曲線，塑性域の進展状況，たわみ形状等を求め，支持条件や荷重条件がそれらに及ぼす影響を検討する。

§ 3. 2 解析対象

図 3. 1 に示す，長方形断面（厚さ H ，断面 2 次モーメント I ）を持つ，半径 R の円弧または半正弦曲線で表される形状のアーチの対称座屈過程について数値計算を行った。

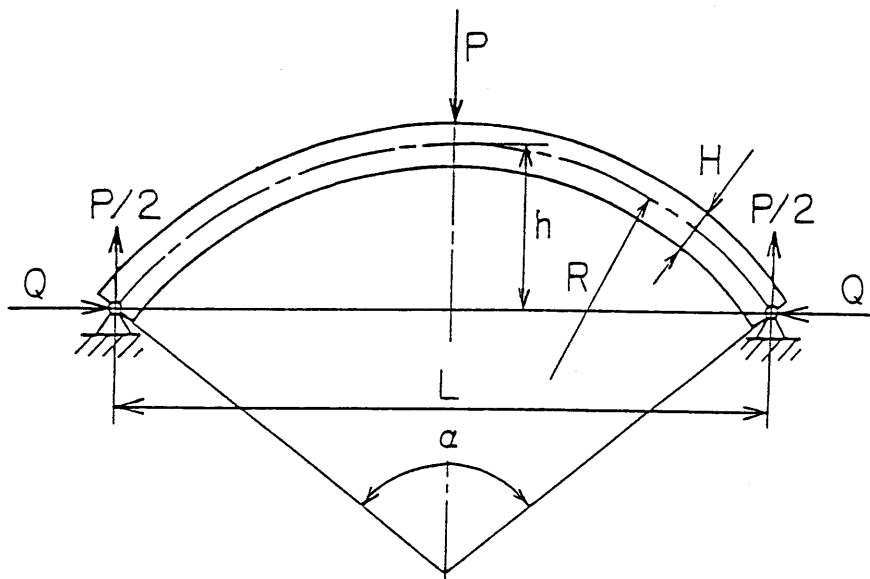


図 3. 1 解析対象

R : アーチ半径， α : 開き角， H : 厚さ
 P : 鉛直集中荷重， (q : 鉛直等分布荷重)
 Q : 水平反力

計算では、アーチの全長を20要素（半長を10要素）に分割し、たわみの増分をアーチ高さの1/80にとった。両端固定のアーチでは固定端近傍のひずみが非常に大きくなるので、要素間のひずみの差異を小さくするため、固定端からアーチ全長の1/20の長さの区間を、1/2の等比数列的にさらに5要素に分割し、アーチ半長について14要素を用いて計算を行った。また、計算は、開き角 $\alpha = 15^\circ \sim 45^\circ$ 、アーチの厚さの半径に対する比 $H/R = 0.0125 \sim 0.1$ の形状のアーチについておこない、特に明記しない結果は、開き角 $\alpha = 30^\circ$ 、厚さ比 $H/R = 0.05$ に対するものである。

§ 3. 3 応力-ひずみ関係

飛び移り座屈の過程において、アーチの各部分は、単調に増大する引張または圧縮塑性変形だけでなく、たわみの増大により塑性状態からの除荷、さらに逆方向（圧縮または引張）塑性変形を受ける。そこで図3.2に示すように、単調に増大する塑性変形に対しべき硬化形⁽⁴⁶⁾、逆負荷において移動硬化則に従う、応力-ひずみ関係を仮定する。降伏応力 σ_Y 、降伏ひずみ ε_Y で無次元化した形で応力-ひずみ関係を以下のように表す。

弾性負荷 ($|\varepsilon| \leq \varepsilon_Y$) に対し、

$$\frac{\sigma}{\sigma_Y} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} \quad (3.1)$$

単調に増加する塑性負荷 ($|\varepsilon| > \varepsilon_Y$) に対し、

$$\frac{\sigma}{\sigma_Y} = \pm \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_Y} - 1 \right) + 1 \right\}^n \quad (3.2)$$

応力 $\bar{\sigma}$ ，ひずみ $\bar{\varepsilon}$ からの弾性除荷 ($|\varepsilon - \bar{\varepsilon}| \leq 2\varepsilon_Y$) に対し，

$$\frac{\sigma}{\sigma_Y} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_Y} - \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_Y} \quad (3.3)$$

移動硬化則に従う，応力 $\bar{\sigma}$ ，ひずみ $\bar{\varepsilon}$ からの逆負荷塑性変形 ($|\varepsilon - \bar{\varepsilon}| > 2\varepsilon_Y$) に対し，

$$\frac{\sigma}{\sigma_Y} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} \mp 2 \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{|\varepsilon - \bar{\varepsilon}|}{2\varepsilon_Y} - 1 \right) + 1 \right\}^n \quad (3.4)$$

式(3.3)と(3.4)における $\bar{\sigma}$ ， $\bar{\varepsilon}$ は，アーチの軸線方向には剛体棒要素の長さ，厚さ方向には式(2.10)の k_m を評価する積分点

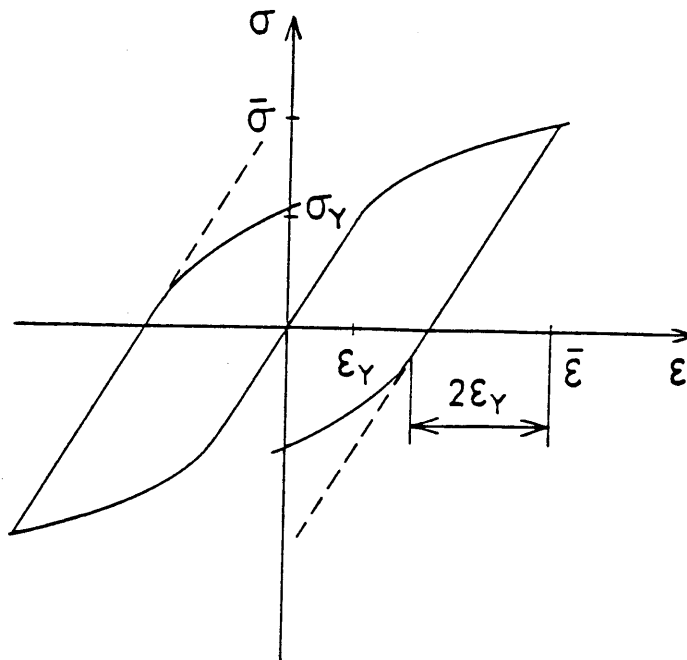


図3.2 移動硬化則に従うべき硬化形応力-ひずみ関係
 σ_Y : 降伏応力 ε_Y : 降伏ひずみ

の数（以下では22点）で厚さを割った大きさの領域内で一定と見なす。上記の点においてたわみ増分の各段階で計算したひずみを前段階のひずみと比較し、前者の絶対値が後者のそれより大きいとき、前者を $\bar{\varepsilon}$ 、これに対応する応力を $\bar{\sigma}$ としてこれらの値を記憶しておけば、弾性除荷および逆負荷塑性変形に対する応力-ひずみ関係は上式より決定できる。

計算では加工硬化指数を $n = 0.1$ ，縦弾性係数に対する降伏応力の比（ σ_y/E ）を 0.001 にとった。

§ 3. 4 本解析法の妥当性の検討

3. 4. 1 要素数による荷重-たわみ曲線の差異

および解析解との比較

アーチ中央の高さで無次元化したスパン比 $L/h = 100$ ，および厚さ比 $H/h = 0.55$ を持つ，鉛直等分布荷重を受ける両端回転支持の半正弦曲線状の弾性アーチについて，要素数 N を $5, 10, 20$ に選んでおこなった数値計算，および解析解⁽⁴⁷⁾の荷重-たわみ曲線を図3.3に示す。縦軸は臨界荷重 $q_{cr} = 1.33 \times 10^{-3} E$ ⁽⁴⁷⁾で無次元化した分布荷重を，横軸はアーチ中央の高さで無次元化したアーチ中央のたわみを表す。

図では区別できないが，臨界荷重は要素数が大きいほど高く現れ，解析解は最も低い値を示す。したがって，弾性アーチについては，本数値計算法の妥当性が確認された。この弾性アーチではアーチ半長を5要素に分割すれば十分であるが，弾塑性アーチの場合はアーチ縦断面内での弾性域および塑性域の分布（図3.13参照）を考慮する必要があるので，以下では，アーチ半長を10要素に分割した計算結果を示す。

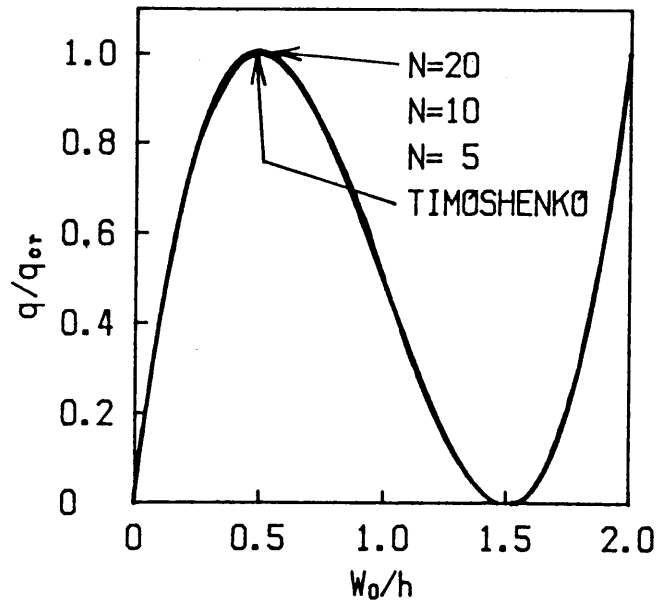


図 3. 3 要素数による荷重-たわみ曲線の差異

両端回転支持，等分布荷重，弾性半正弦曲線アーチ

$$L/h = 100, \quad H/h = 0.55, \quad q_{cr} = 1.33 \times 10^{-3} E$$

3. 4. 2 たわみ増分の大きさによる荷重-たわみ曲線の差異

厚さ比 $H/R = 0.05$ ，開き角 $\alpha = 30^\circ$ の鉛直等分布荷重を受ける，両端回転支持の弾塑性円弧アーチの荷重-たわみ曲線に及ぼすたわみ増分の大きさの影響を図 3. 4 に示す。縦軸はアーチ半径，断面 2 次モーメント，縦弾性係数等を用いて無次元化した分布荷重を，横軸はアーチ中央の高さで無次元化したアーチ中央のたわみを表す。

たわみ増分 dW_0/h が小さいほど，低い臨界荷重を示す。 $dW_0/h = 1/80$ と $1/320$ の場合における臨界荷重の差は 5% 程度であるため，実用上前者の値で十分であると考えられる。

図中の白丸印は初期降伏の発生点を黒丸印は逆負荷塑性の出現点を表す。初期降伏はたわみ増分に無関係に同一点で発生している。これに対

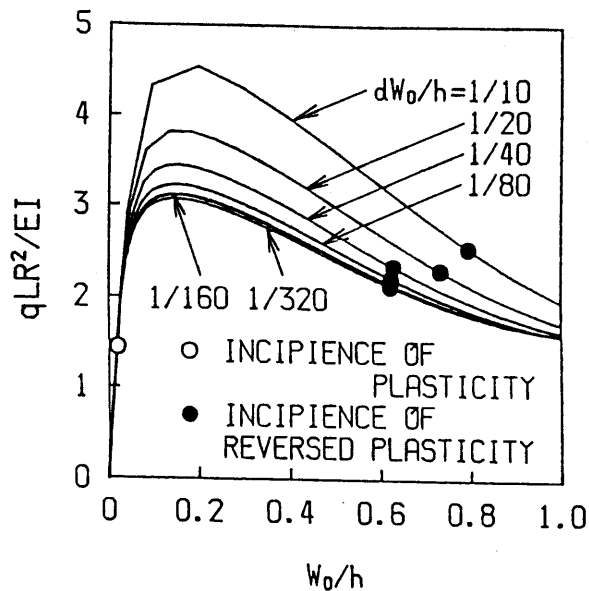


図 3. 4 たわみ増分による荷重-たわみ曲線の差異
 両端回転支持，等分布荷重，弾塑性円弧アーチ
 $H/R = 0.05$ ， $\alpha = 30^\circ$ ， $N = 10$
 $n = 0.1$ ， $\sigma_y = E/1000$

し，逆負荷塑性の出現は，たわみ増分の大きさに幾分依存するが， dW_0/h が $1/80$ 以下ではほぼ同一といえる。

§ 3. 5 集中荷重を受ける弾塑性アーチの座屈後挙動

3. 5. 1 回転端アーチの荷重-たわみ曲線に及ぼす アーチ形状の影響

図 3. 5 に，アーチの開き角 $\alpha = 15^\circ$ ， 30° ， 45° と変えた場合の荷重-たわみ曲線を示す。縦軸は曲げ剛性と半径を用いて無次元化した集中荷重，横軸はアーチの高さで無次元化した中央のたわみを表わす。

図中の実線は移動硬化則に従う逆負荷塑性を考慮した計算結果を，破線は弾性除荷までを考慮して逆負荷塑性を無視した解析の結果を示す。また，白丸印（○）は初期塑性変形の出現点を，黒丸印（●）は逆負荷塑性の出現点を表す。

$\alpha = 15^\circ$ の浅いアーチの荷重-たわみ曲線は単調増加し飛び移り座屈を生じないが， $\alpha = 30^\circ$ および 45° では飛び移り座屈を生じ，開き角が大きいほど，飛び移り過程における荷重の低下が著しく，またたわみも大きい。

$\alpha = 30^\circ$ および 45° のアーチについては，逆負荷塑性を無視した結果（破線）はそれを考慮した結果（実線）に比較して，飛び移りの後半および飛び移り後のたわみを著しく小さく評価する。このため，飛び移り座屈後の挙動の解析には，逆負荷塑性を考慮しなければならない。

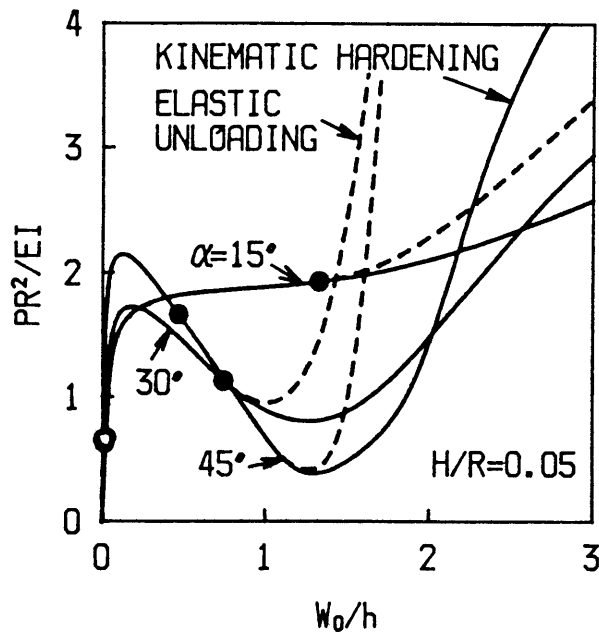


図 3. 5 アーチ開き角による荷重-たわみ曲線の差異
 両端回転支持，集中荷重，弾塑性円弧アーチ
 $H/R = 0.05$ ， $N = 10$ ， $n = 0.1$ ， $\sigma_Y = E/1000$

アーチの開き角によらず，白丸印で示される初期降伏点はほとんど同一の荷重およびたわみ状態で現われる。 $\alpha = 45^\circ$ では，逆負荷塑性の出現以後しばらく実線と破線の差はみられない。これは，後述のように逆負荷塑性領域が横断面の中央付近で出現するため，曲げ剛性への影響が小さいためである。

図 3. 6 にアーチの厚さ比 H/R を 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125 と変えた場合の荷重-たわみ曲線を示す。図中の白丸印及び黒丸印は図 3. 6 と同様に初期降伏および逆負荷塑性の出現点である。薄いアーチほど無次元化した臨界荷重は高く，それ以後のたわみの増加に伴う荷重の低下は大きい。しかし，実際の荷重は，図の縦軸の値に EI/R^2 を乗じた値であり，長方形断面の I は H の 3 乗に比例するので，例えば， $H/R = 0.0125$ のアーチに対し，0.025 のアーチの臨界荷重は 3. 3 倍程

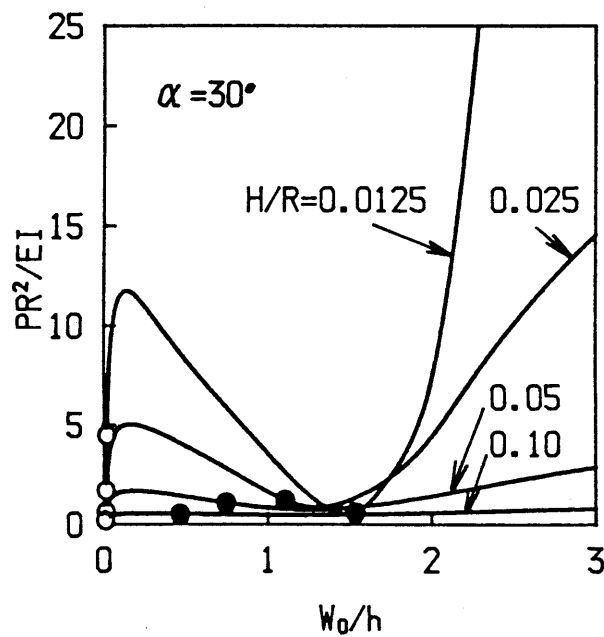


図 3. 6 厚さ比による荷重-たわみ曲線の差異

両端回転支持，集中荷重，弾塑性円弧アーチ

$\alpha = 30^\circ$, $N = 10$, $n = 0.1$, $\sigma_y = E/1000$

度大きい。

3. 5. 2 回転端アーチの塑性域の進展

およびたわみ形状の変化

アーチ中央に鉛直集中荷重を受ける両端回転支持の円弧アーチの最大荷重時，最小荷重時およびたわみがアーチ高さの2倍の各変形段階における縦断面内の塑性域，弾性除荷域，逆負荷塑性域の進展状況を図3.7に示す。図の左端がアーチの支持端，また右端がアーチ中央断面であり，上側が荷重を受ける面である。図で影をつけた領域は塑性域である。併記した応力-ひずみ曲線に示したように，図中の数字4，5は圧縮引

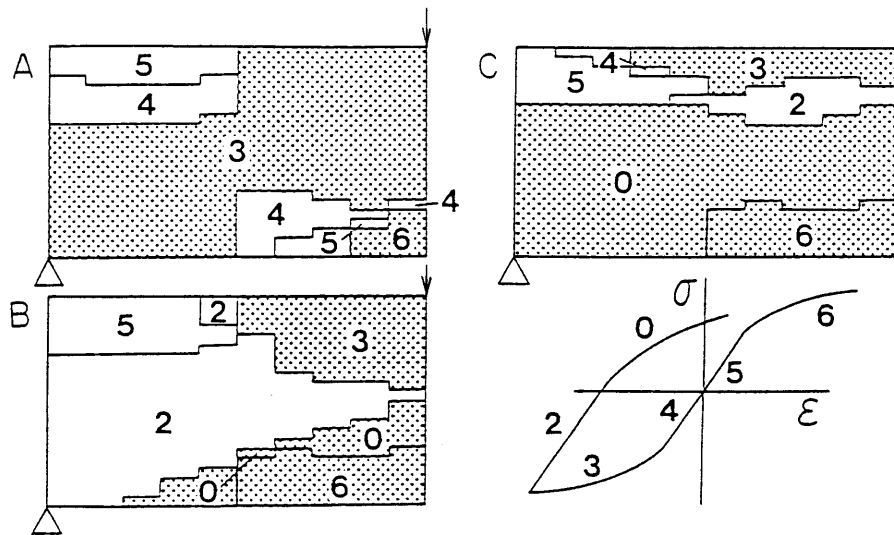


図3.7 塑性域の進展

両端回転支持，集中荷重，弾塑性円弧アーチ

$\alpha = 30^\circ$ ， $H/R = 0.05$ ， $N = 10$

$n = 0.1$ ， $\sigma_y = E/1000$

張弾性域を，3，6は圧縮引張塑性域を，2は弾性除荷域を，0は逆負荷塑性域を表わす。

臨界荷重時（A）では，圧縮塑性域3がほとんどの領域を占め，引張塑性域6はアーチ中央下面にわずかに存在するのみである。このとき，すでに，中央断面ではごく狭い弾性域を残すのみで，実質的な塑性関節が形成されている。荷重の減少に伴い，弾性除荷域2が拡がりその一部では逆負荷引張変形0を生ずる。極小荷重時（B）では，弾性除荷域が広い範囲を占めるが，アーチ中央断面付近では塑性関節が形成されたままである。さらに変形が進むと逆負荷塑性域0が支配的となる（C）。逆負荷塑性変形を無視した弾性除荷までの解析では，上記領域0を弾性域として取り扱うため，剛性を著しく過大評価することになる（図3.5参照）。

上記に対応するアーチ中央断面における応力分布の変化を図3.8に

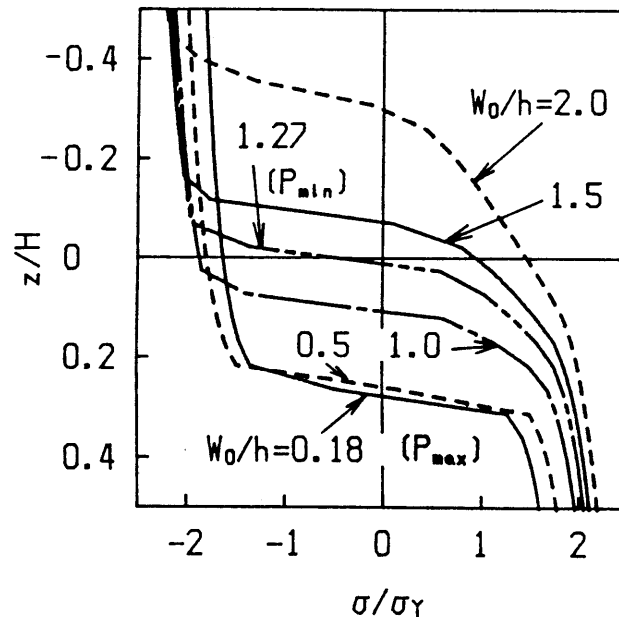


図3.8 断面内の応力分布（アーチ中央断面）

図3.7と同条件

示す。縦軸は無次元化したアーチの厚さ方向の座標を、横軸は降伏応力で無次元化した応力を表わす。臨界荷重時 ($W_0/h = 0.18$) において、 $z/H = 0.2$ あたりに残っている弾性域はたわみの増大と共に、次第に上側 (荷重側) に移行し、これに伴い、圧縮塑性状態であった $z/H \leq 0.2$ の部分は順次、弾性除荷、引張塑性状態へと変化する。

図 3. 7 に示した荷重段階に加えて初期形状、および逆負荷塑性変形の出現時のたわみ形状を図 3. 9 に示す。臨界荷重時までアーチは一様に軸方向圧縮されているが、最小荷重時以降ではアーチ中央の曲げ変形が著しい。これは、図 3. 7 に示したように、アーチ中央断面に塑性関節が形成され、この部分での変形が支配的となることによる。

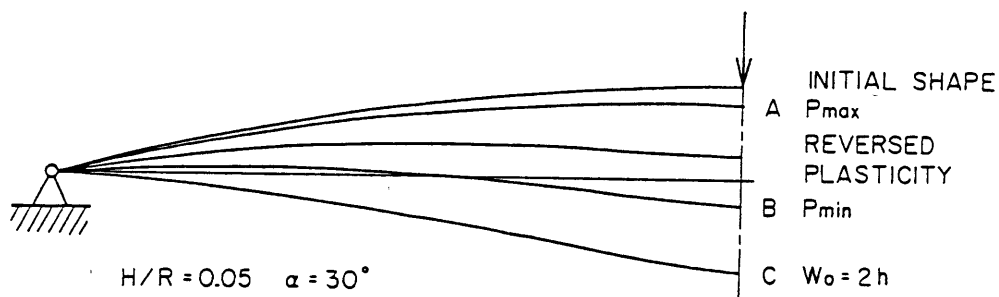


図 3. 9 たわみ形状

図 3. 7 と同条件

3. 5. 3 固定端アーチの荷重-たわみ曲線

3. 2節で示した形状を持ち、アーチ中央に鉛直集中荷重を受ける、両端固定のアーチの荷重-たわみ曲線を図3. 10に示す。図3. 10には両端固定および両端回転の集中荷重または等分布荷重を受ける場合の荷重-たわみ曲線を併せて示す。他の曲線については3. 6. 2項で述べる。縦軸は無次元化した集中荷重 P を表し、横軸はアーチ高さで無次元化したアーチ中央のたわみである。

図の下側の2本の曲線から明らかなように、固定端アーチが回転端アーチより大きな耐荷能力を持つ。臨界荷重値に対する両者の差は30%であり、弾性アーチの場合⁽⁴⁸⁾とほとんど同じである。また、固定端アーチの臨界荷重以後の荷重の低下は、回転端アーチのそれに比べて小さい。

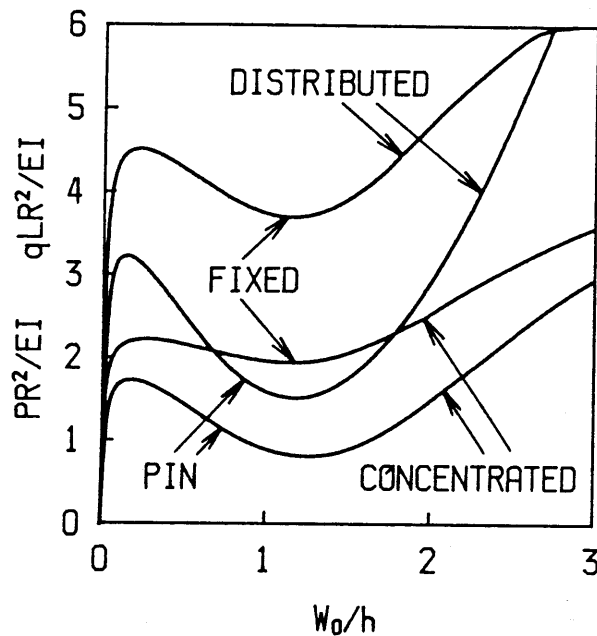


図3. 10 荷重条件、支持条件の違いによる荷重-たわみ曲線の差異
 $H/R = 0.05$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 10$
 $n = 0.1$, $\sigma_y = E/1000$

§ 3. 6 鉛直等分布荷重を受ける弾塑性円弧アーチ

3. 6. 1 回転端アーチの荷重-たわみ曲線に及ぼす

材料特性の影響

図 3. 1 1 および図 3. 1 2 には、鉛直集中荷重を受ける前節と同一形状の円弧アーチの荷重-たわみ曲線に及ぼす降伏応力および加工硬化指数の影響を示す。

図 3. 1 1 に示すように、降伏応力比が高いほど臨界荷重 P_{cr} は高く現れる。しかし、降伏応力比が 2 倍になっても臨界荷重の比は 2 倍までは変わらない。

加工硬化指数 n を 0.05, 0.1 および 0.2 に選んだ各場合に対する結果と、逆負荷塑性を無視し弾性除荷だけを考慮した場合 ($n = 0$.)

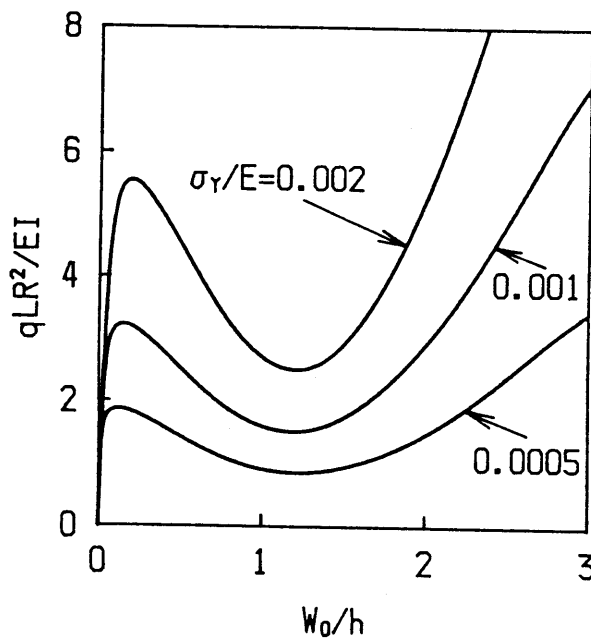


図 3. 1 1 降伏応力による荷重-たわみ曲線の差異

両端回転支持, 等分布荷重, 弾塑性円弧アーチ

$H/R = 0.05$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 10$, $n = 0.1$

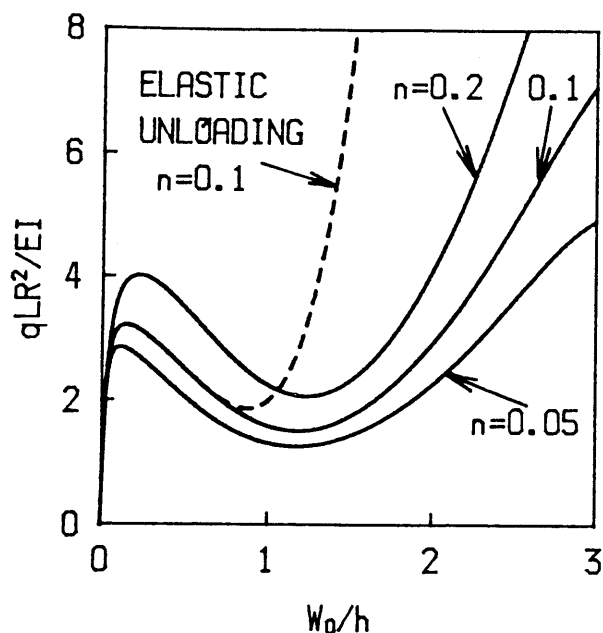


図3. 12 加工硬化指数による荷重-たわみ曲線の差異
 両端回転支持, 等分布荷重, 弾塑性円弧アーチ
 $H/R = 0.05, \alpha = 30^\circ$
 $N = 10, \sigma_y = E/1000$

1) の結果を図3. 12に示す。加工硬化指数が大きいほど材料の変形抵抗が大きいので耐荷能力は高まり、たわみの増大に伴いその差は拡大する。

一方、弾性除荷のみを仮定する解析は、逆負荷塑性を考慮した場合より、飛び移り座屈後のたわみを著しく過小評価する。

3. 6. 2 アーチの荷重-たわみ曲線に及ぼす支持条件の影響

3. 2節で示した形状を持ち、アーチ全面に鉛直等分布荷重を受ける、両端回転支持または両端固定のアーチの荷重-たわみ曲線を先の図3. 10に示した。縦軸は無次元化した分布荷重の総計 qL を表し、横軸は

アーチ高さで無次元化したたわみを表す。

鉛直集中荷重を受ける場合と同様に、固定端アーチが回転支持のアーチより大きな耐荷能力を持つ。臨界荷重値に対する両者の差は集中荷重の場合と同様に約30%である。

3.6.3 塑性域の進展

等分布荷重を受ける両端回転支持アーチおよび両端固定のアーチについて、アーチ中央のたわみの増大にともなう縦断面内の塑性域の進展状況を図3.13に示す。図の左端がアーチ端部、右端が中央断面に対応し、上面に荷重を受けている。図中の数字は挿入図に示す応力状態を表す。

回転支持アーチ(a)では、臨界荷重時に大部分の領域が圧縮塑性状態(3)であり、アーチ下部の一部のみが弾性状態である。荷重の減少にともなって、圧縮塑性領域の多くで弾性除荷が進行し、荷重極小時には圧縮塑性域はアーチ中央上部に限定される。この時、アーチ中央下部では引張塑性域(6)と逆負荷塑性域(0)が現われて、中央断面で塑性関節が形成されつつある。逆負荷塑性域は、はじめ下部表面よりやや内側で生じるため、弾性除荷のみを考慮した計算結果と逆負荷塑性を考慮した計算結果の間の差は小さい(図3.12参照)。しかし、 $W_0 = 2h$ の段階まで変形が進行すると逆負荷塑性域が著しく拡大するため、弾性除荷のみを仮定した場合に比べアーチの剛性は著しく低下する。この段階ではほぼ全域で引張塑性状態であり、アーチ中央上面にあった圧縮塑性域は支持端方向に移動している。

固定端アーチ(b)では、臨界荷重時に固定端下部と中央上部の多くの領域が圧縮塑性域(3)である。一方、中央下部および固定端上部に引張弾性域(5)および引張塑性域(6)が生じる。このように中央断面と固定端に塑性関節が形成され、おもにこの部分で変形が起こる。この時すでに圧縮塑性からの弾性除荷域(2)が現れている。荷重極小時

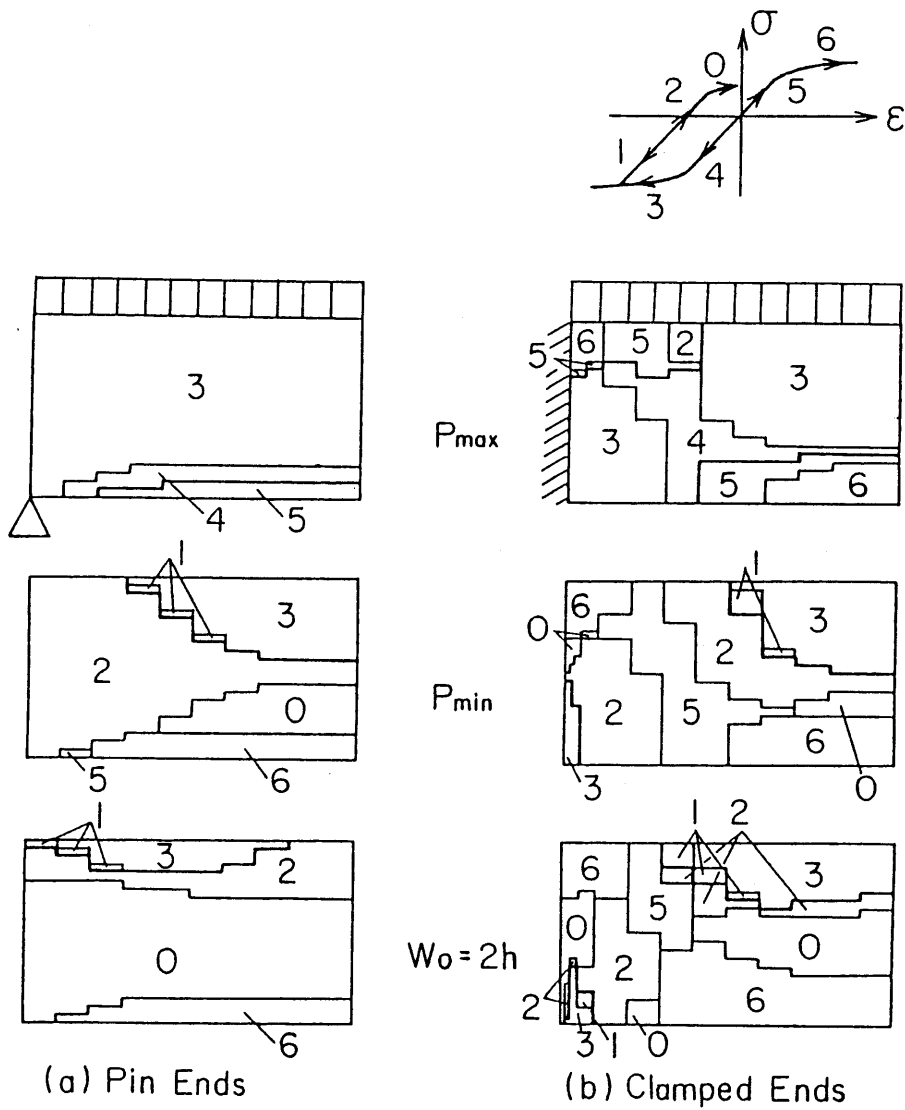


図 3. 13 塑性域の進展

等分布荷重，弾塑性円弧アーチ

$H/R = 0.05$ ， $\alpha = 30^\circ$ ， $N = 10$

$n = 0.1$ ， $\sigma_y = E/1000$

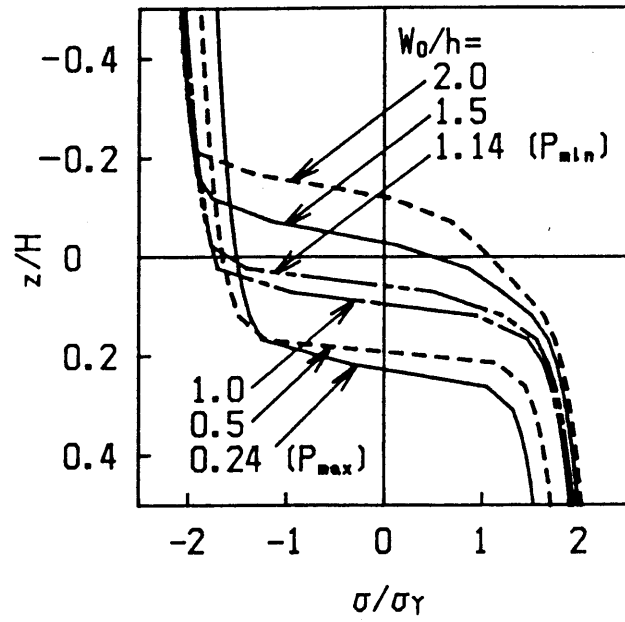
には圧縮塑性域（3）は中央上部と固定端下部に縮小するが，除荷が生じても全般的な傾向は臨界荷重時と変わらない。これは，図3. 10に示したように固定端アーチでは臨界荷重から極小荷重への荷重の減少率が小さいためと考えられる。

3. 6. 4 応力分布

前節で述べた固定端アーチの中央と固定端横断面内のたわみの増大に伴う応力分布の変化を図3. 14（a）および（b）に示す。縦軸は厚さ H で無次元化した厚さ方向の座標を表し，上端が荷重側表面である。横軸は降伏応力 σ_y で無次元化した応力の大きさを表す。

中央断面（a）では，臨界荷重時に $z/H = 0.2$ 付近に無次元厚さ 0.1 程度の降伏応力以下の弾性領域があり，それより下側で引張塑性域，上側では圧縮塑性域である。その後，たわみの増大にともなって，弾性域（図の傾きが水平に近い部分）は z 軸の負の方向に移動し，弾性域より下側では引張，また上側では圧縮の応力が高くなり，弾性域が通過した部分は逆負荷塑性域となる。これは，図3. 13において上下表面では塑性負荷状態にあり（3，6），弾性域（2）の通過した部分では逆負荷塑性域（0）が現れていることに対応する。

固定端断面（b）では，中央断面と逆に臨界荷重時に $z/H = -0.2$ 付近に弾性域（図3. 13における領域5）があり，それより下側で圧縮塑性域（3），上側で引張塑性域（6）である。その後，たわみの増大に伴う弾性域の移動により，逆負荷引張塑性域（0）が下側に向かって拡大し， $W_0/h = 2.0$ では全域が引張塑性域（6，0）となる。曲げによる圧縮応力が軸力による引張応力に相殺されるため，上側の引張応力程，下側の圧縮応力の増大は著しくない。



(a) 中央断面

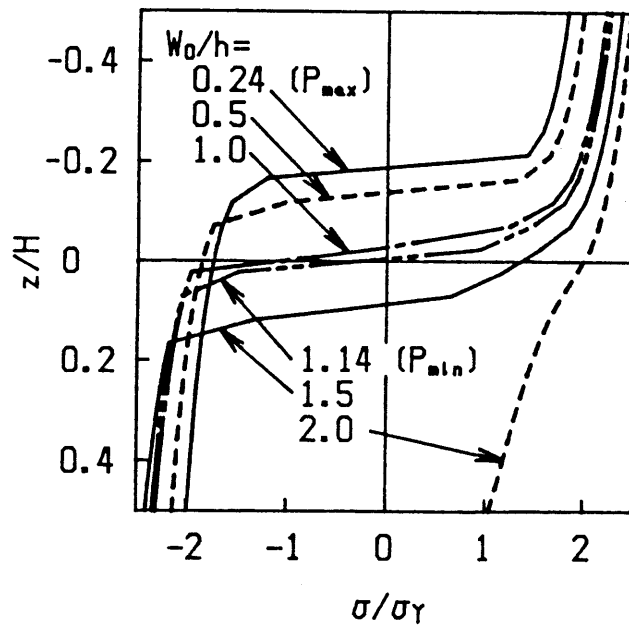


图 3. 14 应力分布 (b) 固定端断面

3. 6. 5 アーチのたわみ形状

回転および固定端アーチのたわみ形状を、縦方向に拡大して図3. 15に示す。両者とも、臨界荷重までは初期形状を保ちながらほぼ軸方向に一様に圧縮されているが、その後はM字形のたわみモード、さらにV形モードを示す。図3. 13で示したように、固定端アーチでは中央部と端部で塑性関節を形成しているのですが、この部分は他と比べ大きく曲がっている。一方、回転端アーチでは中央部の変形は、固定端アーチより緩和されている。これは図3. 13 (a)に示したように、塑性関節の形成が不十分であることによる。集中荷重を受ける場合のたわみ形状(図3. 9)および塑性域の進展(図3. 7)と比較すると、この点は一層明かである。

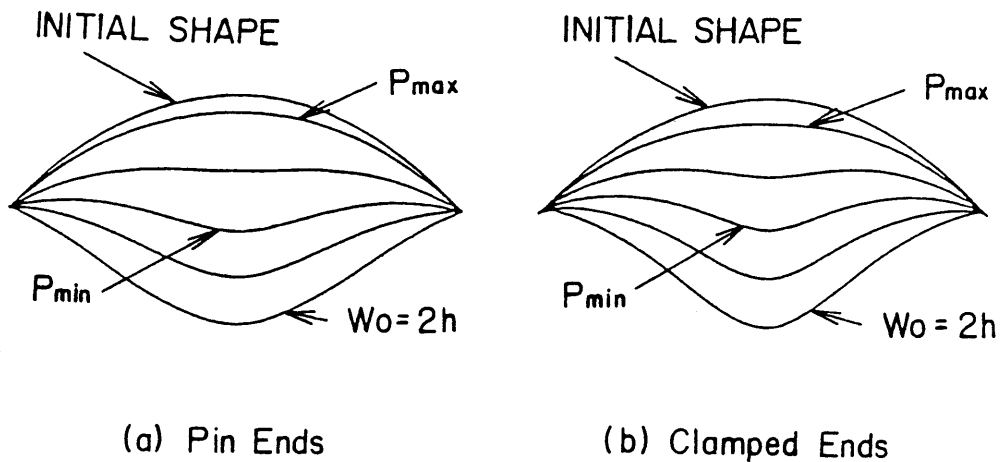


図3. 15 たわみ形状

等分布荷重, 弾塑性円弧アーチ

$$H/R = 0.05, \quad \alpha = 30^\circ, \quad N = 10$$

$$n = 0.1, \quad \sigma_y = E/1000$$

§ 3. 7 結言

剛体棒と非線形ばねで構成される離散化モデルを用いて、対称モードを伴う弾塑性アーチの面内座屈後挙動に及ぼす材料特性、特に逆負荷塑性変形の影響を数値的に解析した。アーチの材料は、単調に増大する塑性変形に対しべき硬化形の応力-ひずみ関係に従い、逆負荷において移動硬化則に従うと仮定した。この結果から以下の事項が明らかになった。

(1) 弾性除荷のみを仮定する従来の方法による結果は、逆負荷塑性を考慮した結果と比較して、飛び移り座屈後のたわみを著しく過小評価する。

(2) 降伏応力比 σ_y/E が高いほど、また塑性域での加工硬化指数 n が大きいほど、アーチの耐荷能力は高い。

(3) 両端固定のアーチの耐荷能力は、回転支持のアーチより高いが、その臨界荷重の差は30%程度である。また、両端固定のアーチでは、臨界荷重以後のたわみ増加に伴う荷重の低下が回転端アーチに比べてかなり小さい。

(4) 集中荷重を受けるアーチでは、回転端でも固定端でも、臨界荷重時にアーチ中央断面で塑性関節が形成され、そこでの変形が著しい。

(5) 等分布荷重の下では、回転端アーチでは臨界荷重時には塑性関節は形成されないが、固定端アーチでは中央部と固定端で固定端で塑性関節が形成される。

第4章 非対称荷重を受けるアーチの座屈後挙動の数値解析

§ 4. 1 緒言

前章では、対称モードを伴うアーチの面内座屈後挙動を数値解析した。しかしながら実際の構造物では、形状の不整、および作用する荷重の位置、方向等に依存して、非対称な変形モードを伴う座屈が起こり得る。

このため、非対称モードを伴う座屈に関する研究がなされてきた。Creightonら⁽⁴⁹⁾は、鉛直集中荷重を受ける浅い半正弦状の弾性アーチについて荷重の作用する位置による臨界荷重の変化を示した。また、Plaut⁽⁵⁰⁾は、固定あるいは回転支持の浅い弾性円弧アーチについて、鉛直集中荷重の作用する位置と臨界荷重の関係を示した。これらの結果より、非対称モードの下での弾性アーチの座屈の臨界荷重が対称モードの臨界荷重に比べかなり低い値をとることが明かとなった。

弾塑性アーチの非対称座屈に関しては、4つの剛体棒と2つの弾塑性セルから成る簡単なモデルを用いて2点に作用する鉛直集中荷重の比がアーチの臨界荷重に及ぼす影響を明らかにした研究⁽³¹⁾、薄板で構成される構造物の有限要素法による数値解析⁽³⁷⁾が報告されている程度であり、荷重の非対称性がアーチの塑性座屈後挙動に及ぼす影響を明らかにした研究はなされていない。

そこで、本章では、任意の位置に単一の集中荷重を受ける両端回転支持の弾塑性円弧アーチについて、臨界荷重および座屈後挙動に及ぼす荷重作用点の位置の影響、材料特性、特に逆負荷塑性の影響を明らかにする。

§ 4. 2 計算対象

図 4. 1 に示す，長方形断面（厚さ H ，断面 2 次モーメント I ）を持つ，半径 R ，開き角 α の両端回転支持の弾塑性円弧アーチについて，アーチ中央から d だけ離れた点に鉛直集中荷重を受ける場合について数値計算を行った。アーチは，開き角 $\alpha = 30^\circ$ ，厚さ比 $H/R = 0.005 \sim 0.04$ の形状であり，荷重作用位置は $d/L = 0 \sim 0.4$ の範囲で変えた。また材料特性については，降伏応力比 σ_y/E を $0.0005 \sim 0.002$ ，加工硬化指数 n を $0.05 \sim 0.2$ の範囲に選んで計算を行った。

アーチ全長を 24 要素（対称モードについては 12 要素）に分割（20 等分して荷重作用点に隣接する要素をさらに $1/2$ ， $1/4$ ， $1/4$ の長さに分割）し，たわみ増分は dW_0/h を 0.0125 にとった。

以下において，特に明記しない場合の結果は $H/R = 0.01$ ， d/L

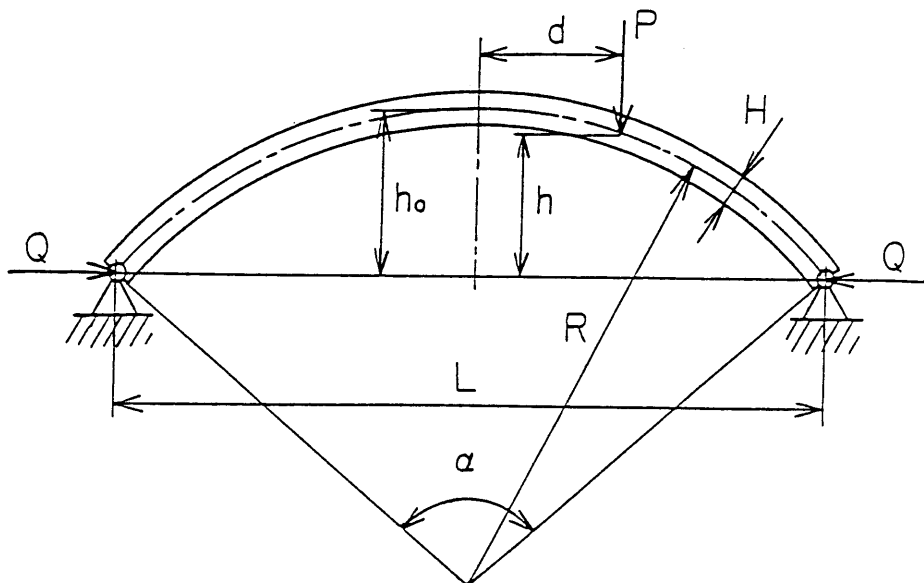


図 4. 1 計算対象

$= 0.2$, $\sigma_y/E = 0.001$, $n = 0.1$ に対するものである。

なお、アーチの材料は § 3. 3 に示した、移動硬化則に従うべき硬化形の応力-ひずみ関係に従うものとする。

§ 4. 3 荷重作用点の影響

図 4. 2 に、臨界荷重 P_{cr} に及ぼす荷重作用位置の影響を示す。横軸の $d/L = 0$ および 0.5 はアーチ中央とアーチ支持端に相当する。 $d/L = 0$ における臨界荷重は、第 3 章で得られた対称座屈モードに対する計算結果である。 $d/L = 0.25$, すなわち、アーチ中央と支持端の中間点に荷重が作用するとき臨界荷重は最小値をとり、その値は対称座屈モードの約 $2/3$ である。この比率は弾性アーチについて得られる値⁽⁵⁰⁾ とほぼ同程度である。アーチ中央付近での荷重作用位置の変化がかなり大きな限界荷重の減少をもたらすのに対し、 $d/L = 0.2 \sim 0.3$

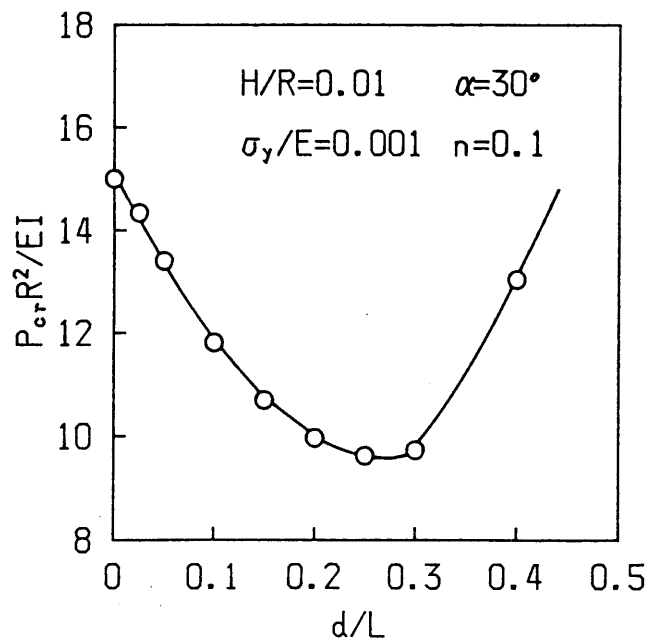


図 4. 2 荷重作用位置による臨界荷重の差異

の範囲でのその変化は小さい。

荷重-たわみ曲線に及ぼす集中荷重の作用位置の影響を図4. 3に示す。横軸は荷重作用点の初期高さ h で無次元化した荷重点でのたわみ W を表す。すなわち、 $w/h = 1$ および 2 は荷重点のたわみとその点の初期高さおよびその2倍に等しいことを意味する。図中の実線は無次元化した集中荷重 P を、破線は支持点に働く水平反力 Q (図4. 1 参照) を表す。対称座屈モード ($d/L = 0$) の飛び移り座屈の過程での最小荷重は、非対称座屈のそれよりも低い。

荷重の偏心量が小さい $d/L = 0.1$ の曲線は、臨界荷重まで対称座屈モードに近い挙動を示すが、その後の飛び移り座屈の間の挙動は $d/L = 0.2$ の非対称モードのそれに近くなる。このことは、荷重作用点がアーチ中央からのわずかに偏った $d/L = 0.1$ の場合、座屈前の対称に近い変形から、臨界荷重以後の飛び移り座屈過程において、非対称

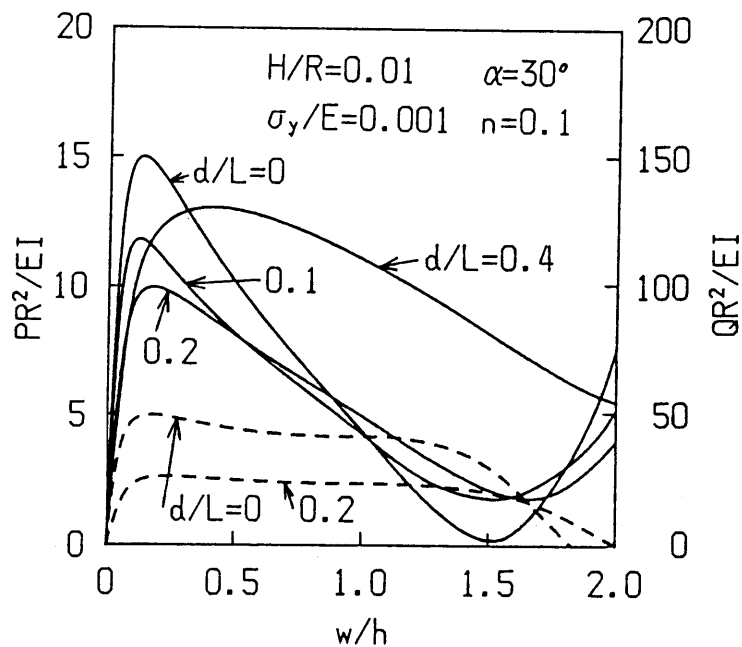


図4. 3 荷重作用位置による荷重-たわみ曲線の差異

実線：集中荷重 P 破線：水平反力 Q

な変形モードへ分岐することを意味する。

図中の破線で示される水平反力 Q は、臨界荷重時にはその荷重値の 2.5 ~ 3 倍の大きさである。対称および非対称座屈モードについて、それは臨界荷重時に極大値をとり、それ以降集中荷重 P が最小となる点までほぼ一定の値をとり、その後小さくなり、 W/h が 1.8 を越えると引張りに転ずる。

§ 4. 4 アーチの厚さの荷重-たわみ曲線への影響

アーチの厚さ比 H/R を 0.005 ~ 0.04 の範囲で変えたときの荷重-たわみ曲線の変化を図 4. 4 に示す。図中の実線は $d/L = 0.2$ の非対称座屈モード、破線は対称座屈モードの計算結果である。非対称座屈モードと対称座屈モードの間の差および、臨界荷重と荷重極小点の

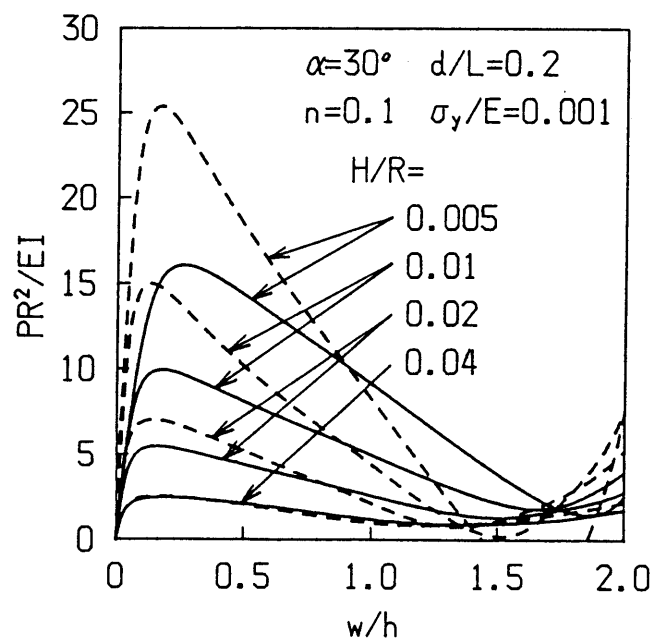


図 4. 4 厚さ比による荷重-たわみ曲線の差異

実線：非対称 破線：対称

差は、厚いアーチほど小さい。特に、最も厚い $H/R = 0.04$ のアーチでは、非対称座屈モードと対称座屈モードに対する曲線はほぼ一致している。図4.4では、厚いアーチほど無次元化された荷重は小さい。しかし、実際の荷重 P は、図の値に厚さの3乗に比例する断面2次モーメント I を乗じて得られるので、当然厚いアーチほど大きい。実際の臨界荷重については、 $H/R=0.01$ の値を1とすると、 $H/R = 0.005$ では0.2、 $H/R = 0.02$ では4、 $H/R = 0.04$ では16程度である。

§ 4. 5 アーチの材料特性の臨界荷重への影響

材料の降伏応力比 σ_y/E を 0.0005, 0.001, 0.002 と変えた時の $d/L = 0.2$ の非対称座屈モードに対する臨界荷重を、対称座屈モードと比較して、図4.5に示す。降伏応力比に比例して、両者

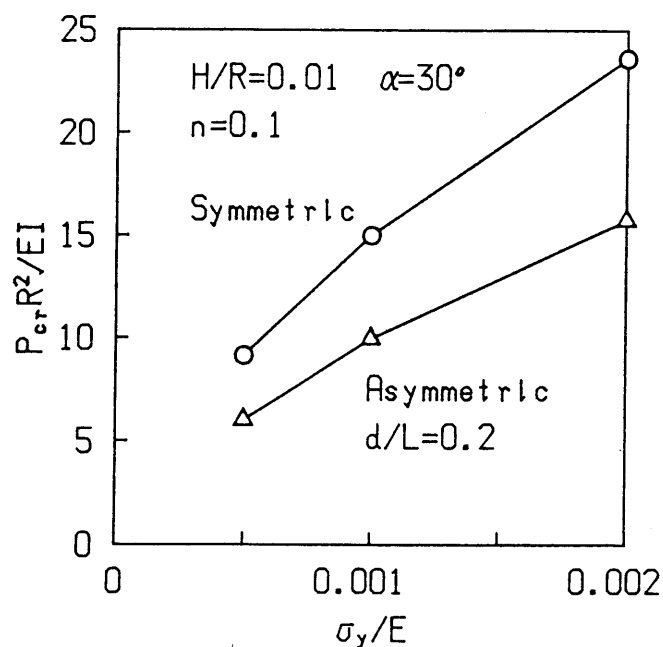


図4.5 降伏応力による臨界荷重の差異

とも臨界荷重値は高くなる。

図4.6は加工硬化指数 n を0.05, 0.10, 0.20とした時の臨界荷重を表わす。この場合にも臨界荷重値は加工硬化指数にほぼ比例する。

§ 4. 6 塑性域の進展

飛び移り座屈過程における塑性域の進展状況を図4.7に示す。図の左列が $d/L = 0.2$ に対する非対称座屈モードに、右列が対称座屈モードに対応し、それぞれ、臨界荷重時 (P_{cr}) および $w = h$ のたわみ状態の弾性、塑性域の分布を示す。図中の数字は応力-ひずみ曲線の概略図に記入した応力状態を表わす。ここで、弾性状態を表わす2つの数字(例えば5と4)はその応力が引張であるか圧縮であるかを表すのではなく、方向性つまり引張りに向かいつつあるのか圧縮に向かいつつある

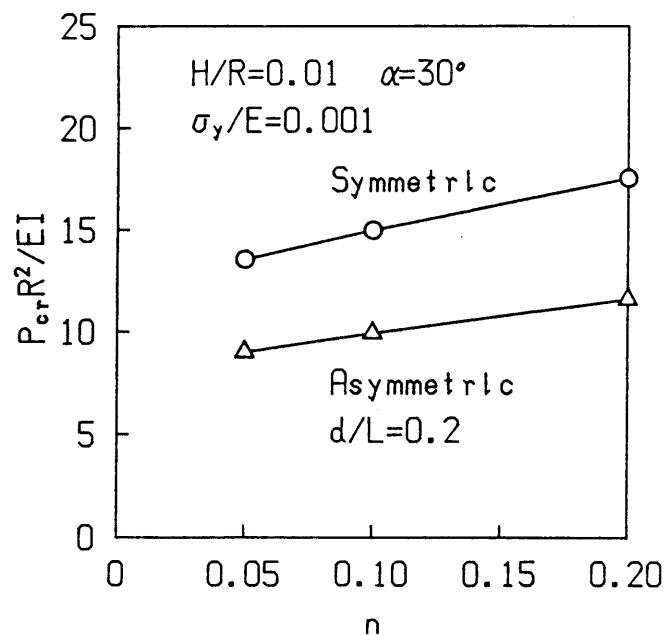
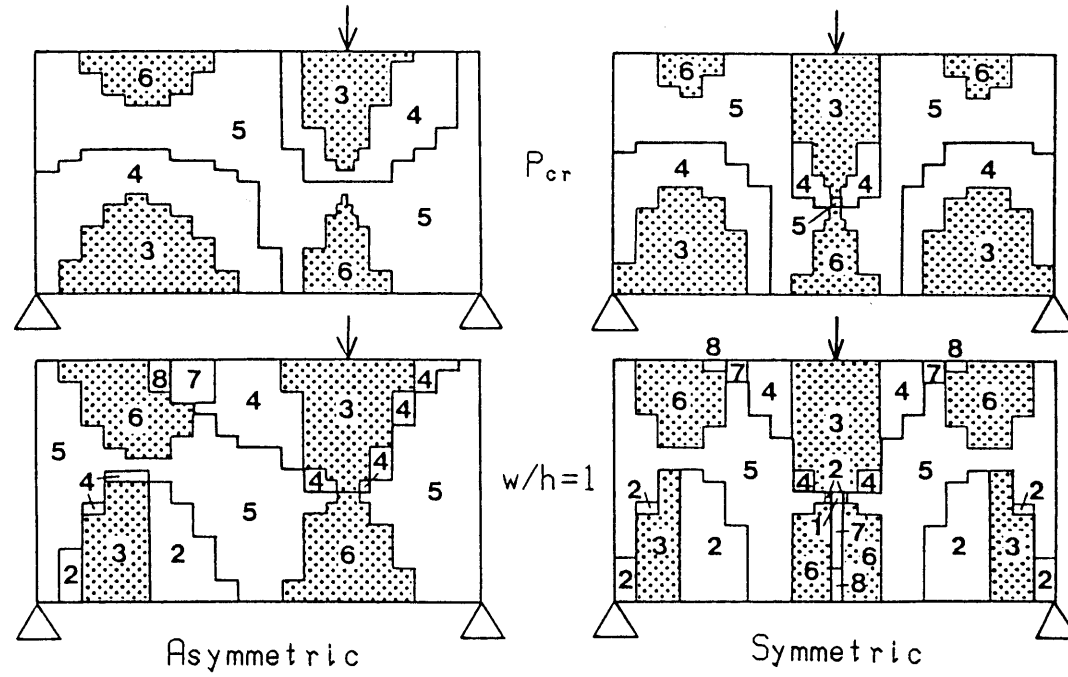
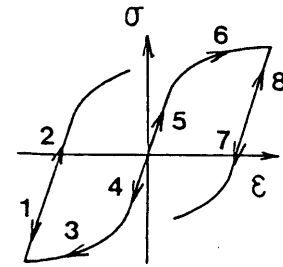


図4.6 加工硬化指数による臨界荷重の差異

図 4. 7 塑性域の進展



$H/R=0.01$
 $\alpha=30^\circ$
 $\sigma_y/E=0.001$
 $n=0.1$



のかを表す。また、太線は引張応力域と圧縮応力域との境界を表し、影をつけた領域は塑性領域を示す。両者ともに、臨界荷重時には荷重作用断面に塑性関節が実質的に形成される。 $w = h$ では、塑性領域は対称モードにおいては荷重作用断面と支持端近くの断面に、非対称モードでは荷重作用断面および、アーチ中央に対しそれとほぼ対称な断面に集中している。

§ 4. 7 応力分布

前節で示した $d/L = 0.2$ についての荷重作用断面と、塑性関節が形成される荷重作用点と逆側の $x/L = -0.25$ の横断面内の応力分布を図 4. 8 (a) および (b) に示す。縦軸は厚さ H で無次元化した厚

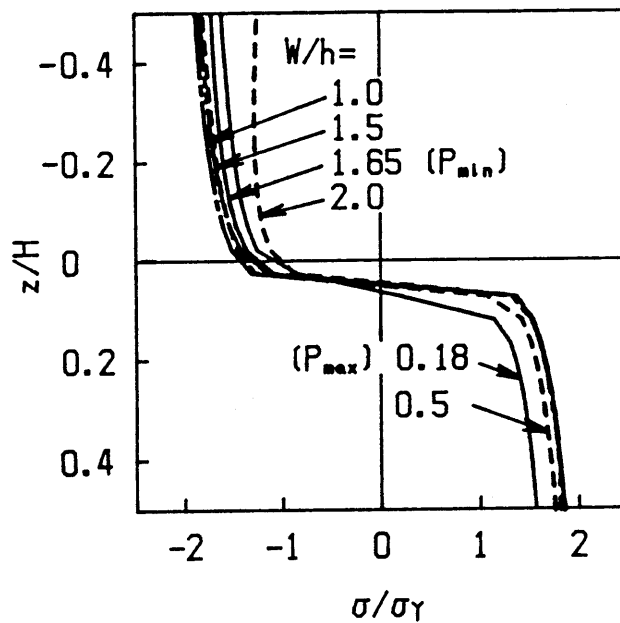


図 4. 8 応力分布 (a) 荷重作用断面

$H/R = 0.01$, $\alpha = 30^\circ$, $d/L = 0.2$

$\sigma_y/E = 0.001$, $n = 0.1$

さ方向の座標を表し，上端が荷重側表面である。横軸は降伏応力 σ_Y で無次元化した応力である。

荷重作用断面 (a) では，弾性域は常に $z/H = 0.05$ 付近にあり，それより上側では塑性圧縮応力を，下側では塑性引張応力を受けている。このことは図 4. 7 (左) に示した，臨界荷重時の弾性圧縮域 4 と弾性引張域 5 の境界と， $W/h = 1$ の状態の塑性圧縮域 3 と塑性引張域 6 の境界の位置は一致していることに対応する。 $W/h = 1.0$ まで，応力はたわみの増大とともに増大する。 $z/H > 0.1$ の領域の引張応力は， $W/h = 1.0$ 以降一定値をとる。圧縮応力を受けている上側の領域では，応力は減少し，この減少量は最大降伏応力の 0.7 倍であるので，この領域は全て弾性除荷域である。

図 4. 8 (b) に示す $x/L = -0.25$ の断面 (図 4. 7 (左) 参

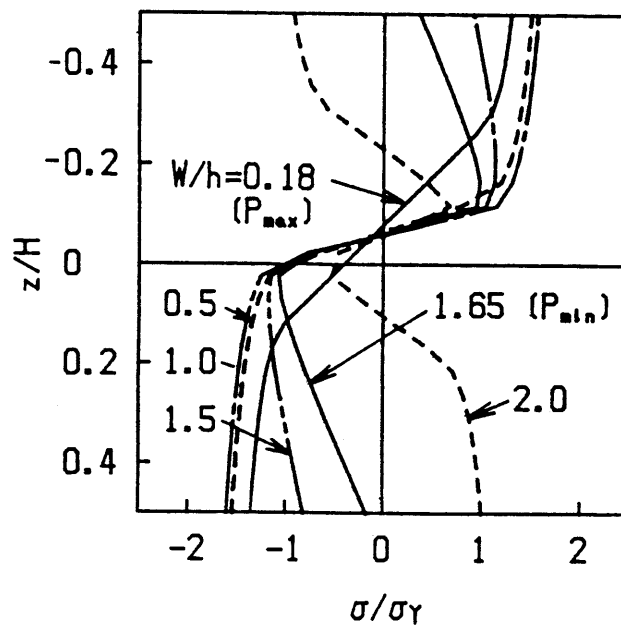


図 4. 8 応力分布 (b) $x/L = -0.25$ の断面
 $H/R=0.01$, $\alpha=30^\circ$, $d/L=0.2$
 $\sigma_Y/E=0.001$, $n=0.1$

照)では、臨界荷重時に中央面付近に約 $0.45H$ の厚さの弾性域が存在する。たわみの増大にともなって、上側の引張応力、および下側の圧縮応力の絶対値は大きくなり、 $W/h = 1.0$ で最大となる。図4.7に示したように、この位置の横断面内のほとんどの部分は塑性状態にあり、実質的な塑性関節を形成している。 $W/h = 1.0$ 以後、たわみの増大にともない応力の絶対値は減少し、 $W/h = 1.65$ ではほぼ全域で弾性除荷状態である。弾性域では、わずかなひずみの減少により応力が著しく低下するため、アーチ表面の応力が内部の応力より小さくなっている。 $W/h = 2.0$ では、上下表面から内部へ逆負荷塑性が進展している。したがって、図4.3に示した $W/h < 2$ の範囲では逆負荷塑性の影響はわずかであるが、 $W/h > 2$ の飛び移り後の荷重-たわみ曲線ではその影響はかなり著しくなる。

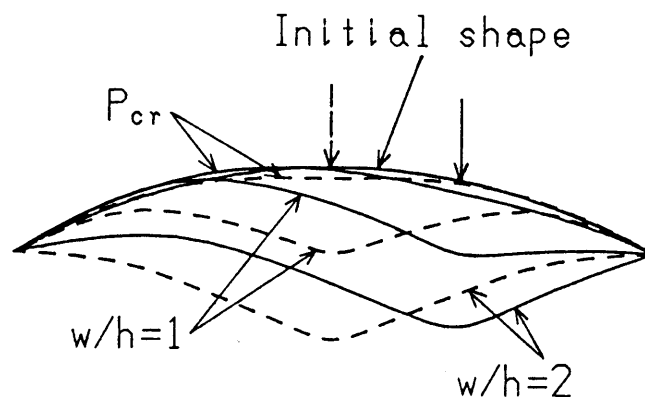


図4.9 たわみ曲線

$$H/R=0.01, \alpha=30^\circ, d/L=0.2$$

$$\sigma_y/E=0.001, n=0.1$$

§ 4. 8 たわみ形状

§ 4. 6の飛び移り座屈過程のアーチのたわみ形状を図4. 9に示す。実線は、 $d/L = 0.2$ の位置に集中荷重を受ける非対称座屈モードに対する臨界荷重時、 $W = h$ および $W = 2h$ の形状を、破線は対称座屈モードのたわみ形状を同様に示したものである。ここで、 W および h は荷重作用点のたわみおよび初期高さである。 $d/L = 0.2$ に荷重が作用する場合、臨界荷重において既に明瞭な非対称たわみ形状を示している。 $W = h$ において、対称座屈モードのアーチはM字形の形状をとるが、非対称座屈モードでは、N字形の形状をとる。飛び移り座屈過程における、曲げ変形は対称モードの際には荷重点近傍に、非対称モードでは荷重点およびアーチ中央に対し荷重点に対称な断面に集中している。また、これらの位置は§ 4. 6で示した塑性関節の形成される断面に一致している。

§ 4. 9 結言

本章では、任意の位置に単一の鉛直集中荷重を受ける両端回転支持の弾塑性円弧アーチについて、非対称座屈モードを伴う飛び移り座屈過程を数値的に解析し、荷重の作用位置、アーチの形状、材料特性等が臨界荷重および座屈後の荷重-たわみ曲線に及ぼす影響を検討した。その結果、以下の点が明らかになった。

(1) 非対称座屈モードの臨界荷重は荷重の作用点の位置の大きく依存する。臨界荷重の最小値は対称座屈モードのその約 $2/3$ である。この臨界荷重の最小値は、荷重がアーチ中央と支持端の中央に作用した時に現われる。

(2) 前述の臨界荷重および荷重-たわみ曲線に関する、対称モードと非対称座屈モードとの間の差異は、アーチが厚くなるに従って小さく

なる。厚さ比 H/R が 0.04 以上になると、上記の位置に荷重を受けてもアーチは事実上対称座屈モードで変形する。

(3) アーチ中央からの荷重の作用位置の偏りが小さい場合には、臨界荷重に達する以前はほぼ対称モードの下で変形が進行するが、それ以降非対称モードが顕著になり、対称から非対称形状への分岐を伴う。

(4) 降伏応力および加工硬化指数が高いほど臨界荷重は高くなる。

(5) 対称モードおよび非対称座屈モードともに、塑性関節は臨界荷重時に荷重作用断面に形成される。非対称モードでは、飛び移り過程にアーチ中央に対し荷重点とほぼ対称な断面に別の塑性関節が生ずる。

第5章 アーチの飛び移り座屈に関する実験

§ 5. 1 緒言

アーチ構造では臨界荷重値に達したとき、しばしば飛び移り座屈を起こす。そこで第3章では、剛体棒・ばねモデルを用いて、対称座屈モードを伴う弾塑性アーチの面内対称飛び移り座屈過程を解析し、アーチの形状、支持方法、荷重条件、材料特性（特に逆負荷塑性）等が臨界荷重及び座屈後の荷重-たわみ曲線に及ぼす影響を明らかにした。実際の構造物では荷重の偏心や初期不整のため完全に対称な変形は期待できず、座屈荷重は対称モードの場合より小さくなることが予想されるので、第4章では任意の位置に単一集中荷重を受けるアーチの非対称な飛び移り座屈挙動を数値解析し、臨界荷重および荷重-たわみ曲線に及ぼす荷重の作用点の位置、アーチの厚さ、材料特性等の影響を明らかにした。

上記の数値解析結果の妥当性を検討するためには、実験結果と比較検討する必要がある。

これまで、アーチの弾塑性座屈に関する実験としては、非対称な分布荷重を受ける放物線アーチ⁽³²⁾、箱形断面の円弧アーチ⁽⁴⁰⁾について報告されているが、いずれも座屈後挙動を扱っていない。

薄肉のアーチについて通常の荷重制御の座屈実験を行った場合、臨界荷重において別の平衡状態にきわめて急速に移行する。従って、飛び移り座屈過程におけるアーチの挙動を明らかにするためには、たわみ制御の実験により、臨界荷重に達した後の荷重の低下する過程も連続して追跡することが必要である。この場合、飛び移り前の圧縮の支点反力と、飛び移り後の引張の反力の双方を支えることのできる実験装置を用いなければならない。

そこで本章では、アーチ中央からいくらか離れた点に集中荷重を受ける両端回転支持のアルミニウム合金の円弧アーチについて、たわみ制御

の飛び移り座屈実験を行い、軸線を含む平面内の非対称座屈過程における、荷重-たわみ曲線、支点の水平反力とたわみの関係、たわみ形状およびひずみ履歴を明らかにするとともに、前章で求めた数値解との比較検討を行った。

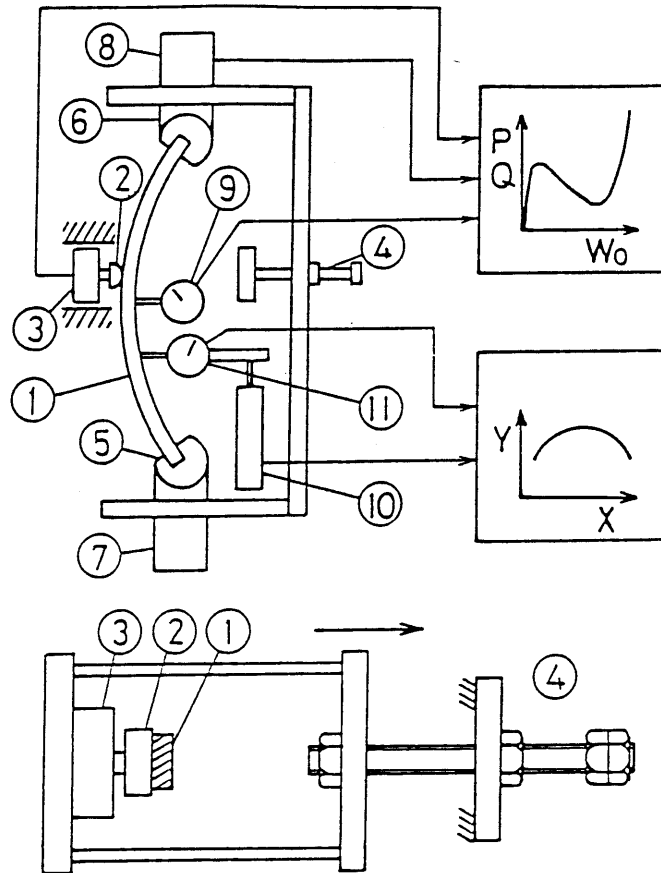
§ 5. 2 実験装置及び方法

5. 2. 1 実験装置

飛び移り座屈の実験においては、座屈前における圧縮から飛び移り後の引張へ変化する水平反力を支えることのできる、たわみ制御の実験装置が必要である。また、飛び移り座屈過程中連続して荷重および水平反力の大きさを測定できることが望ましく、さらに、その間におけるアーチの形状を、離れた幾つかの点においてではなく、曲線として把握できることが望ましい。そこで、図 5. 1 に示す実験装置を製作した。

たわみ制御の下でアーチに集中荷重を加え、それによるアーチ端の水平反力（図 5. 1 に示す装置では支点反力の垂直方向成分であるが、通常の水平に支持されるアーチにおいては反力の水平方向成分であるので、以下このように呼ぶ）をも同時に測定するため、剛性の大きな電気油圧サーボ試験機のフレームに実験装置を取り付けた。集中荷重は、ネジを用いた負荷装置④により、アーチ中央より 10mm（アーチスパンの 1/20）だけ離れた位置のたわみを与えることにより加えられる。荷重は半円柱状の受座②を介してアーチ試験片①に作用させ、アーチ幅全体に一樣な荷重が加わり、作用点の局所的な変形を防ぐようにした。アーチ端の支持装置⑤⑥は電気油圧サーボ試験機の上下チャック部⑦⑧に取り付けられる。

この支持装置の構成を図 5. 2 に示す。飛び移り座屈前の圧縮の軸力および飛び移り後の引張りの軸力に対してもアーチ端の回転支持の条件が実現されるように、この装置では試験片の端面の中心が常に切り欠き



- 1 Specimen
- 2 Load bearing
- 3 Load cell (P)
- 4 Screw and nuts
- 5,6 Supporting shaft
- 7 Actuator
- 8 Load cell (Q)
- 9 Displacement transducer (W_0)
- 10 Displacement transducer (X)
- 11 Displacement transducer (Y)

图 5. 1 实验装置 (1) 概要

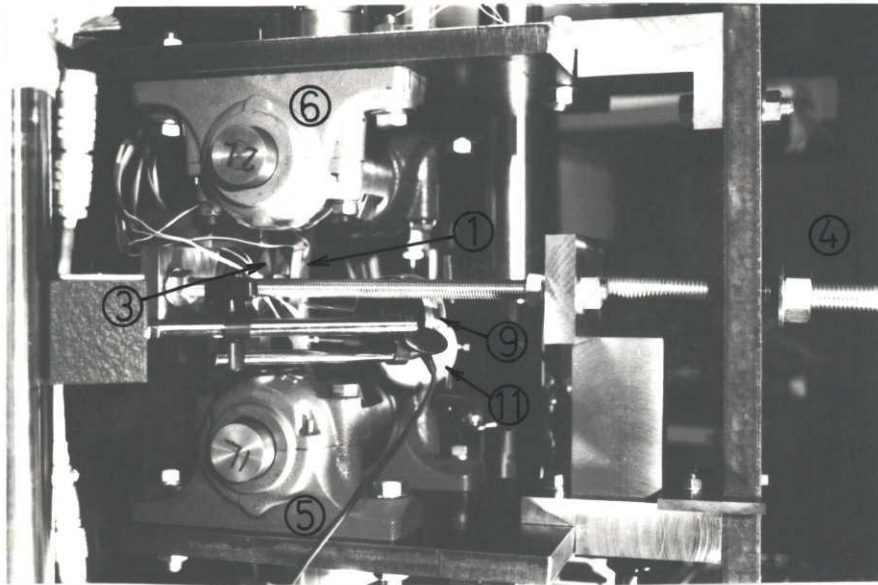


図5. 1 実験装置 (2) 写真

を設けた丸棒の中心線上に保たれる。飛び移り前に試験片端面が受ける圧縮力は端面と軸溝底面により、飛び移り後に受ける引張力は試験片の側面にアルダイトで接着したキーと軸に設けたキー溝により支えられる。軸はころ軸受けで支持される。キーは試験片端面から1mmの隙間を持たせて貼り付け、圧縮力は試験片の端面のみに作用するようにした。

荷重作用点のたわみは変位変換器⑨(測定範囲20mm)で測定し、集中荷重Pはロードセル③(容量2t)で、また水平反力Qは油圧サーボ試験機のロードセル⑧(容量±2t)により測定し、これらをX-Yレコーダで記録した。また、各変形段階におけるアーチ中央部の100mmの範囲のたわみ形状は、2つの変位変換器⑩(スパン方向:測定範囲100mm)と⑪(アーチ高さ方向:測定範囲20mm)を用い、後者をアーチのスパン方向に移動させながら測定し、X-Yレコーダで記録した。

集中荷重Pの作用点を正確に規定するため、ロードセル③はガイドに

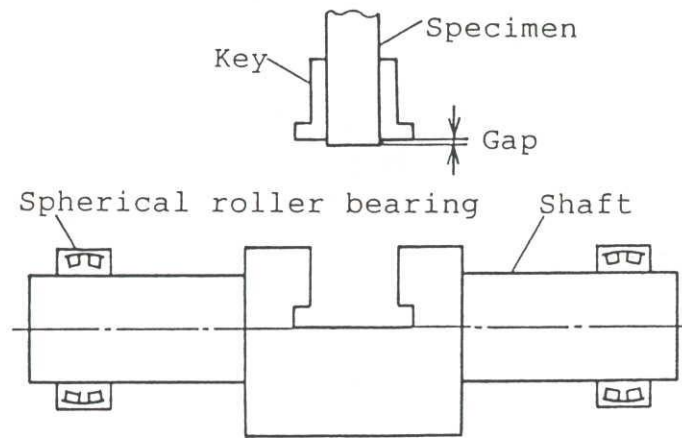


図 5. 2 アーチ端支持装置 (1) 構成

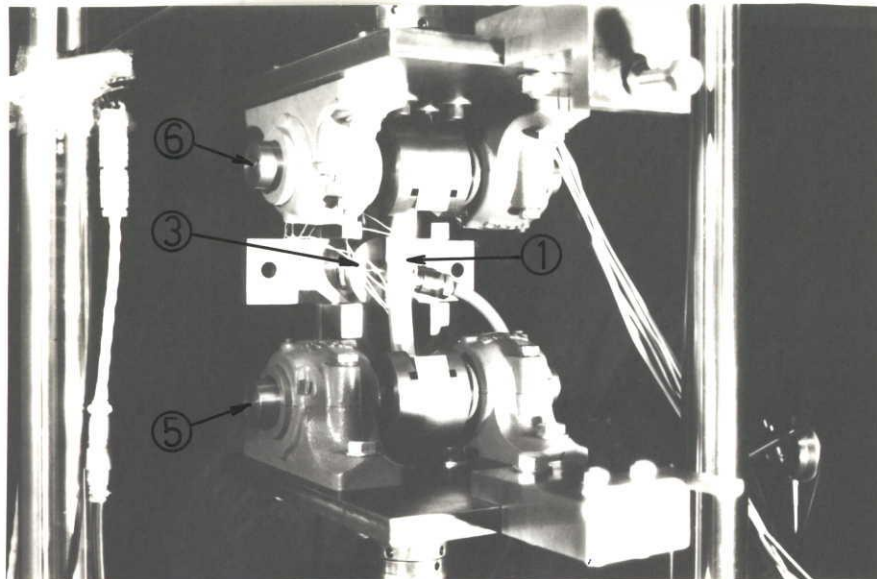


図 5. 2 アーチ端支持装置 (2) 写真

沿って平行に移動させたので、作用点の位置の誤差は±0.1mmである。またアーチ支点間の距離は油圧サーボ試験機のアクチュエータ⑦により試験中一定（誤差0.02mm以内）に保たれた。さらに上下支持装置⑤⑥の相対位置精度は0.05mm以内になるように調整した。

5. 2. 2 アーチ試験片

A2017アルミニウム合金の丸棒から、図5.3に示す円弧アーチ形に数値制御フライス盤で加工した試験片を、真空焼鈍炉を用いて焼鈍（410°Cにて2時間保持後、炉冷）し残留応力を除去した後、実験に用いた。図5.3(a)に示す試験片は、幅20mm厚さ8mmの長方形断面を持つスパン200mm高さ20mmのアーチである。これは開き角 $\alpha = 45^\circ$ 、半径 $R = 260\text{mm}$ 、厚さ比 $H/R = 0.03$ に相当する。図5.3(b)は引張軸力を受け持つキーの接着面積を大きくするために端部を厚くした試験片であり、他の部分の寸法は(a)と同様である。

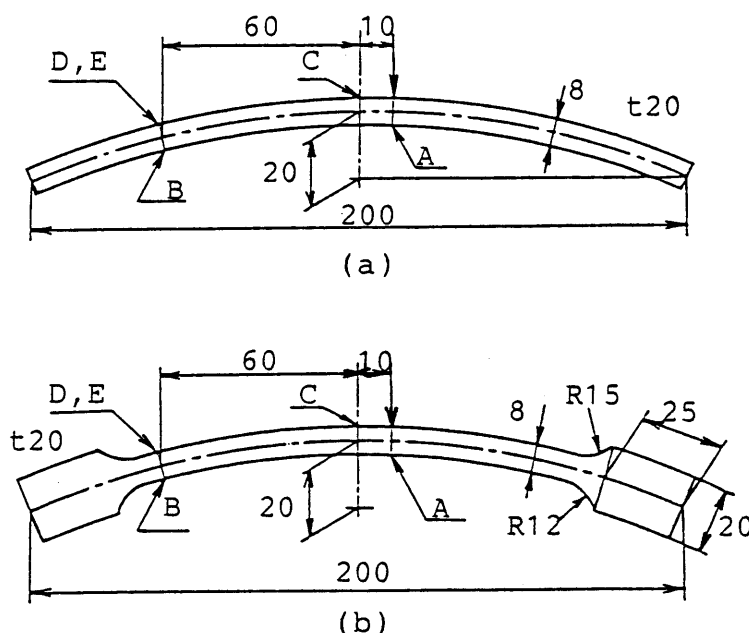


図5.3 試験片形状及びひずみゲージ貼付け位置

なお、数値計算により塑性関節が形成されると予想される2ヶ所の断面の内側（A，B）と外側（C，D，E）にひずみゲージを貼付けた。

5. 2. 3 アーチ材料の応力-ひずみ特性

飛び移り座屈の過程において、アーチの各点は、単調に増大する引張または圧縮塑性変形だけでなく、たわみの増大により塑性状態からの除荷、さらに逆方向（圧縮または引張）塑性変形を受けるので、この範囲内の応力-ひずみ特性を忠実に表すことができる下記の関係⁽⁵¹⁾を用いた。なお、これらの材料特性は、アーチ材料と同一の素材から製作し同一の条件で焼鈍した、図5. 4に示す円柱試験片を用いた引張試験および圧縮後の引張試験によって得られたものである。

縦弾性係数 $E = 75.5$ [GPa]

初期降伏応力 $\sigma_y = 86.0$ [MPa]

初期降伏ひずみ $\varepsilon_y = 1.14 \times 10^{-3}$

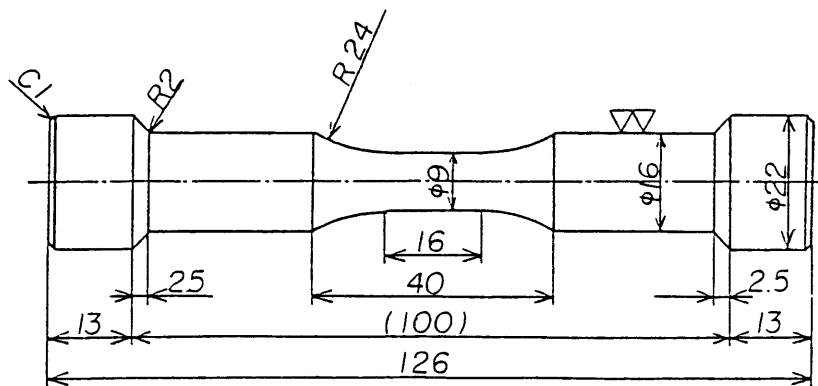


図5. 4 較正実験用試験片

単調に増大する負荷に対して（単軸引張曲線）

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

$$= \begin{cases} 75500 \varepsilon & (|\varepsilon| \leq \varepsilon_Y) \\ \pm 592(|\varepsilon| + 0.00179)^{0.331} & (\varepsilon_Y < |\varepsilon| \leq 0.0372) \\ \pm 363(|\varepsilon| - 0.0167)^{0.150} & (0.0372 < |\varepsilon|) \end{cases} \quad (5.1)$$

応力 $\bar{\sigma}$ とひずみ $\bar{\varepsilon}$ の状態からの除荷に対して

$$\sigma = \bar{\sigma} - E(\bar{\varepsilon} - \varepsilon) \quad (|\varepsilon - \bar{\varepsilon}| \leq |\varepsilon_Y^* - \bar{\varepsilon}|) \quad (5.2)$$

逆負荷塑性の降伏応力 σ_Y^* および降伏ひずみ ε_Y^* を以下のように仮定する。

$$\sigma_Y^* = \bar{\sigma} - \text{sign}(\bar{\varepsilon}) \times 2 \{ \sigma_Y + 0.3(|\bar{\sigma}| - \sigma_Y) \} \quad (5.3)$$

$$\varepsilon_Y^* = \bar{\varepsilon} - \text{sign}(\bar{\varepsilon}) \times 2 \{ \sigma_Y + 0.3(|\bar{\sigma}| - \sigma_Y) \} / E$$

ここで、 $\text{sign}(\bar{\varepsilon})$ は $\bar{\varepsilon}$ の符号である。

逆負荷塑性に対して⁽⁵¹⁾

$$\sigma = -\text{sign}(\bar{\varepsilon}) \{ f(|\bar{\varepsilon} + \varepsilon_Y^* - \varepsilon|) - C \} g + \sigma_Y^* \quad (5.4)$$

ここで、材料関数 C および g は次式で表される。

$$C = 26.68 [1 - \exp \{-24.0(|\bar{\varepsilon} - \varepsilon_Y^*|)\}] \quad (5.5)$$

$$g = 1 - \exp \left\{ - (18.0 + 0.02 / |\bar{\varepsilon} - \varepsilon_Y|) \sqrt{|\varepsilon - \varepsilon_Y|} \right\} \quad (5.6)$$

なお、式(5.1)(5.5)および(5.6)における係数の値は、応力をMPaで表示したときのものである。

図5.5に、いくつかのひずみ履歴に対する実験結果と上記の近似式による当てはめの結果を示す。これより、近似式は十分な精度を有することが確かめられる。

5.2.4 実験方法

実験では、わずかな圧縮の支点反力を加えた状態で電気油圧サーボ試験機により支点間距離を一定に保ち、図5.1の④のネジを回すことによりたわみを段階的に加え、各段階でアーチ中央部100mmのたわみ形状と、5ヶ所のひずみを測定した。集中荷重、水平反力およびアーチ中

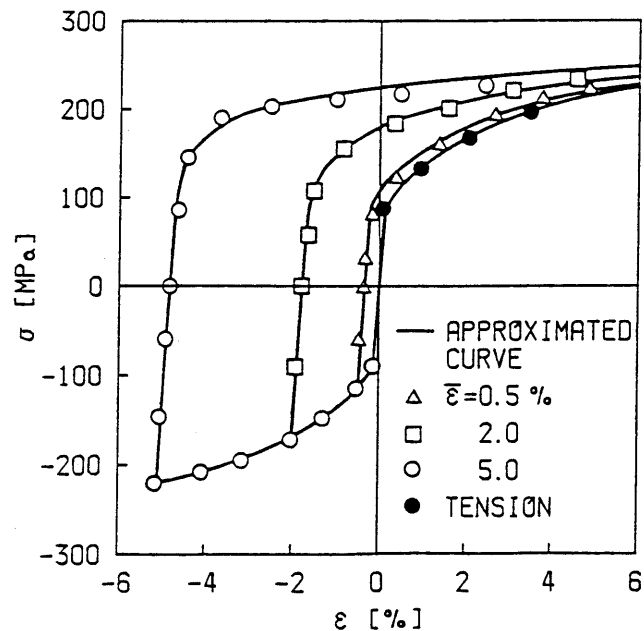


図5.5 近似応力-ひずみ関係

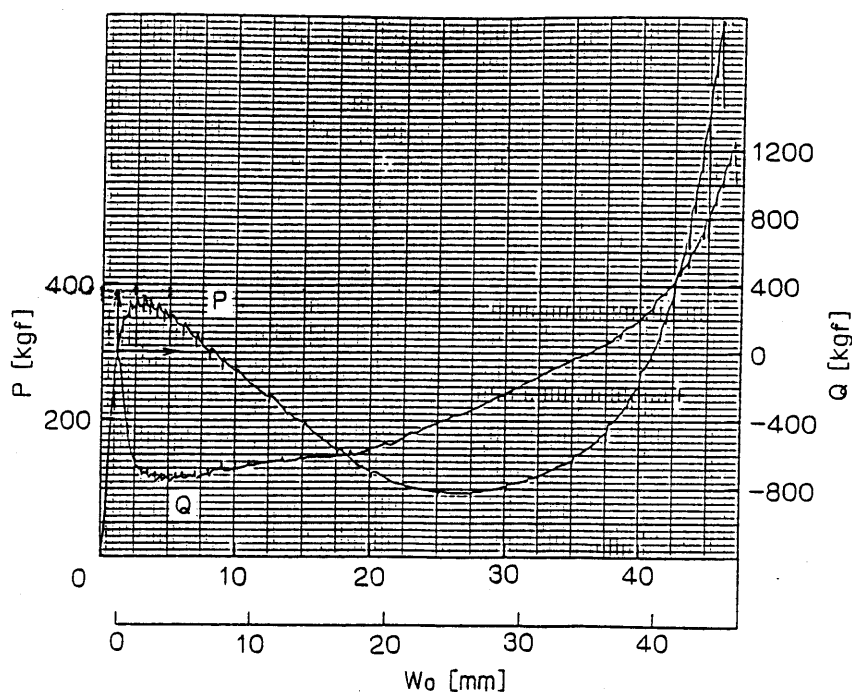


図 5. 6 実験結果：荷重－たわみ曲線
試験片 (b)

中央のたわみは、図 5. 6 に示すように連続的に X-Yレコーダに記録した。

§ 5. 3 数値解析結果との比較

以下に示す数値解析結果は、第 2 章の解析法と前節の応力－ひずみ関係式を用いて得られたものである。計算では、図 5. 3 (a) の試験片の全長を 24 要素 (全長を 20 等分し荷重作用点前後の 2 要素を更に 1/2, 1/4, 1/4 の長さに 3 分割) でモデル化し、ひずみはアーチの厚さ方向の 22 点において評価した。たわみ増分は荷重点の高さの 1/80 に設定し、荷重の変化の大きなところではさらに小さなたわみ増分を用いた。

5. 3. 1 荷重-たわみ曲線

集中荷重 P および水平反力 Q とアーチ中央のたわみ W_0 の関係を図 5. 7 と図 5. 8 に示す。試験片 (a) (b) についての実験結果を丸印と三角印で、数値解を実線で、また逆負荷塑性を無視した数値解を破線で表す。図中の白四角印は数値解析による塑性変形の開始点を、黒四角印は逆負荷塑性の開始点を表す。

数値解析で得られた臨界荷重点は、 $(W_0, P) = (1.9\text{mm}, 4.17\text{kN})$ であり、試験片 (a) を用いた実験では $(2.7\text{mm}, 3.43\text{kN})$ 、(b) では $(3.0\text{mm}, 3.63\text{kN})$ である。

図 5. 7 において、臨界荷重点まで実験結果は数値解に比べて小さい荷重を示す。この傾向はアーチが完全に弾性的に変形する範囲 (図 5. 7 の原点から白四角印の間) においてもみられる。弾性変形に対する本解法の妥当性は 3. 4. 1 項で確認されているので、この差は、アーチ

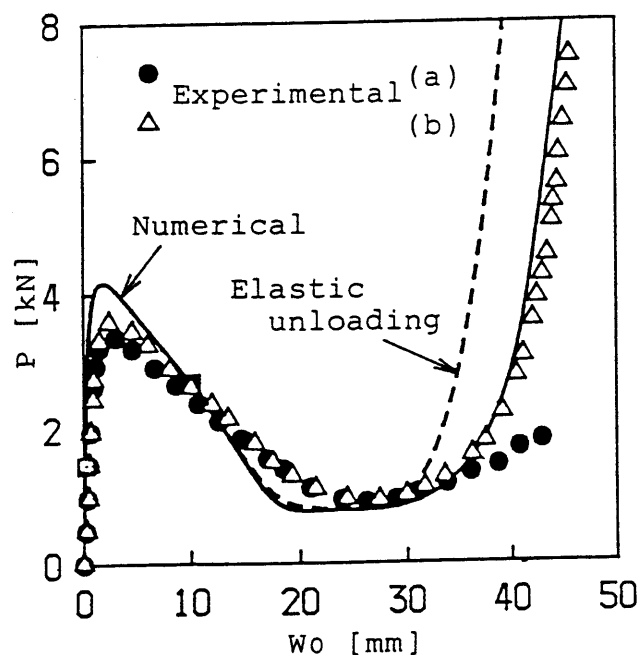


図 5. 7 荷重-たわみ曲線

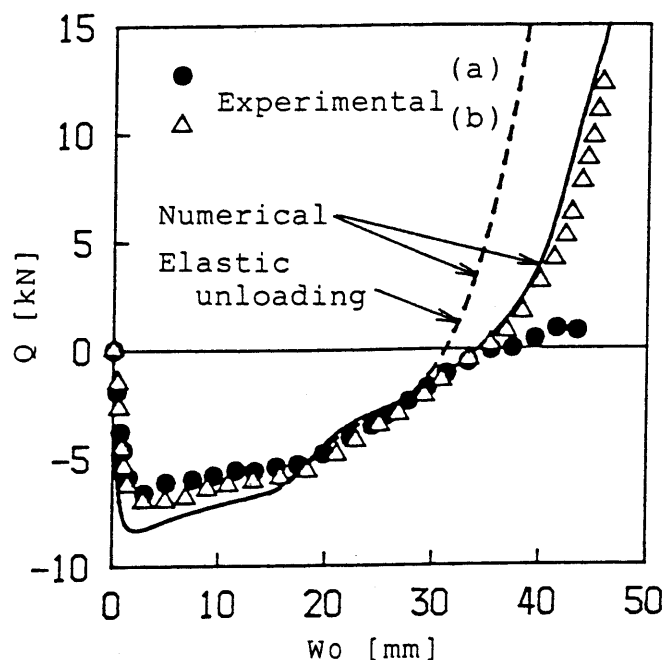


図 5. 8 水平反力-たわみ曲線

端を支持する回転軸のたわみ，および軸と試験片の結合部のわずかな変形等により，アーチ支点間の実効的距離が広がったことによる剛性の低下に起因すると考えられる。

試験片 (a) の結果は，水平反力 Q (図 5. 8) が引張になるたわみ W_0 が 35mm 以降において，試験片 (b) の結果および数値結果と異なった傾向を示す。これは，この時点で引張反力を支持すべきキーがアーチ試験片よりはがれたためである。 W_0 が 35mm 以下の範囲で試験片 (a) と (b) の荷重-たわみ曲線はほぼ一致している。また， $W_0 \geq 25$ mm では，一部を除いて本数値結果と実験結果は良好な一致を示している。

これに対し，破線で示した逆負荷塑性を無視し弾性除荷までを考慮した数値解は，たわみ $W_0 \geq 30$ mm で実験結果に比べ大きな荷重を示す。数値解によれば逆負荷塑性は図中の黒四角印の位置で出現しているが，

荷重が低下する範囲ではその影響はほとんどみられない。これは3.6.3項で示したように、逆負荷塑性域がアーチの表面ではなく、内部から現れるためである。水平反力が引張となるにつれて、逆負荷塑性を無視した解析は剛性を著しく過大評価する。荷重制御の下で飛び移りが生ずるとしたとき、解析結果でも実験結果でも、 W_0 が約42mm のとき再び安定な平衡状態へ移ることになる。その後の両結果の荷重-たわみ曲線はほぼ一致している。

図5.8に示す水平反力 Q とアーチ中央のたわみ W_0 の関係より、臨界荷重点における反力は、数値解析でも実験結果でも、横荷重の約2倍であることがわかる。図5.7に示す横荷重 P は、臨界値に達した後かなり急激に減少するのに対し、水平反力の低下はそれほど顕著ではなく、たわみがアーチの高さ程度($W_0 = 20\text{mm}$)に達するまでごくゆるやかに減少する。

水平反力が圧縮から引張に移行するのは、たわみがアーチ高さの1.7倍(約34mm)のときである。

5.3.2 アーチのたわみ形状

試験片(b)について得られたアーチのたわみ形状を、数値解と比較して図5.9に示す。実験では、変位変換器を用いてアーチの中央部100mmの範囲におけるたわみ形状を曲線として測定した。図中に示す最終形状は除荷後実験装置から取り外した形状である。この最終形状が計算結果と一致しないのはアーチ試験片のスプリングバックのためと考えられる。

アーチ中央のたわみ W_0 が10mm程度までは実験結果(実線)と数値解(破線)はほぼ一致しているが、それ以後実験結果では荷重点近傍の曲げ変形が顕著である。この原因として、実験に用いた試験片(b)では、図5.3に示したようにアーチ端部の剛性が大きいいため、変形が塑性関節が形成されるアーチ中央部と中央から左へ60mm程度の位置に

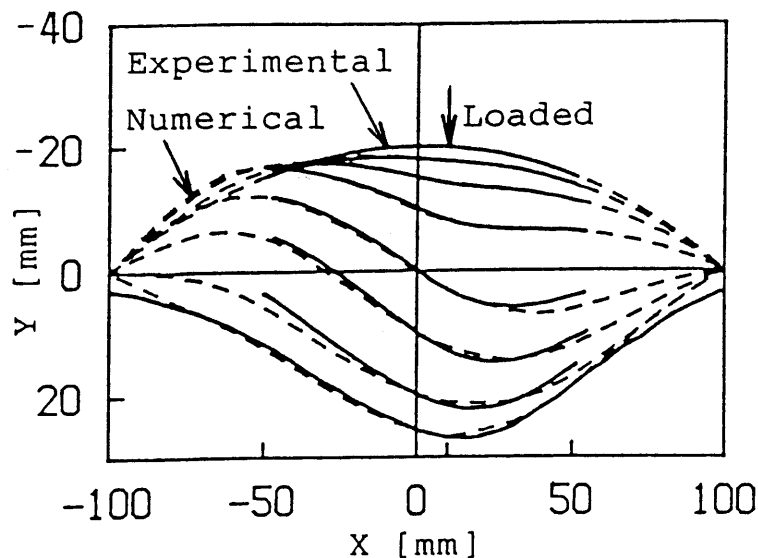


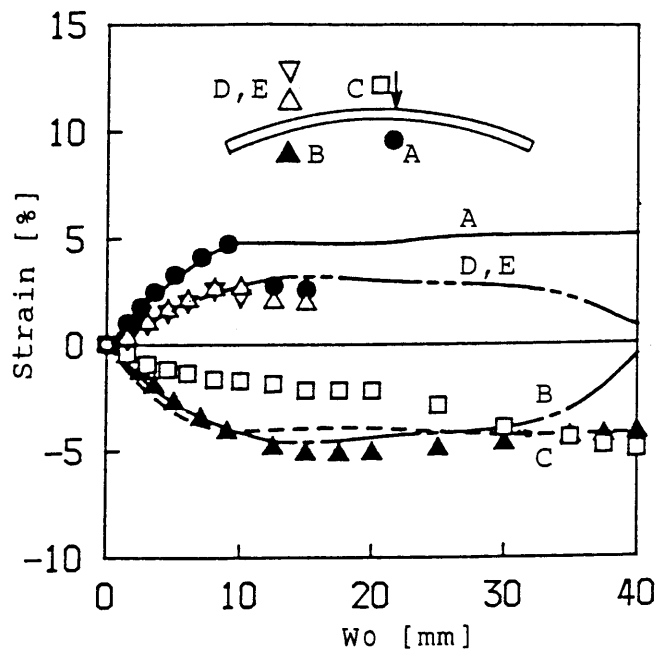
図5.9 たわみ形状 試験片(b)

集中したことが考えられる。この断面における応力分布については5.3.4項および5.3.5項にて述べる。

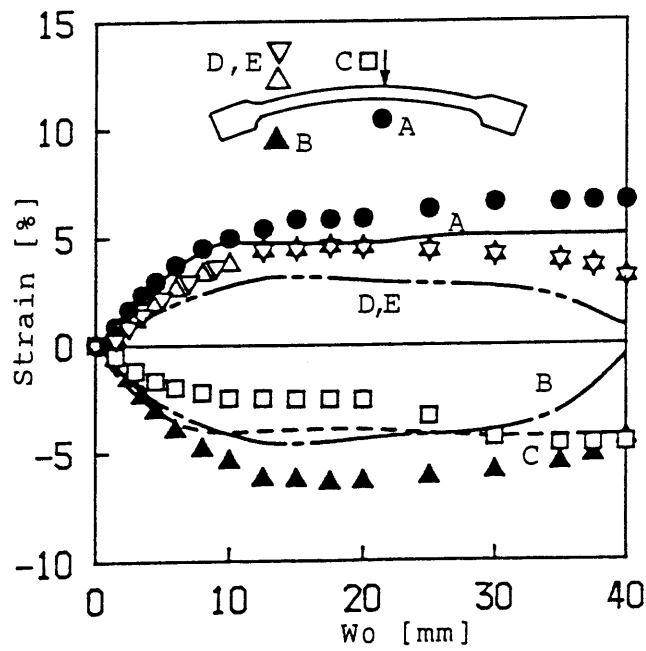
なお、実験では直接測定することができなかったが、図の破線で示すように、臨界荷重に達する前のアーチ高さの $1/10$ (2mm)程度のたわみのとき、すでにかなり非対称なたわみ形状が見られ、以後たわみの増大とともに非対称性が著しくなる。

5.3.3 ひずみとたわみの関係

図5.3に示した各位置のひずみとアーチ中央のたわみとの関係を、図5.10(a), (b)に示す。各種曲線が数値解析結果を、記号が実験結果を表す。試験片(a), (b)とも、アーチ中央から60mmの位置における荷重点側のDとE点のひずみの値はほぼ完全に一致しており、この実験において試験片のねじれはなく、軸線を含む平面内の座屈



試験片 (a)



試験片 (b)

図 5. 10 ひずみの変化

変形が実現できたといえる。

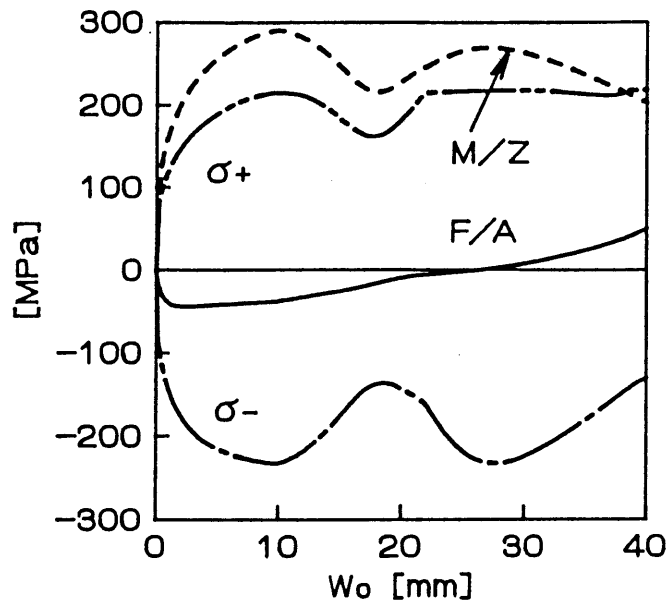
試験片(a)のAとD, E点ではゲージが途中ではがれたために, W_0 が10mm以上の範囲の測定ができなかったが, それ以下の範囲でA, B, D, E点の値は解析結果とほぼ一致している。試験片(a)で W_0 が30mm以上のとき, B点のひずみの絶対値が減少しなかったのは, 前記のように引張力を支持するためのキーが試験片からはがれたためである。試験片(a)のC点を除く各点の実験結果と数値解が一致しているのに対し, 試験片(b)では実験結果のひずみが計算結果に比べ大きな値を示す。この理由として, 試験片(b)の端部が厚くその部分の変形がわずかであるため, ひずみゲージ貼付け位置での塑性関節の形成が促進されたことによると考えられる。

試験片(a)(b)とも, C点のひずみの絶対値は数値解よりかなり小さい。この原因としては, C点が荷重点の近くであるため, 試験片表面が荷重受座により押し込まれることにより表面に引張応力が働くこと, 荷重点がアーチのスパン方向に拘束されていなければ, アーチの変形とともにアーチ中央に向かってわずかに変位することになるが, 実験装置では荷重位置を正確に保つために荷重点の位置を固定したため, アーチと負荷装置との間に摩擦力が生じ, 引張力として作用することなどが考えられる。

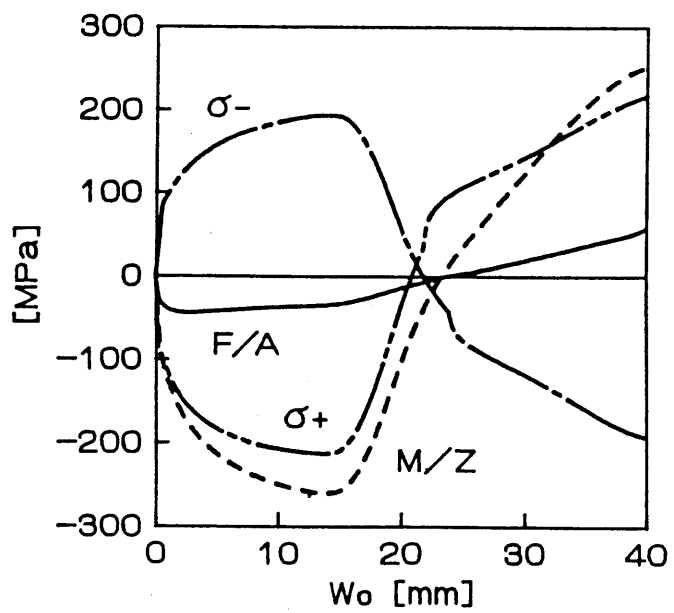
5. 3. 4 たわみと応力, 軸力, 曲げモーメントの関係

図5. 11には, 数値解で得られた, 集中荷重作用点とアーチ中央から荷重作用点と反対側に60mm離れた(図5. 3参照)断面における荷重作用側表面とその裏側の表面の応力(σ^- , σ^+), 軸力(F/A)と曲げモーメント(M/z)をアーチ中央のたわみに対して示す。

荷重作用断面の荷重と反対側の面の応力 σ^+ は, W_0 が11mmから18mmの間で値が減少し, その後18mmから再び増大し, W_0 が22mm以降ほぼ一定の値を示す。この間の応力の変化は, 弾性除荷, 弾性再負荷お



荷重作用断面



中央から荷重点の反対側60mmの断面

図5. 11 たわみと応力，軸力，曲げモーメントの関係

よび再降伏に対応する。再降伏後の応力の変化が見られないのは、ひずみ自体の変化が小さいのに加え、再降伏後の応力が初期の応力-ひずみ曲線で規定されるために、応力の変化が更に小さくなる。さらに、曲げモーメントの減少と軸力の増大がほぼ相殺されるためでもある。一方、荷重の作用する表面での応力 σ -は、軸力が圧縮である $W_0 \leq 20\text{mm}$ では曲げ応力と軸力が加算されて大きく現れるが、軸力が引張となると負の曲げ応力と正の軸力が相殺され、絶対値が減少する。これは、図5.10(b)に示す、 $W_0 \geq 25\text{mm}$ におけるA点のひずみの減少する傾向に対応する。

荷重面およびその反対側表面のいずれでも、 W_0 が10mm程度のところで応力および曲げモーメントは極値をとる。このたわみは集中荷重Pや水平反力Qが極値をとるたわみ2mm(図5.7および5.8参照)よりかなり大きい。これは、荷重作用断面に塑性関節が形成され剛性が低下しているため、他の部分が除荷を受ける間もこの部分の変形がしばらく進行するためと考えられる。

アーチ中央から荷重点の反対側60mmの位置の断面では、 $W_0 < 23\text{mm}$ で上に凸に曲げられるが、その後曲げ戻される(図5.9)。これに伴い、この断面の表面の要素は $W_0 \geq 16\text{mm}$ にて弾性除荷された後、 $22\text{mm} \leq W_0 \leq 23\text{mm}$ において著しい逆負荷塑性変形を受けている。この状況は、図5.10(b)に示す $W_0 \geq 25\text{mm}$ におけるB, D, E点のひずみの減少の実験結果に対応する。なお、5.2.3項で述べたように、この材料の降伏ひずみの値は 1.1×10^{-3} 程度であるので、図5.10(b)のひずみの実験結果より弾性除荷を識別することはできない。

5.3.5 応力分布

図5.12に、数値解析によるアーチ中央から荷重点の反対側60mmの位置における断面内の応力分布を示す。縦軸はアーチの厚さ方向の位置を表わし、上が荷重作用表面である。

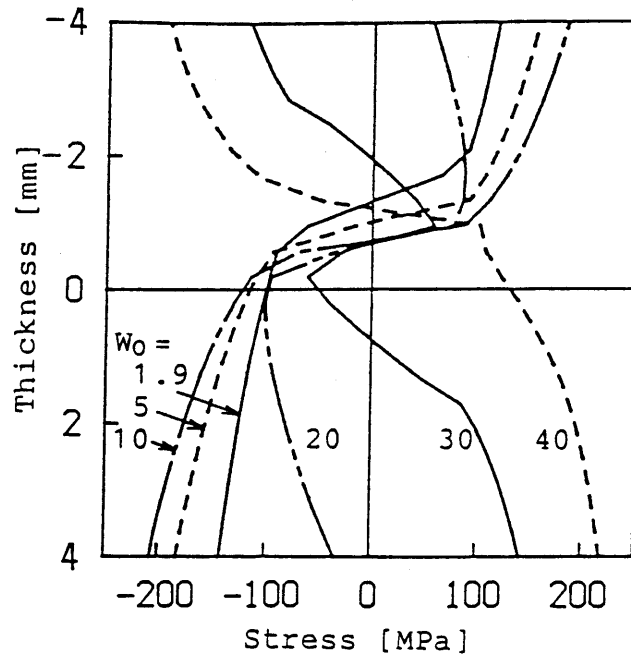


図5. 12 中央から荷重点の反対側60mmの断面の応力分布

W_0 が10mm程度するとき、中央面よりやや上側の厚さ0.5mm程度（アーチ高さの約1/16）の弾性域を除き、ほとんど引張または圧縮塑性域であり、実質的な塑性関節が形成される。 W_0 が20mmでは全断面が弾性除荷状態であり、30mmでは $z \leq -2.7\text{mm}$ および $z \geq 1.9\text{mm}$ の表面近くで逆負荷塑性域が現われ、また W_0 が40mmでは前述の弾性域を除いてほとんど全断面で逆負荷塑性状態となる。この応力分布の変化に伴うひずみの変化が、前述の図5.10(b)のB, D, E点の実験結果において、 W_0 が20mm以上で、それらの絶対値が減少する傾向として現われている。しかし、除荷の初期の段階では弾性除荷過程であるので、ひずみのわずかな減少に対して応力は大きく減少する。初期降伏ひずみは約0.1%であるから、B, D, E点のひずみの絶対値の低下は十分に逆負荷塑性変形の出現を示している。このように、ひずみの減

少からも中央断面より荷重点と反対側 60mm の断面における、飛び移り過程の著しい逆負荷塑性変形の進展が確かめられた。

§ 5. 4 結言

アーチ中央からスパンの $1/20$ だけ離れた点に集中荷重を受ける両端回転支持の円弧アーチについて、たわみ制御の面内非対称飛び移り座屈の実験を行い、以下の事柄が明らかになった。

- (1) 逆負荷塑性を考慮した解析結果は、飛び移り過程の荷重-たわみ曲線およびアーチのたわみ形状を精度よく予測できる。
- (2) 塑性負荷と弾性除荷までを考慮し、逆負荷塑性を無視した解析は、飛び移り座屈後の荷重を著しく高く評価する。
- (3) 水平反力はアーチ中央のたわみがアーチ高さとなった ($W_0 = 20$ mm) 状態でも臨界荷重時に近い値をとり、それが圧縮から引張に移行するのは、最大たわみがアーチ高さの 1.7 倍程度のときである。
- (4) 臨界荷重以後も、塑性関節の形成されると考えられる位置の応力およびひずみはしばらく増加を続ける。
- (5) 荷重点と反対側の塑性関節が生ずると予測される位置のひずみの測定結果より、この断面で著しい逆負荷塑性変形が生じていることを確認できた。

第6章 結 論

本論文では、曲げと軸力によって負荷を支える、アーチ状構造物の弾塑性状態における面内飛び移り座屈過程における挙動を、数値解析とたわみ制御の実験によって明らかにした。

塑性座屈後挙動の解析では、必然的に幾何学のおよび材料非線形性、すなわち大変形とそれによる塑性変形を考慮しなければならない。特に、飛び移り座屈過程においては、単調に増大する塑性負荷だけでなく、ある塑性状態からの弾性除荷とそれに引き続く逆負荷塑性も生ずる可能性がある。そこで本論文では、逆負荷塑性が座屈後挙動に及ぼす影響について、詳しく検討した。

各章で得られた結果は以下のように要約できる。

第1章は序論であり、本論文の目的と意義を述べるとともに、アーチの弾塑性座屈に関する従来の研究状況を要約した。

第2章では、アーチを剛体棒と非線形ばねによってモデル化し、せん断変形を無視した梁の曲げ理論と増分形の応力-ひずみ関係を用いて、updated Lagrange法による増分形の剛性方程式を導いた。このモデルでは、アーチの断面内の各点のひずみ履歴に依存する軸方向剛性および曲げ剛性は、横断面上における接線係数の厚さ方向座標についての0, 1および2次のモーメントの組み合わせとして表される。従って、アーチ厚さ方向の塑性変形状態の違いを、横断面について積分した軸方向および曲げ剛性によって考慮するので、有限要素法を用いる場合に必要となる厚さ方向の要素分割を必要とせず、解くべき連立一次方程式の次数を大幅に低下させることができ、計算時間を短縮できる。さらに、座屈後挙動を正確に追跡するため、荷重増分の代わりに一部の変位増分を規定する、変位増分法を用いた。

第3章では、中央に鉛直集中荷重または鉛直等分布荷重を受ける両端回転支持の円弧および半正弦形アーチの対称変形について、弾性状態に

おける飛び移り座屈過程の数値計算をおこない、既知の解析解と比較して、アーチ半長を10要素に分割すれば十分な精度の解が得られることを確かめた。さらに、塑性座屈後挙動を評価する際に与えるべき変位増分の大きさを検討した後、アーチの材料が塑性域でべき硬化則に従い、それに続く逆方向塑性変形が移動硬化則によって支配されると仮定し、上記のアーチ、およびそれらと同一の荷重を受ける両端固定アーチについて、弾塑性座屈後挙動を計算した。その結果、以下の事項が明らかとなった。

(1) 逆負荷塑性を無視して弾性除荷までを考慮した解析は、飛び移り後のたわみを著しく過小評価する。

(2) 同一荷重を受ける固定端および回転端アーチについて比較すると、前者の臨界荷重は後者より30%程度大きく、また前者の臨界荷重以後のたわみの増大に伴う荷重の低下はかなり小さい。

(3) 集中荷重を受けたとき、回転端、固定端のいずれのアーチでも、臨界荷重時に中央部において近似的に塑性関節が形成される。

(4) 等分布鉛直荷重の下では、臨界荷重時に回転端アーチでは塑性関節は形成されないが、固定端アーチでは中央部に次いで固定端で塑性関節が形成される。

第4章では、アーチ中央から外れた点に鉛直集中荷重を受ける回転端の円弧アーチを対象として、非対称たわみモードを伴う場合の臨界荷重および座屈後の荷重-たわみ曲線を数値解析によって求めた。その結果以下の点が明らかとなった。

(1) 荷重がアーチ中央と支持端のほぼ中央に作用するとき、臨界荷重は最も小さい。

(2) この時の臨界荷重値は、中央に荷重が作用する対称モードの約2/3となる。この比率は弾性アーチについて得られた値とほぼ等しい。

(3) アーチが薄い(アーチ半径に対する厚さの比 $H/R=0.005$)場合は非対称モードが顕著であるが、アーチの厚さの増大とともに、変

形モードの非対称性が弱くなり、臨界荷重値も中央に荷重を受ける場合に近づく。

(4) 塑性関節は荷重作用点とそれと反対側の支点よりやや離れた点で形成され、たわみ形状はN字形を呈する。

(5) 臨界荷重に達するまでの座屈前変形においても、たわみ形状はかなり著しい非対称性を示す。

第5章では、飛び移り座屈の前における圧縮の支点反力と飛び移り後の引張反力の両方を支えることのできる実験装置を用い、アルミニウム合金製の回転端円弧アーチ試験片について、たわみ制御の飛び移り座屈実験を行ない、その過程における横荷重、水平支点反力、たわみ形状等を測定し、上記の数値解析結果と比較した。この結果、以下の点が明らかになった。

(1) 逆負荷塑性を考慮した解析結果は、飛び移り前後の荷重-たわみ曲線、たわみ形状を精度よく予測できる。

(2) これに対し、塑性負荷と弾性除荷までを考慮した解析は飛び移り過程後半および飛び移り後の荷重を著しく過大評価する。

(3) 荷重点と反対側の塑性関節が生ずると予測される位置のひずみの測定結果より、この断面で著しい逆負荷塑性変形が生じていることを確認できた。

本論文では、主に、一様厚さの円弧アーチの弾塑性座屈後挙動を扱ったが、本解析法は数値解法であるので、任意の形状の一次元部材の面内変形の解析、例えば非一様厚さのアーチ、ならびに初期不整や残留応力を有するアーチ、円環補強材等の変形解析にも応用できる。構造部材として用いられる円管の塑性曲げ座屈の解析に対しても、本論文の方法を二次元に拡張し、二次元の弾塑性構成式と組み合わせることにより可能となるものと考えられる。

参考文献

- (1) Malvick, A.J. and Lee, L.H.N.; Buckling Behavior of an Inelastic Column, Proc. ASCE. J. Eng. Mech. Div., Vol.91, No.3, (1965), P.113-127.
- (2) Дикович, И.Л.; Поведение Упруго Пластического Стержня при Потере Устойчивости от Осевого Сжатия, Мех. Твердо Тела, No.4, (1976), С.98-107.
- (3) Kawashima, K. and Obata, S.; Reversed Yield and Plastic Buckling, Proc. ASCE. J. Eng. Mech., Vol.110, No.3, (1984), P.1005-1010.
- (4) 川嶋紘一郎・小島正友・伊藤智啓; 初期不整を有する柱の逆負荷塑性を考慮した座屈後挙動の解析, 日本機械学会論文集, A編, Vol.52, No.476, (昭61), P.1158-1163.
- (5) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.; Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill., (1963), P.31.
- (6) Calladine, C. R.; Inelastic Buckling of Columns: The Effect of Imperfections, Int. J. Mech. Sci., Vol.15, No.7, (1973), P.593-604.
- (7) 川井忠彦・近藤一夫; 有限要素法における新しい梁及び平板曲げ要素, 生産研究, Vol.28, No.9, (昭51), P.409-412.
- (8) Prager, W.; Problem Type in the Theory of Plastic Materials, J. Aero. Sci., Vol.15, (1948), P.337-341.
- (9) Shanley, F.R.; Inelastic Column Theory, J. Aero. Sci., Vol.14, No.5, (1947), P.261-267.
- (10) Hutchinson, J.W.; Post-Bifurcation Behavior in the Plastic

- Range, J. Mech. Phys. Solids, Vol.21, (1973), P.163-190.
- (11) В. Д. Ключников; Устойчивость Упруго-Пластических Систем, (1980), С.138, Наука.
- (12) 川井忠彦編; 離散化極限解析法に関する最近の話題, 生研セミナーテキスト, コース116, 生産技術研究奨励会, (昭61).
- (13) 川井忠彦・都井裕・竹内則雄; 不連続体力学のすすめ(その1~その7), 生産研究, (昭55~昭59).
- (14) 都井裕・川井忠彦; 薄肉構造の離散化極限解析(その2~その5), 日本造船学会論文集, No.151~154, (昭57~昭58).
- (15) 都井裕・川井忠彦; 円形アーチ・球殻の解析における新しい離散化モデル, 日本造船学会論文集, No.144, (昭54), P.288-295.
- (16) von Kármán, T.; Untersuchungen über Knickfestigkeit, Mitteilungen über Forschungsarbeiten, VDI, H.81, (1910).
- (17) Engesser, F.; Die Knickfestigkeit Gerader Scäbe, Zentrolblatt der Bauverwaltung, H.11, (1893), S.483.
- (18)-(21) Hill, R.; On the Problem of Uniqueness in the Theory of a Rigid/Plastic Solid I-IV, J. Mech. Phys. Solids, Vol.4, (1956), P.247-255. Vol.5, (1956), P.1-8. Vol.5, (1957), P.153-161. Vol.5, (1957), P.302-307.
- (22) Hill, R.; On Uniqueness and Stability in the Theory of Finite Elastic Strain, J. Mech. Phys. Solids, Vol.5, (1957), P.229-241.
- (23) Hill, R.; Stability of Rigid-Plastic Solids, J. Mech. Phys. Solids, Vol.6, (1957), P.1-8.
- (24) Hill, R.; A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids, J. Mech. Phys. Solids, Vol.6, (1958), P.236-249.

- (25) Hill, R.; Uniqueness in General Boundary Value Problems for Elastic or Inelastic Solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.9, (1961), P.114-130.
- (26) Hutchinson, J.W.; Plastic Buckling, *Adv. Appl. Mech.*, Vol.14, (1974), P.67-144, Academic Press.
- (27) Onat, E.T. and Prager, W.; Limit Analysis of Arches, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.1, No.2, (1953), P.77-89.
- (28) 横尾義貢・山肩邦男; アーチの終局状態に関する研究 (集中荷重載荷の場合), *日本建築学会論文報告集*, No.58, (昭33), P.49-56.
- (29) 横尾義貢・山肩邦男; アーチの終局状態に関する研究 (等分布荷重載荷の場合), *日本建築学会論文報告集*, No.59, (昭33), P.74-80.
- (30) 山崎徳也・石川信隆; 円弧アーチの弾塑性解析, *土木学会論文集*, No.158, (昭43), P.1-16.
- (31) Mikkola, M.J., Plaut, R.H. and Sheu, H.H.; Stability of an Elastic-Plastic Arch Model under Multiple Loads, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.19, No.12, (1983), P.1027-1034.
- (32) 新家徹・頭井洋・波田凱夫; アーチの面内非弾性座屈および終局耐荷能力の解析, *土木学会論文報告集*, No.244, (昭50), P.57-69.
- (33) Lee, H.N. and Murphy, L.M.; Inelastic Buckling of Shallow Arches, *J. Eng. Mech., Proc. ASCE*, Vol.94, No.1, (1968), P.225-239.
- (34) Harries, H.; Traglasten stählerner Zweigelenbögen mit ausgebreiteten Fließzonen, *Der Stahlbau*, H.6 und H.8, (1970), S.170-177 und S.248-252.
- (35) Padovan, J. and Tovichakchaikul, S.; Algorithms for Elasto-Plastic-Creep Postbuckling, *Proc. ASCE, J. Eng. Mech.*, Vol.110, No.6, (1984), P.911-929.

- (36) Batoz, J.L., Jameux, J.P. and Lebouvier, F.; Buckling and Post-Buckling of Plane Arches, Rings and Frames, ASME Press. Vessels. Pip., Vol.89, (1984), P.165-171.
- (37) 吉田裕・増田陳紀・松田隆, 薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法, 土木学会論文報告集, No.288, (昭54), P.41-55.
- (38) 伊藤文人・野上那栄・尾崎浩明; 剛体棒要素モデルによるアーチの面内座屈解析, 構造工学論文集, Vol.33A, (昭62), P.27-40.
- (39) 新家徹・頭井洋・波田凱夫; アーチの面内耐荷能力解析と模型実験, 土木学会論文報告集, No.263, (昭52), P.11-23.
- (40) 前田幸雄・藤本一男; 2ヒンジアーチの塑性崩壊荷重の算定について, 土木学会論文報告集, No.174, (昭45), P.25-40.
- (41) Ito, T. and Kawashima, K.; Numerical Analysis of Post-Buckling Behavior of Elastic Plastic Arches, Computational Mechanics '86, III, P.185-190, Springer-Verlag.
- (42) 伊藤智啓・川嶋紘一郎; 弾塑性アーチの座屈後挙動に及ぼす逆負荷塑性の影響, 日本機械学会論文集, A編, Vol.53, No.490, (昭62), P.1118-1123.
- (43) Riks, E.; An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems, Int. J. Solids Struct., Vol.15, No.529, (1979), P.529-551.
- (44) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.; Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, (1963), P.278.
- (45) Column Research Committee of Japan (edit); Handbook of Structural Stability, Corona, (1971), P. II 72-134.
- (46) Tvergaard, V. and Needleman, A.; On the Buckling of Elastic-Plastic Columns with Asymmetric Cross-Sections, Int. J. Mech. Sci., Vol.17, No.6, (1975), P.419-424.

- (47) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.; Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, (1963), P.305.
- (48) Pflüger, A.; Stabilitätsprobleme der Elastostatik, (1975), P.405, Springer-Verlag.
- (49) Creighton, A.J. and Tee, R.S.; Snap-Through Buckling of Thin Arched Ribs, J. Roy. Aero. Soc., Vol.66, (1962), P.237-240.
- (50) Plaut, R.H.; Influence of Load Position on the Stability of Shallow Arches, J. Appl. Math. Phys.(ZAMP), Vol.30, (1979), P.548-552.
- (51) 川嶋紘一郎・吉田隆文; 日本機械学会論文集, A編, Vol.50, No.451, (昭59), P.417-423.

謝 辞

本研究にあたり終始幅広い立場からご指導いただきました名古屋工業大学機械工学科川嶋紘一郎教授，論文をまとめるに際して有益な御教示を賜りました名古屋工業大学社会開発工学科松浦聖教授ならびに機械工学科水野高爾教授に感謝致します。

昭和63年3月

伊藤 智啓