博 士 論 文

2次元の線形切欠き力学に関する研究

1989年1月

飯 田 宇 朗

博　士　論　文

2次元の線形切欠き力学に関する研究

昭和６４年１月

名古屋工業大学大学院博士後期課程

社会開発工学専攻

飯　田　宇　朗

目　　次

論文要旨

題目：２次元の線形切欠き力学に関する研究

名古屋工業大学大学院博士後期課程
社会開発工学専攻　　　　　　　　　飯　田　宇　朗

クラック発生等による構造物の破壊の多くが応力集中に因ることから、応力集中部の研究は、実験的にも解析的にも古くからなされている。このような過去の数多い研究が、工学的に応力集中部の解析がいかに重要であるかを示している。又、近年線形破壊力学の利用と共にクラックの応力拡大係数の解析が必要とされている。

本論文の主目的の一つは、応力集中が一般に局所的現象であることから、応力集中箇所に注目したとき、形状的にその多くは、先端に丸みのあるＶ字形にモデル化できることに着目して、任意の外力に対して、隅角部の角度と、その先端が鋭い場合及び丸みのある場合を考え、応力集中現象一般に成り立つ関係を解明することである。

そのために鋭い隅角部付近で一般に成り立つ応力の式、丸みのある隅角部先端の応力集中の一般表示式、隅角部の強さと応力集中との関係、鋭い又は、丸みのある切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数を求める式等、切欠き一般に成り立つ関係を求め、これらを相互に関連づけることによって切欠きの力学の一体系を確立するとともに、切欠きの力学とクラックの力学とを結びつける。

解析は、よく利用される平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題を扱い、自由境界、固定境界の場合を対象とした。

第２の目的は、工学的に必要な、半無限板の縁にある三角形切欠き、隅角部に丸みのあるＹ字形帯板、無限板中にある矩形孔について、各々切欠きの角度、丸みの曲率半径、孔の角度を変えて応力を解析し、応力分布を求めること、隅角部の応力分布の特性、隅角部先端の丸みと応力集中との関係の考察をすること、又、応力集中部から発生したクラックとして、三角形切欠きから発生したクラック、矩形孔から対称に発生したクラックの応力解析を行ない応力拡大係数を求めることである。

以下、本論文の主な内容を示す。

① 応力集中部の解析に有効な、分数式の和の形の有理写像関数とMuskhelishviliの方法を用いて、半無限板の縁にある三角形切欠きについて、切欠きの角度を変化させ、平面

弾性問題、薄板の面外曲げ問題として応力解析をする。そして角度の違いによる応力分布の特性について考察する。次に、隅角部に丸みのあるY字形帯板について、丸みの曲率半径を変化させて同様に応力解析をし、曲率半径と応力集中との関係について考察する。さらに、無限板中の矩形孔について、矩形孔の角度を変化させて、同じ様に応力解析し、角度の違いによる応力分布の特性について考察する。

② 応力集中部からのクラック発生による破壊の問題を考察するため、半無限板の縁にある三角形切欠きの先端から発生したクラックについて、切欠きの角度、クラック長を変化させ、応力分布の他、平面問題と面外曲げの応力拡大係数を求めて、角度の影響、クラック長と切欠きの関連、ポアソン比との関係について考察する。又、無限板中の矩形孔から対称に発生したクラックについても、矩形孔の角度を変化させて、応力拡大係数を求め、角度の影響、クラック長と矩形孔の関連、ポアソン比との関係について考察する。

③ 切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を求める一つの方法として、クラック発生前の応力分布を用いる近似式を示す。この式は、クラック長の平方根と、そのクラック長に相当する位置のクラック発生前の応力値に、ある係数を乗じたものである。そしてこの式によって得た計算値と解析値とを比較して近似式が十分な精度を有することや、工学的な利用のしやすさについて示す。

④ 三角形切欠き、隅角部のある帯板、矩形孔等の応力集中部における応力成分は、隅角部先端近傍の応力分布で表わされるので、これより「隅角部の強さ(Intensity of Corner)」という係数を定義する。この係数によってクラックの場合を含めて、任意の角度の隅角部先端近傍の応力分布の特性が表わされることを示す。さらに、平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題の、自由境界、固定境界の場合につき、この隅角部の強さと先端に丸みのある任意の角度の隅角部先端の応力集中値との間の荷重条件に依存しない関係を見い出す。

⑤ 応力拡大係数を求める近似式と、隅角部の強さを用いて、任意の角度のV字形切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が簡便に求められることや、任意のV字形切欠きの危険性が比較できることを示す。

⑥ 最後に切欠きの力学のまとめとして、鋭い隅角部付近の応力分布、丸みのある隅角部先端の応力集中の一般表示式、隅角部の強さと応力集中との関係、鋭い又は、丸みのある切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数を求める式等、切欠き一般に成り立つ関係を相互に関連づけることによって、切欠きの力学の一体系を確立しクラックの力学に結びつけられることを示す。

第１章　序　　論

一般に応力集中は、切欠き、部材断面急変部、部材交差部、変位拘束部等の構造的な原因、あるいは材料中の空隙、欠陥、介在物の存在等の材料的な原因による応力の不均一性によって生ずる。クラック発生等による破壊の多くがこれらの応力集中に因ることから、応力集中部の研究は実験的にも、解析的にも古くから数多くなされ、Savin(1961) 、Peterson(1966)、西田(1981)、Neuber(1985)等によってまとめられている。これら、過去の数多い研究が工学的に応力集中部の解析がいかに重要であるかを示している。

工学的必要性から、応力集中一般に成り立つ法則を見い出す研究もされており、Neuber(1958)は浅い切欠きと深い切欠きから応力集中を近似する有名な三角則を示している。西田(1967)は、切欠きの角度、深さ、切欠き先端の丸みの曲率半径と応力集中との関係を光弾性実験によって系統的に研究している。Heywood(1952) も同様の研究をしている。平野(1950)は、複雑な形状の孔や切欠きを等価な楕円に置き換えることによって、応力集中をより簡単に表わす方法を示している。Nisitani(1987)は、切欠きの要素を丸みの曲率半径と応力集中値で表わし、だ円孔を例にとり、先端近傍の応力分布や、だ円孔から発生したクラックの応力拡大係数がそれらの要素で表わせることを示している。
Carpinteri(1987)は隅角部先端の応力分布の特異性について、一般化した応力拡大係数を定義し、切欠きの相似則を実験をもとに研究している。長谷部(1971)、Hasebe,et al (1986 a 、b)は、切欠き先端の丸みの曲率半径を用いた応力集中係数の一般的な表示式を表わした。このように系統的な研究もされているが、まだ多くの一般的法則が見い出されているわけではない。

又、近年線形破壊力学の利用と共に多くの応力拡大係数が求められ、その結果も、Sih, et al.(1962)、Tada,et al(1973)、Rooke and Cartwringht(1976) 、Murakami et al. (1986)によってハンドブックとしてまとめられている。その中には、応力集中部から発生したクラックの解析も多く示されている。Lukas and Klesnil(1978) 、中井ら(1984)は、応力集中部の曲率半径を用いて応力拡大係数を求める近似式を、Williams and Isherwood (1968)は、円孔の場合に、クラック発生前の応力分布を用いて応力拡大係数を求める方法を提案している。Kobayashi(1986) は、等価な長さのクラックを仮定し、クラック発生前の応力分布をその仮定したクラックに作用させた時の応力拡大係数を近似値とする方法を示している。しかし応力集中部に発生したクラックについて成り立つ一般的な法則はまだ多くは見い出されていない。

本論文では、応力集中が一般に局所的現象であることから、応力集中箇所に注目すると、形状的にその多くは、先端に丸みのあるＶ字形にモデル化できることに着目し、隅角部角度２等分線に対称な形状で、その先端に丸みのある場合、鋭い場合の隅角部の応力集中現

象一般に成り立つ関係を解明する。

鋭い隅角部先端付近の応力分布の特性について、「隅角部の強さ(Intensity of Corner)」という係数を定義して、その特性を定量的に表わす。そして丸みのある隅角部先端の応力集中の一般表示式から隅角部の強さと応力集中との、形状、荷重条件によらない関係式を示す。

又、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を求める一つの方法を示す。これは、クラック発生前の応力分布を用いる方法であるが、解析結果と比較して、十分な精度で応力拡大係数が求められること、工学的な利用のし易さ等を示す。さらにクラックが短かい場合には、その応力拡大係数が隅角部の強さで求められることも示す。

そして解明した、応力集中一般に成り立つ鋭い隅角部付近の応力分布、丸みのある隅角部先端の応力集中の一般表示式、隅角部の強さと応力集中との関係、鋭い又は、丸みのある切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数を求める式等、切欠き一般に成り立つ関係を相互に関連づけることによって切欠きの力学の一体系を確立するとともに、その切欠きの力学とクラックの力学とが結びつけられることも示す。

解析は、工学的によく対象とされる平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題の２次元の場合を扱い、自由境界、固定境界の場合を対象とする。自由境界は、切欠きや孔等の境界条件の場合に、固定境界は、構造的に作られた固定辺や、異種材料接合部で一方が剛な場合、剛体介在物等の境界条件に相当している。固定境界は、自由境界に対するもう一方の極限の場合で、一般の工学的な種々の接合問題はそれらの中間の状態であろう。そこで、両極限の状態を解明しておけば、中間の状態の類推が可能となる。さらに、種々の中間の状態を包括し、両極限を許容値とする考え方も工学的利用の立場から見て十分実用的である。

又、任意の応力状態は、隅角部の２等分線に対称な応力状態と、逆対称な応力状態に分けられるので、各々の状態で考察すればよく、本論文でも対称と逆対称の応力状態の解析をする。

次に、応力解析であるが、平面弾性問題及び薄板の面外曲げ問題については、理論体系はほぼ完成されているものの、閉じた解が得られる場合はある程度限られてしまう。これは、形状や荷重条件等を解析できる形で表わさなければならないが、特別な場合を除いて容易ではないことによる。これが理論解析の困難な理由の一つであり、これを解決するために多くの人々の努力が費された。歴史を紐解けば、Kirch(1898) は極座標によって、引張りを受ける一円孔のある無限板の応力を解析した。さらにHowland(1930) は、一円孔のある帯板の解析を行っている。次にLing(1947)は、半円切欠きのある帯板の解析をした。このように比較的簡単な形状の問題でも、解析解を得ることは難しく、現在も通用する研究内容である。このような中でMuskhelishvili(1963)は、境界条件式を微分積分方程式に変換し、Goursat(1898) によって示された、重調和微分方程式の一般解と、複素変数とに

写像関数を導入し、特に単位円への写像関数が有理関数である場合には、多元一次の連立方程式を解くことによって閉じた解が得られることを示した。この方法では有理写像関数の表わす形状に対して厳密解が得られる。さらに、有理写像関数に分数式の和の形の関数を用い、かなり任意の形状についても精度よく厳密解が得られることを岡林、長谷部が詳しく示している。そしてこの方法は平面弾性問題と同様、薄板の面外曲げ問題についても解析できる有効な方法である。

本論文で扱う弾性体は、変位は微小とする線形弾性体であり、方向性をもたない等方性弾性体である。そして、先に述べた解析方法を用い、工学的に有用な半無限板の縁にある三角形切欠き、隅角部に丸みのあるY字形帯板、無限板中の矩形孔について、各々切欠きの角度、丸みの曲率半径、孔の角度を変え平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題として応力解析をする。そして、鋭い隅角部付近の応力分布の特性、丸みのある隅角部先端の曲率半径で表わされる応力集中一般表示式、隅角部の強さと応力集中との関係等について考察する。

半無限板の縁にある三角形切欠きは、構造物の表面にある切欠きやモデル化した欠陥、有限巾の構造物の縁にある切欠きでも、切欠きの大きさと巾の比がある程度小さい場合に相当する。Y字形帯板は部材交差部等に、矩形孔は構造物における種々の貫通孔に相当する。

さらに、三角形切欠きから発生したクラック、及び矩形孔から対称に発生したクラックについて、各々切欠き、矩形孔の角度を変え、平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題として応力解析をする。それぞれの問題の応力拡大係数を求め、角度とクラック長との関係、ポアソン比との関係についても考察する。

応力解析の方法は大きく分けて、理論解析と数値解析の２通りある。数値解析としては、差分法、有限要素法を始めとし、境界要素法、体積力法等があり、各々多くの解析がなされている。どちらの方法も一長一短であり、画一的に優劣を決めることはできないが、本論文の内容のような応力集中部やクラック等、応力特異点の解析には、解析解が求まるものならば解析解の方がよい。

以下、本論文の構成を示す。

第２章では、本論文の応力解析に用いる理論解析の概略を示す。

第３章では、第２章に述べた解析方法を用い、応力集中の代表的な形状として、半無限板の縁にある切欠き、Y字形帯板、孔のある無限板について解析する。半無限板の縁にある三角形切欠きについて、切欠きの角度を変化させ、平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題として応力解析をする。そして角度の違いによる応力分布の特性について考察する。次に、隅角部に丸みのあるY字形帯板について、丸みの曲率半径を変化させて、同様に応力解析し、曲率半径と応力集中との関係について考察する。さらに、無限板中の矩形孔について、

矩形孔の角度を変化させて、同様に応力解析し、角度の違いによる応力分布の特性について考察する。また、応力集中部からのクラック発生による破壊の問題に対しても考察するため、三角形切欠きから発生したクラック、矩形孔から対称に発生したクラックについてクラック長を変化させ、同様の応力解析をする。

第４章では、工学的に重要な、半無限板の縁にある三角形切欠きの切欠き先端から発生したクラックについて、切欠きの角度を変化させ、モードⅠと面外曲げの応力拡大係数を解析し、角度の影響、クラック長と切欠きの関連、ポアソン比との関係について示す。又、無限板の矩形孔から対称に発生したクラックについても、矩形孔の角度を変化させ、応力拡大係数を解析し、角度の影響、クラック長と矩形孔の関連、ポアソン比との関係について示す。

第５章では、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を求める一つの方法として、クラック発生前の応力分布を用いる近似式を示す。この式は、クラック長の平方根と、そのクラック長に相当する位置のクラック発生前の応力値に、ある係数を乗じたものである。そしてこの式によって得た計算値と解析値を比較して近似式が十分な精度を有することや、工学的な利用のしやすさについて示す。

第６章、第７章では、三角形切欠き、隅角部のある帯板、矩形孔等の応力集中部における応力成分は隅角部先端近傍の応力の一般式で表わされることにより、「隅角部の強さ(Intensity of Corner)」という係数を定義する。この係数によってクラックの場合を含み、任意の角度の隅角部先端近傍の応力分布の特性が表わされることを示す。

さらに平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題において、自由境界、固定境界の場合につき、この隅角部の強さと先端に丸みのある任意の角度の隅角部先端の応力集中値との荷重条件に依存しない関係を見い出す。

第８章では、応力拡大係数を求める近似式と、隅角部の強さを用いて、任意の角度のＶ字形切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が簡便に求められることや、任意のＶ字形切欠きの危険性が比較できる一方法を示す。

第９章では、切欠きの力学のまとめとして、鋭い隅角部付近の応力分布、丸みのある隅角部先端の応力集中の一般表示式、隅角部の強さと応力集中との関係、鋭い又は、丸みのある切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数を求める式等、切欠き一般に成り立つ関係を相互に関連づけることによって、切欠きの力学の一体系を示すとともに、切欠きの力学とクラックの力学とが結びつけられることを示す。

最後に第10章として本論文で解析した事柄及び得られた結果等を示す。

第２章　解析方法

２－１　まえがき

本章では主に、本論文で用いる２次元弾性問題の解析方法を示す。２次元弾性論は既に理論体系が完成しているが、任意の形状、荷重条件の場合となると、実際には、解析できない場合が多い。無限板中の円孔についてKirch （1898）、半円形切欠きについてはLing（1947）によって解析されているものの約40～90年前のことである。このように解析解を得るのは難しく、又、得られる場合もかなり限定されてしまう。しかし、工学的には、構造物の切欠き、部材断面急変部、部材交差部、変位拘束部、あるいは材料中の空隙、欠陥、介在物の存在等かなり任意の形状、荷重条件となる応力集中部の解析が必要である。本論文で用いる解析方法は、Muskhelishvili（1963）によって示された複素変数による方法であるが、この方法は対象とする形状の単位円への写像が有理関数の時、解析解が得られるものである。さらに岡林、長谷部は、単位円への写像に分数式の和の形の写像関数を用いることによってかなり任意の形状について解析解が得られることを示している。かなり任意の形状について、解析解が得られるこの方法は、工学的に必要な応力集中部等の解析にすぐれた方法と言える。弾性論は歴史も古く、多くの先駆者たちによって研究がなされ、著書にもTimoshenko and Goodier(1970)、森口繁一(1975)、鵜戸口英善（1968）、Muskhelishvili（1963）、Sokolnikoff （1956）、England(1971) を始め多くの名著がある。

２－２　有理等角写像関数

与えられた形状を単位円に等角写像する写像関数が有理関数の場合はその写像された形状に対して厳密解が得られることは前に述べた。従って与えられた形状を精度よく写像できる写像関数を作ることが重要となる。本論文では後で詳しく述べるような方法で作った分数式の和の形の写像関数を用いるが、この写像関数はかなり精度のよい写像関数である［岡林（1965）、長谷部（1971 a,b）］。

２－２－１　Schwarz －Christoffel の変換

物理面の多角形領域を写像面の単位円内部又は外部に等角写像するSchwarz －Christoffel の変換について述べる。図 2-2-1を参照して、z 平面の多角形領域を、ζ 平面の単位円内部に等角写像する。z 平面上の多角形の点A_1、A_2、A_3、…A_n に対応するζ 平

面の単位円上の点をa_1、a_2、a_3…、a_nとし、外角を$\mu_1\pi$、$\mu_2\pi$、$\mu_3\pi$、…、$\mu_n\pi$とする。ここで$\mu_1\pi+\mu_2\pi+\mu_3\pi+\cdots+\mu_n\pi=2\pi$である。Schwarz – Christoffel の変換において多角形領域と単位円内部とは次式で関係づけられる。

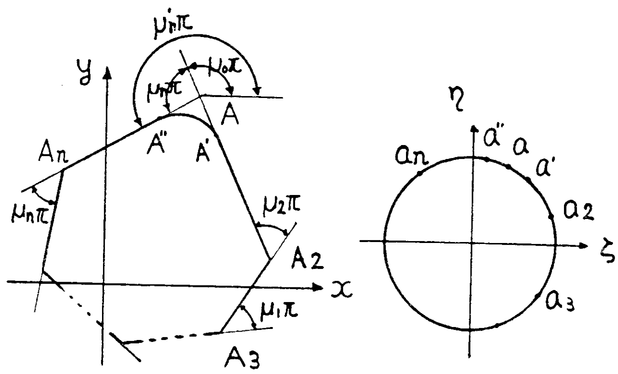


図2-2-1　多角形領域と単位円

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\log\frac{dz}{d\zeta}\right)=-\Sigma\frac{\mu_k}{\zeta-a_k}\qquad\text{2-2-1}$$

上式を積分して、

$$z=K\int(\zeta-a_1)^{-\mu 1}(\zeta-a_2)^{-\mu 2}(\zeta-a_3)^{-\mu 3}\cdots(\zeta-a_n)^{-\mu n}\,d\zeta\qquad\text{2-2-2}$$

を得る。これがｎ角形の内部を単位円内部に等角写像する式である。Ｋは図形全体のスケールに関する定数である。さらに、多角形の隅角部に曲線のある場合の写像の一方法について述べる［野村（1961）］。図 2-2-1を参照してｎ－１個の角点と１個の曲線を有する角点のあるｎ角形を考える。ｎ－１個の角点部分は式 2-2-1と同様に次式で表わされる。

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\log\frac{dz}{d\zeta}\right)=-\sum_{k=2}^{n}\frac{\mu_k}{\zeta-a_k}\qquad\text{2-2-3}$$

曲線部分については無限小の直線部を有する無限個の多角形と考えると、次式のように表される。

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\log\frac{dz}{d\zeta}\right)=-\int\frac{d\mu}{\zeta-a}\qquad\text{2-2-4}$$

ａは曲線部分に対応する単位円周上の点である。したがって曲線部分を含む多角形内部を単位円内部に等角写像する式は次のように表わされる。

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\log\frac{dz}{d\zeta}\right)=-\left[\sum_{k=2}^{n}\frac{\mu_k}{\zeta-a_k}+\int\frac{d\mu}{\zeta-a}\right]$$

$$\frac{dZ}{d\zeta}=K\left[\prod_{k=2}^{n}(\zeta-a_k)^{-\mu k}\exp\left(\int_{\zeta}\int_{\lambda 0}^{\lambda 1}\frac{1}{\zeta-a}d\mu d\zeta\right)\right]$$ 2-2-5

$\prod_{k=2}$ はk＝2～n個の乗積を表す。上式でμに関する積分は$\mu=\lambda_0$のときa＝a′，

$\mu=\lambda_1$のときa＝a''の点で曲線部と直線部が滑らかに連続するように決められる。λ_0、λ_1は曲線部と直線部の変化点である。a′としてここでは$e^{i(k\mu+c)}$の形の関数を用いる。このとき曲線は円弧とはならない。これについては第３章で具体的に示す。

２－２－２　分数式の和の形の有理写像関数

２－２－１で述べた無理関数である写像関数を、分数式の和の形で表わされる有理写像関数に近似する方法を示す。

収束の速い関数について

一般的には、もとの無理関数をべき級数に展開し、他方あらかじめ考えた分数式の和の関数を、べき級数に展開した各係数と等しくなるように分数式の係数を決定する。しかし、計算上、有限個の項の係数に対してのみ等しくなるようにせざるを得ない。ここに近似の程度が問題となる。収束の速い関数については初めから適当数の項の係数が等しくなるように分数式を決定する。項数は近似の程度、得られた解析結果の重要性、又は形状の複雑さ等によるが、一応の目安として２０乗～３０乗までくらいの項について計算すればよい。

今、収束の速い関数を無限級数に展開した式を次式のように表わす。

$$a_0+a_1\zeta+a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+\cdots$$ 2-2-6

次に作ろうとする有理写像関数を、n個の分数式の和の形として次式を考える。

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{B_j}{1-\beta_j\zeta}$$ 2-2-7

これをべき級数に展開すると、次式のようになる。

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{1-\beta_j \zeta} = \sum_{j=1}^{n} (B_j + B_j \beta_j \zeta + B_j \beta_j^2 \zeta^2 + \cdots) \qquad \text{2-2-8}$$

ここでべき級数に展開可能であることより $|\beta_j| < 1$ である。

式 2-2-6と式 2-2-8の ζ の１乗から２ｎ乗までの係数が等しくなるようにすると、次式のようにおける。

$$\sum_{j=1}^{n} B_j \beta_j^k = a_k \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots, 2n) \qquad \text{2-2-9}$$

この解は次のようにして決められる。

$$\begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots\cdots \quad + a_n x_n + a_{n+1} = 0 \\ a_2 x_1 + a_3 x_2 + \cdots\cdots \quad + a_{n+1} x_n + a_{n+2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x_1 + a_{n+1} x_2 + \cdots\cdots \quad + a_{2n-1} x_n + a_{2n} = 0 \end{array} \qquad \text{2-2-10}$$

なるｎ元連立方程式の根 x_1 、x_2 $\cdots\cdots x_n$ を係数とするｎ次方程式

$$\beta^n + x_n \beta^{n-1} + x_{n-1} \beta^{n-2} + \cdots \quad + x_2 \beta + x_1 = 0 \qquad \text{2-2-11}$$

を解いて得られる根が求める β_j である。次に B_j は求められた β_j を代入した

$$\begin{array}{l} \Sigma \; B_j \beta_j = a_1 \\ \Sigma \; B_j \beta_j^2 = a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma \; B_j \beta_j^n = a_n \end{array} \qquad \text{2-2-12}$$

なるｎ元連立方程式を解いて得られる。これらより式 2-2-7の分数式が決定される。

収束の遅い関数について

収束の遅い関数に対しても同じように次のような分数式の和の関数を考える。

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{1-\alpha_j \zeta} \qquad \text{2-2-13}$$

しかし、初めから適当数の項までの係数を等しくしたのでは収束が遅いので、よい近似が得られない。そこで、とびとびに選んだ項の係数が等しくなるようにする。たとえば次の項の係数を等しくして分数式の係数を決める。

1ブロック	1，2，3，4，5，6，7，8	
2　〃	2×8，　3×8，　4×8，　5×8	
3　〃	2×8^2，3×8^2，4×8^2，5×8^2	2-2-14
4　〃	2×8^3，3×8^3，4×8^3，5×8^3	
5　〃	2×8^4，3×8^4，4×8^4，5×8^4	

ここで最後の項5×8^4は 20480乗の項の係数を等しくすることになる。各べき乗の項の係数をa_1，a_2，a_3，…$a_{5\times8^4}$　とおくと前述と同じように

$$\begin{aligned}
&A_1\alpha+A_2\alpha_2+\cdots\qquad +A_{12}\alpha_{12}=a_1\\
&A_1\alpha_1^2+A_2\alpha_2^2+\cdots\qquad +A_{12}\alpha_{12}^2=a_2\\
&A_1\alpha_1^{5\times8^4}+A_2\alpha_2^{5\times8^4}+\cdots\qquad +A_{12}\alpha_{12}^{5\times8^4}=a_{5\times8^4}
\end{aligned} \qquad \text{2-2-15}$$

を満足するA_1，α_1，…　A_{12}，α_{12}を求めることによって分数式の係数を決定する。これは解析的には解けないので、反復繰返し計算により漸近値を求める［岡林（1965）、長谷部（1971 a）］。

このとびとびに選ぶ項の選び方も、経験上の目安と繰返計算の容易さから選んだものであり、これに限定されたものではない。理論的には収束の速い関数の場合と同じように、ζの1乗から5×8^4乗までの項の係数を等しくすることもできるが、実用上は不可能である。

2－3　平面弾性問題の解法

2－3－1　複素応力関数、有理写像関数を用いた等方性弾性体の解法（外力境界値問題、変位境界値問題）

平面弾性問題における、つり合い条件式は物体力＝0のとき次式となる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad \text{2-3-1}$$

又、適合条件式は、次式となる。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \text{2-3-2}$$

ここで、次式

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad \text{2-3-3}$$

で定義される応力関数Ｆ（ｘ，ｙ）を考えると、これはつり合い条件式 2-3-1を恒等的に満足する。適合条件式は次式となる。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \qquad \text{2-3-4}$$

上式は、重調和微分方程式である。つまり、平面弾性問題においては与えられた境界条件を満足するような応力関数Ｆ（ｘ，ｙ）を決めれば、式 2-3-3から応力値が求まる。重調和微分方程式の一般解は次式のように表される［Goursat （1898）、Muskhelishvili（1963）］。

$$F(x, y) = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)\right] \qquad \text{2-3-5}$$

複素応力関数を用いて応力成分と変位成分は次式のように表される。

$$\sigma_x+\sigma_y=4Re[\phi'(z)]=2[\phi'(z)+\overline{\phi'(z)}]$$
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\phi''(z)+\psi'(z)]$$
$$u+iv=\frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)}\right] \quad \text{2-3-6}$$

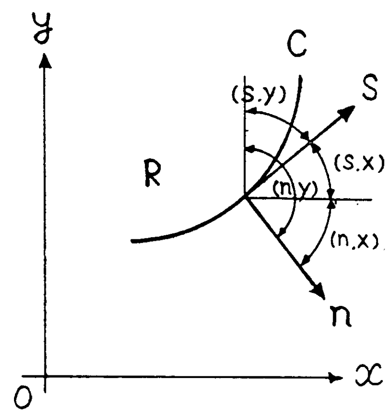
ここで$\psi(z)=\chi'(z)$である。
境界上で外力が与えられる場合、次式のようになる。

$$\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)=P_x$$
$$\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y)=P_y \quad \text{2-3-7}$$

ここで、

$$\cos(n,x)=\frac{dy}{ds}$$

$$\cos(n,y)=-\frac{dx}{ds}$$



境界上の座標

よって、

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\int P_y\,ds+C_1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int P_x\,ds+C_2 \quad \text{2-3-8}$$

又、

$$\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y}=\phi(Z)+z\overline{\phi'(Z)}+\overline{\psi(Z)} \quad \text{2-3-9}$$

であるので、まとめると次式を得る。

$$\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)}=\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial F}{\partial y}+\text{const.}$$

$$=i\int(P_x+iP_y)\,ds+\text{const.} \qquad \text{2-3-10}$$

又、z平面上の物理領域とζ平面上の単位円内（又は外）とを次のような等角写像関数で関係づける。

$$z=\omega(\zeta) \qquad \text{2-3-11}$$

このとき、物理領域と単位円内（又は外）との間に一対一の対応があるためには、正則条件より次式が成り立たねばならない。

$$\frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta}\neq 0 \qquad \text{2-3-12}$$

次に等角写像関数$z=\omega(\zeta)$を用いて応力成分、変位成分を表わす。

$$\phi(Z)=\phi[\omega(\zeta)]\equiv\Phi(\zeta),\quad \psi(Z)=\psi[\omega(\zeta)]\equiv\Psi(\zeta)$$

2-3-13

$$\phi'(Z)=\frac{d\phi(Z)}{dz}=\frac{d\Phi}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}=\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$\psi'(Z)=\frac{d\psi(Z)}{dz}=\frac{d\Psi}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}=\frac{\Psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$\phi''(Z)=\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{d\phi(Z)}{dz}\right)\frac{d\zeta}{dz}=\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right)\frac{1}{\omega'(\zeta)}$$

$$=\frac{\Phi''(\zeta)\omega'(\zeta)-\Phi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \qquad \text{2-3-14}$$

よって応力成分、変位成分は

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}[\Phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)]$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left[\overline{\omega(\zeta)}\left\{\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right\}'/\omega'(\zeta)+\frac{\Psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]$$

$$u+iv=\frac{1}{2G}\left[\frac{3-\nu}{1+\nu}\Phi(\zeta)-\omega(\zeta)\frac{\overline{\Phi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}-\overline{\Psi(\zeta)}\right] \qquad 2\text{-}3\text{-}15$$

となる。

又、写像平面での直交曲線群（円周方向ｒと半径方向θの曲線群）と物理領域での直交曲線群は、x，y軸と偏角αだけ回転し、線素は｜$\omega'(\zeta)$｜倍となっている。
写像関数の表わす曲線座標の応力成分とx，y座標での応力成分、変位成分との関係は次式となる。

$$\sigma_\theta+\sigma_r=\sigma_x+\sigma_y$$

$$\sigma_\theta-\sigma_r+2i\tau_{r\theta}=e^{2i\alpha}(\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy})$$

$$u_r+iv_\theta=e^{-i\alpha}(u+iv)$$

$$e^{-i\alpha}=\frac{\bar{\zeta}\overline{\omega'(\zeta)}}{|\zeta\omega'(\zeta)|},\qquad e^{2i\alpha}=\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{|\zeta|^2\overline{\omega'(\zeta)}} \qquad 2\text{-}3\text{-}16$$

また、境界条件式は次式となる。

$$\Phi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\Phi'(\sigma)}+\overline{\Psi(\sigma)}=f_1+if_2+\mathrm{const.}\equiv H(\sigma) \qquad 2\text{-}3\text{-}17$$

ここでσは単位円上のζである。
上式の両辺に$1/[2\pi i(\sigma-\zeta)]$を乗じ、単位円上で周回積分すると、

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\omega(\sigma)\overline{\Phi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}(\sigma-\zeta)}d\sigma$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\overline{\Psi(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma\equiv A(\zeta)$$

$$\therefore \quad \Phi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\omega(\sigma)\ \overline{\Phi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}\ (\sigma-\zeta)} d\sigma + \overline{\Psi(0)} = A(\zeta) \qquad \text{2-3-18}$$

この式がΦ（ζ）を求める式である。Ψ（ζ）はΦ（ζ）が求まれば式2-3-17の共役関係より、

$$\Psi(\sigma) = \overline{H(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\Phi'(\sigma) - \overline{\Phi(\sigma)} \qquad \text{2-3-19}$$

上式に1／［2πｉ（σ－ζ）］を乗じ、単位円上で周回積分すると、

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta} d\sigma$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{\omega(\sigma)}\ \Phi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)\ (\sigma-\zeta)} d\sigma - \overline{\Phi(0)} \qquad \text{2-3-20}$$

を得る。これがΨ（ζ）を求める式である。Φ（ζ）、Ψ（ζ）が求まれば応力成分、変位成分は式2-3-15より得られる。Φ（ζ）、Ψ（ζ）を求める式2-3-18，2-3-20において、ω（σ）を含んだ積分項は一般には解析的に解けない。しかし、ω（ζ）が有理写像関数であるときには、解析解を得ることができる［Muskhelishvili（1963）］。

さらに、本論文では、写像関数を次のような形に作って用いる。孔のある無限板や、Ｙ字形帯板について、

$$z = \omega(\zeta) = E_0\,\zeta + \sum_{k=1}^{m} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} \qquad \text{2-3-21}$$

切欠きのある半無限板について、

$$z = \omega(\zeta) = \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_{k=1}^{m} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} \qquad \text{2-3-22}$$

この場合、式2-3-18，2-3-20は各々、次のようになる。孔のある無限板について、

$$\Phi(\zeta)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{C_k}\,\overline{A_k}}{\zeta_k-\zeta}=A(\zeta)$$

$$\Psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma-\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k A_k \zeta_k'^{2}}{\zeta-\zeta_k'}$$

2-3-23

Y字形帯板について、

$$\Phi(\zeta)+\overline{C_0}\,\overline{A_0}\,\zeta+\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{C_k}\,\overline{A_k}}{\zeta_k-\zeta}=A(\zeta)$$

$$\Psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma-\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta)+C_0 A_0/\zeta$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k A_k \zeta_k'^{2}}{\zeta-\zeta_k'}$$

2-3-24

切欠きのある半無限板について、

$$\Phi(\zeta)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\overline{C_k}\,\overline{A_k}}{\zeta_k-\zeta}=A(\zeta)$$

$$\Psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma-\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta)+\sum_{k=1}^{m}\frac{C_k A_k \zeta_k'^{2}}{\zeta-\zeta_k'}$$

2-3-25

ここで、

$$C_0=\frac{\overline{E_0}}{\omega'(o)},\quad C_k=\frac{\overline{E_k}}{\omega'(\zeta_k')},\quad \zeta_k'=1/\overline{\zeta_k}$$

$$A_0=\Phi'(o),\quad A_k=\Phi'(\zeta_k{}')\qquad(k=1,2,\cdots m)$$

である。定数項は応力計算に関係しないので省略した。以上で有理写像関数の表わす形状に対して解析解が得られる。

境界条件として境界上で変位が与えられる場合の条件式は次のように表わされる［Muskhelishvili(1963)］。

$$\kappa\Phi(\sigma)-\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\Phi'(\sigma)}-\overline{\Psi(\sigma)}=2G(u+iv)$$

2-3-26

ここでGはセン断弾性係数であり、κはポアソン比で次式のように表わされる。

$$\kappa=\begin{cases}3-4\nu & (平面応力状態)\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & (平面ひずみ状態)\end{cases}$$

2-3-27

式の形が式2-3-17と同じなので、以下の計算方法は前述と同様にできる。よって応力成分、変位成分を求めることができる。

2－4　薄板の面外曲げ問題の解法

2－4－1　薄板の微小たわみ

面外変形を受ける板の問題は数多く研究されているが、本論文では一般に薄板と呼ばれる、板厚が他の寸法に比して小さく、かつ板の面外たわみが板厚に比べて小さいという仮定のもとに解析されるものを扱う。また、本論文では等方性の薄板を扱う。Timoshenko and Woinowsky-Krieger (1959), Savin (1961) 等多くの名著がある。

解析は次のような仮定のもとに行われる。

・変形前の中央面の法線上の点は、変形後もたわみ曲面の法線上にある。

・中央面に平行な面上の法線応力（σ_z）は無視され、板厚方向の変形も無視される。従って板は平面応力状態にある。

・中央面は、変形後も面内でひずむことはない。

2－4－2　たわみの複素関数、有理写像関数を用いた等方性薄板の解法（外力境界値問題、変位境界値問題）

薄板の面外曲げ問題において、たわみwで表わされたつり合い条件式は、面に垂直な荷重が0のとき次のようになる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^4} = 0 \qquad \text{2-4-1}$$

これはたわみwに関する重調和微分方程式で、平面弾性問題の場合と同じ形である。すなわち、薄板の面外曲げ問題においては与えられた境界条件を満足するたわみ関数w（x，y）を決定すれば、応力を解析することができる。

よって式 2-4-1の一般解は次のように表わされる

$$w(x,y) = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\phi(Z) + \chi(Z)\right] \qquad \text{2-4-2}$$

$\phi(Z) = d\chi(Z)/dz$とおくと、曲げモーメントやねじりモーメントは次式のように表わされる。

$$M_x = -D\left[(1+\nu)\left\{\phi'(Z) + \overline{\phi'(Z)}\right\} + \frac{1-\nu}{2}\left\{\bar{z}\phi''(z) + z\overline{\phi''(z)}\right\} + \frac{1-\nu}{2}\left\{\phi'(Z) + \overline{\phi'(Z)}\right\}\right]$$

$$M_y = -D\left[(1+\nu)\left\{\phi'(Z) + \overline{\phi'(Z)}\right\} - \frac{1-\nu}{2}\left\{\bar{z}\phi''(z) + z\overline{\phi''(z)}\right\} - \frac{1-\nu}{2}\left\{\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}\right\}\right]$$

$$H_{xy} = -iD\frac{1-\nu}{2}\left[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z) - z\overline{\phi''(z)} - \overline{\psi'(z)}\right]$$

$$N_x = -2D\left[\phi''(z) + \overline{\phi''(z)}\right]$$

$$N_y = -2iD\left[\phi''(z) - \overline{\phi''(z)}\right] \qquad \text{2-4-3}$$

また、計算上便利なようにまとめて次式のようにも表わされる。

$$M_x + M_y = -2D(1+\nu)\left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}\right]$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = 2D(1-\nu)\left[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\right]$$

$$N_x - iN_y = -4D\phi''(z) \qquad \text{2-4-4}$$

変位 $u(x, y, \delta)$, $v(x, y, \delta)$ は次式のように表わされる。

$$u + iv = -\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\delta\left\{\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}\right\} \qquad \text{2-4-5}$$

z 平面上の領域を ζ 平面上の単位円内（又は外）に等角写像する写像関数を次式とする。

$$z = \omega(\zeta) \qquad \text{2-4-6}$$

ここで、解析上この写像関数は、平面弾性問題の場合と解析する形状が同じであれば、まったく同じ写像関数を用いればよい。これはこの解析方法の利点の１つである。
複素関数 $\phi(z)$, $\psi(z)$ を次式のように ζ で表わす。

$$\phi(z) = \phi\{\omega(\zeta)\} = \Phi(\zeta)$$
$$\psi(z) = \psi\{\omega(\zeta)\} = \Psi(\zeta) \qquad \text{2-4-8}$$

又、導関数は次式のように表わされる。

$$\phi'(z) = \frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$\phi''(z) = \frac{\Phi''(\zeta)\,\omega'(\zeta) - \Phi'(\zeta)\,\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3}$$

$$\phi'(z) = \frac{\Psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

2-4-9

よって曲げモーメント等の応力成分は次式のように表わされる。

$$M_x + M_y = -2D(1+\nu)\left\{\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\Phi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}\right\}$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = 2D(1-\nu)\left[\overline{\omega(\zeta)}\left\{\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right\}'/\omega'(\zeta) + \frac{\Psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]$$

$$N_x - iN_y = -4D\left\{\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right\}'/\omega'(\zeta)$$

2-4-10

変位u，vは次式のようになる。

$$u + iv = -\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\delta\left\{\Phi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)}\right\}$$

2-4-11

さらに、形状や応力成分を求める位置によっては、写像関数の表わす曲線座標成分の方が便利な場合が多い。そのときは次式のように変換すればよい。

$$M_r + M_\theta = M_x + M_y$$

$$M_\theta - M_r + 2iH_{r\theta} = (M_y - M_x + 2iH_{xy})e^{2i\alpha}$$

$$N_r - iN_\theta = (N_x - iN_y)e^{i\alpha}$$

$$e^{2i\alpha}=\frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{|\zeta|^2\overline{\omega'(\zeta)}}$$

$$e^{i\alpha}=\frac{\zeta\omega'(\zeta)}{|\zeta\omega'(\zeta)|} \qquad \text{2-4-12}$$

法線nを持つ境界線上の曲げモーメント、ねじりモーメント、セン断力は次式のように表わされる。

$$M_n=M_x\cos^2(n,x)+M_y\cos^2(n,y)+2H_{xy}\cos(n,x)\cos(n,y)$$

$$\begin{aligned}H_{tn}=&(M_y-M_x)\cos(n,x)\cos(n,y)\\&+H_{xy}[\cos^2(n,x)-\cos^2(n,y)]\end{aligned} \qquad \text{2-4-13}$$

$$N_n=N_x\cos(n,x)+N_y\cos(n,y)$$

境界上で外力が与えられる境界条件の場合、境界線上で単位長さ当り曲げモーメントm、置換セン断力Pが与えられるときの境界条件式は、sを境界線に沿う長さとして次式のように表わされる。

$$M_n=m(s)$$

$$N_n+\frac{\partial H_{tn}}{\partial s}=P(s) \qquad \text{2-4-14}$$

よって境界条件式は次のようになる。

$$-\frac{3+\nu}{1-\nu}\Phi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\Phi'(\sigma)}+\overline{\Psi(\sigma)}=f_1+if_2\equiv M(\sigma)$$

$$f_1+if_2=\frac{1}{D(1-\nu)}\int_0^s[m(S)+i\int_0^s P(S)\,ds](dx+idy) \qquad \text{2-4-15}$$

σは単位円周上の点であり、$\sigma=e^{i\theta}$となる。右辺の荷重項は複素変数σによって表

わされる。
式2-4-15より複素関数Φ（ζ），Ψ（ζ）を求めるには、前述と同様両辺に
1／［2πi（σ－ζ）］を乗じ、単位円周上でコーシー積分を行なうことにより次式のようになる。

$$-\frac{3+\nu}{1-\nu}\Phi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\Phi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma+\overline{\Psi(0)}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{M(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma$$

$$\equiv A(\zeta)$$

$$\Psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\overline{M(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\overline{\omega(\sigma)}\Phi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)(\sigma-\zeta)}d\delta$$

$$+\frac{3+\nu}{1-\nu}\overline{\Phi(0)} \qquad \text{2-4-16}$$

式の形が平面弾性問題の場合と同じであるので、以下の計算方法は、前述と同様になり、応力成分、変位成分を求めることができる。さらに、写像関数が式2-3-21、2-3-22のように表わされている場合には、式2-4-16における積分項が置き換えられ、解析解が得られる。
曲げ剛性Dは、式2-4-16から求められる複素関数に含まれるDと、式2-4-10の応力成分の計算式に含まれるDとが打消し合い曲げモーメント等の応力成分の値には無関係である。
境界上で変位が与えられる場合の境界条件式は次のように表わされる。

$$\Phi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\Phi'(\sigma)}+\overline{\Psi(\sigma)}=\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y} \qquad \text{2-4-17}$$

ここでwはたわみ関数である。Φ（σ），Ψ（σ）を求める方法は前述と同様である。

2－5　線形破壊力学の概略

2－5－1　クラックの応力拡大係数

工学の発展は、他の分野におけると同様に、社会的必要性に起因することが多い。応力

集中に関する研究が長い歴史を有するのも、多くの構造物の破壊の原因となるのが応力集中であることによる。それ故、応力集中部の解析手法の発達、それに基づく応力解析、得られた結果の定量化、公式化、さらには応力集中緩和の方法及びその基準化等一連の研究成果があがっている。ところで、構造物の破壊機構に目を向けたとき、連続体中に存在するクラックの成長によって破壊が起ることが多い。破壊力学を確定的に定義づけるのは困難だが、主に、クラックの存在及び発生から成長による破壊現象の力学的分野を扱う学問と言えよう。線形破壊力学は、この内の一つの分野であるが、概ねはクラックを有する弾性体の応力分布や変形を線形弾性論を基に扱う学問である。逆に言えば、線形弾性論で扱い得る範囲のクラックを有する弾性体の挙動を扱う学問である。具体的には、クラック先端の塑性域の大きさが他の寸法に比べて無視できる範囲、一般に小規模降伏と言われている範囲を扱う。さて、任意の外力によって生じるクラック先端付近の応力成分σは、

$$\sigma(r,\theta)=\sum_{n=-1}^{\infty} A\left(\sqrt{r/a}\right)^{n} f(\theta) \qquad \text{2-5-1}$$

のような級数に展開できる［Irwin（1957）］。ここで、r、θは極座標、aはクラック長、A，f（θ）は形状、荷重等によって決まる係数である。式 2-5-1において、第１項には$r^{-1/2}$があるので、$r\to 0$のとき$r^{-1/2}\to\infty$の特異性をもっている。よってrが十分小さい範囲では、つまりクラック先端付近では、第１項が第２項以降に比べて大きく、応力分布が第１項のみで近似的に表わされる。よってクラック先端付近の応力分布および変位分布は次式のように表わされる。

$$\sigma_r=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left\{1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right\}-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left\{2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right\}$$

$$\sigma_\theta=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left\{1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right\}+\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\left\{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right\}$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left\{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right\}+\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left\{1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right\}$$

$$u=\frac{K_{I}}{2G}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}}\{\cos\frac{\theta}{2}(\kappa-1+2\sin^{2}\frac{\theta}{2})\}$$

$$+\frac{K_{II}}{2G}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}}[\sin\frac{\theta}{2}\{\kappa+1+2\cos^{2}\frac{\theta}{2}\}]$$

$$u=\frac{K_{I}}{2G}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}}\{\sin\frac{\theta}{2}(\kappa+1-2\cos^{2}\frac{\theta}{2})\}$$

$$-\frac{K_{II}}{2G}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}}\{\cos\frac{\theta}{2}(\kappa-1-2\sin^{2}\frac{\theta}{2})\}$$

2-5-2

ここでK_{I}：モードⅠにおける応力拡大係数、K_{II}：モードⅡにおける応力拡大係数、G：セン断弾性係数、κは式2-3-26、ν：ポアソン比である。

このように、応力拡大係数はクラック先端付近の応力分布の特性を表わす。さらに、クラックの成長について議論する時、クラック進展に伴うエネルギー解放率gは、

$K_{II}=0$のとき

$$g=\frac{1}{E'}K_{I}^{2}\qquad E'=\begin{cases}E & \text{（平面応力状態）}\\ E/(1-\nu^{2}) & \text{（表面ひずみ状態）}\end{cases}$$

2-5-3

で関係づけられる等、クラックの議論には、必ずと言ってもよいほど応力拡大係数が関連する。従って応力拡大係数を求めることは極めて重要である。又、応力拡大係数は、［応力］×［√長さ］という次元をもち、相似則についても応力集中とは異なっている。

$\sigma'=\sigma$のとき　　$\sigma'_{max}=\sigma_{max}$

$K'=\sqrt{n}K$

$\sigma'=\sigma/\sqrt{n}$のとき　　$\sigma'_{max}=\sigma_{max}/\sqrt{n}$

$K'=K$　　2-5-4

同様に、面外曲げ、ねじりの応力拡大係数k_{B}，k_{S}とを用いてクラック先端付近の曲げモーメントm_{x}，m_{y}、ねじりモーメントm_{xy}は次式によって表される。

$$m_x + m_y = \frac{2}{\sqrt{2r}} \left(k_B \cos \frac{\theta}{2} - k_S \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$m_y - m_x + 2 i m_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu)\sqrt{2r}} \left[\{ (7+\nu) k_B + i (5+3\nu) k_S \} e^{-i\theta/2} + (1-\nu)(k_B - i k_S) e^{-i5\theta/2} \right] \tag{2-5-5}$$

2－5－2　クラックの応力拡大係数の解法

本節では、応力関数を用いて応力拡大係数を求める方法を示す。平面弾性問題において、写像関数$\omega(\sigma)$と、複素応力関数$\phi(\sigma)$を用いると、モードⅠ、モードⅡの応力拡大係数K_{I}、K_{II}は、次式

$$K_{\mathrm{I}} - i K_{\mathrm{II}} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{\sigma \to \sigma_1} \left[\{ \omega(\sigma) - \omega(\sigma_1) \} e^{-i\gamma} \right]^{1/2} \times \phi'(\sigma) / \omega'(\sigma)$$

$$= 2\sqrt{\pi} e^{-i\gamma/2} \phi'(\sigma_1) / \sqrt{\omega''(\sigma_1)} \tag{2-5-6}$$

から求められる。ここでσ_1はクラック先端に対応する単位円周上の座標、γはx軸とクラックのなす角である。
さらに、面外曲げ問題においても同様に、面外曲げ、ねじりの応力拡大係数k_B、k_Sは次式から求められる。

$$k_B - i k_S = -2\sqrt{2} D (1+\nu) \lim_{\sigma \to \sigma_1} \left[\{ \omega(\sigma) - \omega(\sigma_1) \} e^{-i\gamma} \right]^{1/2} \times \phi'(\sigma) / \omega'(\sigma)$$

$$= -2D(1+\nu) e^{-i\gamma/2} \phi'(\sigma_1) / \sqrt{\omega''(\sigma_1)} \tag{2-5-7}$$

ここで、Dは曲げ剛性、νはポアソン比、σ_1はクラック先端に対応する単位円周上の座標、γはx軸とクラックのなす角である。

2−6　まとめ

分数式の和の形の有理写像関数と複素応力関数を用いた応力解析の方法を示した。この方法の特徴をあげれば、比較的任意の形状の応力解析ができること、有理写像関数の表わす形状について厳密解が得られること、クラックの場合の応力解析ができること、クラックの応力拡大係数が求められること、有理写像関数に切欠きの角度やクラック長のパラメーターを含めて表わすと、任意の切欠き角度やクラック長の場合の解析が比較的簡単にできること、又、そのパラメーターを変化させることによって、切欠き角度やクラック長の変化に対し、系統的な解析ができること、一度有理写像関数を作ると、その有理写像関数の表わす形状について、平面弾性問題にも薄板の面外曲げ問題にも、同じように応用ができること、さらに外力境界値問題にも、境界上の変位が与えられた変位境界値問題にも、同じように応用できること等である。

第３章　応力解析

３－１　まえがき

本章では、第２章で示した解析方法を用いて具体的に応力解析を行う。解析はこの方法の汎用性を示すため、切欠き、切欠きから発生したクラック、帯板、孔から発生したクラック等の代表的な形状を対象とする。工学的に重要な形状として、先ず半無限板の縁にある三角形切欠きについて切欠き角度を変えた場合と切欠き先端からクラックが発生した場合、次に隅角部に丸みのあるＹ字形帯板について丸みの曲率半径を変えた場合、さらに無限板中にある矩形孔から対称に発生したクラックについて孔の角度を変えた場合の各々について平面弾性問題及び薄板の面外曲げ問題として応力解析する。

切欠きの解析は、Isibasi （1940）による円弧切欠きのある半無限板の解析、同じくWeinel（1941）、鵜戸口（1950）による解析、Ling（1947）による両側半円切欠きのある帯板の解析、Higuchi and Suzuki（1949）による半楕円切欠きの解析、鈴木（1949）によるすみを丸めた長方形切欠きの解析、清家（1959）、Seika （1960）によるすみを丸めた三角形及び長方形切欠き、Ｕ字形切欠きの解析等がある。

帯板の解析は西田（1981）の両側フィレットをもつ帯板の応力集中を実験より求めた解析、Ling（1968）、西谷（1975）、長谷川、常世田（1985）による半円弧切欠きをもつ帯板の解析、野田ら（1985,1986,1988）、西谷ら（1985）による60°Ｖ形切欠きをもつ帯板の解析等がある。又、長方形出張りをもつ帯板を解析した野村（1959,1961 a)や、野村（1961 b）、長谷部（1971 a）による十字形板の解析、十字形継手の応力集中を実験より求めた熊谷、島田（1968）の解析等も見られる。しかし、比較的複雑な形状の帯板を解いたものは多くない。

孔を有する無限板の解析は、kirch （1898）による一円孔を有する無限板の解析に始まり、Goodier and Lee （1941）による一円孔を有する無限板の面外曲げ問題の解析、Inglis（1913）による楕円孔の解析、Jeffery （1921）、Yokota（1932）による２円孔の解析、そしてSavin （1961）による種々の形状の孔を有する無限板の解析等がある。又、切欠きから発生したクラックや無限板中の孔より発生したクラックの解析も４－１節に示すようにある程度なされている。

３－２　三角形切欠きのある半無限板及びその切欠きから発生したクラックの平面弾性問題

縁に三角形切欠きのある半無限板が、ｘ軸方向無限遠で一様引張りを受ける場合の応力

解析をする。解析は三角形切欠きの角度20°，40°，60°，80°，90°， 100° 120°， 140°， 160° の各場合について行なう。さらに、その三角形切欠きからクラックが発生した場合についても、同じ荷重条件、同じ切欠き角度で、任意のクラック長について解析する。尚、三角形切欠きから発生したクラックは、y軸に沿う直線状のクラックとする。

まず、三角形切欠きから発生したクラックの写像関数を作る。図 3-2-1に半無限板の縁の三角形切欠きから発生したクラックの形状と、単位円を示す。

切欠きの各点A，B，…，Gが単位円上の点a，b，…，gに対応する。そして、この半無限領域を、単位円内部に等角写像する写像関数は、Schwarz-Christoffel の公式より次式のように表される。

$$z=\omega(\zeta)=-iK\int\frac{1+\zeta}{(1-\zeta)^{2}\,(1+\zeta)^{\delta}\,(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}\,(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}}\,d\zeta \qquad \text{3-2-1}$$

ここで、δ：三角形切欠きの角度に関するパラメーター、但し、図 3-2-1に示すように切欠き角度は（$1-2\delta$）πとなる。又、α：クラック長に関するパラメーター、このαを変化させることによってクラック部分と、三角形切欠き部分との相対的な大きさが変わる。そして、三角形切欠きの大きさを基準として任意のクラック長が得られる。積分の前の$-i$は、半無限板が第3、4象限を占めるように図形を回転させるものである。これは直観的な見やすさを考慮したためであって、応力解析上の必要性とは無関係である。定数Kは図形全体のスケールに関する定数なので、本節では、三角形切欠きの深さを単位1.0 になるように決める。つまり図 3-2-1の点C，Eの座標が（0，－1）になるように決める。これにはまず、K＝1.0 として写像関数を作り、その写像関数によって写像された点C，Eの座標値の逆数を定数とすることによって得られる。又、三角形切欠きであることから、

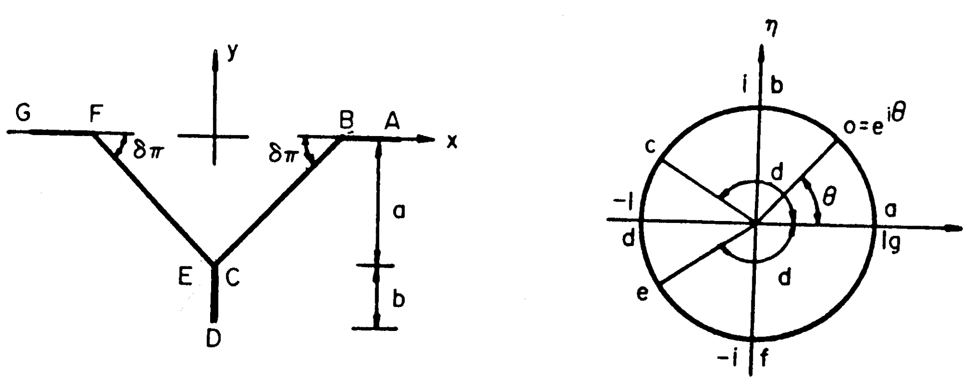


図 3-2-1　三角形切欠き先端から発生したクラックと単位円

$0 \leqq \delta \leqq 0.5$ の範囲となる。$\delta = 0$ のときは半無限板に、$\delta = 0.5$ のときは半無限板の縁クラックに相当する。そして、クラック長＝０、つまり $\alpha = 1$ のときは、クラックのない三角形切欠きになる。

次に式 3-2-1を分数式の和の形の関数で近似する。近似の精度を上げるため式 3-2-1を収束の速い項と遅い項に分離した形で表す。

$$\frac{1}{-ik}\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1+\zeta}{(1-\zeta)^2(1+\zeta^2)^{\delta}(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}}$$

$$= \frac{A}{(1-\zeta)^2} + \frac{B}{(1+i\zeta)^{\delta}} + \frac{C}{(1-i\zeta)^{\delta}} + \frac{D}{(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}} + \frac{E}{(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}}$$

$$+\left\{\frac{1+\zeta}{(1-\zeta)^2(1+\zeta^2)^{\delta}(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}} - \frac{A}{(1-\zeta)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{B}{(1+i\zeta)^{\delta}} - \frac{C}{(1-i\zeta)^{\delta}} - \frac{D}{(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}} - \frac{E}{(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}}\right\}$$

3-2-2

ここにA，B，C，D，Eは定数であり、次のようにして決める。簡便のため上式の{}内をYとおく。

$$(1-\zeta)^2(1-i\zeta)^{\delta}(1+i\zeta)^{\delta}(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}\{Y\}$$
$$=1+\zeta - A(1+i\zeta)^{\delta}(1-i\zeta)^{\delta}(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}$$
$$-B(1-\zeta)^2(1-i\zeta)^{\delta}(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}$$
$$-C(1-\zeta)^2(1+i\zeta)^{\delta}(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}$$
$$-D(1-\zeta)^2(1+i\zeta)^{\delta}(1-i\zeta)^{\delta}(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}$$
$$-E(1-\zeta)^2(1+i\zeta)^{\delta}(1-i\zeta)^{\delta}(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}$$

3-2-3

上式において

$\zeta = 1$ より　$A = 2^{1-\delta}(e^{i\alpha}-1)^{\delta-0.5}(e^{-i\alpha}-1)^{\delta-0.5}$

$\zeta = i$ より　$B = (1-i)^{-2}2^{-\delta}(e^{i\alpha}-1)^{\delta-0.5}(e^{-i\alpha}-1)^{\delta-0.5}(1+i)$

$\zeta = -i$ より　$C = (1+i)^{-2}2^{-\delta}(e^{i\alpha}+i)^{\delta-0.5}(e^{-i\alpha}+i)^{\delta-0.5}(1+i)$

$\zeta = e^{i\alpha}$ より

$$D = (1-^{i\alpha})^{-2}(1+e^{2i\alpha})^{-\delta}(e^{-i\alpha}-e^{\alpha})^{\delta-0.5}(1+e^{i\alpha})$$

$\zeta = e^{-i\alpha}$より

$$E = (1-e^{-i\alpha})^{-2}(1+e^{-2i\alpha})^{-\delta}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})^{\delta-0.5}(1+e^{-i\alpha}) \qquad 3\text{-}2\text{-}4$$

これらの値を用いて式 3-2-1を書きなおすと次のようになる。

$$z=\omega(\zeta)=-iK\left[\frac{A}{1-\zeta}-\frac{Bi}{1-\delta}(1+i\zeta)^{1-\delta}+\frac{Ci}{1-\delta}(1-i\zeta)^{1-\delta}\right.$$

$$-\frac{D}{0.5+\delta}(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5+\delta}-\frac{E}{0.5+\delta}(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5+\delta}$$

$$+\int\left\{\frac{(e^{i\alpha}-\zeta)(e^{-i\alpha}-\zeta)(1+\zeta)}{(1-\zeta^2)(1+\zeta^2)^{\delta}}-\frac{A}{(1-\zeta)^2}-\frac{B}{(1+i\zeta)^{\delta}}-\frac{C}{(1-i\zeta)^{\delta}}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{D}{(e^{i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}}-\frac{E}{(e^{-i\alpha}-\zeta)^{0.5-\delta}}\right\}d\zeta\right] \qquad 3\text{-}2\text{-}5$$

さらに収束の速い関数と遅い関数について各々分数式の和の形の式で近似すると次のようになる。

$$z=\omega(\zeta)=-iK\left[\frac{A}{1-\zeta}-\frac{Bi}{1-\delta}\sum_{j=1}^{12}\left(\frac{-A_{1j}}{1+i\alpha_{1j}\zeta}\right)\right.$$

$$+\frac{Ci}{1-\delta}\sum_{j=1}^{12}\left(\frac{-A_{1j}}{1-i\alpha_{1j}\zeta}\right)-\frac{De^{i\alpha(0.5+\delta)}}{0.5+\delta}\sum_{j=1}^{12}\left(\frac{-A_{2j}}{1-e^{-i\alpha}\alpha_{2j}\zeta}\right)$$

$$\left.-\frac{Ee^{-i\alpha(0.5+\delta)}}{0.5+\delta}\sum_{j=1}^{12}\left(\frac{-A_{2j}}{1-e^{-i\alpha}\alpha_{2j}\zeta}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{B_j}{1-\beta_j\zeta}\right)\right]+\text{const.} \qquad 3\text{-}2\text{-}6$$

この式をまとめて次のように表わす。

$$Z=\omega(\zeta)=\frac{E_0}{1-\zeta}+\sum_{K=1}^{48+n}\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta}+\text{const.} \qquad 3\text{-}2\text{-}7$$

上式は三角形切欠きの角度と、クラック長のパラメーターを含んでいるので、これらのパラメーターを変えるだけで任意の角度の三角形切欠きやクラック長について応力解析ができる。

このように、パラメトリックに切欠きの角度やクラック長を変えて解析しようとする場合、この解析方法は非常に有効である。

次に荷重条件を表わす。

大きさPのx軸方向無限遠での一様引張りを表わす複素応力関数$\phi_0(\zeta)$、$\psi_0(\zeta)$は次式で表わされる。

$$\phi_0(\zeta)=P\omega(\zeta)/4 \quad , \qquad \psi_0(\zeta)=-P\omega(\zeta)/2 \qquad 3\text{-}2\text{-}8$$

次に複素応力関数$\phi_0(\zeta)$、$\psi_0(\zeta)$が表わす境界上での外力を打ち消す別の複素応力関数$\phi_1(\zeta)$、$\psi_1(\zeta)$を考えれば、求める複素応力関数は次式のようになる。

$$\begin{aligned}\phi(\zeta)&=\phi_0(\zeta)+\phi_1(\zeta)\\ \psi(\zeta)&=\psi_0(\zeta)+\psi_1(\zeta)\end{aligned} \qquad 3\text{-}2\text{-}9$$

そして、この時満足すべき境界条件は境界上に外力が作用していないから式2-3-17より次式が成り立つ。

$$\phi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=0 \qquad 3\text{-}2\text{-}10$$

従って式 3-2-9を代入して変形すると、次式を得る。

$$\phi_1(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'_1(\sigma)}+\overline{\psi_1(\sigma)}=-\frac{P}{2}\omega(\sigma)+\frac{P}{2}\omega(\sigma) \qquad 3\text{-}2\text{-}11$$

上式に$1/2[\pi i(\sigma-\zeta)]$を乗じてコーシー積分をすると式2-3-18が得られ$\phi_1(\sigma)$が求められる。但し、このとき式2-3-18の右辺$A(\zeta)$は次のようになる。

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{(\sigma-\zeta)}\,\frac{-P}{2}\,\{\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}\}\,d\sigma$$

3-2-12

単位円周上の$\sigma = 1$で１位の極を有するので、A（ζ）は次のようになる。

$$A(\zeta) = -\frac{P}{2}\,\{\omega(\zeta) + \frac{\overline{E_0} - E_0}{2(1-\zeta)}\}$$

3-2-13

E_0 は式 3-2-7の１／（１－ζ）の係数である。ψ_1（ζ）も同様にして式2-3-20より求められる。

このとき式2-3-20の右辺第１項は－A（ζ）に等しい。つまり次式である。

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \frac{P}{2}\,\{\omega(\zeta) + \frac{\overline{E_0} - E_0}{2(1-\zeta)}\}$$

3-2-14

よって求めるϕ（ζ）、ψ（ζ）が得られる。応力のみを求めるならば応力の計算には式2-3-15よりϕ（ζ）、ψ（ζ）の導関数が用いられるので定数項は関係しない。

以上で応力解析ができる。図3-2-2, 3-2-3 に三角形切欠きの角度90° で、切欠きのみの場合とクラックがある場合の応力分布を示す。

図 3-2-2より切欠き先端には大きな応力集中が見られる。さらにx／a＝１、y／a＝０の凸部の応力は非常に小さい。外力境界の場合、領域側角度が 180° より小さい場合には頂点で応力＝０で、その付近の応力は小さい。

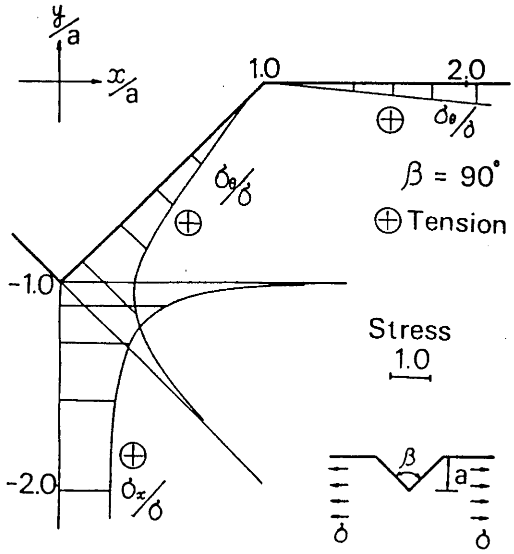


図 3-2-2　三角形切欠きの応力分布

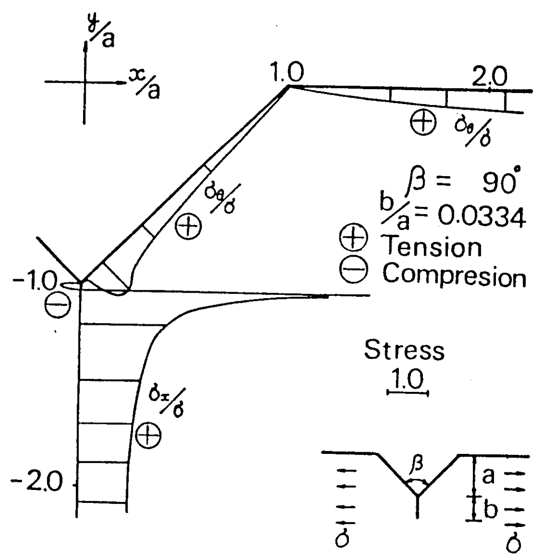


図 3-2-3　三角形切欠き先端から発生したクラックの応力分布

図 3-2-3よりクラック先端は大きな応力集中が見られる。又、クラック縁の接線方向応力成分は、わずかではあるが圧縮応力となっている。

3－3　三角形切欠きのある半無限板及びその切欠きから発生したクラックの面外曲げ問題

縁に三角形切欠き及びその先端にクラックのある半無限薄板が、x軸方向無限遠で一様面外曲げを受ける場合の応力解析をする。解析は三角形切欠きの角度 $\delta\pi=20°$ 、40° 60°、80°　、90°　100°、 120°、 140°の各場合について行なう。写像関数は平面弾性問題とまったく同じ関数を用いて、応力解析ができる。これもこの解析方法の有効性の一つである。よって本節でも式 3-2-7を用いる。

次に荷重条件を表わす。x軸方向無限遠での一様面外曲げを考える。大きさMのx軸方向無限遠での一様面外曲げを表わす複素応力関数　$\phi_0(\zeta)$、$\psi_0(\zeta)$ は次式で表わされる。

$$\phi_0(\zeta)=-M\omega(\zeta)/[4D(1+\nu)]$$
$$\psi_0(\zeta)=-M\omega(\zeta)/[2D(1-\nu)] \qquad 3\text{-}3\text{-}1$$

次に複素応力関数 $\phi_0(\zeta)$、$\psi_0(\zeta)$ が表わす境界上での外力を打ち消す別の複素応力関数 $\phi_1(\zeta)$、$\psi_1(\zeta)$ を考えれば、求める複素応力関数は次式のようになる。

$$\phi(\zeta)=\phi_0(\zeta)+\phi_1(\zeta),\quad \psi(\zeta)=\psi_0(\zeta)+\psi_1(\zeta) \qquad 3\text{-}3\text{-}2$$

そして、この時満足すべき境界条件は境界上に外力が作用していないから式2-4-15より次式が成り立つ。

$$\frac{(3+\nu)}{(\nu-1)}\phi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=0 \qquad 3\text{-}3\text{-}3$$

従って式 3-3-2を代入して変形すると次のようになる。

$$\frac{(3+\nu)}{(\nu-1)}\phi_1(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\phi_1(\sigma)}+\overline{\psi_1(\sigma)}$$

$$= -\frac{M}{2D(1-\nu)}\left[\omega(\sigma)-\overline{\omega(\sigma)}\right] \qquad \text{3-3-4}$$

上式に１／［２πｉ（σ－ζ）］を乗じてコーシー積分をすると式2-4-16が得られ ϕ_1（ζ）が求められる。但しこのとき式2-4-16の右辺Ａ（ζ）は次のようになる。

$$A(\zeta)=\frac{-M}{2D(1-\nu)}\left[\omega(\zeta)+\frac{\overline{E}_0-E_0}{2(1-\zeta)}\right] \qquad \text{3-3-5}$$

E_0 は式 3-2-7の１／（１－ζ）の係数である。ψ_1（ζ）も同様にして式2-4-16より求められる。このとき式2-4-16の右辺第１項は－Ａ（ζ）に等しい。つまり次式である。

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma=\frac{M}{2D(1-\nu)}\left[\omega(\zeta)+\frac{\overline{E}_0-E_0}{2(1-\zeta)}\right] \qquad \text{3-3-6}$$

よって求めるφ（ζ）、ψ（ζ）が得られる。応力のみを求めるならば、応力の計算には式2-4-10からφ（ζ）、ψ（ζ）の導関数が用いられるので定数項は関係しない。

以上で応力解析ができる。図3-3-2 、3-3-3 に三角形切欠き角度90°、ポアソン比0.0, 0.5 で切欠きのみの場合とクラックがある場合の応力分布を示す。図3-3-2 より切欠き先端には大きな応力集中が見られる。さらに応力集中はポアソン比が大きい方が大きい。さ

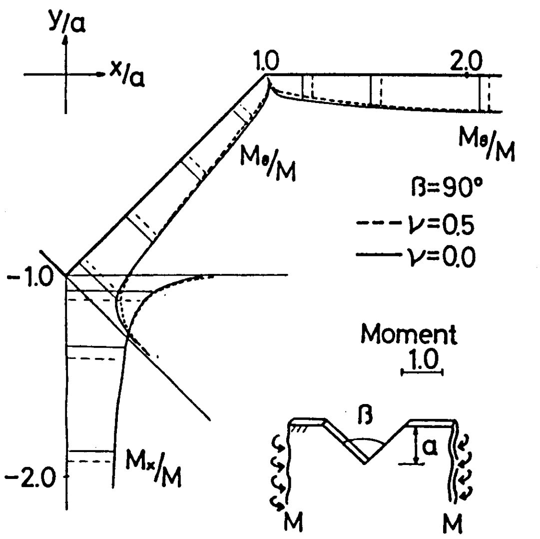


図3-3-2　三角形切欠きの応力分布

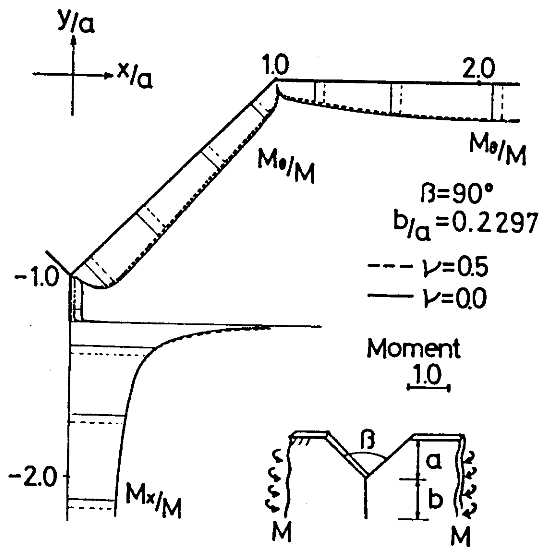


図3-3-3　三角形切欠き先端から発生したクラックの応力分布

らにx／a＝1、y／a＝0の凸部の応力は非常に小さい。外力境界の場合面外曲げにおいても一般に、領域側角度が 180° より小さい場合には頂点で応力＝0で、その付近の応力は小さい。図3-3-3 よりクラック先端は大きな応力集中が見られる。又、クラック縁の接線方向応力成分は、正の曲げモーメントと成っている。

3－4　Y字形帯板の平面弾性問題

隅角部に丸みのあるY字形帯板を平面弾性問題として応力を解析する。そして、隅角部の応力集中係数と丸みの曲率半径の関係を求める。すでに応力集中係数を表わす一般的な公式は長谷部(1971)によって示されており、Y字形帯板の隅角部に対してもその応力集中係数が一般公式によって表わされることを示す。荷重条件は面内引張りと面内曲げを扱う。

図 3-4-1に隅角部に丸みのある等しい幅のY字形状と単位円を示す。
この領域を単位円内部に等角写像する写像関数をSchwarz-Christoffel の変換公式を用いて表わす。隅角部の丸みの付け方については、第２章で述べたように、十字形板の解析に野村(1961)が用いた方法による。単位円と領域との対応は図 3-4-1に示すとおりであり、B点はb点（$\pi/3-\alpha$）、B′ 点はb′ 点（$\pi/3+\alpha$）に対応し、他の点も同様である。ここでαは隅角部の丸みに関するパラメーターである。
直線部分においては

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\log\frac{dz}{d\zeta}\right)=\frac{1}{1-\zeta}+\frac{1}{\omega-\zeta}+\frac{1}{\omega^2-\zeta} \qquad 3\text{-}4\text{-}1$$

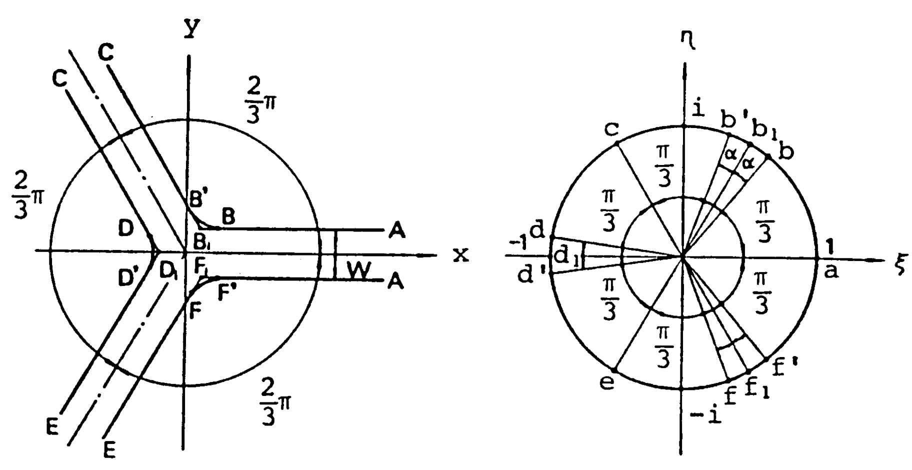


図3-4-1　隅角部に丸みのあるY字形状と単位円

ここで、$\omega = \exp(2\pi i/3)$、$\omega^2 = \bar{\omega}$

曲線部分においては

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\log\frac{dz}{d\zeta}\right) = \int_1^{2/3} \frac{d\lambda}{\exp\{i(k_1\lambda + C_1)\} - \zeta} + \int_{5/3}^{4/3} \frac{d\lambda}{\exp\{i(k_2\lambda + C_2)\} - \zeta}$$

$$+ \int_{1/3}^{0} \frac{d\lambda}{\exp\{i(k_3\lambda + C_3)\} - \zeta} \qquad \text{3-4-2}$$

で表わされる曲線を考える。係数k_1、k_2、k_3、C_1、C_2、C_3は曲線部と直線部の接続から求められる。

すなわち、

$$\exp[i\{(\pi/3) - \alpha\}] = \exp\{i(k_1 \times 1 + C_1)\},$$
$$\exp[i\{(\pi/3) + \alpha\}] = \exp\{i(k_1 \times 2/3 + C_1)\} \qquad \text{3-4-3}$$

より$k_1 = -6\alpha$、$C_1 = (\pi/3) + 5\alpha$となる。k_2、C_2、k_3、C_3も同様に決められる。式 3-4-1、 3-4-2より隅角部に丸みのある、帯の幅の等しいＹ字形領域を単位円内に写像する等角写像関数は

$$z = K\int \frac{f(\zeta)}{1-\zeta^3}\, d\zeta \qquad \text{3-4-4}$$

となる。ここで、$f(\zeta) = \exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \sin(3m\alpha)\, \zeta^{3m} / \{(3m)^2 \alpha\}\right]$

である。

係数Ｋは帯の幅がＷとなるように決められる。式 3-4-4は$\alpha \to 0$のとき、隅角部に丸みのないＹ字形領域を単位円内部に写像する関数となる。式 3-4-4は$\zeta = 1$、$\pm 2\pi i/3$でＹ字形の帯が無限に延びる対数的特異点を有するため、式をべき級数に展開したとき、その級数の収束は極めて遅い。したがって第２章で述べたようにこの項を分離して収束の遅い項とそれに比して収束の速い項とにわけると式 3-4-4は、

$$z = K\int \left[\frac{f(1)}{1-\zeta^3} + \frac{f(\zeta) - f(1)}{1-\zeta^3}\right] d\zeta \qquad \text{3-4-5}$$

となる。さらに式 3-4-5より$1/(1-\zeta)$の項を分離すると、

$$z=K\frac{f(1)}{3}\int\frac{d\zeta}{1-\zeta}+K\int\left[\frac{f(1)(\zeta+2)}{3(\zeta^3+\zeta+1)}+\frac{f(\zeta)-f(1)}{1-\zeta^3}\right]d\zeta \qquad \text{3-4-6}$$

となる。式 3-4-6の第１項を積分すると$-Kf(1)\log(1-\zeta)/3$になる。ここで$\zeta\to 1$を考えると、$-\log(1-\zeta)$はＺ平面上で$\pm\pi i/2$を漸近線とするｘ軸の正の方向に延びる帯状領域を表わす。したがって、帯の幅をＷにするには$Kf(1)\pi/3=W$となるように決めればよい。すなわち、$K=3W/[\pi f(1)]$である。これより式 3-4-6の係数Ｋは決まる。$\alpha\to 0$とすると帯の幅Ｗで隅角部に丸みのないＹ字形領域の場合の係数$K=3W/(\sqrt[3]{2}\pi)$を得る。

次に式 3-4-5に対する分数式の和の形の有理写像関数を作る。これは式 3-4-5で表される収束の遅い項と速い項の各々に対して作られる。式 3-4-5の各項をべき級数に展開して、積分すると

$$z=K\left[f(1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^{3n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^{3n+1}\right] \qquad \text{3-4-7}$$

の形で表わされる。ここで$a_n=1/(3n+1)$、また、式 3-4-5の第２項のべき級数の係数をb_nと表わしてある。式 3-4-7の第１項の級数に対する分数式として次式を考える。

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{L_k\zeta}{1-\lambda_k\zeta^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{12}L_k\lambda_k{}^n\zeta^{3n+1} \qquad \text{3-4-8}$$

ここでは分数式の項数を１２に採っている。各々１２個の未定定数L_k、λ_kは式 3-4-7の最初の級数と式 3-4-8とが近似的に等しくなるように決められる。すなわち次式を解いて決められる。

$$\sum_{k=1}^{12}L_k\lambda_k{}^n=a_n \qquad \text{3-4-9}$$

詳細は２－３節に示してある。

式 3-4-5の最初の級数の収束は極めて遅く、またその係数の減少は単調である。よって、式 3-4-5におけるa_nとして次の２４個の係数を選んで用いる。

a_1, a_2, a_3, a_4, a_M, a_{2M}, a_{3M}, a_{4M}, a_{M^3}, a_{2M^3}, a_{3M^3}, a_{4M^3}, a_{M^4}, a_{2M^4}, a_{3M^4}, a_{4M^4}, a_{M^5}, a_{2M^5}, a_{3M^5}, a_{4M^5},

ここではM＝7を用いる。上述のa_n は数値計算が便利なように選ばれ、数値計算は繰返し計算によって行われる［長谷部（1971 a）］。但し、λ_k は$|\lambda_k|<1$が満足されねばならない。$a_{4M^5}=a_{4\times 7^5}$ はζの188913乗の係数に当り、さらに高次の項も含まれるので式 3-4-8は式 3-4-7の最初の級数に対する極めてよい近似式である。

式 3-4-7の第２項の級数に対してはm個の分数式 $\sum_{k=1}^{m}[M_k\zeta/(1-\mu_k\zeta^3)]$を考える。

M_k、μ_k は式 3-4-8に類似な式 $\sum_{k=1}^{m} M_k \mu_k{}^n = b_n$ を解いて求められる。

式 3-4-7の２番目の級数は、収束は速いけれどもb_n の減少は単調ではない。それ故２m個の未定定数M_k、μ_k を決めるのに必要なb_n としてb_1 からb_{2m}までの２m個の係数を用いる。この場合、M_k、μ_k は解析的に求められる［長谷部（1971 a）］。但し、$|\mu_k|<1$が満足されねばならない。ここでは分数式の個数mをm＝16、18、20と３とおりの分数式を作って用いる。
以上より式 3-4-7に対する有理写像関数は、ζの一次の係数を補正して次式のように得られる。

$$z=\omega(\zeta)=K\left[f(1)\left\{\sum\frac{L_k\zeta}{1-\lambda_k\zeta^3}+\left(1-\sum_{k=1}^{12}L_k\right)\zeta\right\}+\sum_{k=1}^{m}\frac{M_k\zeta}{1-\mu_k\zeta^3}+\left(1-\sum_{k=1}^{m}M_k\right)\zeta\right]=E_0\zeta+\sum_{k=1}^{3m+36}\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta} \qquad \text{3-4-10}$$

式3-4-10は有理関数のためこの式で写像される帯の長さは有限であり、その長さは幅の約4.6 倍である。又、式3-4-10の写像関数の表す隅角部の曲線は、対称軸上で最小曲率半径となる曲線で正確な単一円弧曲線にはなっていない。これは曲線部分における曲率半径の値が一定でないことから判断される。しかし、ある程度曲率半径が小さい場合は相対的に単一円弧と見なせる。又、Ｙ字形の角度の２等分線、つまり対称軸の付近では、単一円弧と見なせる。
解法の詳細は第２章に述べてあるので、ここでは結果のみを示す。単位円内で正則な２つ

の複素応力関数をϕ（ζ）、ψ（ζ）とすると、第２章より応力関数は次のように与えられる。

$$\phi(\zeta)+\bar{C}_0\bar{B}_0\zeta+\sum_{k=1}^{3m+36}\frac{\bar{C}_k\bar{B}_k}{\zeta_k-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{M(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma=A(\zeta)$$

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\overline{M(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma-\frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\phi'(\zeta)+\frac{C_0B_0}{\zeta}$$

$$+\sum_{k=1}^{3m+36}\frac{C_kB_k\zeta_k{}'^2}{\zeta_k{}'-\zeta} \qquad 3\text{-}4\text{-}11$$

ここで$C_0=\bar{E}_0/\omega'(0)$、$C_k=\bar{E}_k/\omega'(\zeta_k{}')$、$\zeta_k{}'=1/\bar{\zeta}_k$である。
次に荷重条件として以下の２つの場合を考える。

① ３方向の帯の先端に集中荷重Ｐが作用する場合

第１式の荷重項をＣ（ζ）、第２式の荷重項をＤ（ζ）とすると次式のようになる。

$$C(\zeta)=-\frac{P}{2\pi}\{\log(1-\zeta)+\omega\log(\omega-\zeta)+\omega^2\log(\omega^2-\zeta)\}$$

$$D(\zeta)=\frac{P}{2\pi}\{\log(1-\zeta)+\bar{\omega}\log(\omega-\zeta)+\bar{\omega}^2\log(\omega^2-\zeta)\} \qquad 3\text{-}4\text{-}12$$

図 3-4-2に対称軸上の応力σ_x、σ_y、境界縁の応力σ_θを示す。

② ２方向の帯の先端に大きさＭの偶力が作用する場合

第１式の荷重項をＣ（ζ）、第２式の荷重項をＤ（ζ）とすると次式のようになる。

$$C(\zeta)=-\frac{M}{4\pi R}\{-\omega\log(\omega e^{-i\delta}-\zeta)+\omega\log(\omega e^{i\delta}-\zeta)$$
$$+\omega^2\log(\omega^2e^{-i\delta}-\zeta)-\omega^2\log(\omega^2e^{i\delta}-\zeta)\}$$

$$D(\zeta)=\frac{M}{4\pi R}\{-\omega\log(\omega e^{-i\delta}-\zeta)+\omega\log(\omega e^{i\delta}-\zeta)$$
$$+\omega^2\log(\omega^2e^{-i\delta}-\zeta)-\omega^2\log(\omega^2e^{i\delta}-\zeta)\} \qquad 3\text{-}4\text{-}13$$

ここで2R：帯先端の偶力の腕の長さ、2δ：帯先端の偶力の作用位置に対応する単位円周上の角度である。本論文では$\delta = 0.1 \times 10^{-8}$rad として計算した。図 3-4-3には、対称軸上の応力σ_x、σ_y、境界縁の応力σ_θを示す。隅角部から十分に離れたところの境界縁の応力$\sigma_\theta = 6.0$ Mは、はり理論から求まる$\sigma = My/I = 6.0$ M（I；断面2次モーメント、y＝中立軸からの距離、今の場合y＝W/2 ）に等しい。
次に応力集中値と、丸みの曲率半径の関係について示す。隅角部の丸みに関するパラメーターを変えることによって、丸みの大きさが変わる。そして、その場合に対する応力集中値を解析する。7－2節に述べるが、応力集中係数は丸みの曲率半径ρを用いて次式のように表わされる。

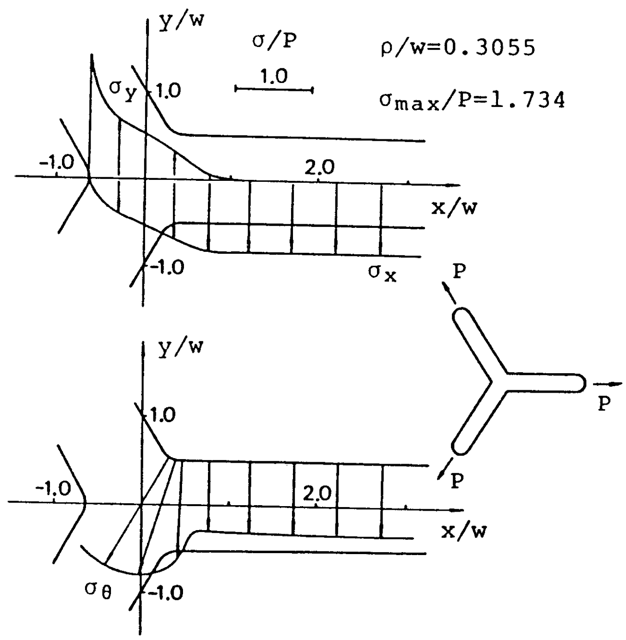


図3-4-2　3方向の先端に集中荷重を受ける場合の応力分布

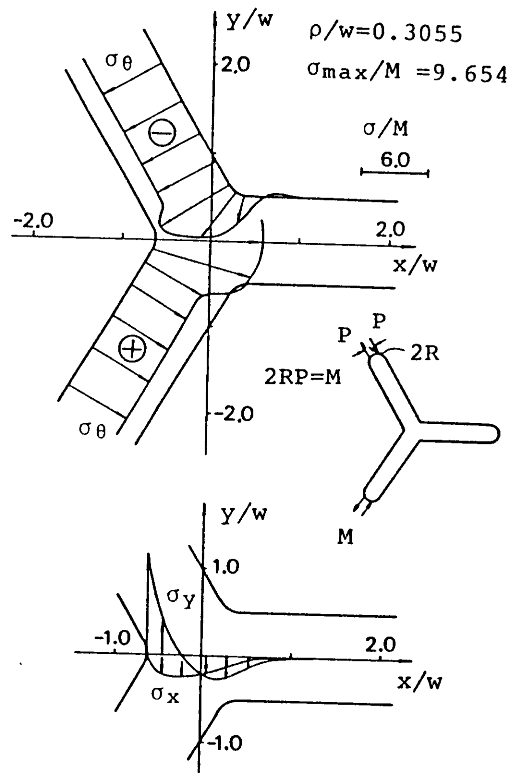


図3-4-3　2方向の先端に偶力を受ける場合の応力分布

$$\sigma_{max}=\sum_{j=1}^{\infty} h_j \rho^{m_j} \qquad 3\text{-}4\text{-}14$$

ここで、h_j（$j=1,2,3,\cdots$）は荷重条件、形状によって決まる係数であり、m_j（$j=1,2,3,\cdots$）は、6－2節に述べる式6-2-10、6-2-11等の方程式の根である。Y字形帯板の角点の応力集中もこの一般表示式で、精度よく表わされることを示す。

荷重条件①、②の場合はともに隅角部角度2等分線に対称な応力状態であり、Y字形帯板の隅角部角度2αは 240° となる。ここでは、式3-4-14のうち、第3項までを用いた式を考える。m_1 は実数であるが、m_2、m_3 は各々共役な複素数なので、次のような式になる。

$$\sigma_{max}=g_1(\rho/w)^{m_1}+g_2(\rho/w)^{u}\cos\{v\log(\rho/w)\} + g_3(\rho/w)^{u}\sin\{v\log(\rho/w)\} \qquad 3\text{-}4\text{-}15$$

ここで$m_2=u+iv$である。m_1、m_2 は表 6-2-1の $2\alpha=240°$ の値である。そして、解析した応力集中値と対応する曲率半径を式3-4-15に代入し、係数g_1、g_2、g_3 を最小二乗法で決めると表 3-4-1に示すような値となる。表 3-4-2に解析値と式3-4-15によって得られた値を示し、さらに誤差も示す。表 3-4-2より最大誤差2％程度で精度よく表わされているのが分かる。

3－5　Y字形帯板の面外曲げ問題

この場合も等角写像は前節とまったく同じものである。解法の詳細は第2章に述べてあるので、ここでは結果のみを示す。単位円内で正則なたわみを表す2つの複素応力関数を$\phi(\zeta)$、$\psi(\zeta)$とすると、次のように表わされる。

$$\frac{\nu+3}{\nu-1}\phi(\zeta)+\bar{C}_0\bar{A}_0\zeta+\sum_{k=1}^{3m+36}\frac{\bar{C}_k\bar{A}_k}{\zeta_k-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma=A(\zeta)$$

表3-4-1　式3-4-15の係数

	m_1	$m_2=u+iv$	
		u	v
	-0.3843	0.8336	0.2523
	g_1	g_2	g_3
Tension	1.1058	-0.1734	-0.9442
Bending in plane	6.1878	-1.6748	-6.6279

表3-4-2　式3-4-15の応力集中値と誤差

	ρ/w	SCF	Eq. 3-4-15	Error %
Tension	0.132×10^{-3}	34.418	34.189	-0.67
	0.321×10^{-3}	24.022	24.325	1.26
	0.335×10^{-2}	9.760	9.882	1.25
	0.133×10^{-1}	5.967	5.841	-2.11
	0.882×10^{-1}	2.889	2.865	-0.84
	0.152	2.320	2.338	0.77
	0.600	1.282	1.313	2.41
	0.868	1.065	1.043	2.02
Bending in Plane	0.132×10^{-3}	32.101	31.886	-0.67
	0.321×10^{-3}	22.405	22.687	1.26
	0.335×10^{-2}	9.101	9.218	1.29
	0.133×10^{-1}	5.562	5.452	-1.99
	0.882×10^{-1}	2.692	2.676	-0.60
	0.152	2.162	2.180	0.83
	0.600	1.151	1.167	1.40
	0.868	0.888	0.876	-1.36

$$\phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\overline{H(\sigma)}}{\sigma-\zeta}d\sigma-\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)}\phi'(\zeta)+\frac{C_0A_0}{\zeta}+\sum_{k=1}^{3m+36}\frac{C_kA_k\zeta_k'^{\,2}}{\zeta-\zeta_k'}-\frac{\nu+3}{\nu-1}\phi(0) \qquad \text{3-5-1}$$

ここで$C_0 = \overline{E}_0 / \omega'(0)$、$C_k = \overline{E}_k / \omega'(\zeta_k')$、$\zeta_k' = 1/\overline{\zeta}_k$である。
次に荷重条件として以下の２つの場合を考える。

③　３方向の帯の先端に集中曲げモーメントMが作用する場合
　第１式の荷重項をＡ（ζ）、第２式の荷重項をＢ（ζ）とすると次のようになる。

$$A(\zeta) = \frac{-M}{2\pi D(1-\nu)} \{ \log\{(1-\zeta) + \overline{\omega} \log(\omega-\zeta) + \overline{\omega}^2 \log(\omega^2-\zeta) \}$$

$$B(\zeta) = -M \{ \log(1-\zeta) + \overline{\omega} \log(\omega-\zeta) + \overline{\omega}^2 \log(\omega^2-\zeta) \} / \{ 2\pi D(1-\nu) \} \qquad \text{3-5-2}$$

図 3-5-1に対称軸上の応力M_x、M_y、境界縁に沿う応力M_θを示す。

④　３方向の帯の先端に集中ねじりモーメントＨが作用する場合
　第１式の荷重項をＡ（ζ）、第２式の荷重項をＢ（ζ）とすると次のようになる。

$$A(\zeta) = H \{ \log(1-\zeta) + \omega \log(\omega-\zeta) + \omega^2 \log(\omega^2-\zeta) \} / \{ \pi i D(1-\nu) \}$$

$$B(\zeta) = H \{ \log(1-\zeta) + \overline{\omega} \log(\omega-\zeta) + \overline{\omega}^2 \log(\omega^2-\zeta) \} / \{ \pi i D(1-\nu) \} \qquad \text{3-5-3}$$

図 3-5-2に対称軸上の応力H_{xy}、境界縁に沿う応力$H_{r\theta}$、M_θを示す。境界条件に関するキルヒホッフの仮定のため、境界縁のねじりモーメントは０にはなっていない。
薄板の面外曲げ問題においても、応力集中係数は丸みの曲率半径ρを用いて、次式のように表わされる。

$$M_{max} = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \rho^{mj} \qquad \text{3-5-4}$$

荷重条件③の場合は、隅角部角度２等分線に対称な応力状態であり、荷重条件④の場合は、逆対称な応力状態である。同じように第３項までを用いた次式を考える。

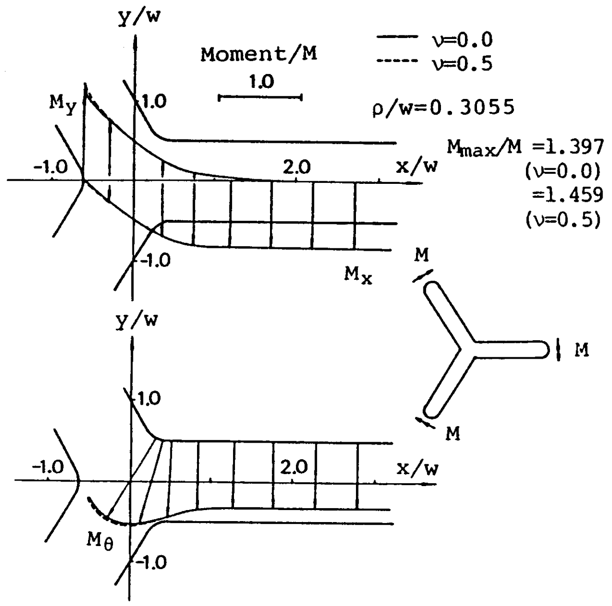


図3-5-1　３方向の先端に面外曲げを受ける場合の応力分布

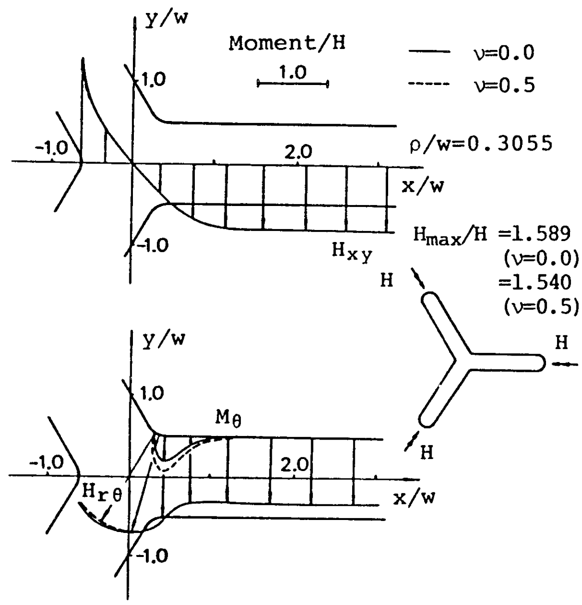


図3-5-2　３方向の先端にねじりを受ける場合の応力分布

$$M_{max} = f_1\ (\rho/W)^{m1} + f_2\ (\rho/W)^{m2} + f_3\ (\rho/W)^{m3} \qquad 3\text{-}5\text{-}5$$

m_1 、m_2 は、表 6-2-3の $2\alpha = 240°$ の値である。そして、解析した応力集中値と対応する曲率半径を式 3-5-5に代入し、係数 f_1 、f_2 、f_3 を最小二乗法で定めると表 3-5-1に示すような値となる。表 3-5-2に解析値と、式 3-5-5によって得られた値を示し、さらに誤差も示す。表 3-5-2より最大誤差２～３％程度で精度よく表わされているのが分かる。

表3-5-1　式 3-5-5 の係数

	ν	m_1	m_2	m_3	f_1	f_2	f_3
Bending out of plane	0.0	-0.1939	0.4006	1.4362	1.0713	0.1815	-0.2723
	0.25	-0.2123	0.4308	1.3677	1.0816	0.1926	-0.2971
	0.5	-0.2271	0.4567	1.3195	1.0891	0.2044	-0.3195
	ν	m_1	m_2	m_3	f_1	f_2	f_3
Twisting	0.0	-0.2987	0.6159	1.0950	1.1122	0.4285	-0.5920
	0.25	-0.2843	0.5765	1.1443	1.1095	0.3494	-0.5057
	0.5	-0.2715	0.5459	1.1847	1.1064	0.3033	-0.4528

表3-5-2　式3-5-5 の応力集中値と誤差

	ρ/w	SCF			Eq. 3-5-5	Error %
		ν=0.0	ν=0.25	ν=0.5	ν=0.25	ν=0.25
Bending out of Plane	0.132×10^{-3}	6.089	7.250	8.338	7.202	-0.66
	0.321×10^{-3}	5.057	5.911	6.705	5.970	0.99
	0.335×10^{-2}	3.234	3.618	3.961	3.641	0.64
	0.133×10^{-1}	2.537	2.771	2.974	2.736	-1.24
	0.882×10^{-1}	1.781	1.874	1.952	1.868	-0.32
	0.152	1.605	1.669	1.723	1.676	0.41
	0.600	1.194	1.205	1.213	1.212	0.64
	0.868	1.054	1.056	1.057	1.051	-0.47
Twisting	0.125×10^{-3}	16.404	14.378	12.788	14.283	-0.66
	0.318×10^{-3}	12.177	10.820	9.741	10.953	1.23
	0.335×10^{-2}	6.052	5.566	5.166	5.617	0.91
	0.141×10^{-1}	4.123	3.865	3.648	3.753	-2.90
	0.882×10^{-1}	2.357	2.272	2.198	2.268	-0.18
	0.152	1.990	1.935	1.887	1.954	1.01
	0.600	1.249	1.242	1.236	1.261	1.55
	0.868	1.062	1.061	1.060	1.047	-1.33

3－6　矩形孔から対称に発生したクラックのある無限板の平面弾性問題

無限板中の矩形孔から対称に発生したクラックについて、矩形孔の角度、クラック長を変化させて各々の応力分布や応力拡大係数を解析する。荷重条件として、x軸方向無限遠での一様引張荷重を考える。矩形孔の角度20°，40°，60°，80°，90°，100°，120°，140°，160°について、クラックの長さを各々変化させて解析する。矩形孔から発生したクラックはy軸に沿う直線状のクラックとする。図 3-6-1に考える領域と単位円との対応を示す。

パラメーターδを変えることにより矩形孔の角度が、βを変えることによりクラックの長さが変る。この領域を単位円外部に写像する式を、第２章で述べたSchwarz-Christoffelの変換式より求める。図 3-6-1の対応より次式が得られる。

$$z=\omega(\zeta)=K\int\frac{(\zeta-1)^{\delta}(\zeta+1)^{\delta}}{(\zeta-e^{\beta i})^{\delta/2}(\zeta+e^{-\beta i})^{\delta/2}(\zeta+e^{\beta i})^{\delta/2}}\frac{(\zeta-i)(\zeta+i)}{(\zeta-e^{-\beta i})^{\delta/2}\zeta^{2}}d\zeta \qquad \text{3-6-1}$$

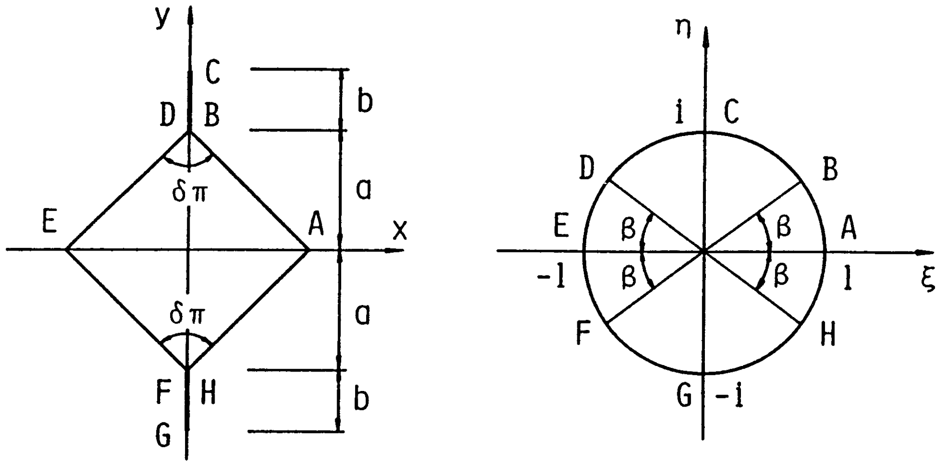


図3-6-1　矩形孔から対称に発生したクラックと単位円

$\beta=\pi/2$の場合はクラックのない矩形孔を表わす。又、Kは形状の拡大、縮小に関するパラメーターであり、ここでは矩形孔の大きさ、つまり図 3-6-1の点BとHの距離が 2.0になるように決める。これは最初に$K=1.0$ として写像関数を作り、それによって写像された点B又はHの値の逆数を定数とすることによって得られる。

第２章に述べた方法により式 3-6-1を分数式の和の形の関数で近似する。近似の精度を上げるため、式3-6-1 を収束の速い項と遅い項に分離した形で表わす。

$$
\begin{aligned}
z/K=&\frac{-A}{(1-\delta/2)\,e^{-\beta i}}\left(1+\frac{e^{-\beta i}}{\zeta}\right)^{(1-\delta/2)}\\
&+\frac{B}{(1-\delta/2)\,e^{\beta i}}\left(1-\frac{e^{\beta i}}{\zeta}\right)^{(1-\delta/2)}\\
&+\frac{-C}{(1-\delta/2)\,e^{\beta i}}\left(1+\frac{e^{\beta i}}{\zeta}\right)^{(1-\delta/2)}\\
&+\frac{D}{(1-\delta/2)\,e^{-\beta i}}\left(1-\frac{e^{-\beta i}}{\zeta}\right)^{(1-\delta/2)}\\
&+\int\Bigl\{\frac{(1-1/\zeta)^{\delta}\,(1+1/\zeta)^{\delta}}{(1+e^{-\beta i}/\zeta)^{\delta/2}\,(1-e^{\beta i}/\zeta)^{\delta/2}\,(1+e^{\beta i}/\zeta)}
\end{aligned}
$$

$$\frac{(\zeta-i)(\zeta+i)}{(1-e^{-\beta i}/\zeta)^{\delta/2}\zeta^2}-\frac{-A}{\zeta^2(1+e^{-\beta i}/\zeta)^{\delta/2}}$$

$$-\frac{B}{\zeta^2(1-e^{\beta i}/\zeta)^{\delta/2}}-\frac{-C}{\zeta^2(1+e^{\beta i}/\zeta)^{\delta/2}}$$

$$-\frac{D}{\zeta^2(1-e^{-\beta i}/\zeta)^{\delta/2}}\}\,d\zeta \qquad \text{3-6-2}$$

ここにA，B，C，Dは定数で、次のようになる。

$$A=\frac{(1-e^{2\beta i})^{\delta}(1+e^{-2\beta i})}{2^{\delta/2}(1-e^{4\beta i})^{\delta/2}}、\quad B=\frac{(1-e^{-2\beta i})^{\delta}(1+e^{2\beta i})}{2^{\delta/2}(1-e^{4\beta i})^{\delta/2}}$$

$$C=\frac{(1-e^{-2\beta i})^{\delta}(1+e^{2\beta i})}{2^{\delta/2}(1-e^{-4\beta i})^{\delta/2}}、\quad D=\frac{(1-e^{2\beta i})^{\delta}(1+e^{-2\beta i})}{2^{\delta/2}(1-e^{4\beta i})^{\delta/2}} \qquad \text{3-6-3}$$

式 3-6-2の第１項について、

$$\left(1+\frac{e^{-\beta i}}{\zeta}\right)^{(1-\delta/2)} \qquad \text{3-6-4}$$

をべき級数に展開する。そして、次のようなm個の分数式の和を考える。

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{-F_j}{1+f_j\,e^{-\beta i}/\zeta} \qquad \text{3-6-5}$$

そして、式 3-6-4、3-6-5 のべき級数に展開した各々の係数２m個が等しくなるようにF_j、f_j を決める。式 3-6-4の級数は収束が遅いので、適切なべき級数の項を選んでF_j、f_j を決める。詳細は第２章に述べてあるが、ここではm＝12として求めた。式 3-6-5のF_j、f_j が求まれば、式 3-6-2の第２，３，４項も同様に表わすことができる。

次に応力解析を行う。荷重条件はx軸方向無限遠での一様引張りとする。大きさPのx軸方向無限遠での一様引張りを表わす複素応力関数ϕ_0（ζ）、ψ_0（ζ）は次式で表わされる。

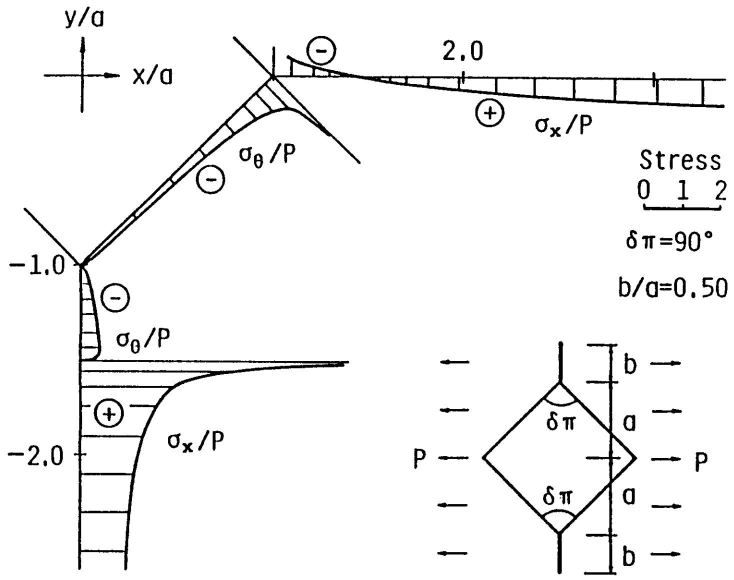


図3-6-2　矩形孔から対称に発生したクラックの応力分布

$$\phi_0(\zeta) = P\omega(\zeta)/4\ ,\quad \psi_0(\zeta) = -P\omega(\zeta)/2 \qquad 3\text{-}6\text{-}6$$

以下は3－2節と同じ手順で応力解析ができる。図 3-6-2に矩形孔の角度90°で、クラック長 b/a＝0.5 の場合の応力分布を示す。図 3-6-2よりクラック先端に大きな応力集中が見られる。クラック縁の接線方向応力成分は、わずかではあるが圧縮応力となっている。

3－7　矩形孔から対称に発生したクラックのある無限板の面外曲げ問題

矩形孔から対称に発生したクラックを有する無限板を、面外曲げ問題として応力解析する。x軸方向無限遠で一様面外曲げ荷重を受ける場合について、矩形孔の角度60°、90°、120°、ポアソン比ν＝0.0,0.25,0.5, クラックの長さを各々変化させて解析する。矩形孔から対称に発生したクラックはy軸に沿うクラックとする。形状、写像関数及び種々のパラメーターは3－6節の平面弾性問題で示したものとまったく同じである。応力解析の方法も3－3節の面外曲げ問題と同様である。大きさMのx軸方向無限遠での一様面外曲げを表わす複素応力関数$\phi_0(\zeta)$、$\psi_0(\zeta)$は次のように表わされる。

$$\phi_0(\zeta) = -M\omega(\zeta)/\{4D(1+\nu)\}$$
$$\psi_0(\zeta) = -M\omega(\zeta)/\{2D(1-\nu)\} \qquad 3\text{-}7\text{-}1$$

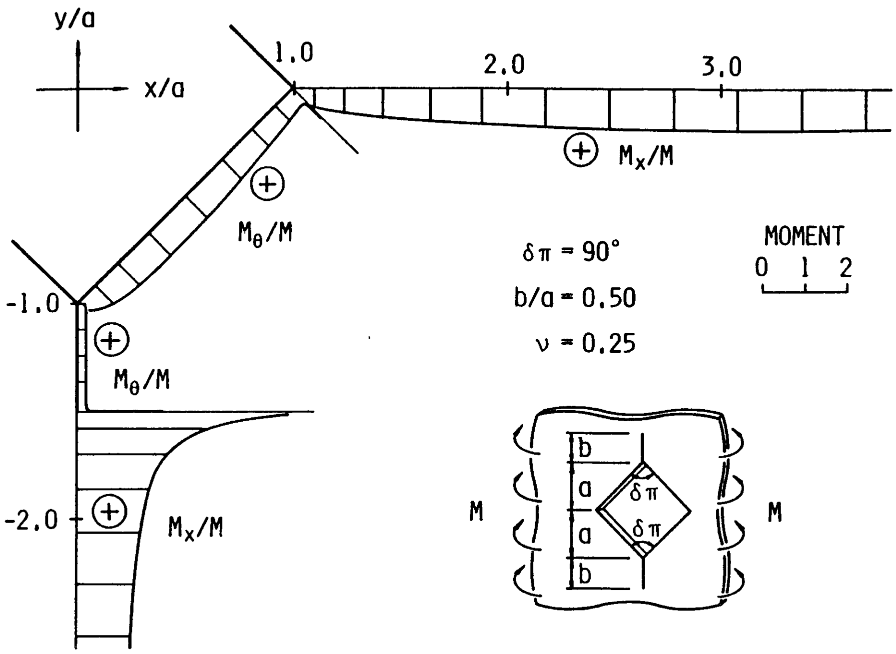


図3-7-1　矩形孔から対称に発生したクラックの応力分布

以下、3－3節と同じ手順で応力解析ができる。図 3-7-1に矩形孔の角度90° でクラック長 b/a＝0.5 、ポアソン比ν＝0.25の場合の応力分布を示す。図 3-7-1より、クラック先端に大きな応力集中が見られる。クラック縁の接線方向応力成分は正の値である。

3－8　まとめ

本章では、工学的に応用範囲が広く、さらに本論文で用いた解析方法を適用して解析できる切欠き、帯板、孔の具体例として、又、応力集中部に発生したクラックの解析として、半無限板の縁にある三角形切欠き、その切欠き先端からクラックが発生した場合、隅角部に丸みのあるＹ字形帯板、無限板中の矩形孔から対称にクラックが発生した場合の応力解析をした。それぞれ切欠きの角度、丸みの曲率半径、孔の角度、クラック長を連続的に変化させ、平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題について解析した。この解析結果は、写像された形状に対しては厳密解である。

半無限板の縁にある三角形切欠きについて、角度による応力分布の特性の違い、切欠きから発生したクラックについて、角度の影響、クラック先端付近やクラック縁の応力分布等を解明した。隅角部に丸みのあるＹ字形帯板については、平面、面外曲げ問題につき４つの荷重条件で応力解析し、さらに丸みの曲率半径を変えて応力集中値を解析し、それぞ

れが曲率半径を用いた応力集中の一般表示式で精度よく表わされることも示した。矩形孔から対称に発生したクラックについても応力解析し、孔の角度の影響、角度とクラック長の関係、クラック先端付近やクラック縁の応力分布等を解明した。

これらの応力解析で、写像関数に切欠きの角度、クラック長、丸みの曲率半径、孔の角度等のパラメーターを含めて解析することによって、連続的にそれらを変化させられる事、任意の場合の解析ができる事、形状が同じであれば同じ写像関数で平面問題も面外曲げ問題も解析できる事が分る。これは、この解析方法の特長の一つである。さらに本章で示したと同様の方法で他の形状の切欠き、帯板、孔、切欠きや孔から発生したクラックの応力解析ができる。

第４章　応力拡大係数の解析

４－１　まえがき

1921年ごろGriffithによって示された、脆性破壊をエネルギーの不安定現象としてとらえる考え方を基とし、Irwin やOrowanらによって修正された脆性破壊の理論が現在の破壊力学の出発点である。

以下破壊力学の中でも、弾性体の応力度やひずみ分布を線形弾性論によって扱い得る線形破壊力学について述べる。換言すれば、塑性域の大きさが他の寸法に比べて十分に小さく、塑性域の大きさを無視して得られた結果が十分な精度を持つ小規模降伏の状態を対象とする。

構造物の破壊は構造物が弾性域より塑性域に移行した後に起こるのであり、塑性域の大きさを無視できない非線形破壊力学の分野についても精力的に研究がすすめられている。たとえばＣＯＤやＪ積分等の扱いがある。しかし、数学的に取扱いやすく、理論が整然としている線形破壊力学は、破壊力学の主流をなすものである。

応力集中に関する研究が歴史を有しているのは、応力集中が原因となって破壊にいたる事例が多いことによると思われる。クラックの応力拡大係数は、切欠きの応力集中率と同じように、その値の大小によって危険度の比較ができる。工学的には許容応力度と同じように、応力拡大係数の許容値を定めることによって、破壊に対するより定量的な制御が可能になる。従ってクラックの解析においては、応力拡大係数を知ることが不可欠となる。一般に、切欠き等の応力集中部には、クラックが発生しやすく、その解析は重要である。しかし、クラックのみの場合に比べて解析例が少ないのは、このような形状の解析が困難であることによると思われる［Murakami ed.(1986),Rooke and Cartwright(1976),Tada ed.(1973)、Sih(1973) ］。

本章では具体的に、半無限板の縁にある三角形切欠きから発生したクラック、無限板中の矩形孔から対称に発生したクラックについて、それぞれ平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題として応力拡大係数を求める。

半無限板の縁にある切欠きから発生したクラックの解析は、石田(1979)による三角形切欠きからいくつかの方向に発生したクラックの解析、同じく石田(1979)による長方形切欠きからいくつかの方向に発生したクラックの解析、長谷部、上田(1980)による数種類の角度を有する段付き半無限板の隅角部から発生したクラックの解析、Nisitani and Isida (1982)による半楕円切欠き、丸みを有するＶ字形切欠きから発生したクラックについて、丸みを変化させての解析がある。又、有限板の縁にある半だ円切欠きから発生したクラックの解析はYamamoto,et al.(1974)、Murakami(1976)が行っている。

又、無限板中の孔から発生したクラックの解析は、Bowie(1956) 、Newman(1971)、西谷、石田(1973)、Tweed and Rooke(1973) 、村上(1978)、Schijve(1983) による円孔から発生したクラックの解析、西谷、石田(1973)、村上(1978)、Lukas and Klesnil (1978)、石田ら(1984)による楕円孔から発生したクラックの解析、村上(1978)による三角形孔から発生したクラックの解析、そしてNeal and Bowie(1966)による長方形孔の角から発生したクラック、Neal(1970)による長方形孔の辺から発生したクラックの解析、村上(1978)による90° の矩形孔から発生したクラック、正方形孔の角から発生したクラックの解析、Hasebe and Ueda(1980) による矩形孔の一ヶ所の角から発生したクラック、及びそのクラックに相対する角の隅角部の強さを解析した研究が見受けられる。

さらに薄板の面外曲げ問題におけるクラックの解析は、Sih.et al.(1962) による古典理論にもとづく解析、Isida(1977) による複数クラックの解析がある。又、Hasebe(1978)、Hasebe and Takemura(1981) による帯板の縁のクラック、帯板と半無限板との角点に発生したクラック、Hasebe,et al.(1984) による段付き帯板の角点に発生したクラック、長谷部、上田(1980)による段付き半無限板の角点に発生したクラック、Hasebe and Inohara (1981)による屈折クラックの解析等もある。ライスナー理論にもとづき、無限板中の円孔とクラックの干渉等を、玉手(1978)が解析している。しかし工学的に重要と思われる切欠きや、孔から発生したクラックの解析はまだ少ない。

4－2　平面弾性問題における三角形切欠きから発生したクラックの応力拡大係数

半無限板の縁にある三角形切欠き先端から発生したクラックについて、x軸方向無限遠で一様引張り荷重を受ける場合の応力拡大係数を求める。なお、切欠きから発生したクラックは、y軸に沿う直線状のクラックとする。形状が対称で一様引張り荷重なので応力拡大係数はモードⅠのみとなる。三角形切欠きの角度20° , 40° , 60° , 80° , 90° , 100° , 120° , 140° , 160° の場合について、クラックの長さを変化させて解析する。

三角形切欠きから発生したクラックの応力拡大係数は、第２章で述べたように、複素応力関数$\phi(\zeta)$と写像関数$\omega(\zeta)$を用いた式 2-5-6より求められる。ζ_0 は単位円周上でクラック先端に対応する点、δはクラックとx軸とのなす角なので、本節の場合、$\zeta_0 = e^{i\alpha}$, $\delta = -\pi/2$となる。さらに次式のように応力拡大係数を無次元化した表示も用いられる。

$$F_I = \frac{K_I}{P\sqrt{\pi(a+b)}} \qquad \text{4-2-1}$$

K_Iを用いても、F_Iを用いても本質的には同じことであり、応用のしやすさ、分りやすさ等により適切に使いわければよい。解析結果を図 4-2-1，表 4-2-1に示す。図 4-2-1には、切欠きの角度20°，40° の場合を示していないが、これは表 4-2-1から分るように、応力拡大係数は十分短いクラックでも、すぐクラックのみの場合のそれに漸近するからである。切欠きの角度が大きいと、ゆっくりとクラックのみの場合に漸近している。切欠きの角度が60° より小さい場合は、クラックのみの場合とほぼ等しい。

4－3　薄板の面外曲げ問題における三角形切欠きから発生したクラックの応力係数

半無限薄板の縁にある三角形切欠き先端から発生したクラックについて、x軸方向無限遠で一様面外曲げ荷重を受ける場合の応力拡大係数を求める。なお、切欠きから発生したクラックは、y軸に沿う直線状のクラックとする。この場合は面外曲げの応力拡大係数のみとなる。三角形切欠きの角度$\delta\pi$＝20°，40°，60°，80°，90°， 100° 120°，140°、ポアソン比 0.0， 0.5の場合について、クラックの長さを変化させて解析する。

三角形切欠きから発生したクラックの面外曲げの応力拡大係数は、第２章で述べたように、複素応力関数$\phi(\zeta)$と写像関数$\omega(\zeta)$を用いた式 2-5-7より求められる。

ここで、前節と同じく$\zeta_0 = e^{i\alpha}$，$\delta = -\pi/2$である。νはポアソン比、Dは曲げ剛性である。さらに次式のように応力拡大係数を無次元化した表示を用いる。

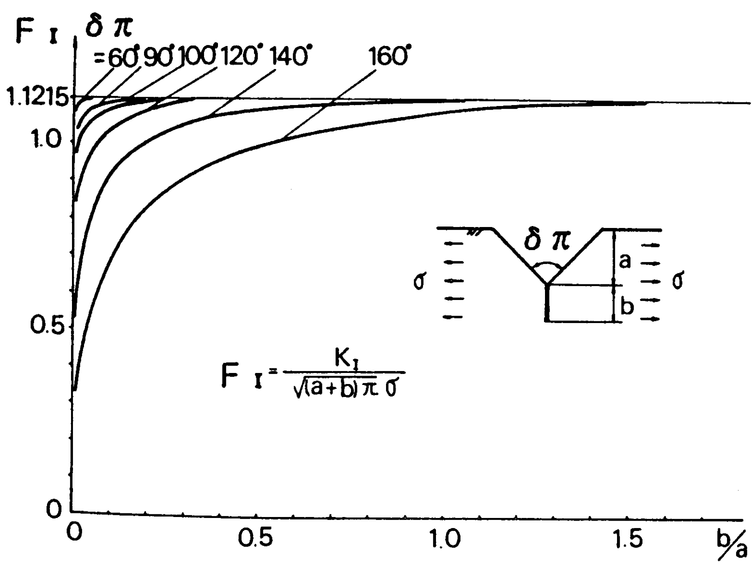


図4-2-1　三角形切欠き先端から発生したクラックの無次元化した応力拡大係数

表4-2-1　三角形切欠き先端から発生したクラックの
応力拡大係数

$\delta\pi$	b/a	$K_1/\sqrt{\pi}\sigma$	$\delta\pi$	b/a	$K_1/\sqrt{\pi}\sigma$	$\delta\pi$	b/a	$K_1/\sqrt{\pi}\sigma$
20°	0.0017 0.0542 0.1087 0.3639 0.7453	1.1224 1.1514 1.1806 1.3094 1.4814	80°	0.0082 0.0261 0.0655 0.2096 0.5769	1.0668 1.1082 1.1476 1.2272 1.4090	120°	0.0286 0.0514 0.1701 0.3192 1.0531	0.9421 1.0088 1.1667 1.2883 1.6066
40°	0.0061 0.0302 0.1407 0.4420 0.8769	1.1234 1.1389 1.1981 1.3463 1.5362	90°	0.0110 0.0335 0.0814 0.1979 0.5389	1.0424 1.0975 1.1504 1.2256 1.3918	140°	0.0622 0.1054 0.3189 0.7459 1.1402	0.8774 0.9781 1.2173 1.4659 1.6387
60°	0.0047 0.0098 0.0164 0.1859 0.5482	1.1020 1.1139 1.1222 1.2225 1.3951	100°	0.0280 0.0435 0.1022 0.4203 0.9306	1.0541 1.0781 1.1523 1.3371 1.5583	160°	0.0185 0.1804 0.7971 1.3894 3.0459	0.4213 0.8800 1.4175 1.7270 2.2554

$$F_B = \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} \frac{k_B}{M\sqrt{(a+b)}} \qquad 4\text{-}3\text{-}1$$

解析結果を図 4-3-1，表 4-3-1に示す。この場合も切欠きの角度が大きいと、ゆっくりとクラックのみの場合に漸近している。さらに、ポアソン比とF_B の関係はほぼ線形であり、任意のポアソン比に対するF_B は内挿によって求められる。図 4-3-2に切欠き角度 100° の場合のF_B とポアソン比の関係を示す。

4－4　平面弾性問題における矩形孔から対称に発生したクラックの応力拡大係数

無限板中の矩形孔から対称に発生したクラックについて、x軸方向無限遠で一様引張り荷重を受ける場合の応力拡大係数を求める。クラックはy軸に沿う直線状のクラックとする。対称性より応力拡大係数はモードⅠのみとなる。矩形孔の角度20°，40°，60°，80°，90°，100°，120°，140°，160° の場合について、クラックの長さを変化させて解析する。応力拡大係数は、前節と同じく、式2-5-6 より求められる。本節の場合、

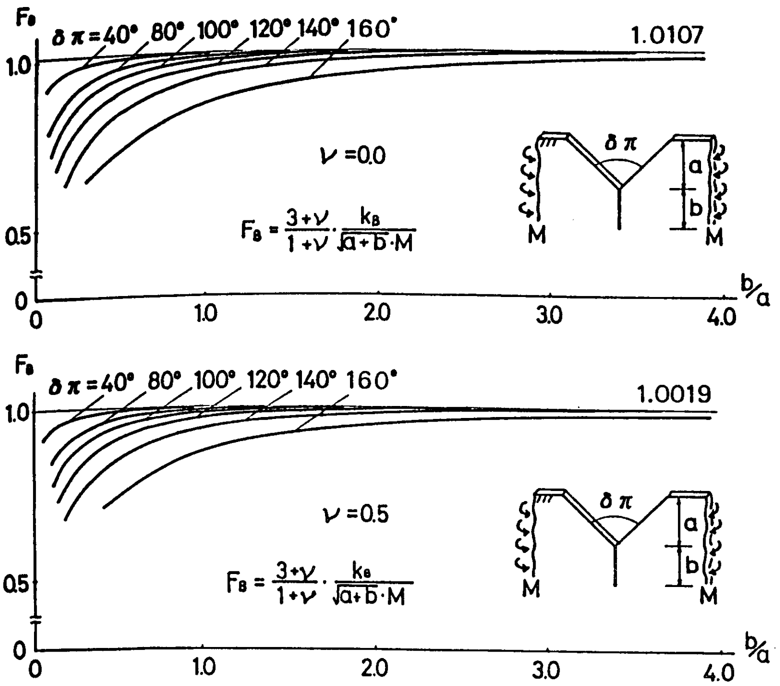


図4-3-1　三角形切欠き先端から発生したクラックの無次元化した応力拡大係数

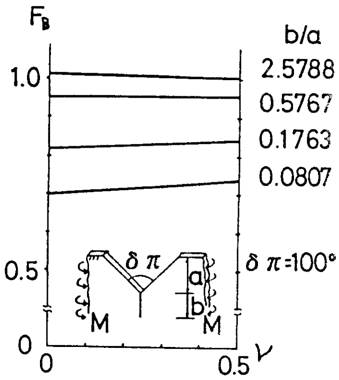


図4-3-2　応力拡大係数とポアソン比の関係

表4-3-1　三角形切欠き先端から発生したクラックの無次元化した応力拡大係数

$\delta\pi$	b/a	F_B		$\delta\pi$	b/a	F_B	
		ν=0.0	ν=0.5			ν=0.0	ν=0.5
0°		1.0107	1.0019				
	0.044	0.9543	0.9554		0.064	0.7137	0.7470
	0.078	0.9712	0.9695		0.146	0.8238	0.8476
20°	0.199	0.9928	0.9874	90°	0.230	0.8801	0.8964
	0.428	1.0039	0.9967		0.917	0.9891	0.9863
	0.609	1.0068	0.9991		1.465	1.0022	0.9962
	0.060	0.9049	0.9148		0.081	0.6982	0.7357
	0.103	0.9363	0.9414		0.278	0.8760	0.8930
40°	0.250	0.9755	0.9753	100°	0.577	0.9516	0.9565
	0.515	0.9963	0.9921		1.060	0.9863	0.9860
	0.722	1.0034	0.9967		1.414	0.9983	0.9934
	0.084	0.8641	0.8814		0.126	0.6772	0.7151
	0.139	0.9077	0.9185		0.286	0.8163	0.8402
60°	0.319	0.9645	0.9657	120°	0.845	0.9536	0.9582
	0.634	0.9932	0.9889		1.492	0.9898	0.9869
	0.875	1.0007	0.9948		2.291	1.0026	0.9966
	0.120	0.8340	0.8565		0.261	0.7179	0.7463
	0.420	0.9556	0.9593		0.746	0.8956	0.9080
80°	0.803	0.9900	0.9869	140°	1.393	0.9645	0.9652
	1.090	0.9990	0.9938		2.360	0.9936	0.9898
	1.300	1.0025	0.9964		3.041	1.0012	0.9955

クラックが２つあるので、$\zeta_0=\pm i$，$\delta=\pm\pi/2$である。さらに次式のように応力拡大係数を無次元化した表示を用いる。

$$F_I=\frac{K_I}{P\sqrt{\pi(a+b)}} \qquad 4\text{-}4\text{-}1$$

解析結果を図 4-4-1，表 4-4-1に示す。この場合も矩形孔の角度が大きいと、ゆっくりクラックのみの場合に漸近している。しかもすべての角度において、クラックのみの場合より大きな値の方から漸近している。これは矩形孔の影響であり、同様の傾向は円孔から発生したクラックの場合にも見られる。〔例えば西谷、石田(1973)〕

４－５　薄板の面外曲げ問題における矩形孔から対称に発生したクラックの応力拡大係数

無限薄板中の矩形孔から対称に発生したクラックについて、x軸方向無限遠で一様面外曲げ荷重を受ける場合の応力拡大係数を求める。クラックはy軸に沿う直線状のクラックとする。この場合は面外曲げの応力拡大係数のみとなる。矩形孔の角度$\delta\pi=60°$，90°，120°，ポアソン比 0.0，0.25，0.5の場合について、クラックの長さを変化させて解析する。矩形孔から対称に発生したクラックの面外曲げの応力拡大係数は、前節と同じく、式2-5-7より求められる。$\zeta_0=\pm i$，$\delta=\pm\pi/2$である。νはポアソン比、Dは曲げ剛性である。さらに次式のように応力拡大係数を無次元化した表示を用いる。

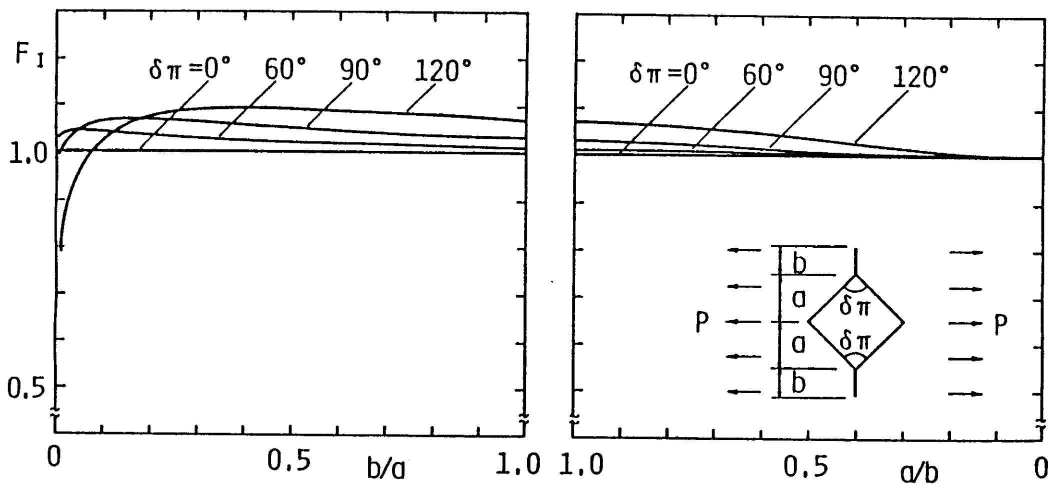


図4-4-1　矩形孔から対称に発生したクラックの無次元化した応力拡大係数

表4-4-1　矩形孔から対称に発生したクラックの
無次元化した応力拡大係数

b/a (a/b)	F_I	b/a (a/b)	F_I	b/a (a/b)	F_I	b/a (a/b)	F_I	b/a (a/b)	F_I
$\delta\pi=20^\circ$		$\delta\pi=40^\circ$		$\delta\pi=60^\circ$		$\delta\pi=80^\circ$		$\delta\pi=90^\circ$	
0.0058	1.008	0.0059	1.024	0.0059	1.033	0.0062	1.014	0.0051	0.969
0.0109	1.008	0.0123	1.025	0.0139	1.039	0.0101	1.025	0.0134	1.012
0.0215	1.007	0.0205	1.025	0.0243	1.042	0.0224	1.042	0.0207	1.026
0.0534	1.006	0.0563	1.022	0.0604	1.043	0.0663	1.059	0.0478	1.053
0.100	1.005	0.109	1.019	0.122	1.039	0.113	1.062	0.0950	1.066
0.191	1.003	0.240	1.013	0.219	1.033	0.202	1.058	0.153	1.070
0.365	1.002	0.443	1.008	0.416	1.023	0.406	1.045	0.222	1.068
0.488	1.002	0.585	1.006	0.550	1.018	0.539	1.037	0.473	1.053
0.647	1.001	0.766	1.005	0.716	1.014	0.702	1.030	0.623	1.045
0.857	1.001	0.900	1.004	0.925	1.010	0.901	1.024	0.804	1.037
(0.877)	1.001	(0.998)	1.003	(0.835)	1.007	(0.870)	1.018	(0.976)	1.029
(0.648)	1.000	(0.757)	1.002	(0.641)	1.005	(0.681)	1.013	(0.769)	1.022
(0.464)	1.000	(0.408)	1.001	(0.483)	1.003	(0.402)	1.005	(0.404)	1.008
(0.401)	1.000	(0.279)	1.000	(0.352)	1.002	(0.296)	1.003	(0.322)	1.006
(0.0)	1.000	(0.0)	1.000	(0.0)	1.000	(0.0)	1.000	(0.0)	1.000

$\delta\pi=100^\circ$		$\delta\pi=120^\circ$		$\delta\pi=140^\circ$		$\delta\pi=160^\circ$	
0.0071	0.936	0.0085	0.801	0.0085	0.583	0.0365	0.513
0.0179	0.993	0.0145	0.850	0.0155	0.653	0.0436	0.541
0.0225	1.002	0.0341	0.938	0.0203	0.688	0.0508	0.566
0.0613	1.049	0.0504	0.970	0.0730	0.875	0.0651	0.608
0.119	1.070	0.106	1.033	0.105	0.921	0.102	0.690
0.227	1.077	0.245	1.079	0.362	1.064	0.208	0.840
0.414	1.070	0.416	1.089	0.446	1.079	0.370	0.943
0.558	1.062	0.514	1.089	0.535	1.088	0.536	1.007
0.729	1.053	0.620	1.086	0.628	1.094	0.712	1.043
0.933	1.044	0.819	1.078	0.880	1.099	0.893	1.067
(0.847)	1.035	(0.951)	1.069	(0.955)	1.098	(0.924)	1.083
(0.672)	1.027	(0.756)	1.058	(0.739)	1.092	(0.595)	1.105
(0.418)	1.014	(0.487)	1.037	(0.474)	1.072	(0.336)	1.102
(0.287)	1.007	(0.268)	1.015	(0.255)	1.036	(0.224)	1.083
(0.0)	1.000	(0.0)	1.000	(0.0)	1.000	(0.0)	1.000

$$F_B = \frac{(3+\nu)}{(1+\nu)} \frac{k_B}{M\sqrt{(a+b)}} \qquad 4\text{-}5\text{-}1$$

解析結果を図 4-5-1，表 4-5-1に示す。この場合も矩形孔の角度が大きいと、ゆっくりとクラックのみの場合に漸近している。さらにポアソン比とF_B の関係はほぼ線形であり、任意のポアソン比に対するF_B は内挿によって求められる。すべての角度について、F_B の値はポアソン比の大きい方が大きい。

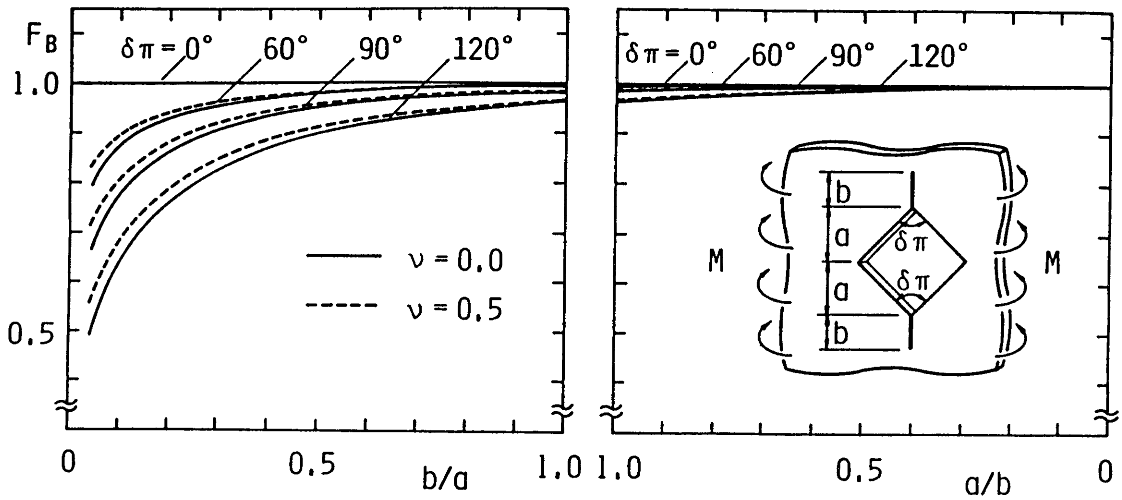


図4-5-1　矩形孔から対称に発生したクラックの
無次元化した応力拡大係数

表4-5-1　矩形孔から対称に発生したクラックの
無次元化した応力拡大係数

b/a(a/b)	δπ=60°			δπ=90°			δπ=120°		
	ν=0.0	ν=0.25	ν=0.5	ν=0.0	ν=0.25	ν=0.5	ν=0.0	ν=0.25	ν=0.5
0.100	0.875	0.885	0.894	0.771	0.788	0.803	0.634	0.655	0.674
0.200	0.929	0.935	0.940	0.861	0.872	0.882	0.756	0.772	0.786
0.400	0.970	0.972	0.974	0.933	0.938	0.943	0.866	0.876	0.885
0.600	0.984	0.985	0.986	0.963	0.966	0.969	0.917	0.923	0.929
0.800	0.991	0.991	0.992	0.978	0.979	0.981	0.946	0.950	0.954
1.000	0.994	0.994	0.995	0.986	0.986	0.987	0.964	0.967	0.969
(0.800)	0.997	0.997	0.997	0.991	0.992	0.992	0.978	0.978	0.980
(0.600)	0.998	0.998	0.998	0.996	0.996	0.996	0.989	0.989	0.989
(0.400)	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.996	0.996	0.996
(0.0)	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

4－6　まとめ

半無限板の縁にある三角形切欠き先端から発生したクラックと、無限板中の矩形孔から対称に発生したクラックについて、切欠き角度及び矩形孔の角度を変化させて応力拡大係数を解析した。その結果、大きく分類すると、角度がほぼ60° 以下の切欠き及び矩形孔は、クラックのみの場合と同じ程度に危険であり、ほぼ 120° 以上の場合は、切欠き及び矩形

孔の影響を受ける。つまり、クラックが十分に長くならないと、切欠き及び矩形孔の影響はなくならないことが分る。

本章で解析したように応力拡大係数の解析は、第3章で計算した写像関数$\omega(\zeta)$と複素応力関数$\phi(\zeta)$をそのまま用いてできる。つまり、クラックを有する形状の応力解析と応力拡大係数の解析が同時にできるのもこの解析方法の利点である。

第５章　切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を求める近似式

５－１　まえがき

本章では、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を、クラック発生前の応力分布を用いて求める近似式について述べる。クラックのみの解析に比べて切欠きや孔から発生したクラックの解析例が少ないのは第４章で示した。しかし工学的には、任意の形状の場合に対する解析が必要とされる。よってクラック発生前の応力分布を用いて、クラックの応力拡大係数を近似的に求める方法には、過去の応力集中に関する非常に多くの研究結果が応用できる利点もある。クラック発生前の応力分布は過去の研究で分っており、これを利用することは有効で合理的な方法といえる。

切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を近似的に求める試みはなされているが、公式や、近似式を示したものはあまり多くない。Kobayashi(1986) による、等価な長さのクラックを仮定し、クラック発生前の応力分布をその仮定したクラックに作用させた時の応力拡大係数を、円孔から発生したクラックに対する応力拡大係数の近似値とする研究；西谷ら(1984)による、楕円孔及び半楕円切欠きから発生したクラックに対して応力分布を用いた近似式，Albrecht and Yamada(1977) による補正係数を用いた近似式，Jergeus(1978) ，Lukas and Klesnil(1984) 、中井ら(1984)による応力集中値及び切欠き先端の丸みの曲率半径を用いた近似式等があるが、より一般的な表示は見受けられないようである。

５－２　平面弾性問題の場合

切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を、クラック発生前の応力分布を用いて求める近似を次式のように表わす。

$$K_I = A\sigma(b)\sqrt{\pi b} \qquad \text{5-2-1}$$

ここで、K_I：切欠きから発生したクラックの応力拡大係数、Ａ：定数、$\sigma(b)$ ：クラック発生前の応力分布でクラック長ｂに対応する位置の応力値、ｂ：クラック長である。無次元化した応力拡大係数は、式 4-2-1と式 5-2-1より次式のように表わされる。

$$F = \frac{K_I}{P\sqrt{\pi(a+b)}} = A\frac{\sigma(b)}{P}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}} \qquad \text{5-2-2}$$

すでに、X軸方向無限遠での一様引張荷重Pによる、半無限板の縁にある三角形切欠きの応力解析、及びその三角形切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数の解析は、3章でなされている[Hasebe and Iida(1978)]。その解析結果を使って、式 5-2-2のA値を求める。式 5-2-2を変形して次式のように表わす。

$$A = F \frac{P}{\sigma(b)} \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt{a}} \qquad 5\text{-}2\text{-}3$$

式 5-2-3に、三角形切欠きの各角度毎の応力値、三角形切欠きから発生した各クラック長に対する応力拡大係数の解析結果を代入してA値を求める。ここでは、三角形切欠きの角度$\delta\pi$=20°，40°，60°，80°，90°，100°，120°，140°，160°の場合について計算し、クラック長b/a = 0～ 1.6までのA値を求めた。その値を図 5-2-1に示す。図 5-2-1から、クラック長が短い範囲（大体b/a = 0～ 0.3）では、各々の角度の切欠きに対しA値はクラック長によらずほぼ一定とみなせる（三角形切欠きの角度が大きいと、もう少し長い範囲まで一定であるが）。

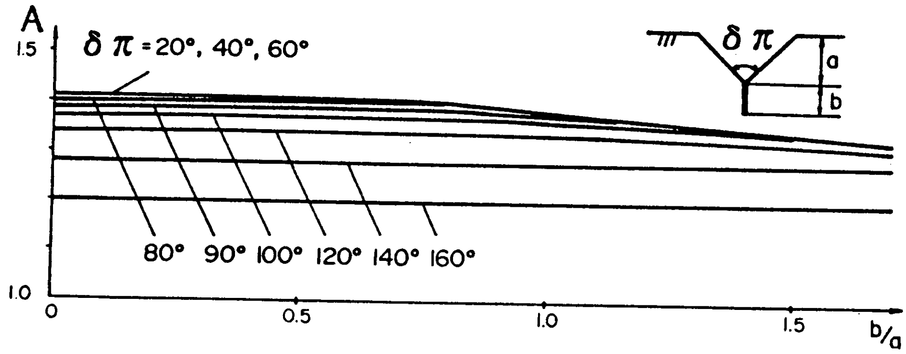


図5-2-1　式5-2-3 のA値

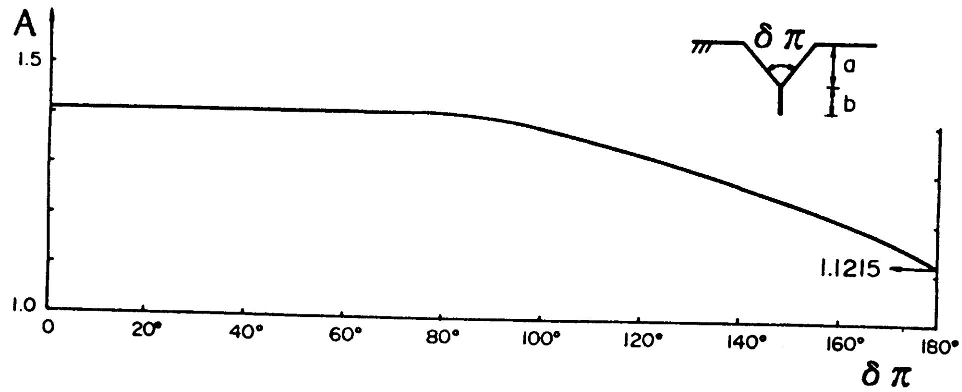


図5-2-2　一定とみなせるA値

これより、式 5-2-1, 5-2-2の近似式で応力拡大係数を求める場合、クラック長が短かければ、A値が一定であり近似式がより簡単なものとなる。三角形切欠きの角度と、一定とみなせる範囲のA値を図 5-2-2に示す。

5－3 薄板の面外曲げ問題の場合

薄板の面外曲げ問題の場合についても同様に、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を、クラック発生前の応力分布を用いて求める近似式を次のように表わす。

$$k_B = \frac{(1+\nu)}{(3+\nu)} AM(b)\sqrt{b} \qquad 5\text{-}3\text{-}1$$

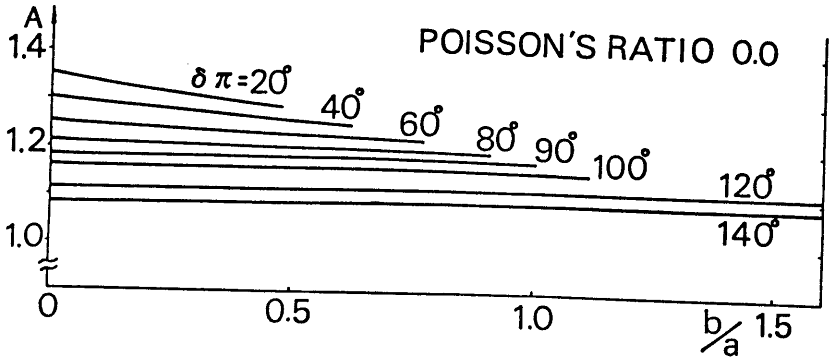
ここで、k_B ：切欠きから発生したクラックの面外曲げの応力拡大係数、ν：ポアソン比、A：定数、M(b) ：クラック発生前の曲げモーメント分布でクラック長bに対応する位置の曲げモーメント値、b：クラック長である。又、$(1+\nu)/(3+\nu)$ は定数Aがポアソン比にあまり影響されないように乗じたものである。無次元化した応力拡大係数は式 4-3-1より次のように表わされる。

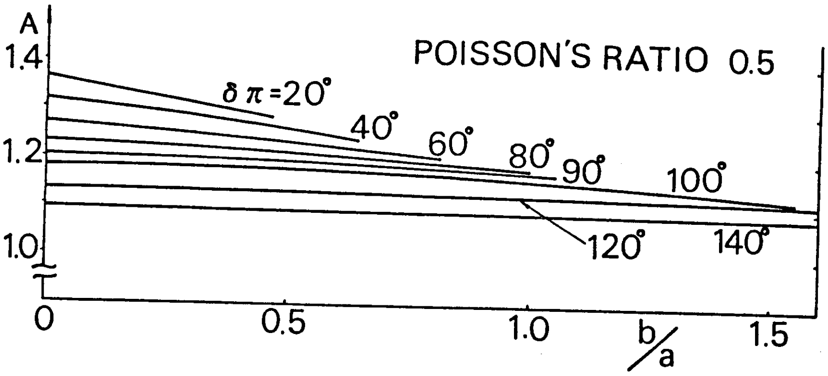
$$F_B = A \frac{M(b)}{M} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}} \qquad 5\text{-}3\text{-}2$$

前節と同じように、x軸方向無限遠での一様面外曲げ荷重Mによる、半無限板の縁にある三角形切欠きの応力解析、及びその三角形切欠き先端から発生したクラックの面外曲げの応力拡大係数の解析は、3章でなされている［Hasebe and Iida (1979)］。その解析結果を使って式 5-3-2のA値を求める。式 5-3-2を変形して次式のように表わす。

$$A = F_B \frac{M}{M(b)} \frac{\sqrt{(a+b)}}{\sqrt{b}} \qquad 5\text{-}3\text{-}3$$

式 5-3-3に、三角形切欠きの各角度毎の応力値、三角形切欠きから発生した各クラック長に対する応力拡大係数の解析結果を代入してA値を求める。ここでは、三角形切欠きの角度$\delta\pi$＝20°, 40°, 60°, 80°, 90°, 100°, 120°, 140°の場合について計算し、クラック長b/a = 0から 0.5～ 1.5まで、ポアソン比ν＝ 0.0, 0.25 , 0.5の場合のA値を求めた。その値を図 5-3-1に示す。面外曲げ問題の場合は、三角形切欠きの角度が大きいと、A値はクラック長によらずほぼ一定であるが、角度が小さいとクラック長に依存する。又、A値とポアソン比との関係は、三角形切欠きの各角度においてほぼ線形であり、任意のポアソン比の場合のA値は、図 5-3-1に示されたA値から内挿によって求め





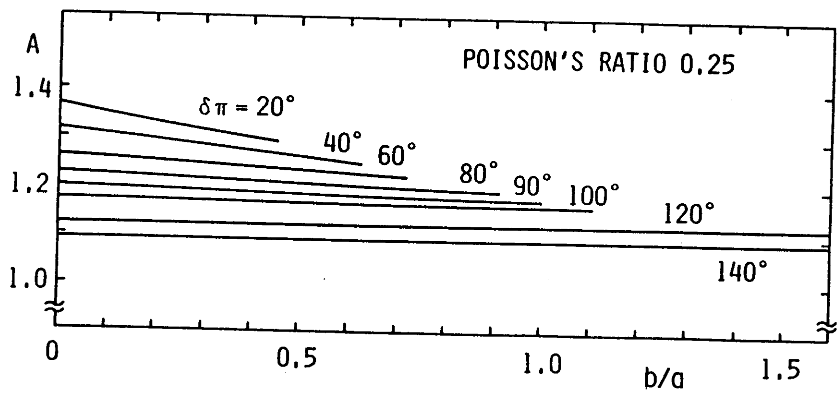


図5-3-1　式5-3-3 のA値

られる。

5－4　まとめ

式 5-2-1,5-2-2,5-3-1,5-3-2からクラック発生前の応力分布が分れば図 5-2-1,5-3-1のA値を用いて応力拡大係数が求められる。さらに半無限板の縁にある三角形切欠きについて述べてきたが、無限板中の矩形孔から対称に発生したクラックについても同様に解析が

できる。無限板中の矩形孔から対称に発生したクラックの解析については第８章で詳しく述べるが、Ａ値は三角形切欠きの場合とほぼ同じである。これは三角形切欠きも矩形孔も、応力が集中する角点近傍に注目すれば、角度が同じなら、同じ隅角部であることによる。これより図 5-2-1,5-3-1のＡ値は応力が集中する角点、つまり隅角部角度の２等分線に対称な応力状態であれば、隅角部の角度とポアソン比のみに依存する。さらに角点を有する帯状領域、たとえば 3-4節、 3-5節で解析したＹ字形帯板でも、応力が集中している角点から発生したクラックの応力拡大係数は、図 5-2-1,5-3-1のＡ値を用いて、クラック発生前の応力分布が分れば求められる。

鋭い切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数を求める近似式を示したが、切欠き先端に丸みのある切欠きからクラックが発生する場合も多く、その応力拡大係数を求める近似式も重要である。しかし、このような場合を一般的に表わすのは難しい。ここでは１つの方法を示す。西谷によって、一様引張りを受ける無限板中の楕円孔から発生したクラックの解析がなされ、楕円孔の形、クラック長を変化させてその応力拡大係数が求められている。そこでクラック発生前、つまり無限板中の楕円孔の応力の式は分かっているので、これらの解析結果を式 5-2-1に代入し、Ａ値を逆算してみる。

図 5-4-1に楕円孔のそれぞれの曲率半径ρについて、クラック長さｂと楕円孔のクラック方向半軸長ａの比に対するＡ値を示す。この図より次のことが分かる。ｂが十分に小さい時、すべてのＡ値が 1.12 に漸近している。この 1.12 は一様張りを受ける半無限板の縁クラックの応力拡大係数である。図よりρの影響がよくわかり、ρが大きい場合しか 1.12 の値は使えない。楕円曲線でない場合でも、クラック発生前の応力σ_{θ}(b) と図のＡ値を用いて応力拡大係数のよい近似値は得られよう。

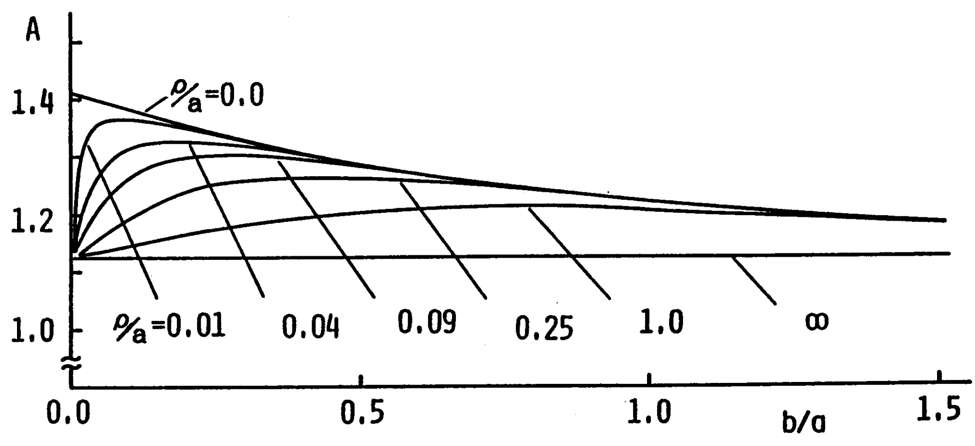


図5-4-1　楕円孔の場合のＡ値

第６章　隅角部の強さ

６－１　まえがき

本章では、「隅角部の強さ」という新しい考え方について説明する。隅角部先端付近の応力分布は後で詳しく述べるが、一般に次式のように表わされる。

$$\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, r^{m_j} \qquad \text{6-1-1}$$

ここで、σ：隅角部先端付近の応力成分、r：隅角部先端からの距離（極座標系r，θで表わしているがθの項は各べき級数の係数f_jの中に入れてある。）、m_j（j=1,2,3…：式6-2-10や式6-2-11等の特性方程式の根である。平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題、自由境界　、固定境界、隅角部２等分線に対称な応力状態の場合、逆対称な場合等に対して、それぞれm_jは隅角部の角度によってきまる。表 6-2-1等に最初の数項をとったm_jの値を示す。又、各べき級数の係数f_j（j=1,2,3…）は隅角部の角度2αと荷重条件によって決まる。

隅角部領域側の角度が 180°＜角度≦ 360° の場合、式 6-1-1の第１項の指数m_1の値は$-0.5 \leqq m_1 < 0$の範囲となる。よってrが小さい時、応力集中を生じ、さらに、$r \to 0$の時、$\sigma \to \infty$の特異性を有する。これより隅角部先端近傍（rが小さい範囲）の応力は式 6-1-1の第１項が他の項に比べて十分大きな値となり、次式のように第１項のみで表わすことができる。

$$\sigma = f_1 \, r^{m_1} \qquad \text{6-1-2}$$

ここで、rとm_1は各々与えられるので境界条件より決まる係数f_1が隅角部先端近傍の応力分布に対して重要なパラメーターとなることが分る。よってこの第１項の係数f_1を「隅角部の強さ(Intensity of Corner)」と定義する。

隅角部領域側の角度が 360° の場合はクラックとなり、この隅角部の強さは応力拡大係数に相当する。つまり、クラックにおける応力拡大係数の考えを、任意の角度の隅角部に拡張した考え方でもある。このような隅角部の特異性についての研究は一般化した応力拡大係数を定義し、切欠きの相似則を実験をもとに研究したCarpinteri(1987)，隅角部応力の特異性を解析したWilliams（1952 a，b），Carpenter（1984，1985）による研究がある。

しかし、隅角部の強さを隅角部先端近傍の応力分布に対する重要なパラメーターとして

位置付けるのみでなく、さらに第７章、第８章で詳しく述べるように、隅角部の強さと応力集中係数表示式との関係、及び応力拡大係数を求める近似式との関係等へ発展させた研究は見受けられない。

本章では、隅角部の強さを、平面弾性問題、薄板の面外曲げ問題ともに、自由境界と固定境界の場合について解析した。固定境界は、構造的な固定や、剛体介在物、異種材料との接合部で一方が剛な材料の場合等が考えられる。さらに一般の工学的な種々の接合問題については、境界が完全に自由な状態と完全に固定された状態とを両極限とする中間の状態であろう。そこで、両極限の状態を解析しておけば、中間の状態は類推が可能となる。さらに種々の中間の状態を考慮し、両極限を許容値とする考え方も工学的利用の立場から見て十分実用的である。

６－２　特性方程式

隅角部付近の応力と隅角部角度との関係を考察するため図 6-2-1に示すようなクサビ状領域を考え、極座標系で表わした応力成分の表示式を用いる。

（ａ）平面弾性問題で両辺自由の場合

まず、境界条件として隅角部付近に外力の作用していない両辺自由の場合を考える。応力関数をＦ（ｒ，θ）とおくと応力成分の式は次のように表わされる。

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \qquad \text{6-2-1}$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)$$

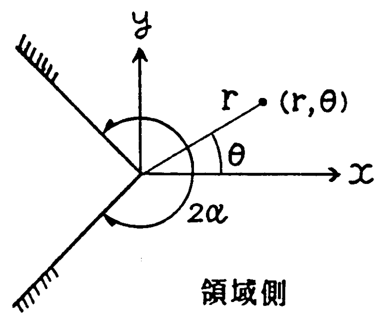


図6-2-1 クサビ状領域

また応力関数Ｆ（ｒ，θ）は重調和微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 F=0 \qquad \text{6-2-2}$$

を満足しなければならない。

今、隅角部付近の応力関数を次式のように表わす。

$$F(r, \theta) = r^{m+2} f(\theta) \qquad 6\text{-}2\text{-}3$$

するとF（r，θ）は式 6-2-2を満足しなければならないからθに関する４階の微分方程式

$$\frac{d^4 f}{d\theta^4} + 2(m^2 + 2m + 2)\frac{d^2 f}{d\theta^2} + m^2 (m+2)^2 f = 0 \qquad 6\text{-}2\text{-}4$$

を得る。よってｆ（θ）は次式のように表わされる。

$$f(\theta) = A\sin m\theta + B\cos m\theta + C\sin(m+2)\theta + D\cos(m+2)\theta \qquad 6\text{-}2\text{-}5$$

ここにA，B，C，Dは積分定数である。又、応力成分は式 6-2-1より次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}\sigma_r &= r^m \{(m+2) f(\theta) + f''(\theta)\}\\ &= (m+1) r^m \{A(2-m)\sin m\theta + B(2-m)\cos m\theta\\ &\quad - C(m+2)\sin(m+2)\theta - D(m+2)\cos(m+2)\theta\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= (m+1)(m+2) r^m f(\theta)\\ &= (m+1)(m+2) r^m \{A\sin m\theta + B\cos m\theta\\ &\quad + C\sin(m+2)\theta + D\cos(m+2)\theta\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} &= -(m+1) r^m f'(\theta)\\ &= -(m+1) r^m \{Am\cos m\theta - Bm\sin m\theta + C(m+2)\cos(m+2)\theta\\ &\quad - D(m+2)\sin(m+2)\theta\}\end{aligned} \qquad 6\text{-}2\text{-}6$$

このときの境界条件は次式のように表わされる。

$$[\sigma_\theta]_{\theta=\pm\alpha} = 0, \quad [\tau_{r\theta}]_{\theta=\pm\alpha} = 0 \qquad 6\text{-}2\text{-}7$$

よって式 6-2-6を式 6-2-7に代入し、定数A，B，C，Dを含んだ以下の4つの式を得る。

$$A\sin m\alpha + B\cos m\alpha + C\sin(m+2)\alpha + D\cos(m+2)m\alpha = 0 \quad ①$$
$$-A\sin m\alpha + B\mathrm{con}\, m\alpha - C\sin(m+2)\alpha + D\cos(m+2)m\alpha = 0 \quad ②$$
$$Am\cos m\alpha - Bm\sin m\alpha + C(m+2)\cos(m+2)\alpha - D(m+2)\sin(m+2)\alpha = 0 \quad ③$$
$$Am\cos m\alpha + Bm\sin m\alpha + C(m+2)\cos(m+2)\alpha + D(m+2)\sin(m+2)\alpha = 0 \quad ④$$

6-2-8

定数A，B，C，Dがことごとくは恒等的に0でない解を持つためには、上の4つの式の係数から作った行列式が0に等しくなければならない。上式で符号のみが違う項があるので

①＋②より $B\cos m\alpha + D\cos(m+2)\alpha = 0$ ⑤
④－③より $Bm\sin m\alpha + D(m+2)\sin(m+2)\alpha = 0$ ⑥
①－②より $A\sin m\alpha + C\sin(m+2)\alpha = 0$ ⑦ 6-2-9
④＋③より $Am\cos m\alpha + C(m+2)\cos(m+2)\alpha = 0$ ⑧

とおける。

よってA＝C＝0のときは⑤，⑥より

$$\begin{vmatrix} \cos m\alpha & \cos(m+2)\alpha \\ m\sin m\alpha & (m+2)\sin(m+2)\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad (m+1)\sin 2\alpha + \sin 2(m+1)\alpha = 0 \qquad 6\text{-}2\text{-}10$$

B＝D＝0のときは⑦，⑧より

$$\begin{vmatrix} \sin m\alpha & \sin(m+1)\alpha \\ m\cos m\alpha & (m+2)\cos(m+2)\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad (m+1)\sin 2\alpha - \sin 2(m+1)\alpha = 0 \qquad 6\text{-}2\text{-}11$$

が成り立たなければならない。

ここで式6-2-10はA＝C＝0でB，Dが共に0でない場合に成り立つので式 6-2-6より

$$\sigma_r = -\Sigma(m_j+1)\, r^{mj}\{B(m_j-2)\cos m_j\theta + D(m_j+2)\cos(m_j+2)\theta\}$$
$$\sigma_\theta = \Sigma(m_j+1)(m_j+2)\, r^{mj}\{B\cos m_j\theta + D\cos(m_j+2)\theta\}$$

$$\tau_{r\theta}=\Sigma(m_j+1)\ r^{m_j}\{Bm_j\sin m_j\theta+D(m_j+2)\sin(m_j+2)\theta\}$$

6-2-12

となる。上式は隅角部の２等分線に対して対称な応力状態を表わしている。よって式6-2-10は隅角部の２等分線に対して対称な応力状態の場合に成り立つ条件式である。
又、式6-2-11はＢ＝Ｄ＝０でＡ，Ｃが共に０でない場合に成り立つので式 6-2-6より

$$\sigma_r=-\Sigma(m_j+1)\ r^{m_j}\{A(m_j-2)\sin m_j\theta+C(m_j+2)\sin(m_j+2)\theta\}$$
$$\sigma_\theta=\Sigma(m_j+1)(m_j+2)\ r^{m_j}\{A\sin m_j\theta+C\sin(m_j+2)\theta\}$$
$$\tau_{r\theta}=-\Sigma(m_j+1)\ r^{m_j}\{Am\cos m_j\theta+C(m_j+2)\cos(m_j+2)\theta\}$$

6-2-13

となる。上式は隅角部の２等分線に対して逆対称な応力状態を表わしている。よって式6-2-11は隅角部の２等分線に対して逆対称な応力状態の場合に成り立つ条件式である。一般の応力状態は式6-2-12と式6-2-13の重ね合わせによって表わされる。以上により隅角部角度2αと応力のOrder mとの関係は式6-2-10と式6-2-11で求められる。これらの式は各角度で無限個の根を有する。その根と応力成分の式 6-2-12,式6-2-13の係数をまとめて応力を次のように表わす。

$$\sigma=\sum_{j=1}^{\infty} f_j\ r^{m_j} \qquad 6\text{-}2\text{-}14$$

f_j は角度θ，2α、境界条件によって決まる係数である。
上式は式 6-1-1と同じ式である。表 6-2-1に式6-2-10と式6-2-11の隅角部角度10° 毎のm_1，m_2 の値を示す。

（ｂ）平面弾性問題で両辺固定の場合

隅角部の応力分布については、Williams(1952b)も解析しており、平面問題における境界上が固定の場合について次のように述べている。

２つの応力関数χ，ψを用いて変位成分U_r，U_θ，応力成分σ_r，σ_θ，$\tau_{r\theta}$を次のように表わす。

$$2\mu U_r=-\frac{\partial\chi}{\partial r}+(1-\sigma)\,r\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

表6-2-1　式 6-2-10,式6-2-11のm1, m2値

式6-2-10のm1,m2

2α	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000
190	-0.09996	1.00180
200	-0.18130	1.01826
210	-0.24803	1.10629 ±i 0.09610
220	-0.30284	1.00565 ±i 0.19838
230	-0.34773	0.91527 ±i 0.23695
240	-0.38427	0.83355 ±i 0.25225
250	-0.41372	0.75925 ±i 0.25400
260	-0.43716	0.69141 ±i 0.24634
270	-0.45552	0.62926 ±i 0.23125
280	-0.46960	0.57214 ±i 0.20945
290	-0.48015	0.51955 ±i 0.18048
300	-0.48778	0.47103 ±i 0.14185
310	-0.49307	0.42623 ±i 0.08316
320	-0.49651	0.46701
330	-0.49855	0.20296
340	-0.49957	0.12541
350	-0.49995	0.05884
360	-0.50000	0.00000

式6-2-11のm1,m2

2α	m_1	m_2
180°	1.00000	2.00000
190	0.79893	2.00783
200	0.63053	2.12255
210	0.48581	1.96784 ±i 0.26119
220	0.35950	1.82908 ±i 0.31662
230	0.24804	1.70361 ±i 0.34096
240	0.14891	1.58948 ±i 0.34837
250	0.06022	1.48517 ±i 0.34486
260	-0.01953	1.38945 ±i 0.33347
270	-0.09147	1.30133 ±i 0.31584
280	-0.15656	1.21996 ±i 0.29272
290	-0.21556	1.14466 ±i 0.26418
300	-0.26910	1.07483 ±i 0.22943
310	-0.31771	1.00998 ±i 0.18606
320	-0.36182	0.94973 ±i 0.12656
330	-0.40181	0.83893
340	-0.43799	0.69225
350	-0.47065	0.58861
360	-0.50000	0.00000

$$2\mu U_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} + (1-\sigma)\, r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial\theta} \qquad 6\text{-}2\text{-}15$$

又、$\nabla^2\chi = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$

ここで、μ：セン断弾性係数、ν：ポアソン比、σ：$\sigma = \dfrac{\nu}{1+\nu}$ である。

２つの応力関数χ，ψを次式のように表わす。

$$\begin{aligned}\chi &= r^{\lambda+1}[b_3 \sin(\lambda-1)\theta + b_4 \cos(\lambda-1)\theta + b_1 \sin(\lambda+1)\theta \\ &\quad + b_2 \cos(\lambda+1)\theta] \\ &= r^{\lambda+1} F(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi &= r^m (a_2 \sin m\theta + a_1 \cos m\theta) \\ &= r^m G(\theta)\end{aligned}$$

ここで、$m=\lambda-1$，$\lambda=m+1$，$\lambda+1=m+2$

$$a_1 = -\frac{4}{\lambda-1} b_3, \quad a_2 = \frac{4}{\lambda-1} b_1$$

よって式6-2-15は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}2\mu U_r &= r^{\lambda}[-(\lambda+1)F(\theta) + (1-\sigma)G'(\theta)] \\ 2\mu U_\theta &= r^{\lambda}[-F'(\theta) + (1-\sigma)(\lambda-1)G(\theta)] \\ \sigma_r &= r^{\lambda-1}[F''(\theta) + (\lambda+1)F(\theta)] \\ \sigma_\theta &= r^{\lambda-1}[\lambda(\lambda+1)F(\theta)] \\ \tau_{r\theta} &= r^{\lambda-1}[-\lambda F'(\theta)]\end{aligned} \qquad 6\text{-}2\text{-}16$$

境界が固定の条件より$\theta=0$，αにおいて変位が０となるので、

$$U_r(0)=0,\ U_\theta(0)=0,\ U_r(\alpha)=0,\ U_\theta(\alpha)=0$$

となる。

これより、

$$\sin Z = C_2 Z$$

ここで、$Z=\lambda\alpha$，$C_2 = \pm\dfrac{\sin\alpha}{(3-4\sigma)\alpha}$

を代入すると、

$$\frac{3-\nu}{1+\nu}\sin\{(m+1)\alpha\}\pm(m+1)\sin\alpha=0 \qquad 6\text{-}2\text{-}17$$

表 6-2-2に式6-2-17の隅角部角度10° 毎のm_1，m_2 の値を示す。

（c）薄板の面外曲げ問題で両辺自由の場合

平面弾性問題と同じように薄板の面外曲げ問題における隅角部付近の応力と隅角部角度との関係を考察する。図 6-2-1に示すようなクサビ状領域を考える。

極座標系で表わしたたわみ関数をw（r，θ）とおくと応力成分は次式のように表わされる。

$$M_r=-D\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right]w$$

$$M_\theta=-D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]w$$

$$H_{r\theta}=(1-\nu)D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]w$$

$$Q_r=-D\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]w$$

$$Q_\theta=-D\frac{\partial}{r\partial\theta}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]w$$

6-2-18

ここで、D：曲げ剛さ、ν：ポアソン比、M_r，M_θ：曲げモーメント、$H_{r\theta}$：ネジリモーメント、Q_r，Q_θ：セン断力である。

またたわみ関数w（r，θ）は重調和微分方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)^2 w=0 \qquad 6\text{-}2\text{-}19$$

を満足しなければならない。

表6-2-2　式6-2-17のm1, m2値

$$\frac{3-\nu}{1+\nu}\sin\{(m+1)\alpha\}+(m+1)\sin\alpha=0 \text{の} m1,\ m2$$

2α	κ＝1．0		κ＝5／3		κ＝2		κ＝3	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
190	0.00000	0.79893	-0.02185	0.83667	-0.02713	0.84619	-0.03579	0.86217
200	0.00000	0.63053	-0.04340	0.69804	-0.05342	0.71474	-0.06955	0.74270
210	0.00000	0.48581	-0.06531	0.57959	-0.07950	0.60187	-0.10186	0.63881
220	0.00000	0.35950	-0.08824	0.47836	-0.10591	0.50489	-0.13317	0.54830
230	0.00000	0.24804	-0.11275	0.39224	-0.13307	0.42176	-0.16379	0.46940
240	0.00000	0.14891	-0.13931	0.31962	-0.16127	0.35084	-0.19394	0.40063
250	0.00000	0.06022	-0.16812	0.25909	-0.19059	0.29068	-0.22371	0.34068
260	-0.01953	0.00000	-0.19905	0.20922	-0.22093	0.23989	-0.25311	0.28838
270	-0.09147	0.00000	-0.23166	0.16847	-0.25199	0.19716	-0.28205	0.24270
280	-0.15656	0.00000	-0.26524	0.13525	-0.28334	0.16117	-0.31042	0.20267
290	-0.21556	0.00000	-0.29904	0.10806	-0.31452	0.13072	-0.33805	0.16742
300	-0.26910	0.00000	-0.33234	0.08554	-0.34509	0.10474	-0.36478	0.13618
310	-0.31771	0.00000	-0.36458	0.06659	-0.37465	0.08229	-0.39047	0.10826
320	-0.36182	0.00000	-0.39536	0.05032	-0.40293	0.06260	-0.41500	0.08307
330	-0.40181	0.00000	-0.42441	0.03604	-0.42971	0.04502	-0.43827	0.06007
340	-0.43799	0.00000	-0.45158	0.02318	-0.45486	0.02901	-0.46021	0.03882
350	-0.47065	0.00000	-0.47679	0.01129	-0.47830	0.01414	-0.48079	0.01891
360	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

$$\frac{3-\nu}{1-\nu}\sin\{(m+1)\alpha\}-(m+1)\sin\alpha=0 \text{の} m1,\ m2$$

2α	κ＝1		κ＝5／3		κ＝2		κ＝3	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.000
190	-0.09996	1.00180	-0.08153	0.95665	-0.07683	0.94593	-0.06889	0.928
200	-0.18130	1.01826	-0.15022	0.91575	-0.14218	0.89452	-0.12851	0.861
210	-0.24803	1.10629 ±i 0.09610	-0.20829	0.87753	-0.19794	0.84509	-0.18025	0.797
220	-0.30284	1.00565 ±i 0.19838	-0.25746	0.84215	-0.24560	0.79669	-0.22525	0.735
230	-0.34773	0.91527 ±i 0.23695	-0.29910	0.80998	-0.28636	0.74795	-0.26446	0.675
240	-0.38427	0.83355 ±i 0.25225	-0.33432	0.78282	-0.32122	0.69706	-0.29867	0.615
250	-0.41372	0.75925 ±i 0.25400	-0.36405	0.77037 ±i 0.02624	-0.35101	0.64194	-0.32856	0.556
260	-0.43716	0.69141 ±i 0.24634	-0.38908	0.70213 ±i 0.03724	-0.37646	0.58129	-0.35473	0.497
270	-0.45552	0.62926 ±i 0.23125	-0.41011	0.61233	-0.39819	0.51586	-0.37768	0.439
280	-0.46960	0.57214 ±i 0.20945	-0.42773	0.51174	-0.41675	0.44817	-0.39786	0.382
290	-0.48015	0.51955 ±i 0.18048	-0.44249	0.42589	-0.43262	0.38087	-0.41568	0.326
300	-0.48778	0.47103 ±i 0.14185	-0.45485	0.34824	-0.44625	0.31578	-0.43149	0.2718
310	-0.49307	0.42623 ±i 0.08316	-0.46525	0.27725	-0.45801	0.25388	-0.44561	0.2198
320	-0.49651	0.30269	-0.47407	0.21210	-0.46825	0.19562	-0.45833	0.1703
330	-0.49855	0.20296	-0.48166	0.15219	-0.47730	0.14114	-0.46991	0.1236
340	-0.49957	0.12541	-0.48832	0.09709	-0.48544	0.09043	-0.48057	0.0796
350	-0.49995	0.05884	-0.49434	0.04646	-0.49292	0.04342	-0.49054	0.038
360	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.000

表6-2-2　式6-2-17のm1, m2値

$\dfrac{3-\nu}{1+\nu}\sin\{(m+1)\alpha\}+(m+1)\sin\alpha=0$のm1, m2

2α	κ＝1. 0		κ＝5／3		κ＝2		κ＝3	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
190	0.00000	0.79893	-0.02185	0.83667	-0.02713	0.84619	-0.03579	0.86217
200	0.00000	0.63053	-0.04340	0.69804	-0.05342	0.71474	-0.06955	0.74270
210	0.00000	0.48581	-0.06531	0.57959	-0.07950	0.60187	-0.10186	0.63881
220	0.00000	0.35950	-0.08824	0.47836	-0.10591	0.50489	-0.13317	0.54830
230	0.00000	0.24804	-0.11275	0.39224	-0.13307	0.42176	-0.16379	0.46940
240	0.00000	0.14891	-0.13931	0.31962	-0.16127	0.35084	-0.19394	0.40063
250	0.00000	0.06022	-0.16812	0.25909	-0.19059	0.29068	-0.22371	0.34068
260	-0.01953	0.00000	-0.19905	0.20922	-0.22093	0.23989	-0.25311	0.28838
270	-0.09147	0.00000	-0.23166	0.16847	-0.25199	0.19716	-0.28205	0.24270
280	-0.15656	0.00000	-0.26524	0.13525	-0.28334	0.16117	-0.31042	0.20267
290	-0.21556	0.00000	-0.29904	0.10806	-0.31452	0.13072	-0.33805	0.16742
300	-0.26910	0.00000	-0.33234	0.08554	-0.34509	0.10474	-0.36478	0.13618
310	-0.31771	0.00000	-0.36458	0.06659	-0.37465	0.08229	-0.39047	0.10826
320	-0.36182	0.00000	-0.39536	0.05032	-0.40293	0.06260	-0.41500	0.08307
330	-0.40181	0.00000	-0.42441	0.03604	-0.42971	0.04502	-0.43827	0.06007
340	-0.43799	0.00000	-0.45158	0.02318	-0.45486	0.02901	-0.46021	0.03882
350	-0.47065	0.00000	-0.47679	0.01129	-0.47830	0.01414	-0.48079	0.01891
360	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

$\dfrac{3-\nu}{1-\nu}\sin\{(m+1)\alpha\}-(m+1)\sin\alpha=0$のm1, m2

2α	κ＝1		κ＝5／3		κ＝2		κ＝3	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
190	-0.09996	1.00180	-0.08153	0.95665	-0.07683	0.94593	-0.06889	0.92847
200	-0.18130	1.01826	-0.15022	0.91575	-0.14218	0.89452	-0.12851	0.86126
210	-0.24803	1.10629 ±i 0.09610	-0.20829	0.87753	-0.19794	0.84509	-0.18025	0.79729
220	-0.30284	1.00565 ±i 0.19838	-0.25746	0.84215	-0.24560	0.79669	-0.22525	0.73560
230	-0.34773	0.91527 ±i 0.23695	-0.29910	0.80998	-0.28636	0.74795	-0.26446	0.67534
240	-0.38427	0.83355 ±i 0.25225	-0.33432	0.78282	-0.32122	0.69706	-0.29867	0.61585
250	-0.41372	0.75925 ±i 0.25400	-0.36405	0.77037 ±i 0.02624	-0.35101	0.64194	-0.32856	0.55674
260	-0.43716	0.69141 ±i 0.24634	-0.38908	0.70213 ±i 0.03724	-0.37646	0.58129	-0.35473	0.49790
270	-0.45552	0.62926 ±i 0.23125	-0.41011	0.61233	-0.39819	0.51586	-0.37768	0.43954
280	-0.46960	0.57214 ±i 0.20945	-0.42773	0.51174	-0.41675	0.44817	-0.39786	0.38207
290	-0.48015	0.51955 ±i 0.18048	-0.44249	0.42589	-0.43262	0.38087	-0.41568	0.32600
300	-0.48778	0.47103 ±i 0.14185	-0.45485	0.34824	-0.44625	0.31578	-0.43149	0.27180
310	-0.49307	0.42623 ±i 0.08316	-0.46525	0.27725	-0.45801	0.25388	-0.44561	0.21983
320	-0.49651	0.30269	-0.47407	0.21210	-0.46825	0.19562	-0.45833	0.17039
330	-0.49855	0.20296	-0.48166	0.15219	-0.47730	0.14114	-0.46991	0.12362
340	-0.49957	0.12541	-0.48832	0.09709	-0.48544	0.09043	-0.48057	0.07962
350	-0.49995	0.05884	-0.49434	0.04646	-0.49292	0.04342	-0.49054	0.03842
360	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

今、隅角部付近のたわみ関数を次式のように表わす。

$$w(r,\theta)=r^{m+2}f(\theta)$$

するとw（r，θ）は式6-2-19を満足しなければならないからf（θ）は、式 6-2-4と同様の微分方程式を満足しなければならない。よってf（θ）は次式のように表わされる。

$$f(\theta)=E\sin m\theta+F\cos m\theta+G\sin(m+2)\theta+H\cos(m+2)\theta \qquad \text{6-2-20}$$

ここで、E，F，G，Hは積分定数である。
又、応力成分は式6-2-18より次式のように表わされる。

$$
\begin{aligned}
M_r&=-Dr^{m}[(m+1)(m+2)f(\theta)+\nu\{(m+2)f(\theta)+f''(\theta)\}]\\
M_\theta&=-Dr^{m}[(m+2)f(\theta)+f''(\theta)+\nu\{(m+1)(m+2)f(\theta)\}]\\
H_{r\theta}&=(1-\nu)Dr^{m}(m+1)f'(\theta)\\
Q_r&=-Dr^{m-1}m[f''(\theta)+(m+2)^2f(\theta)]\\
Q_\theta&=-Dr^{m-1}[(m+2)^2f'(\theta)+f'''(\theta)]
\end{aligned}
\qquad \text{6-2-21}
$$

両辺自由な場合の境界条件は、次式のようにおける。

$$[M_\theta]_{\theta=\pm\alpha}=0,\quad \left[Q_\theta-\frac{\partial H_{r\theta}}{\partial r}\right]_{\theta=\pm\alpha}=0 \qquad \text{6-2-22}$$

よって式6-2-21を式6-2-22に代入すると定数E，F，G，Hを含んだ次の４つの式を得る。

$$
\begin{aligned}
&E(2-m+\nu m+2\nu)\sin m\alpha+F(2-m+\nu m+2\nu)\cos m\alpha-G(m+2)(1-\nu)\sin(m+2)\alpha\\
&\qquad -H(m+2)(1-\nu)\cos(m+2)\alpha=0 \qquad -①\\
&-E(2-m+\nu m+2\nu)\sin m\alpha+F(2-m+\nu m+2\nu)\cos m\alpha+G(m+2)(1-\nu)\sin(m+2)\alpha\\
&\qquad -H(m+2)(1-\nu)\cos(m+2)\alpha=0 \qquad -②\\
&E(4+m-\nu m)\cos m\alpha-F(4+m-\nu m)\sin m\alpha+G(1-\nu)(m+2)\cos(m+2)\alpha\\
&\qquad -H(1-\nu)(m+2)\sin(m+2)\alpha=0 \qquad -③\\
&E(4+m-\nu m)\cos m\alpha+F(4+m-\nu m)\sin m\alpha+G(1-\nu)(m+2)\cos(m+2)\alpha\\
&\qquad +H(1-\nu)(m+2)\sin(m+2)\alpha=0 \qquad -④
\end{aligned}
$$

6-2-23

定数E，F，G，Hがことごとくは恒等的に0でない解を持つためには、上の4つの式の係数で作った行列式が0に等しいという条件を用いる。
式6-2-23には符号のみが違う項があるので、
①＋②より

$$F(2-m+\nu m+2\nu)\cos m\alpha-H(m+2)(1-\nu)\cos(m+2)\alpha=0 \quad ⑤$$

④－③より

$$F(4+m-\nu m)\sin m\alpha+H(m+2)(1-\nu)\sin(m+2)\alpha=0 \quad ⑥$$

①－②より

$$E(2-m+\nu m+2\nu)\sin m\alpha-G(m+2)(1-\nu)\sin(m+2)\alpha=0 \quad ⑦$$

③＋④より

$$E(4+m-\nu m)\cos m\alpha+G(m+2)(1-\nu)\cos(m+2)\alpha=0 \quad ⑧$$

6-2-24

と変形できる。

よって、E＝G＝0のときは、⑤，⑥より

$$\begin{vmatrix} (2-m+\nu m+2\nu)\cos m\alpha & -(m+2)(1-\nu)\cos(m+2)\alpha \\ (4+m-\nu m)\sin m\alpha & (m+2)(1-\nu)\sin(m+2)\alpha \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ (3+\nu)\sin 2(m+1)\alpha-(m+1)(1-\nu)\sin 2\alpha=0$$

6-2-25

F＝H＝0のときは、⑦，⑧より

$$\begin{vmatrix} (2-m+\nu m+2\nu)\sin m\alpha & -(m+2)(1-\nu)\sin(m+2)\alpha \\ (4+m-\nu m)\cos m\alpha & (m+2)(1-\nu)\cos(m+2)\alpha \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ (3+\nu)\sin 2(m+1)\alpha+(m+1)(1-\nu)\sin 2\alpha=0$$

6-2-26

が成り立たなければならない。

式6-2-25はE＝G＝0でF，Hが共に0でないことにより隅角部角度2等分線に対称な応力状態の場合に、式6-2-26はF＝H＝0でE，Gが共に0でないことより隅角部角度2等分線に逆対称の場合に成り立つ条件式である。

以上より薄板の面外曲げ問題においても、隅角部角度2αと隅角部付近の応力のOrder mとの関係は式6-2-25と式6-2-26で求められる。表 6-2-3に式6-2-25と式6-2-26の隅角部

角度10°毎のm_1，m_2の値を示す。
よって式6-2-14と同じように応力成分は係数をまとめて次式のように表わされる。

$$M=\sum_{j=1}^{\infty} f_j\ r^{m_j}$$

$$Q=\sum_{j=1}^{\infty} g_j\ r^{m_j-1} \qquad \text{6-2-27}$$

m_jは式6-2-25，式6-2-26の根、f_j，g_jは隅角部角度2αと境界条件によって決まる係数である。
式6-2-27も式 6-1-1と同じ形である。但し、セン断力Qについては、曲げモーメントより次数が１つ下がっている。

（ｄ）薄板の面外曲げ問題で両辺固定の場合
薄板の面外曲げ問題において隅角部両辺が固定の場合も（ｃ）と同じように解析される。
極座標で表わしたたわみ関数をｗ（ｒ，θ）とおくと、両辺固定の場合次式の条件が与えられる。

$$[w(r,\theta)]_{\theta=\pm\alpha}=0,\quad \left[\frac{1}{r}\ \frac{\partial w}{\partial\theta}\right]_{\theta=\pm\alpha}=0 \qquad \text{6-2-28}$$

この場合も、たわみ関数を次のようにおくと

$$w(r,\theta)=r^{m+2}\ f(\theta) \qquad \text{6-2-29}$$

ｆ（θ）は（ｃ）と同様、次式のように表わされる。

$$f(\theta)=E\sin m\theta+F\cos m\theta+G\sin(m+2)+H\cos(m+2)\theta \qquad \text{6-2-30}$$

ここでＥ，Ｆ，Ｇ，Ｈは積分定数である。
よって式6-2-29を式6-2-28に代入すると定数Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈを含んだ次の４つの式となる。

表6-2-3　式6-2-25，式6-2-26のm1，m2値

式6-2-25のm1，m2

2α	$\nu=0.0$		$\nu=0.25$		$\nu=0.5$	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
190	-0.03579	0.86217	-0.04104	0.87209	-0.04549	0.88066
200	-0.06955	0.74270	-0.07916	0.76007	-0.08722	0.77512
210	-0.10186	0.63881	-0.11495	0.66165	-0.12581	0.68144
220	-0.13316	0.54830	-0.14885	0.57495	-0.16175	0.59801
230	-0.16379	0.46940	-0.18121	0.49843	-0.19543	0.52349
240	-0.19394	0.40063	-0.21226	0.43077	-0.22714	0.45674
250	-0.22371	0.34068	-0.24217	0.37083	-0.25711	0.39674
260	-0.25311	0.28839	-0.27102	0.31760	-0.28550	0.34274
270	-0.28205	0.24270	-0.29885	0.27020	-0.31246	0.29388
280	-0.31042	0.20267	-0.32566	0.22785	-0.33806	0.24955
290	-0.33804	0.16743	-0.35143	0.18982	-0.36238	0.20917
300	-0.36478	0.13618	-0.37613	0.15549	-0.38547	0.17220
310	-0.39047	0.10826	-0.39970	0.12431	-0.40736	0.13821
320	-0.41500	0.08307	-0.42213	0.09577	-0.42809	0.10677
330	-0.43827	0.06007	-0.44339	0.06943	-0.44769	0.07753
340	-0.46021	0.03882	-0.46345	0.04491	-0.46619	0.05017
350	-0.48079	0.01892	-0.48232	0.02187	-0.48362	0.02441
360	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

式6-2-26のm1，m2

2α	$\nu=0.0$		$\nu=0.25$		$\nu=0.5$	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
180°	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000
190	-0.06889	0.92847	-0.06395	0.91794	-0.05967	0.90902
200	-0.12851	0.86126	-0.11992	0.84179	-0.11243	0.82559
210	-0.18025	0.79729	-0.16906	0.77042	-0.15925	0.74845
220	-0.22525	0.73560	-0.21232	0.70287	-0.20094	0.67662
230	-0.26446	0.67534	-0.25050	0.63842	-0.23818	0.60932
240	-0.29867	0.61585	-0.28427	0.57652	-0.27154	0.54594
250	-0.32856	0.55674	-0.31421	0.51681	-0.30152	0.48603
260	-0.35473	0.49789	-0.34083	0.45910	-0.32854	0.42923
270	-0.37767	0.43954	-0.36456	0.40332	-0.35298	0.37530
280	-0.39786	0.38207	-0.38580	0.34950	-0.37515	0.32406
290	-0.41567	0.32600	-0.40488	0.29774	-0.39536	0.27537
300	-0.43149	0.27180	-0.42211	0.24815	-0.41386	0.22916
310	-0.44561	0.21983	-0.43776	0.20083	-0.43087	0.18533
320	-0.45833	0.17038	-0.45207	0.15585	-0.44660	0.14384
330	-0.46990	0.12362	-0.46527	0.11327	-0.46123	0.10462
340	-0.48057	0.07962	-0.47754	0.07311	-0.47491	0.06762
350	-0.49055	0.03842	-0.48907	0.03537	-0.48780	0.03277
360	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000	-0.50000	0.00000

$$E\sin m\alpha + F\cos m\alpha + G\sin(m+2)\alpha + H\cos(m+2)\alpha = 0 \quad ①$$
$$-E\sin m\alpha + F\cos m\alpha - G\sin(m+2)\alpha + H\cos(m+2)\alpha = 0 \quad ②$$
$$Em\cos m\alpha - Fm\sin m\alpha + G(m+2)\cos(m+2)\alpha - H(m+2)\sin(m+2)\alpha = 0 \quad ③$$
$$Em\cos m\alpha + Fm\sin m\alpha + G(m+2)\cos(m+2)\alpha + H(m+2)\sin(m+2)\alpha = 0 \quad ④$$

6-2-31

上式で符号のみが違う項があるので、

①＋②より　$F\cos m\alpha + H\cos(m+2)\alpha = 0$　⑤
④－③より　$Fm\sin m\alpha + H(m+2)\sin(m+2)\alpha = 0$　⑥
①－②より　$E\sin m\alpha + G\sin(m+2)\alpha = 0$　⑦
③＋④より　$Em\cos m\alpha + G(m+2)\cos(m+2)\alpha = 0$　⑧

6-2-32

と書き表わされる。
よって、$E = G = 0$のときは、⑤, ⑥より

$$\begin{vmatrix} \cos m\alpha & \cos(m+2)\alpha \\ m\sin m\alpha & (m+2)\sin(m+2)\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (m+1)\sin 2\alpha + \sin 2(m+1)\alpha = 0 \qquad \text{6-2-33}$$

$F = H = 0$のときは、⑦, ⑧より

$$\begin{vmatrix} \sin m\alpha & \sin(m+2)\alpha \\ m\cos m\alpha & (m+2)\cos(m+2)\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (m+1)\sin 2\alpha - \sin 2(m+1)\alpha = 0 \qquad \text{6-2-34}$$

が成り立たなければならない。

式6-2-33は隅角部角度２等分線に対称な応力状態の場合に、式6-2-34は隅角部角度２等分線に逆対称の場合に成り立つ条件式である。
よって式6-2-14と同じように応力成分は係数をまとめて次式のように表わされる。

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} f_j r^{m_j}$$

$$Q=\sum_{j=1}^{\infty} g_j \, r^{m_j-1} \qquad \text{6-2-35}$$

f_j , g_j は、隅角部角度2αと境界条件によって決まる係数である。式6-2-35も式6-1-1と同じ形である。式6-2-33は式6-2-10と、式6-2-34は式6-2-11とまったく同じである。よってm_j （j=1,2,3 …）の値も同じとなり、m_1 , m_2 の値は表 6-2-1で示される

6－3　隅角部の強さの解析

本節では、隅角部の強さを具体的に解析する。前節で定義づけたように隅角部の強さは隅角部先端付近の応力分布の特性を表わすパラメーターである。よって隅角部の強さを解析するには、隅角部の応力解析が必要となるが一般には難しい。そこで応力解析ができ、隅角部先端付近と同等と見なせる形状、つまり隅角部を有する形状で、より簡単な形状である矩形孔、及びその境界上で変位拘束を受ける無限板を対象とする。

さらに、式 6-2-10,式6-2-11等から求められるm_1 , m_2 …の値は、任意の隅角部角度に対しては一般に無理数であるので隅角部の強さを解析的に求めるのは難しい。そこで、有理写像関数を用いて得られた応力分布を用いる方法で隅角部の強さを求める。これには出来るだけ鋭い隅角部に対する応力解析が必要である。

ここで矩形孔を有する無限領域を単位円外部に等角写像する写像関数について具体的に述べる。図 6-3-1を参考にして、境界上を時計回りに一周する経路を考えるとSchwarz-Christoffel の公式より写像関数は次のように表わされる。

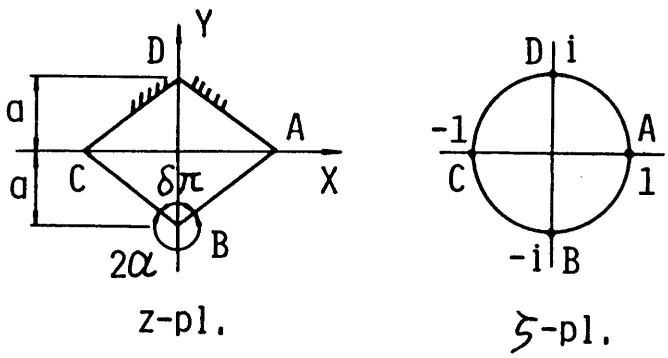


図6-3-1　矩形孔と単位円

$$Z=\omega(\zeta)=K\int(\zeta-1)^{\delta}(\zeta+i)^{1-\delta}(\zeta+1)^{\delta}(\zeta-i)^{1-\delta}\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

6-3-1

ここで無限領域中の矩形孔についてB，D点での角度を$\delta\pi$とすると、A，C点での角度は（$\pi-\delta\pi$）＝（$1-\delta$）πとなる。A，B，C，Dの各点が単位円周上のA，B，C，Dの各点に対応しており、その値はそれぞれ1，－i，－1，iである。又、係数Kは矩形孔の大きさに関するパラメーターで、解析では単位長a＝ 1.0に対する値にすることが多い。$\delta\pi$＝ 0° のときはy軸に沿う長さ2aのクラックに相当し、$\delta\pi$＝ 180° のときは半無限板に相当する。

式 6-3-1を次のように変形する。

$$Z=\omega(\zeta)=K\int(\zeta^2-1)^{\delta}(\zeta^2+1)^{1-\delta}\frac{d\zeta}{\zeta^2} \qquad \text{6-3-2}$$

ここで一回微分を考え、

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\zeta}=\frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta}&=K\frac{(\zeta^2-1)^{\delta}(\zeta^2+1)^{1-\delta}}{\zeta^2}\\&=K(1-1/\zeta^2)^{\delta}(1+1/\zeta^2)^{1-\delta}\\&=K\{1+\frac{a_1'}{\zeta^2}+\frac{a_2'}{\zeta^4}+\frac{a_3'}{\zeta^6}+\cdots\}\end{aligned} \qquad \text{6-3-3}$$

項別積分を実行すると次式のように表わされる。

$$Z=\omega(\zeta)=K\{\zeta+\frac{a_1}{\zeta}+\frac{a_2}{\zeta^3}+\frac{a_3}{\zeta^5}+\cdots\} \qquad \text{6-3-4}$$

そして次式のような分数式の和の形を考える。

$$\Sigma\frac{B_j\beta_j/\zeta}{1-\beta_j/\zeta^2}=\Sigma\{\frac{B_j\beta_j}{\zeta}+\frac{B_j\beta_j^{\,2}}{\zeta^3}+\frac{B_j\beta_j^{\,3}}{\zeta^5}+\cdots\}$$

6-3-5

式 6-3-4と式 6-3-5の係数を比較し、次式を満足するようにB_j，β_jを決める。

$$\Sigma B_j \beta_j{}^k = a_k \quad (k=1,2,3 \cdots,2n) \qquad \text{6-3-6}$$

B_j, β_j が決まれば式 6-3-4の第２項以降を式 6-3-5で置き換えることによって次式が求められる。

$$\begin{aligned} Z=\omega(\zeta) &= K\left\{\zeta+\sum^{n}\frac{B_j\beta_j/\zeta}{1-\beta_j/\zeta^2}+\text{const.}\right\} \\ &= K\zeta+K\left\{\sum^{n}\frac{-B_j\beta_j/2}{\sqrt{\beta_j}-\zeta}+\frac{-B_j\beta_j/2}{-\sqrt{\beta_j}-\zeta}\right\}+\text{const.} \\ &= E_0\zeta+\sum^{2n}\frac{E_k}{\zeta_k-\zeta}+E_{-1} \qquad \text{6-3-7} \end{aligned}$$

式 6-3-7が矩形孔を有する無限領域を単位円外部に等角写像する分数式の和の形の写像関数である。ここでE_{-1}は図形のｘ軸方向、ｙ軸方向の移動を表わすものであり、ここでは矩形孔の対称軸にｘ軸、ｙ軸を選ぶ。もっともE_{-1}は応力解析上は無関係である。

式 6-3-7で写像される矩形孔を有する無限板、及びその境界上が変位拘束を受ける無限板を対象として隅角部の強さを具体的に解析する。

今、図 6-3-2に示すように、ｙ軸上のσ_xの分布を考える。実線が解析結果の概略である。但し、式 6-3-7の等角写像関数を用いているので、隅角部先端が完全な鋭角ではなく、小さな丸みがある。よってその点での応力値は有限値となる。しかし隅角部先端が完全な鋭角の場合、その点での応力値は無限大となる。この場合のｙ軸上のσ_xの分布の概略は図の破線のように表わされる。つまり隅角部先端から、少し離れれば両者はほぼ一致する。

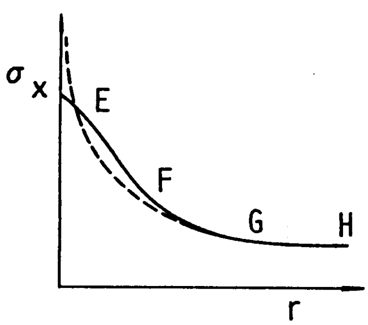


図6-3-2　応力分布概略図

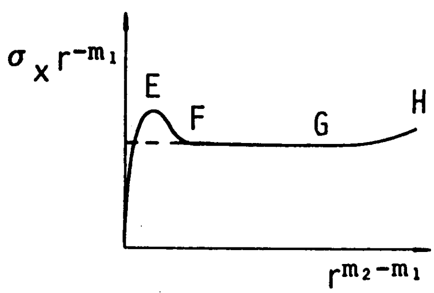


図6-3-3　式 6-3-8の関係概略図

y軸上のσ_xの分布も、式6-2-14のように無限級数の形で表わされる。そして、σ_xをr^{m1}で除した次式を考える。

$$r^{-m1}\sigma_x = f_1 + f_2 r^{m2-m1} + f_3 r^{m3-m1} + \cdots \qquad 6\text{-}3\text{-}8$$

ここで、m_1，m_2，m_3 …は式6-2-10の根である。

解析結果と隅角部先端が完全な鋭角の場合の応力分布とにつき、式 6-3-8で表わされる関係の概略を示すと図 6-3-3のようになる。つまり隅角部先端のごく近傍では両者に差異があるが、少し離れればほぼ一致する。図には直線となる範囲がありその値の外挿によって式 6-3-8のf_1の値を得ることができる。以上の方法で式 6-1-1の第１項の係数、つまり隅角部の強さを求める。

（a）平面弾性問題で自由境界の場合

平面弾性問題で自由境界の場合の隅角部の強さを解析する。矩形孔を有する無限板にx軸方向無限遠での一様引張が作用する場合を考える。

矩形孔を有する無限板が、x軸方向無限遠で一様引張を受ける場合、y軸上の隅角部先端付近のσ_xの分布を次式のように表わす。

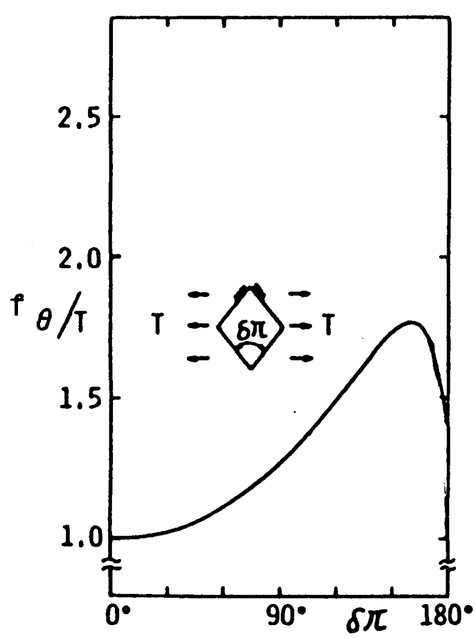


図6-3-4　式 6-3-9のf_θの値

$$\sigma_x = \frac{f_\theta}{\sqrt{2}} r^{m1} + f_{\theta 2} r^{m2} + f_{\theta 3} r^{m3} + \cdots \qquad 6\text{-}3\text{-}9$$

そして前述の方法で第１項の係数 f_θ を求めた。矩形孔の角度 0° ～ 180° について図6-3-4に式 6-3-9の f_θ 値を示す。ここで第１項の係数の$1/\sqrt{2}$は、矩形孔の角度が 0°（つまりｙ軸上で長さ２ａのクラック）の場合の応力拡大係数と f_θ の関係を分りやすくするために乗じたものである。

（ｂ）薄板の面外曲げ問題で自由境界の場合

薄板の面外曲げ問題で自由境界の場合の隅角部の強さを解析する。（ａ）と同様に矩形孔を有する無限板を考える。荷重条件はｘ軸方向無限遠での一様面外曲げとする。形状及び等角写像関数は（ａ）とまったく同じである。応力解析も３－７節とまったく同様の方法で解析できる。応力解析の結果よりｙ軸上の M_x の分布を考える。薄板の面外曲げ問題においても、隅角部先端が完全な鋭角ではなく小さな丸みを有する場合と、完全な鋭角の場合とについてｙ軸上の M_x の分布は図 6-3-5のように表わされる。

ｙ軸上の M_x の分布も、式6-2-27のように無限級数の形で表わされ、M_x を r^{m1} で除した次式を考える。

$$r^{-m1} M_x = f_1 + f_2 r^{m2-m1} + f_3 r^{m3-m1} + \cdots \qquad 6\text{-}3\text{-}10$$

ここで m_1 ，m_2 ，m_3 ，…は式6-2-25の根である。解析結果と隅角部先端が完全な鋭角の場合の応力分布とにつき、式6-3-10の関係の概略を示すと図 6-3-6のようになる。そしてほぼ一定値（又は、直線）の範囲から外挿によって第１項の値 f_1 を得る。以上より薄板の面外曲げ問題についても隅角部の強さが求められる。

矩形孔を有する無限板が、ｘ軸方向無限遠で一様面外曲げを受ける場合、ｙ軸上の隅角部先端付近の M_x の分布を次式のように表わす。

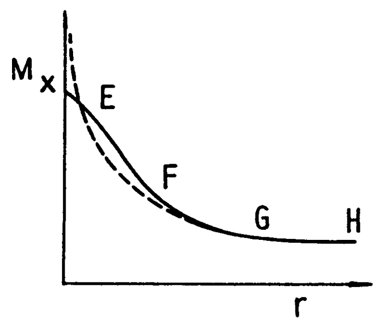


図6-3-5　曲げモーメント分布概略図

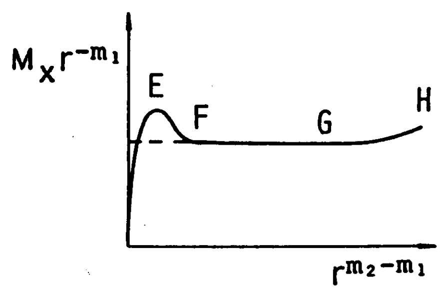


図6-3-6　式6-3-10の関係概略図

$$M_x=\frac{f_\theta}{\sqrt{2}}\,r^{m1}+f_{\theta 2}\,r^{m2}+f_{\theta 3}\,r^{m3}+\cdots \qquad 6\text{-}3\text{-}11$$

そして前述の方法で第１項の係数を求めた。矩形孔の角度 0° ～ 180° について、図6-3-7に式6-3-11の f_θ 値を示す。ここで第１項の係数の $1/\sqrt{2}$ は(a) と同様に、応力拡大係数と f_θ の関係をわかりやすくするために乗じたものである。

（ｃ）平面弾性問題で固定境界の場合

平面弾性問題で固定境界の場合について隅角部の強さを解析する。隅角部を有する形状は矩形の境界上で変位拘束を受ける無限板を考える。荷重条件はｘ軸方向無限遠での一様引張りとする。応力解析は第２章で述べた複素応力関数と等角写像関数を用いる方法による。まず、応力解析の結果を図 6-3-8に、$\delta\pi=90°$ 、$\kappa=2.0$の場合について示す。図6-3-8よりｘ軸上の σ_x の分布を用いて隅角部の強さを求める。この場合、隅角部の角度 $\delta\pi$、長さａを図 6-3-8のようにとる。

この場合も、隅角部先端が完全な鋭角ではないので、小さな丸みを有する場合と、完全な鋭角の場合とに対して、ｘ軸上の σ_x の分布は図 6-3-9のように表わされる。ｘ軸上の σ_x の分布も、式6-2-16から無限級数の形で表わされ、σ_x を r^{-m1} で除した次式を考える。

$$r^{-m1}\,\sigma_x=f_1+f_2\,r^{m2-m1}+f_3\,r^{m3-m1}+\cdots \qquad 6\text{-}3\text{-}12$$

ここで m_1 , m_2 , m_3 , …は式6-2-17の根である。式6-3-12の関係の概略を示すと、図6-3-10のようになる。そして前述と同様の方法で隅角部の強さが求まる。

矩形の境界上で変位拘束を受ける無限板が、ｘ軸方向無限遠で一様引張を受ける場合のｘ軸上の隅角部先端付近の σ_x の分布を次式のように表わす。

$$\sigma_x=f_r\,r^{m1}+f_{r2}\,r^{m2}+f_{r3}\,r^{m3}+\cdots \qquad 6\text{-}3\text{-}13$$

そして、前述の方法で第１項の係数を求めた。矩形の角度 0° ～ 180° について、図6-3-11に式6-3-13の f_r 値を示す。

又、この場合同じ隅角部先端付近において σ_y の分布も同様、次式のように表わされる。

$$\sigma_y=f_\theta\,r^{m1}+f_{\theta 2}\,r^{m2}+f_{\theta 3}\,r^{m3}+\cdots \qquad 6\text{-}3\text{-}14$$

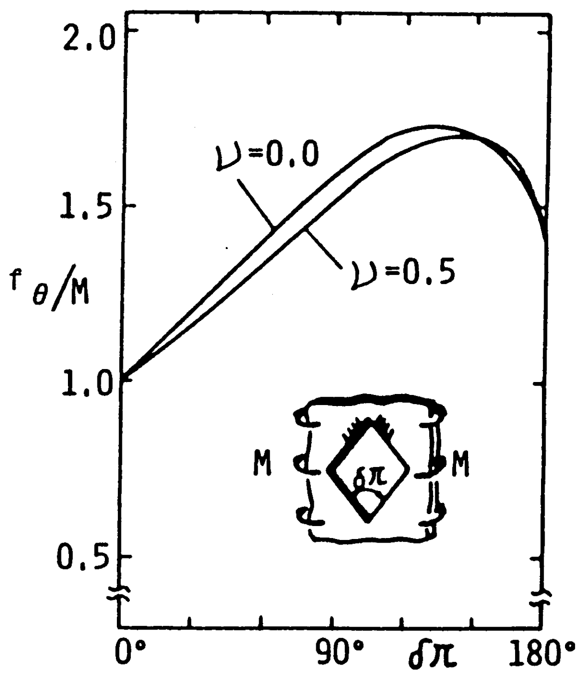


図6-3-7　式6-3-11の f_θ 値

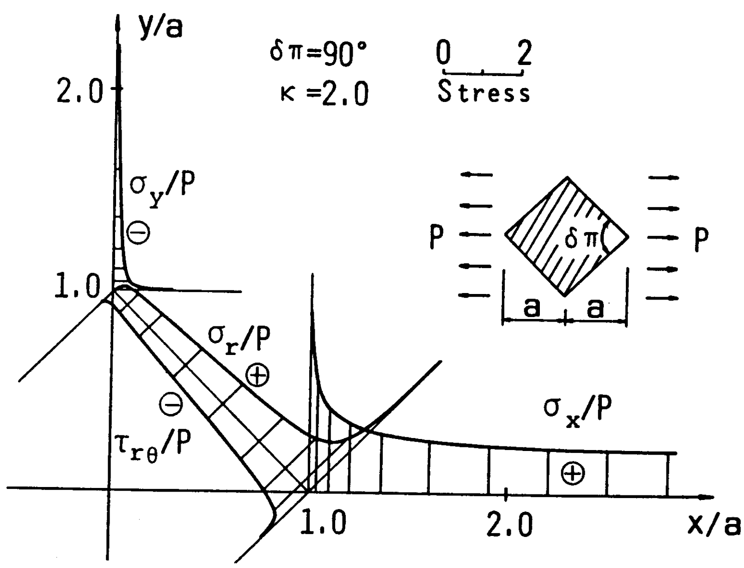


図6-3-8　一様張りを受ける場合の応力分布

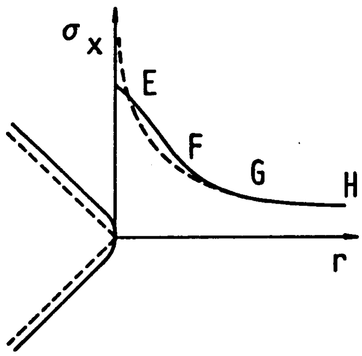


図6-3-9　応力分布概略図

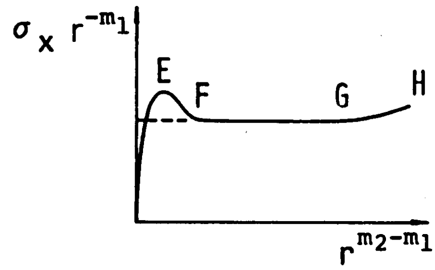


図6-3-10　式6-3-12の関係概略図

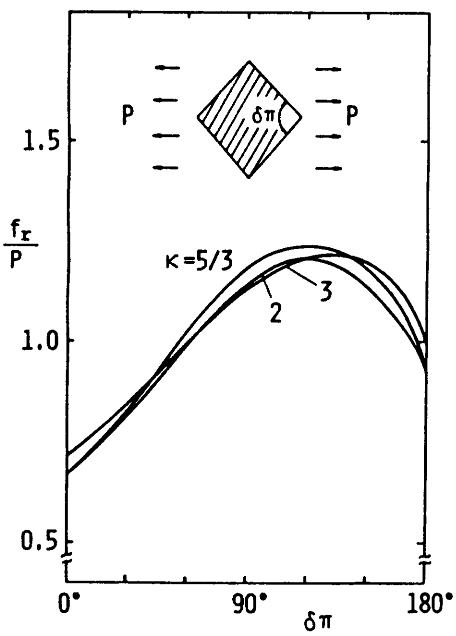


図6-3-11　式6-3-13の f_r 値

さらに、式6-3-13の f_r と式6-3-14の f_θ とは次の関係が成り立つ。

$$\frac{f_\theta}{f_r} = -\frac{(m1+2)\{(m1+\kappa+1)\ \sin(m1\alpha)\} - (m1+2)^2 \sin\{(m1+2)\ \alpha\}}{(m1+2)\{(m1+\kappa+1)\ \sin(m1\alpha)\} - (m1-2)(m1+2)\sin\{(m1+2)\ \alpha\}}$$

6-3-15

次に、荷重条件として無限遠での一様セン断について解析する。応力解析の結果として、図6-3-12に$\delta\pi=90°$，$\kappa=2.0$の場合を示す。図6-3-12よりx軸上のτ_{xy}の分布を用いて隅角部の強さを求める。この場合の隅角部の角度も、x軸上の角度が対応することになる。そして大きさの基準もx軸方向の長さが単位となる。

矩形の境界上で変位拘束を受ける無限板が、無限遠で一様セン断を受ける場合、x軸上の隅角部先端付近のτ_{xy}の分布を次式のように表わす。

$$\tau_{xy}=f_{r\theta}r^{m1}+f_{r\theta2}r^{m2}+f_{r\theta3}r^{m3}+\cdots \qquad 6\text{-}3\text{-}16$$

そして、同様の方法で第１項の係数を求めた。矩形の角度 0° ～ 180° について、図6-3-13に式6-3-16の$f_{r\theta}$値を示す。

（ｄ）薄板の面外曲げ問題で固定境界の場合

薄板の面外曲げ問題で固定境界の場合の隅角部の強さを解析する。隅角部を有する形状は、（ｃ）と同様に矩形の境界上で変位拘束を受ける無限板を考える。荷重条件はx軸方向無限遠での一様面外曲げとする。解析は第２章で述べたたわみ関数と等角写像関数を用いる方法による。応力解析の結果として、図6-3-14に$\delta\pi=90°$、$\kappa=2.0$の場合を示す。図6-3-14よりx軸上のM_xの分布を用いて隅角部の強さを求める。この場合も隅角部の角度はx軸上の隅角部の角度が対応することになる。そして大きさの基準もx軸方向の長さとなる。

この場合も、隅角部先端が完全な角点ではなく、小さな丸みを有する場合と、完全な角点の場合とについてx軸上のM_xの分布は、図6-3-15のように表わされる。x軸上のM_xの分布も、式6-2-35から無限級数の形で表わされ、M_xをr^{m1}で除した次式を考える。

$$r^{-m1}M_x=f_r+f_{r2}r^{m2-m1}+f_{r3}r^{m3-m1}+\cdots \qquad 6\text{-}3\text{-}17$$

ここで、m_1，m_2，m_3，…は式6-2-33の根である。式6-3-17の関係の概略を示すと、図6-3-16のようになる。そして同様の方法で隅角部の強さf_rが求まる。矩形の角度 0° ～ 180° について、図6-3-17にf_r値を示す。

又、同じ隅角部先端付近においてM_yの分布も同様に次式のように表わされる。

$$M_y=f_\theta r^{m1}+f_{\theta2}r^{m2}+f_{\theta3}r^{m3}+\cdots \qquad 6\text{-}3\text{-}18$$

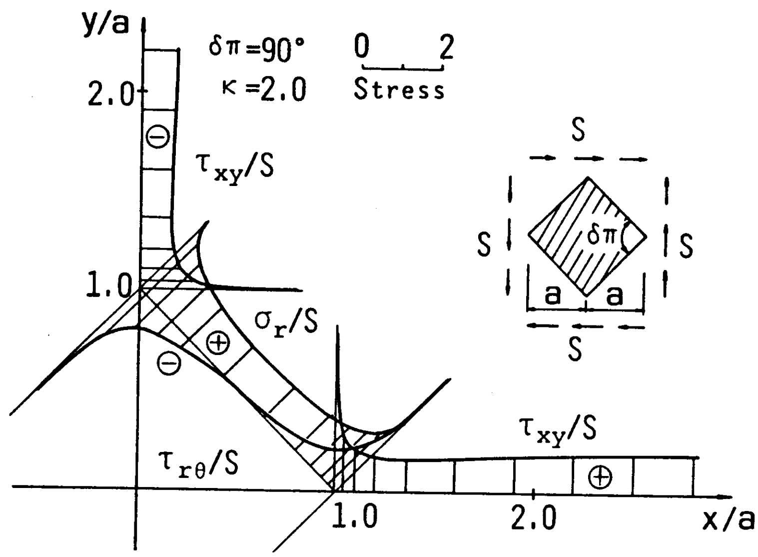


図6-3-12　一様セン断を受ける場合の応力分布

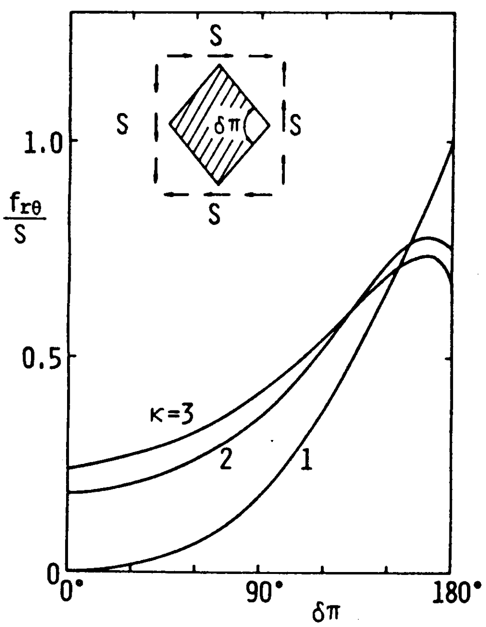


図6-3-13　式6-3-16の $f_{r\theta}$ 値

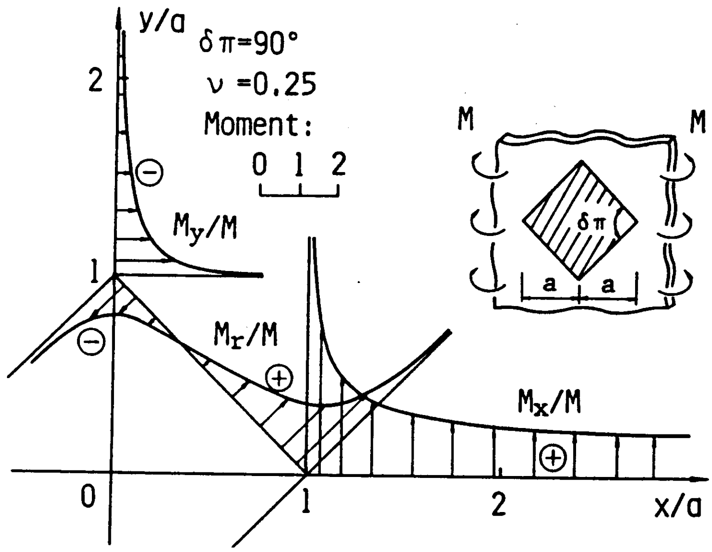


図6-3-14　一様面外曲げを受ける場合の応力分布

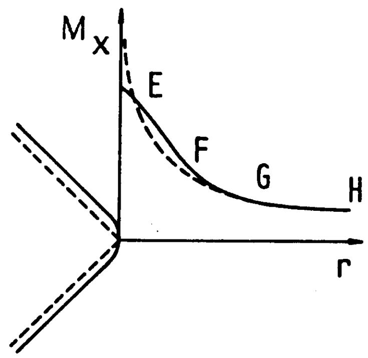


図6-3-15　曲げモーメント分布概略図

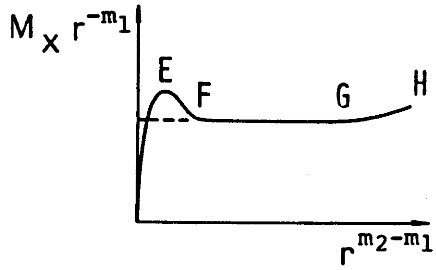


図6-3-16　式6-3-17の関係概略図

さらに、式6-3-17の f_r と式6-3-18の f_θ との間には次の関係が成り立つ。

$$\frac{f_\theta}{f_r}=\frac{\{-(m1-2)+\nu(m1+2)\}(m1+2)\sin\{(m1+2)\alpha\}+\{(m1+2)-\nu(m1+2)\}m1\sin(m1\ \alpha)}{\{(m1+2)-\nu(m1-2)\}(m1+2)\sin\{(m1+2)\alpha\}-\{(m1+2)-\nu(m1+2)\}m1\sin(m1\ \alpha)}$$

6-3-19

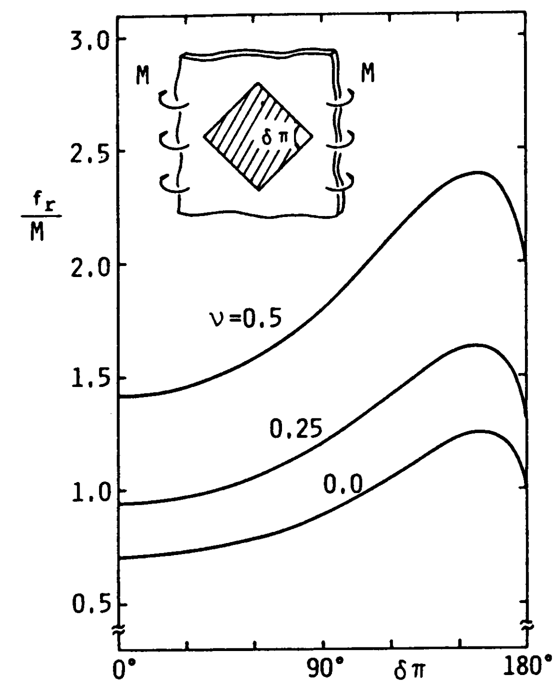


図6-3-17　式6-3-17の f_r 値

6－4　まとめ

本章では、隅角部先端付近の応力分布の特性を表わす隅角部の強さを定義し、隅角部のより簡単な形状として矩形孔及び、矩形の境界上で変位拘束された無限板について具体的に隅角部の強さを求めた。解析は、平面弾性問題及び薄板の面外曲げ問題の自由境界、固定境界の場合につき、x軸方向無限遠での一様引張、一様面外曲げ及び一様センダン断の荷重に対して行った。そして、隅角部先端近傍の応力成分は式 6-1-1の形で表わされることを示した。隅角部の強さは形状や、荷重条件に依存する。本章で求めた隅角部の強さは以下の章で述べる応力集中と密接な関係がある。

第７章　隅角部の強さと応力集中係数表示式第１項の係数との関係

７－１　まえがき

本章では、隅角部の強さと応力集中係数表示式の第１項の係数との関係について述べる。応力集中に関する系統的な研究としては、西田(1981)による切欠きの角度、深さ、切欠き先端の丸みの曲率半径と応力集中についての光弾性実験による研究、同じくHeywood(1952)研究、平野(1950)による複雑な形状の孔、又は切欠きの応力集中を等価な楕円に置き換えてより簡単に求める方法、Neuber(1958)による浅い切欠きと深い切欠きから任意の切欠きの応力集中を近似する三角則等が見られる。

しかし、応力集中に関する研究は大半が個々の形状や荷重条件に対する解析を主としたもので、応力集中一般に成り立つ法則はあまり見い出されていないようである。応力集中の原因は種々あるが、ここでは形状が原因となっているものを考え、図 7-1-1のように分類する。そして切欠き先端に丸みを有するＶ字形切欠き（角度の２等分線に対称な形状）で、角度の２等分線に対称及び逆対称な応力状態について考える。この時、応力集中の主な原因は切欠きの角度２αと切欠き先端の丸みの曲率半径ρである。よってこの２つの要素を取り上げ、隅角部の強さと応力集中との関係を示す。

Ｖ字形の切欠きの研究は、その要素として、切欠きの深さを河本・赤沢(1951)が、切欠き底の曲率半径を河本(1951)が、切欠きの角度を河本・関(1951)が、それぞれ研究している。

７－２　応力集中係数表示式

切欠き先端に丸みのあるＶ字形切欠きで、角度の２等分線に対称な形状のとき、任意の荷重に対して、角度の２等分線上の応力集中は、丸みの曲率半径ρを用いて次式のように表わされる［長谷部（1971 a,b）,Hasebe,et al.（1986 a,b）］。

$$\sigma_{max} = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \rho^{m_j}$$

$$= h_1 \rho^{m_1} + h_2 \rho^{m_2} + h_3 \rho^{m_3} + \cdots \qquad \text{7-2-1}$$

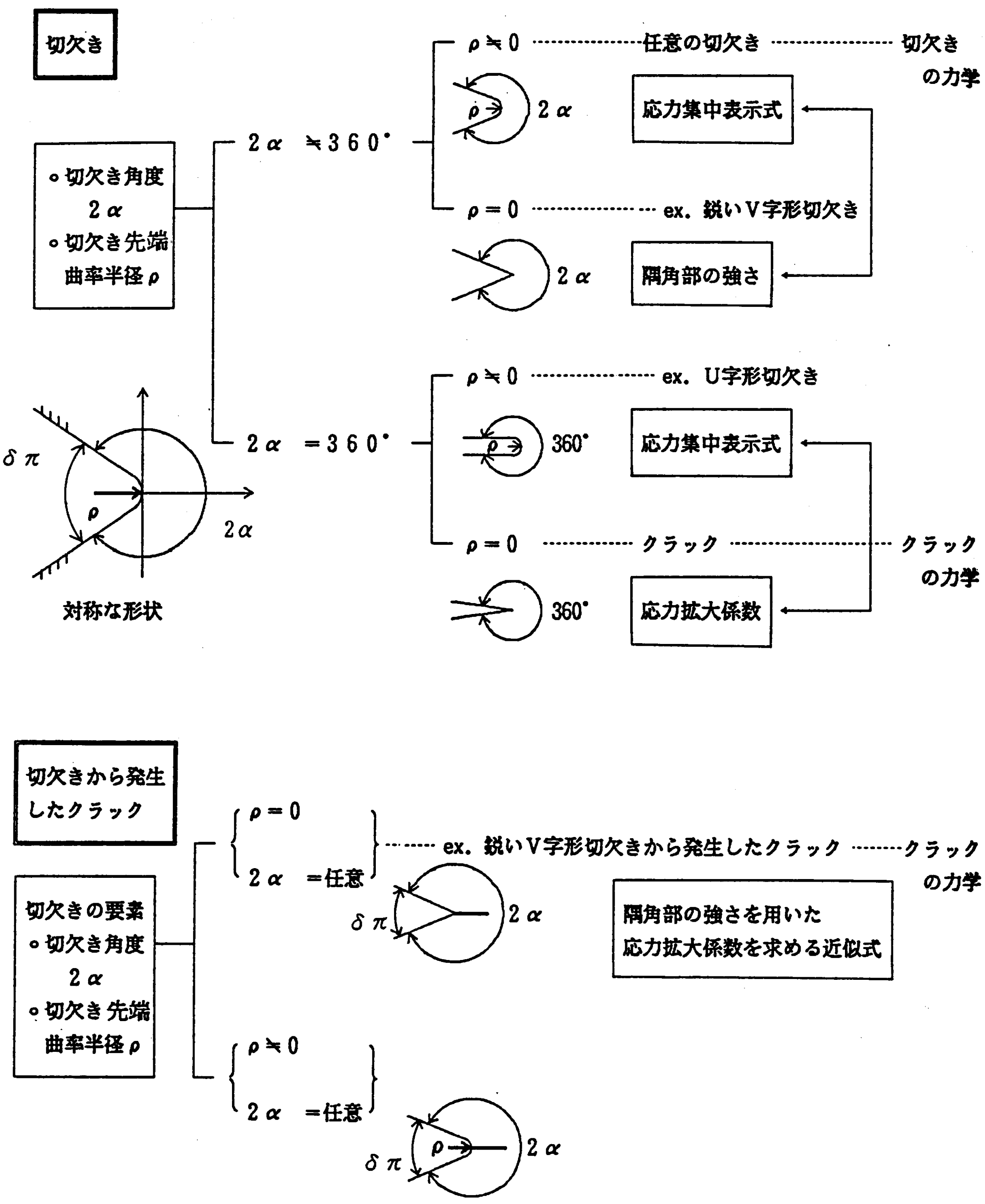


図7-1-1　V字形切欠き分類及び切欠きから発生したクラック

ここで、m_j (j=1,2,3…) は平面弾性問題と薄板の面外曲げ問題、自由及び、固定境界又、角度の２等分線に対称及び、逆対称な応力状態に対して、それぞれ式(6-2-10),(6-2-11),(6-2-17),(6-2-25),(6-2-26),(6-2-33)(6-2-34)の特性方程式の根である。係数 h_1 , h_2 , h_3 …は各々の場合の形状、境界条件によって決まる。式 7-2-1で ρ が小さい時、第１項は特異性により第２項以降に比べて値が大きく応力集中の主な要因となる。故に丸みの曲率半径 ρ が小さい時は、次式のように第１項の係数 h_1 が応力集中のパラメータになる。

$$\sigma_{max} = h_1 \rho^{m1} \qquad 7\text{-}2\text{-}2$$

第１項の係数 h_1 を求めるには、与えられた荷重条件のもとで、Ｖ字形切欠き先端の角度の２等分線上の応力値を求め、式 7-2-1又は式 7-2-2に、丸みの曲率半径と対応する集中応力値を代入して、係数を求める。つまり式 7-2-1の始めの数項を用いる場合は、いくつかの異なった曲率半径の丸みに対する σ_{max} の値が必要である。式 7-2-2に代入する場合は、十分小さい曲率半径の丸みに対する σ_{max} の値が必要である。

７－３　応力集中係数表示式第１項の係数

前節で述べたように、応力集中係数表示式の第１項の係数は、応力集中の重要なパラメータであるので、以下、具体的に矩形孔の場合の係数について解析する。

（ａ）平面弾性問題で自由境界の場合

荷重条件はｘ軸方向無限遠での一様引張、応力解析は第２章で述べた複素応力関数と等角写像関数を用いる方法による。

等角写像関数は、式 6-3-7を用いて、応力解析する。 6-3節で述べたように、式 6-3-7によって写像される形状は、切欠き先端が完全な角点ではなく、十分小さい曲率半径の丸みを有している。さらに第２章で述べているように、写像された形状に対する応力解析では厳密解が求められる。よって求められた切欠き先端の、角度の２等分線上の応力値と、十分小さい丸みの曲率半径を式 7-2-2に代入して、応力集中係数表示式の第１項の係数 h_1 が求められる。

矩形孔を有する無限板において、ｘ軸方向無限遠での一様引張のもとで、切欠き底のｙ軸上に集中する応力値 $\sigma_{x\,max}$ を次式のように表わす。

$$\sigma_{x\max} = h_{\theta}\rho^{m1} + h_{\theta 2}\rho^{m2} + h_{\theta 3}\rho^{m3} + \cdots \qquad 7\text{-}3\text{-}1$$

そして、前述の方法で第１項の係数h_{θ}を求めた。図 7-3-1に矩形孔の角度 0° ～ 180° に対する式 7-3-1のh_{θ}の値を示す。

（ｂ）薄板の面外曲げ問題で自由境界の場合

荷重条件はｘ軸方向無限遠での一様面外曲げとする。解析は第２章で述べた方法による。矩形孔のある無限板が、ｘ軸方向無限遠で一様な面外曲げ荷重を受けるとき、切欠き先端のｙ軸上の応力集中値$M_{x\max}$を次式のように表わす。

$$M_{x\max} = h_{\theta}\rho^{m1} + h_{\theta 2}\rho^{m2} + h_{\theta 3}\rho^{m3} + \cdots \qquad 7\text{-}3\text{-}2$$

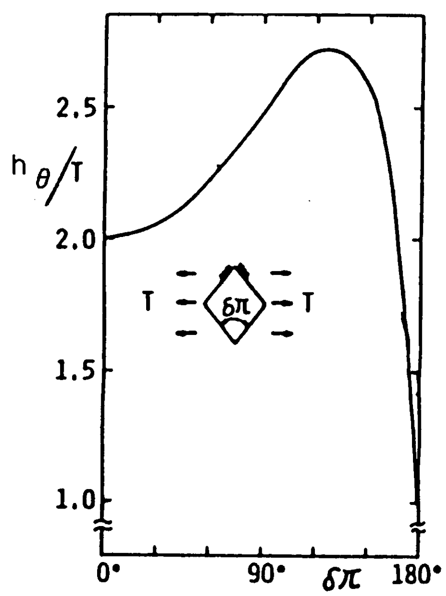


図7-3-1　式 7-3-1のh_{θ}の値

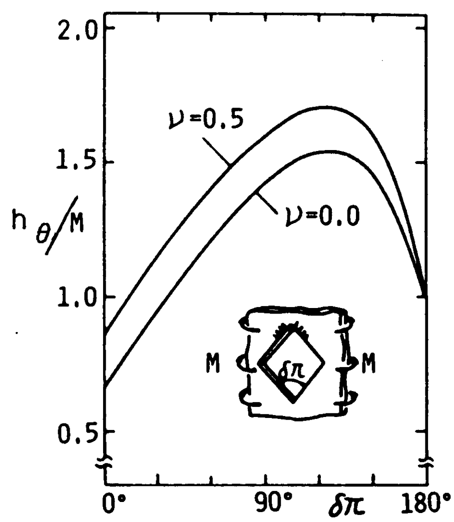


図7-3-2　式 7-3-2のh_{θ}値

そして、同様の方法で第１項の係数h_θを求めた。図 7-3-2に矩形孔の角度 0° ～ 180° に対する式 7-3-2のh_θ値を示す。

（ｃ）平面弾性問題で固定境界の場合

矩形の境界上で変位拘束を受ける無限板を考える。荷重条件はｘ軸方向無限遠での一様引張とする。応力解析は第２章で述べた複素応力関数と等角写像関数を用いる方法による。形状、及び等角写像関数は前節とまったく同じである。矩形の隅角部先端のｘ軸上の応力集中値$\sigma_{x\max}$を次式のように表わす。

$$\sigma_{x\max} = h_r \rho^{m1} + h_{r2} \rho^{m2} + h_{r3} \rho^{m3} + \cdots \qquad 7\text{-}3\text{-}3$$

そして、同様の方法で第１項の係数h_rを求めた。図 7-3-3に矩形の角度 0° ～ 180° に対する式 7-3-3のh_r値を示す。

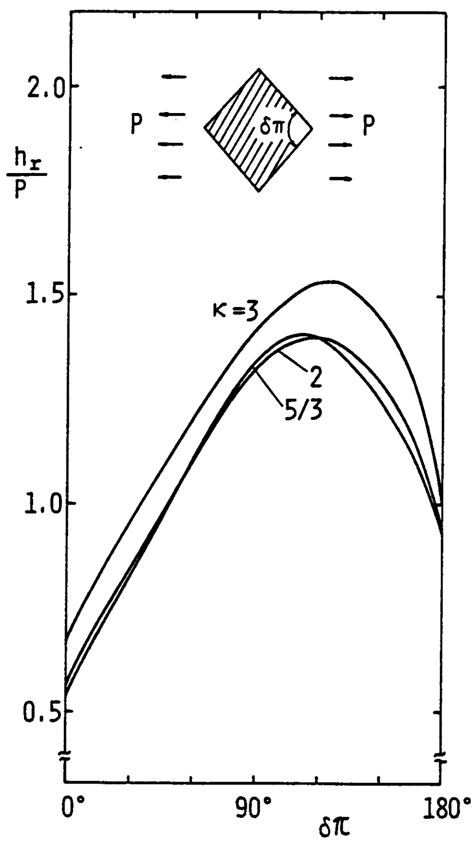


図7-3-3　式 7-3-3のh_r値

次に、無限遠で一様セン断荷重を受ける場合を解析する。応力解析は第２章で述べた方法による。形状及び等角写像関数は前節とまったく同じである。矩形の境界上で変位拘束を受ける無限板において、無限遠での一様セン断荷重に対する隅角部先端のｘ軸上の応力集中値$\tau_{r\theta max}$を次式のように表わす。

$$\tau_{r\theta max} = h_{r\theta}\rho^{m1} + h_{r\theta 2}\rho^{m2} + h_{r\theta 3}\rho^{m3} + \cdots \qquad 7\text{-}3\text{-}4$$

そして、同様の方法で第１項の係数$h_{r\theta}$を求めた。図 7-3-4に矩形の角度 0° ～ 180° に対する式 7-3-4の$h_{r\theta}$値を示す。

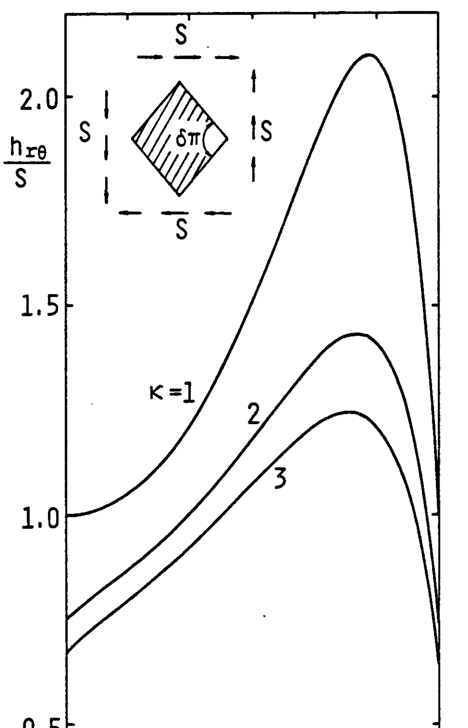


図7-3-4　式 7-3-4の$h_{r\theta}$値

（d）薄板の面外曲げ問題で固定境界の場合

矩形の境界上が変位拘束を受ける無限板を考える。荷重条件はx軸方向無限遠での一様面外曲げとする。応力解析は第2章で述べた方法による。形状、及び等角写像関数は前節とまったく同じである。隅角部先端のx軸上の応力集中値$M_{x\,max}$を次式のように表わす。

$$M_{x\,max} = h_r \rho^{m1} + h_{r2} \rho^{m2} + h_{r3} \rho^{m3} + \cdots \qquad 7\text{-}3\text{-}5$$

そして、同様の方法で第1項の係数h_rを求めた。図 7-3-5に矩形の角度 0° ～ 180° に対する式 7-3-5のh_rの値を示す。

7－4　隅角部の強さと応力集中係数表示式第1項の係数との関係

隅角部の強さは第6章で述べたように次式

$$\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, r^{mj} \qquad 7\text{-}4\text{-}1$$

で表わされる応力分布の第1項の係数である。

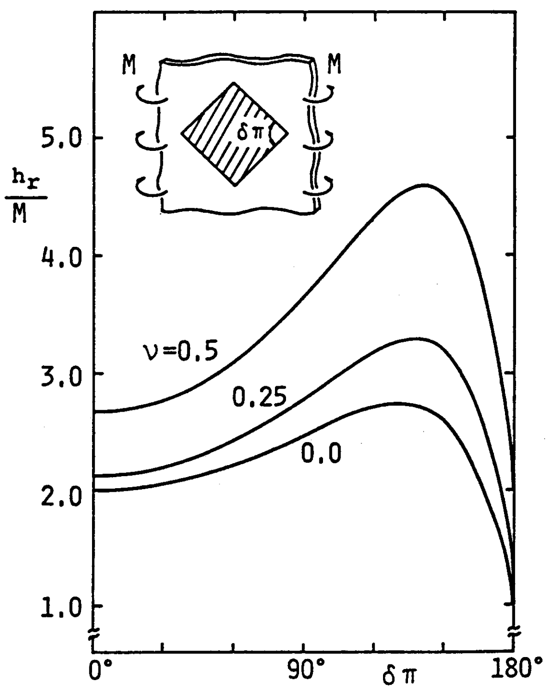


図7-3-5　式 7-3-5のh_r値

次に、隅角部先端に丸みのある切欠きや孔の応力集中は、 7-2節で述べたように次式で表わされる。

$$\sigma_{max}=\sum_{j=1}^{\infty} h_j \rho^{mj} \qquad \text{7-4-2}$$

ここで丸みの曲率半径ρが小さい場合、応力集中は次のように式 7-4-2の第１項のみで近似される。

$$\sigma_{max}=h_1 \rho^{m1} \qquad \text{7-4-3}$$

ここで、式 7-4-1の第１項の係数、つまり隅角部の強さと式 7-4-2の第１項の係数とを、次のように関係づける。

$$\begin{aligned} f_\theta &= C_\theta h_\theta \\ f_r &= C_r h_r \\ f_{r\theta} &= C_{r\theta} h_{r\theta} \end{aligned} \qquad \text{7-4-4}$$

ここで、θ，r，rθはそれぞれ接線方向、法線方向応力成分、セン断応力成分を表わす添字で、C_θ，C_r，$C_{r\theta}$は各応力成分に対する係数である。

式 7-4-4により、隅角部の強さ又は応力集中係数表示式の第１項の係数のどちらか一方が既知ならば他方の値は求められる。つまり鋭い角の隅角部の強さと、先端に丸みのある隅角部の応力集中とが関係づけられる。

式 7-4-4の係数C_θ，C_r，$C_{r\theta}$は、荷重条件や形状によらず、隅角部の角度のみに依存する。以下具体的に係数を求める。

（ａ）平面弾性問題で自由境界の場合

隅角部角度の２等分線に対称な接線方向応力成分について考える。次式 7-4-5のf_θとh_θに各々、図6-3-4(式 6-3-9のf_θ），図 7-3-1（式 7-3-1のh_θ）の値を代入してC_θを求める。

$$f_\theta=C_\theta h_\theta \qquad \text{7-4-5}$$

図7-4-1,表 7-4-1に得られた各角度のC_θの値を示す。このC_θは、平面弾性問題で自由境界、隅角部角度の２等分線に対称な応力状態の場合に成り立つ係数である。

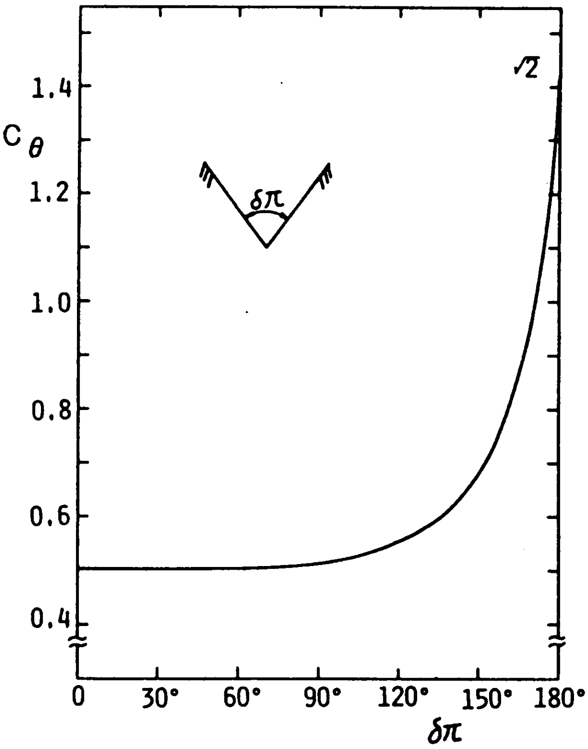


図7-4-1　式 7-4-5のC_θ値

表7-4-1　式 7-4-5のC_θ値

$\delta\pi$	C_θ	$\delta\pi$	C_θ
0	0.5	100	0.519
10	0.500	110	0.531
20	0.500	120	0.549
30	0.500	130	0.576
40	0.500	140	0.615
50	0.501	150	0.676
60	0.502	160	0.775
70	0.503	170	0.952
80	0.506	180	1.414
90	0.512		

（ｂ）薄板の面外曲げ問題で自由境界の場合

隅角部角度の２等分線に対称な、接線方向応力成分について考える。次式 7-4-6のf_θとh_θにそれぞれ、図6-3-7(式6-3-11のf_θ)，図7-3-2(式 7-3-2のh_θ)の値を代入してC_θを求める。

$$f_\theta = C_\theta \frac{3+\nu}{1+\nu} h_\theta \qquad 7\text{-}4\text{-}6$$

図7-4-2,表 7-4-2に得られた各角度のC_θの値を示す。このC_θは、薄板の面外曲げ問題で自由境界、隅角部角度の２等分線に対称な応力状態の場合に成り立つ係数である。

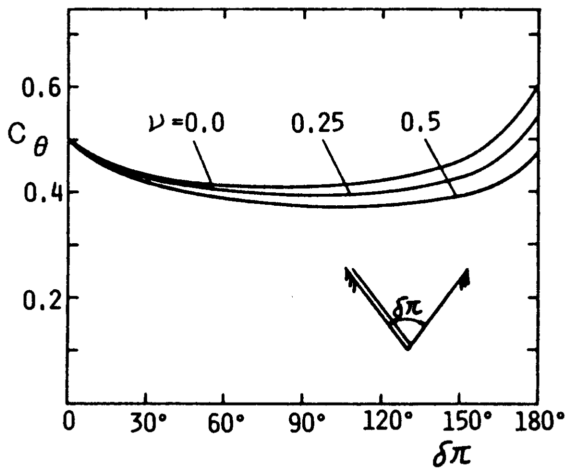


図7-4-2　式 7-4-6のC_θ値

表7-4-2　式 7-4-6のC_θ値

δπ	ν = 0.0	ν = 0.25	ν = 0.5
	C_θ	C_θ	C_θ
0	0.5	0.5	0.5
10	0.456	0.458	0.462
20	0.433	0.438	0.443
30	0.417	0.424	0.430
40	0.406	0.414	0.422
50	0.396	0.406	0.415
60	0.389	0.402	0.411
70	0.384	0.397	0.408
80	0.379	0.395	0.407
90	0.375	0.394	0.408
100	0.373	0.394	0.410
110	0.372	0.397	0.414
120	0.373	0.400	0.420
130	0.376	0.407	0.428
140	0.382	0.415	0.440
150	0.390	0.428	0.458
160	0.403	0.448	0.483
170	0.425	0.478	0.522
180	0.471	0.544	0.606

式 7-4-6の（3＋ν）／（1＋ν）は、C_θがなるべくポアソン比に依存しないようにするため用いられている。

（c）平面弾性問題で固定境界の場合

隅角部角度の2等分線に対称な、法線方向応力成分について考える。次式 7-4-7のf_rとh_rにそれぞれ、図6-3-11（式6-3-13のf_r），図7-3-3(式 7-3-3のh_r）の値を代入してC_rを求める。

$$f_r = C_r h_r \qquad 7\text{-}4\text{-}7$$

図7-4-3, 表 7-4-3に得られた各角度のC_rの値を示す。このC_rは、平面弾性問題で固定境界、隅角部角度の2等分線に対称な応力状態の場合に成り立つ係数である。

次に、隅角部角度の2等分線に逆対称な応力分布であるセン断応力成分について考える。次式 7-4-8の$f_{r\theta}$と$h_{r\theta}$にそれぞれ、図6-3-13（式6-3-16の$f_{r\theta}$），図 7-3-4（式 7-3-4の$h_{r\theta}$）の値を代入して$C_{r\theta}$を求める。

$$f_{r\theta} = C_{r\theta} h_{r\theta} \qquad 7\text{-}4\text{-}8$$

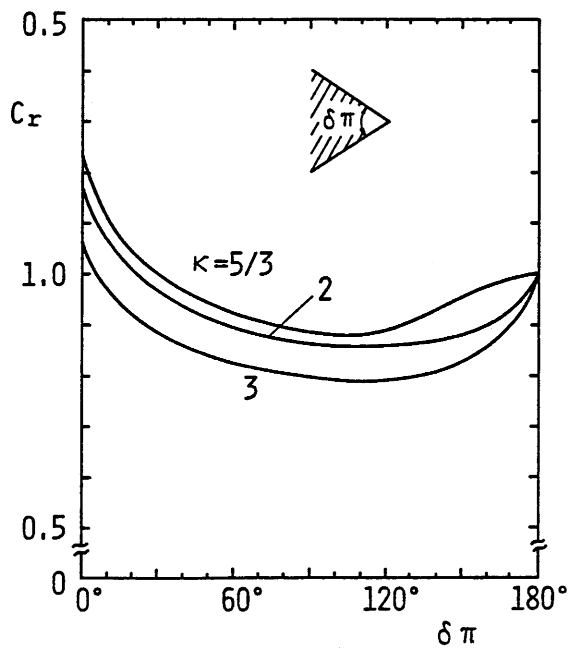


図7-4-3　式 7-4-7のC_r値

表7-4-3　式 7-4-7のC_r値

δπ	κ = 5/3	κ = 2	κ = 3
	C_r	C_r	C_r
0	1.238	1.178	1.060
10	1.108	1.063	0.966
20	1.042	1.004	0.918
30	0.999	0.963	0.884
40	0.966	0.934	0.861
50	0.941	0.912	0.840
60	0.922	0.894	0.825
70	0.906	0.880	0.814
80	0.893	0.871	0.804
90	0.883	0.863	0.796
100	0.877	0.860	0.791
110	0.879	0.859	0.790
120	0.888	0.861	0.793
130	0.905	0.866	0.798
140	0.927	0.871	0.810
150	0.953	0.881	0.828
160	0.975	0.898	0.856
170	0.994	0.930	0.901
180	1.000	1.000	1.000

図7-4-4,表 7-4-4に得られた各角度の$C_{r\theta}$の値を示す。この$C_{r\theta}$は、平面弾性問題で固定境界、隅角部角度の２等分線に逆対称な応力状態の場合に成り立つ係数である。

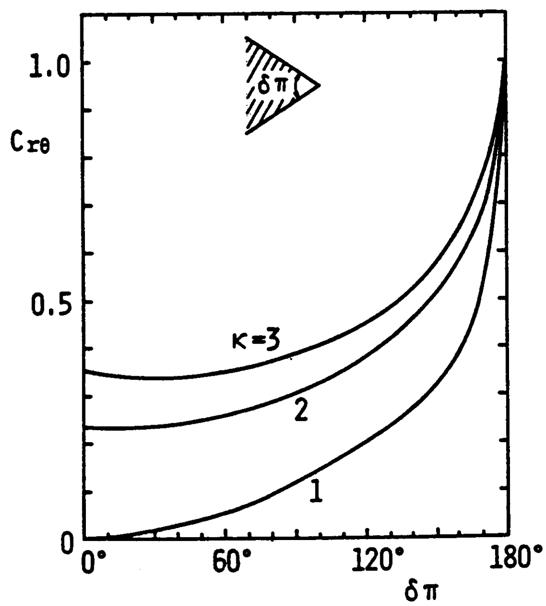


図7-4-4　式 7-4-8の$C_{r\theta}$値

表7-4-4　式 7-4-8の$C_{r\theta}$値

$\delta\pi$	$\kappa=1$	$\kappa=2$	$\kappa=3$
	$C_{r\theta}$	$C_{r\theta}$	$C_{r\theta}$
0	0.0	0.236	0.354
10	0.004	0.233	0.344
20	0.009	0.232	0.339
30	0.016	0.235	0.338
40	0.026	0.241	0.341
50	0.037	0.249	0.345
60	0.053	0.259	0.352
70	0.071	0.272	0.362
80	0.092	0.286	0.373
90	0.116	0.305	0.388
100	0.142	0.326	0.405
110	0.172	0.351	0.427
120	0.202	0.379	0.452
130	0.236	0.414	0.483
140	0.270	0.458	0.523
150	0.316	0.511	0.575
160	0.388	0.583	0.648
170	0.529	0.687	0.760
180	1.000	1.000	1.000

(ｄ) 薄板の面外曲げ問題で固定境界の場合

隅角部角度の２等分線に対称な、法線方向応力成分について考える。次式7-4- 8のf_rとh_rにそれぞれ、図6-3-17(式6-3-17のf_r)，図7-3-5(式 7-3-5のh_r)の値を代入してC_rを求める。

$$f_r = C_r h_r \qquad 7\text{-}4\text{-}9$$

図7-4-5,表 7-4-5に得られた各角度のC_rの値を示す。このC_rは、薄板の面外曲げ問題で固定境界、隅角部角度の２等分線に対称な応力状態の場合に成り立つ係数である。

Appendix［平面弾性問題の固定境界で$\delta\pi=0°$の場合の隅角部の強さと応力集中との関係］

隅角部角度$\delta\pi=0°$の場合のf_r値は以下のようにしても求まる。$\delta\pi=0°$の場合、

表7-4-5　式 7-4-9のC_r値

δπ	ν = 0.0	ν = 0.25	ν = 0.5
	C_r	C_r	C_r
0	0.354	0.442	0.530
10	0.354	0.442	0.529
20	0.354	0.441	0.528
30	0.354	0.440	0.526
40	0.354	0.439	0.523
50	0.354	0.437	0.519
60	0.355	0.435	0.513
70	0.356	0.434	0.506
80	0.358	0.434	0.498
90	0.362	0.435	0.491
100	0.367	0.436	0.488
110	0.376	0.438	0.487
120	0.389	0.444	0.487
130	0.407	0.458	0.493
140	0.435	0.478	0.503
150	0.478	0.510	0.526
160	0.548	0.564	0.573
170	0.673	0.675	0.676
180	1.000	1.000	1.000

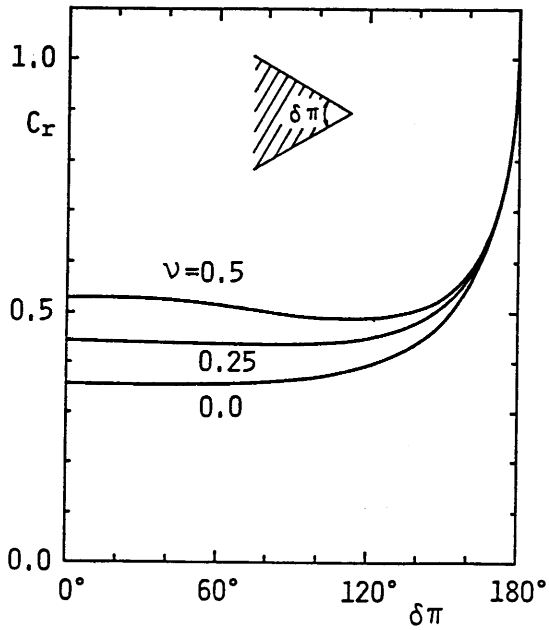


図7-4-5　式 7-4-9のC_r値

クラックの境界が変位拘束された、つまり線状介在物先端部を考え、その近傍の応力成分は式 6-1-1で表わされる。この式の第１項の係数$K_{I\,r}$と$K_{II\,r}$は複素応力関数ϕ（ζ）と写像関数ω（ζ）を用いて次式のように表わされる[Hasebe(1984)]。

$$K_{I\,r} - iK_{II\,r} = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{i}{2}\delta}\, \phi'(\sigma_1) / \sqrt{\omega''(\sigma_1)} \qquad \text{A-7-1}$$

ここでδはクラックとx軸とのなす角、$\sigma 1$ はクラック先端に対応する単位円周上の座標値である。この式は自由境界問題の場合の式 6-1-2に相当する。複素応力関数ϕ（ζ）と写像関数ω（ζ）については文献[Muskhelishvili(1963)]の楕円形状に対する解析を応用する。

Muskhelishvili(1963)の式を次に記す。

$$\phi(\zeta) = \Gamma R \zeta + (\Gamma m + \Gamma')\frac{R}{\kappa \zeta}$$

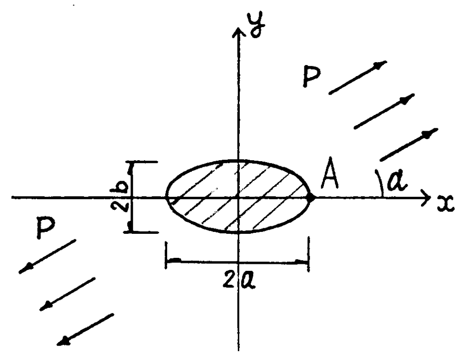
$$\Gamma=\overline{\Gamma}=\frac{P}{4},\ \Gamma'=-\frac{1}{2}Pe^{-2i\alpha} \qquad \text{A-7-2}$$

又楕円形状は次式のように表わされる。

$$Z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right) \quad (R>0)$$

さらに $a=R(1+m)$, $b=R(1-m)$

A-7-3



一様引張りを受ける楕円介在物

ここで、楕円介在物の剛体的回転はないものとする。クラック方向に大きさPの一様引張荷重を受ける場合

$m=1$, $R=\dfrac{a}{2}$ とおくと

$$\phi'(\zeta)=\frac{P}{8}a-\left(\frac{P}{4}-\frac{P}{2}\right)\frac{a}{2\kappa\zeta^2}$$

$$\omega''(\zeta)=\frac{a}{\zeta^3} \qquad \text{A-7-4}$$

式A-7-1 に代入する。A点では、$\zeta=1$, $\delta=0$なので

$$K_{I\,r}-iK_{II\,r}=\sqrt{\pi}\left(\frac{pa}{8}+\frac{pa}{8\kappa}\right)/\sqrt{a}$$

$$=\sqrt{\pi}\,\frac{p\sqrt{a}}{8}\,\frac{(\kappa+1)}{\kappa} \qquad \text{A-7-5}$$

実部より$K_{I\,r}=\dfrac{p\sqrt{\pi a}}{8}\,\dfrac{(\kappa+1)}{\kappa}$

$\theta=0$上で

$$\sigma_x=\frac{K_{\mathrm{I}r}}{\sqrt{2\pi r}}(\kappa+3) \qquad \text{A-7-6}$$

代入すると、

$$\sigma_x=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\frac{p\sqrt{\pi a}}{8}\frac{(\kappa+1)}{\kappa}(\kappa+3)$$

$$=\frac{p\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\frac{(\kappa+1)(\kappa+3)}{8\sqrt{2}\kappa} \qquad \text{A-7-7}$$

$\dfrac{(\kappa+1)(\kappa+3)}{8\sqrt{2}\kappa}=f_r$と定義する。

$$\therefore \sigma_x=\frac{P\sqrt{a}}{\sqrt{r}}f_r$$

$\kappa=1$のとき $f_r=0.707\ (\frac{1}{\sqrt{2}})$

$\kappa=5/3$ $f_r=0.660\ (\frac{14}{15\sqrt{2}})$

$\kappa=2$ $f_r=0.663\ (\frac{15}{16\sqrt{2}})$

$\kappa=3$ $f_r=0.707\ (\frac{1}{\sqrt{2}})$

次に楕円介在物の場合のA点の応力値を求める。
Muskhelishvili(1963)より

$$\phi'(\zeta)=\frac{PR}{4}-\left(\frac{P}{4}m-\frac{P}{2}\right)\frac{R}{\kappa\zeta^2}$$

$$\omega'(\zeta)=R\left(1-\frac{m}{\zeta^2}\right) \qquad \text{A-7-8}$$

さらに楕円形状ではA点の丸みの曲率半径ρと短径、長径は次のようになる。

$$b=\sqrt{a\rho},\qquad m=\frac{1-b/a}{b/a+1} \qquad \text{A-7-9}$$

又、

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\,[\phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)] \qquad \text{A-7-10}$$

A点では、ζ＝１となり

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\,[R\{\frac{P}{4}-(\frac{P}{4}m-\frac{P}{2})\frac{1}{\kappa}\}/R(1-m)]$$

A-7-11

実数なので、

$$\sigma_x+\sigma_y=\frac{P}{(1-m)}\{1-(m-2)\frac{1}{\kappa}\} \qquad \text{A-7-12}$$

境界上では

$$\sigma_\theta/\sigma_r=(3-\kappa)/(1+\kappa) \qquad \text{A-7-13}$$

なので、

$$\sigma_y=\sigma_x(3-\kappa)/(1+\kappa) \qquad \text{A-7-14}$$

となり、

$$\sigma_x\frac{4}{1+\kappa}=\frac{P}{1-m}\{1-(m-2)\frac{1}{\kappa}\} \qquad \text{A-7-15}$$

さらに

$$m=\frac{1-b/a}{b/a+1},\quad b=\sqrt{a\rho}$$

を代入すると、

$$\sigma_x=\frac{P\sqrt{a}}{\sqrt{\rho}}\frac{(\kappa+1)^2}{8\kappa}+P\frac{(\kappa+1)(\kappa+3)}{8\kappa} \qquad \text{A-7-16}$$

ここで、

$$\frac{(\kappa+1)^2}{8\kappa}=h_r$$

とおくと、

$$\sigma_x=P\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\rho}}h_r+P\frac{(\kappa+1)(\kappa+3)}{8\kappa}$$

$\kappa=1$のとき $h_r=0.5$ $(\frac{1}{2})$

$\kappa=5/3$ $h_r=0.533$ $(\frac{8}{15})$

$\kappa=2$ $h_r=0.563$ $(\frac{9}{16})$

$\kappa=3$ $h_r=0.667$ $(\frac{2}{3})$

上式より

$\rho\to\infty$のとき、半平面に相当し、境界上の応力成分は次式のようになる。

（第１項→０）

$$\sigma_x=P\frac{(\kappa+1)(\kappa+3)}{8\kappa}$$

$$\therefore\quad C_r=\frac{f_r}{h_r}$$

$$=\frac{(\kappa+3)}{\sqrt{2}(\kappa+1)}$$

A-7-17

$\kappa=1$のとき $\sigma_x=1$

$\kappa=5/3$ $\sigma_x=0.9333$ $(\frac{14}{15})$

$\kappa=2$ $\sigma_x=0.9375$ $(\frac{15}{16})$

$\kappa=3$ $\sigma_x=1$

さらに一様引張荷重の方向をy軸方向とした場合のA点の応力成分について解析する。

$$\phi(\zeta)=\Gamma R\zeta+(\Gamma m+\overline{\Gamma}')\frac{R}{\kappa\zeta}$$

ここで$\Gamma=\dfrac{P}{4}$，$\Gamma'=-\dfrac{1}{2}Pe^{-2i\alpha}$　　$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$なので、

$$=-\frac{1}{2}Pe^{-i\pi}$$

$$=\frac{1}{2}P$$

又、$\overline{\Gamma}'=\dfrac{1}{2}P$

$$\phi(\zeta)=\frac{PR}{4}\zeta+\left(\frac{P}{4}+\frac{P}{2}\right)\frac{R}{\kappa\zeta}$$

$$\phi'(\zeta)=\frac{PR}{4}-\frac{3PR}{4}\frac{1}{\kappa\zeta^2}$$

又、$\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\dfrac{m}{\zeta}\right)$より　$m=1$，$R=\dfrac{a}{2}$なので

$$\omega(\zeta)=\frac{a}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$\therefore\omega''(\zeta)=\frac{a}{\zeta^3}$$

$\zeta=1$のとき、$\phi'(1)=\dfrac{Pa}{8}-\dfrac{3Pa}{8}\dfrac{1}{\kappa}$，　　$\omega''(1)=a$

$\delta=0$なので、

$$K_{\mathrm{I}r}-iK_{\mathrm{II}r}=\sqrt{\pi}\left(\frac{Pa}{8}-\frac{3Pa}{8}\frac{1}{\kappa}\right)/\sqrt{a}$$

$$=\frac{P\sqrt{\pi a}}{8\kappa}(\kappa-3)$$

$$\therefore K_{\mathrm{I}r}=\frac{P\sqrt{\pi a}}{8\kappa}(\kappa-3)$$

$\theta=0$上で

$$\sigma_x=\frac{K_{\mathrm{I}r}}{\sqrt{2\pi r}}(\kappa+3)$$ なので、$K_{\mathrm{I}r}$を代入すると、

$$\sigma_x=\frac{P\sqrt{\pi a}}{8\kappa}(\kappa-3)(\kappa+3)/\sqrt{2\pi r}$$

$$=\frac{P\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\frac{(\kappa-3)(\kappa+3)}{8\sqrt{2}\kappa}$$

ここで、

$$\frac{(\kappa-3)(\kappa+3)}{8\sqrt{2}\kappa}=f_r$$ とおく。

一方楕円形状とすると、

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\left[\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]$$

ここで

$$\phi'(\zeta)=\frac{PR}{4}-\left(\frac{Pm}{4}+\frac{P}{2}\right)\frac{R}{\kappa\zeta^2}$$

$$\omega'(\zeta)=R\left(1-\frac{m}{\zeta^2}\right)$$

$\zeta=1$を代入すると、

$$\sigma_x+\sigma_y=P\frac{\kappa-m-2}{\kappa(1-m)}$$

$\sigma_x+\sigma_y$は［$\sigma_\theta/\sigma_r=(3-\kappa)/(1+\kappa)$］より

$$=\sigma_x\left(\frac{4}{1+\kappa}\right)\text{となる。}$$

$$\therefore\sigma_x=P\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\rho}}\frac{(\kappa+1)(\kappa-3)}{8\kappa}$$

$$+P\frac{(\kappa-1)(\kappa+1)}{8\kappa}$$

$$C_r=\frac{f_r}{h_r}=\frac{(\kappa+3)}{\sqrt{2}(\kappa+1)}$$

この値は式A-7-17 と一致する。よって荷重の方向が９０°変化してもC_rの値は同じであることが分る。

さらに一様セン断荷重の場合についても同じように解析できる。

$$K_{\mathrm{I}r}-iK_{\mathrm{II}r}=\sqrt{\pi}e^{-\frac{i}{2}\delta}\phi'(\sigma_1)/\sqrt{\omega''(\sigma_1)}$$

より

$$K_{\mathrm{II}r}=-\frac{S\sqrt{\pi a}}{2\kappa}$$

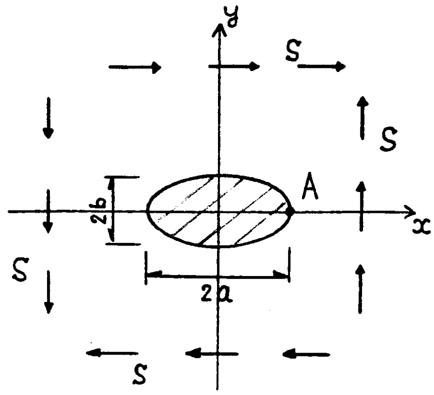
又　$$\tau_{r\theta}=-\frac{K_{\mathrm{II}r}}{\sqrt{2\pi r}}(\kappa-1)$$

$(\theta=0$上で$)$

であるので、

$$\tau_{r\theta} = \frac{S\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\ \frac{(\kappa-1)}{2\sqrt{2}\kappa}$$ を得る。

$$\frac{\kappa-1}{2\sqrt{2}\kappa} = f_{r\theta}$$ と定義する。



一様せん断を受ける楕円介在物

$\kappa = 1$ のとき $f_{r\theta} = 0$

$\kappa = 2$ $\quad f_{r\theta} = 0.177\ \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$

$\kappa = 3$ $\quad f_{r\theta} = 0.236\ \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$

さらに、

$$\tau_{xy} = \frac{S\sqrt{a}}{\sqrt{\rho}}\ \frac{(\kappa+1)}{2\kappa} + \frac{S\ (\kappa+1)}{2\kappa}$$

を得る。

$$\frac{(\kappa+1)}{2\kappa} = h_{r\theta}$$ と定義し、次式を得る。

$$\therefore C_{r\theta} = \frac{f_{r\theta}}{h_{r\theta}} = \frac{(\kappa-1)}{2\sqrt{2}\kappa} \Big/ \frac{(\kappa+1)}{2\kappa}$$

$$= \frac{(\kappa-1)}{\sqrt{2}\ (\kappa+1)}$$

$\kappa = 1$ のとき $h_{r\theta} = 1$

$\kappa = 2$ $\quad h_{r\theta} = 0.750\ \left(\frac{3}{4}\right)$

$\kappa = 3$ $\quad h_{r\theta} = 0.667\ \left(\frac{2}{3}\right)$

7－5　まとめ

切欠き先端に丸みのある場合と無い場合のＶ字形切欠きについて、切欠きの角度と切欠き先端の丸みの曲率半径の要素を取り上げ、応力集中と隅角部の強さ相互間の関係について解析した。式 7-4-5～ 7-4-9で求められたC_θ，C_r，$C_{r\theta}$の値は、形状、荷重条件によらず任意の場合に成り立つものである。これらの結果は、応力集中に関する実験や、解析のデータを整理する上で、また、見通しを立てる場合等に有効である。さらに数値計算や実験で応力集中部を解明しようとするとき、何らかの方法で一つの要素を求めれば、他の要素が相互関係式によって求められる。

第８章　隅角部の強さと応力拡大係数を求める式との関係

８－１　まえがき

本章では、第６章で述べた隅角部の強さが応力拡大係数を求める近似式に応用できることを示す。第５章で述べたように、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を求める近似式は、クラック発生前の応力分布を用いて表わされる。つまり想定したクラック長ｂに対応する位置の応力値が分かれば、そのクラックの応力拡大係数が計算できる。ここで、隅角部先端付近の応力分布は一般に式 6-1-1のように表わされる。さらに隅角部先端近傍では応力分布が式 6-1-2のように表わされる。つまりクラック発生前の応力分布（隅角部先端付近）が隅角部の強さで表わされる。よって任意の荷重条件に対する隅角部先端付近の応力分布や、隅角部の強さが分かれば、その隅角部先端から発生したクラックの応力拡大係数が計算できる。以下具体的に示す。

８－２　平面弾性問題の場合

まず、x軸方向無限遠の一様引張荷重Ｐを受ける、半無限板の縁にある三角形切欠きからy軸に沿って発生したクラックについて示す。式 5-2-2を次に示す。

$$F = A\,\frac{\sigma(b)}{P}\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}} \qquad \text{8-2-1}$$

ここで、$\sigma(b)$ はクラック長ｂに対応する位置でのクラック発生前の応力値である。つまり切欠きの応力分布であり、式6-2-14のように表わされる。よって式6-2-14を式 8-2-1に代入すると次式を得る。

$$F = A\sum_{j=1}^{\infty} f_j\, b^{m_j}\,\frac{\sqrt{b}}{P\sqrt{(a+b)}} \qquad \text{8-2-2}$$

隅角部先端近傍では、式6-2-14の最初の項のみで応力分布が表わされる。つまり隅角部の強さで表わされる。

この場合のクラックの応力拡大係数は、対称性よりモードⅠに対するものである。よってクラック発生前の応力としてはσ_xが対応する。σ_xも式6-2-14の形に表わされる。ここでクラック発生前の応力を次の２つの式で表わす。

$$\sigma_X(b) = f_\theta b^{m1} \qquad 8\text{-}2\text{-}3$$

$$\sigma_X(b) = f_\theta b^{m1} + f_0 \qquad 8\text{-}2\text{-}4$$

ここで、$\sigma_X(b)$ はクラック長bに対応する位置での σ_X の値、f_θ は切欠きのX軸方向無限遠での一様引張荷重による隅角部の強さ、f_0 は定数である。式 8-2-3、 8-2-4の f_θ 及び f_0 の値は、 3-2節で解析した応力分布より、隅角部先端近傍の応力値を数個選んで決定できる。表 8-2-1に切欠き角度60°、80°、90°、 100°、 120°、 140°、 160° に対する、式 8-2-3、 8-2-4の f_θ 及び f_0 の値を示す。

よって三角形切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を求める近似式は次式のように表わされる。

$$F = A f_\theta b^{m1} \frac{\sqrt{b}}{P\sqrt{(a+b)}} \qquad 8\text{-}2\text{-}5$$

$$F = A\{f_\theta b^{m1} + f_0\} \frac{\sqrt{b}}{P\sqrt{(a+b)}} \qquad 8\text{-}2\text{-}6$$

ここで、Aは図 5-2-2の値である。式 8-2-5、 8-2-6で計算したFの値、及び解析値との誤差を表 8-2-2に示す。この表よりクラックが短い時はかなりよい精度で近似値が求められることが分る。式 8-2-6の方がより長いクラックでも精度がよい。クラックが長い時に精度が悪いのは、クラック発生前の応力分布を式 8-2-3、 8-2-4で表わしていることによる。式6-2-14のように表わされているので、より多くの項数で応力分布を表わせば精度はよくなる。しかし近似式としてはより複雑になる。短いクラックの場合を簡便に求めたい時、又はより長いクラックの場合まで精度よく求めたい時に応じて、適切に使い分ければよい。

表8-2-1　式 8-2-3, 8-2-4の f_θ　f_0 値

$\delta\pi$		60°	80°	90°	100°	120°	140°	160°
A		1.41	1.40	1.39	1.37	1.34	1.28	1.20
式 8-2-3	f_θ/σ	0.836	0.889	0.924	0.966	1.069	1.190	1.258
式 8-2-4	f_θ/σ	0.825	0.875	0.895	0.934	1.044	1.143	1.240
〃	f_0/σ	0.125	0.083	0.105	0.099	0.062	0.087	0.024

表8-2-2　式8-2-5, 8-2-6 の応力拡大係数の値及び誤差

$\delta\pi$	b/a	$K_1/\sqrt{\pi}\sigma$ (1)	式 8-2-5 (2)	Error % $\frac{(2)-(1)}{(1)}$	式 8-2-6 (3)	Error % $\frac{(3)-(1)}{(1)}$	クラック (a+b) (4)	Error % $\frac{(4)-(1)}{(1)}$
20°	0.0017	1.1224					1.1225	0.01
	0.0542	1.1514					1.1514	0.0
	0.1087	1.1806					1.1809	0.03
	0.3639	1.3094					1.3097	0.02
	0.7453	1.4814					1.4816	0.01
40°	0.0061	1.1234					1.1249	0.1
	0.0302	1.1389					1.1383	0.1
	0.1407	1.1981					1.1978	-0.03
	0.4420	1.3463					1.3467	0.03
	0.8769	1.5362					1.5364	0.01
60°	0.0047	1.1020	1.1034	0.1	1.1020	0.0	1.1241	2.0
	0.0098	1.1139	1.1134	-0.04	1.1171	0.3	1.1270	1.2
	0.0164	1.1222	1.1203	-0.2	1.1290	0.6	1.1306	0.8
	0.1859	1.2225	1.1541	-5.6	1.2158	-0.5	1.2213	-0.1
	0.5482	1.3951			1.2854	-7.9	1.3955	0.03
80°	0.0082	1.0668	1.0751	0.8	1.0696	0.3	1.1261	5.6
	0.0261	1.1082	1.1136	0.5	1.1158	0.7	1.1361	2.5
	0.0655	1.1476	1.1451	-0.2	1.1578	0.9	1.1577	0.9
	0.2096	1.2272	1.1863	-3.3	1.2218	-0.4	1.2334	0.5
	0.5769	1.4090			1.2934	-8.2	1.4083	-0.05
90°	0.0110	1.0424	1.0511	0.8	1.0332	-0.9	1.1276	8.2
	0.0335	1.0975	1.1045	0.6	1.0964	-0.1	1.1401	3.9
	0.0814	1.1504	1.1490	-0.1	1.1544	0.3	1.1662	1.2
	0.1979	1.2256	1.1953	-2.5	1.2226	-0.2	1.2274	0.2
	0.5389	1.3918			1.3177	-5.3	1.3913	-0.04
100°	0.0280	1.0541	1.0571	0.3	1.0445	-0.9	1.1371	7.9
	0.0435	1.0781	1.0869	0.8	1.0789	0.1	1.1456	6.3
	0.1022	1.1523	1.1468	-0.5	1.1519	-0.03	1.1774	2.2
	0.4203	1.3371	1.2534	-6.3	1.2998	-2.8	1.3366	-0.04
	0.9306	1.5583			1.4048	-9.9	1.5583	0.0
120°	0.0286	0.9421	0.9492	0.8	0.9411	-0.1		
	0.0514	1.0088	1.0157	0.7	1.0109	0.2		
	0.1701	1.1667	1.1665	-0.02	1.1737	0.6	1.2131	4.0
	0.3192	1.2883	1.2547	-2.6	1.2725	-1.2	1.2881	-0.02
	1.0531	1.6066			1.4926	-7.1	1.6069	0.01
140°	0.0622	0.8774	0.8808	0.4	0.8810	0.4		
	0.1054	0.9781	0.9773	-0.1	0.9753	-0.3		
	0.3189	1.2173	1.2156	-0.1	1.2311	1.1	1.2880	5.8
	0.7459	1.4659	1.4373	-2.2	1.4775	0.5	1.4819	1.1
	1.1402	1.6387	1.5627	-4.6	1.6208	-1.1	1.6407	0.1
160°	0.0185	0.4213	0.4235	0.5	0.4213	0.0		
	0.1804	0.8800	0.8745	-0.6	0.8741	-0.7		
	0.7971	1.4175	1.4041	-0.9	1.4095	-0.6	1.5034	6.1
	1.3894	1.7270	1.6762	-2.9	1.6858	-2.4	1.7336	0.4
	3.0459	2.2554	2.1546	-4.5	2.1736	-3.6	2.2583	0.1

表 8-2-2には、切欠きとクラックの全体と同じ長さ、（a＋b）のクラックの応力拡大係数も示し、解析値と比較している。これより切欠き角度が60° より小さい時は、ほとんど、クラックのみと同じ値であることがわかる。つまりこのような切欠きはクラックと同じくらい危険と言える。

次に、x軸方向無限遠での一様引張荷重Pを受ける、無限板中の矩形孔からy軸に沿って対称に発生したクラックについて示す。このクラックの応力拡大係数を求める近似式も式 8-2-1、8-2-2と同じである。

この場合も対称性より応力拡大係数はモードⅠに対するものとなる。クラック発生前の応力としてはσ_xが対応する。つまり矩形孔を有する無限板のy軸上のσ_xである。ここでクラック発生前の応力を次式で表わす。

$$\sigma_x(b) = f_\theta b^{m1} \qquad 8\text{-}2\text{-}7$$

ここで、σ_x（b）はクラック長bに対応する位置でのσ_xの値、f_θは矩形孔のx軸方向無限遠での一様引張荷重Pによる隅角部の強さである。

式 8-2-7のf_θの値は、6-3節で解析した図 6-3-4の値を用いる。よって矩形孔から対称に発生したクラックの応力拡大係数を求める近似式は次のように表わされる。

$$F = A f_\theta b^{m1} \frac{\sqrt{b}}{P\sqrt{(a+b)}} \qquad 8\text{-}2\text{-}8$$

ここで、Aは図 5-2-2の値である。式 8-2-8で計算したFの値、及び解析値との誤差を表 8-2-3に示す。この表よりクラックが短い場合はかなりよい精度で近似値が求められることが分る。この場合も応力分布をより多くの項数で表わせば精度はよくなる。近似式としての簡便性と精度との兼合い、つまり短いクラックの場合だけでよい時、長いクラックの場合まで精度よく求めたい時に応じて適切に使い分ければよい。

ここで、いくつかのクラックの応力拡大係数が分かっている時、この近似式を用いて、クラック発生前の応力分布が分り、さらに任意のクラックの応力拡大係数が計算できることを示す。

たとえば矩形孔の角度90° の場合、表 8-2-3より、クラック長b/a=0.0134、0.0950 、0,222 の応力拡大係数が分っているとする。既知の値が３つなので応力分布の式を次のようにおく。

表8-2-3　式8-2-8 の応力拡大係数の値及び誤差

δ π	b/a (a/b)	解析値 (1)	式 8-2-8 (2)	Error(%) [(2)-(1)]/(1)	クラック (2a+2b) (3)	Error(%) [(3)-(1)]/(1)
20°	0.0058	1.008	1.003	-0.5	1.000	-0.8
	0.0109	1.008	1.001	-0.7	1.000	-0.8
	0.0215	1.007	0.996	-1.1	1.000	-0.7
	0.0534	1.006	0.981	-2.5	1.000	-0.6
	0.100	1.005	0.960	-4.5	1.000	-0.5
	0.191	1.003			1.000	-0.3
	0.365	1.002			1.000	-0.2
	0.488	1.002			1.000	-0.2
	0.647	1.001			1.000	-0.1
	0.857	1.001			1.000	-0.1
	(0.877)	1.001			1.000	-0.1
	(0.648)	1.000			1.000	0.0
	(0.464)	1.000			1.000	0.0
	(0.401)	1.000			1.000	0.0
	(0.0)	1.000			1.000	0.0
40°	0.0059	1.024	1.022	-0.2	1.000	-2.3
	0.0123	1.025	1.021	-0.4	1.000	-2.4
	0.0205	1.025	1.019	-0.6	1.000	-2.4
	0.0563	1.022	1.005	-1.7	1.000	-2.2
	0.109	1.019	0.983	-3.5	1.000	-1.9
	0.240	1.013			1.000	-1.3
	0.443	1.008			1.000	-0.8
	0.585	1.006			1.000	-0.6
	0.766	1.005			1.000	-0.5
	0.900	1.004			1.000	-0.4
	(0.998)	1.003			1.000	-0.3
	(0.757)	1.002			1.000	-0.2
	(0.408)	1.001			1.000	-0.1
	(0.279)	1.000			1.000	0.0
	(0.0)	1.000			1.000	0.0
60°	0.0059	1.033	1.036	0.3	1.000	-3.2
	0.0139	1.039	1.043	0.4	1.000	-3.8
	0.0243	1.042	1.045	0.3	1.000	-4.0
	0.0604	1.043	1.038	-0.5	1.000	-4.1
	0.122	1.039	1.018	-2.1	1.000	-3.8
	0.219	1.033	0.983	-4.8	1.000	-3.2
	0.416	1.023			1.000	-2.2
	0.550	1.018			1.000	-1.8
	0.716	1.014			1.000	-1.4
	0.925	1.010			1.000	-1.0
	(0.835)	1.007			1.000	-0.7
	(0.641)	1.005			1.000	-0.5
	(0.483)	1.003			1.000	-0.3
	(0.352)	1.002			1.000	-0.2
	(0.0)	1.000			1.000	0.0
80°	0.0062	1.014	1.016	0.2	1.000	-1.4
	0.0101	1.025	1.030	0.5	1.000	-2.5
	0.0224	1.042	1.049	0.7	1.000	-4.0
	0.0663	1.059	1.061	0.2	1.000	-5.6
	0.113	1.062	1.056	-0.6	1.000	-5.8
	0.202	1.058	1.034	-2.3	1.000	-5.5
	0.406	1.045	0.976	-6.6	1.000	-4.3
	0.539	1.037			1.000	-3.6
	0.702	1.030			1.000	-2.9
	0.901	1.024			1.000	-2.3
	(0.870)	1.018			1.000	-1.8
	(0.681)	1.013			1.000	-1.3
	(0.402)	1.005			1.000	-0.5
	(0.296)	1.003			1.000	-0.3
	(0.0)	1.000			1.000	0.0
90°	0.0051	0.969	0.980	1.1	1.000	3.2
	0.0134	1.012	1.019	0.7	1.000	-1.2
	0.0207	1.026	1.035	0.9	1.000	-2.6
	0.0478	1.053	1.060	0.7	1.000	-5.0
	0.0950	1.066	1.068	0.2	1.000	-6.2
	0.153	1.070	1.063	-0.7	1.000	-6.5
	0.222	1.068	1.050	-1.7	1.000	-6.4
	0.473	1.053	0.988	-6.2	1.000	-5.0
	0.623	1.045			1.000	-4.3
	0.804	1.037			1.000	-3.6
	(0.976)	1.029			1.000	-2.8
	(0.769)	1.022			1.000	-2.2
	(0.404)	1.008			1.000	-0.8
	(0.322)	1.006			1.000	-0.6
	(0.0)	1.000			1.000	0.0

δ π	b/a (a/b)	解析値 (1)	式 8-2-8 (2)	Error(%) [(2)-(1)]/(1)	クラック (2a+2b) (3)	Error(%) [(3)-(1)]/(1)
100°	0.0071	0.936	0.942	0.6	1.000	6.8
	0.0179	0.993	0.993	0.0	1.000	0.7
	0.0225	1.002	1.006	0.4	1.000	-0.2
	0.0613	1.049	1.051	0.2	1.000	-4.7
	0.119	1.070	1.067	-0.3	1.000	-6.5
	0.227	1.077	1.061	-1.5	1.000	-7.1
	0.414	1.070	1.027	-4.0	1.000	-6.5
	0.558	1.062	0.997	-6.1	1.000	-5.8
	0.729	1.053			1.000	-5.0
	0.933	1.044			1.000	-4.2
	(0.847)	1.035			1.000	-3.4
	(0.672)	1.027			1.000	-2.6
	(0.418)	1.014			1.000	-1.4
	(0.287)	1.007			1.000	-0.7
	(0.0)	1.000			1.000	0.0
120°	0.0085	0.801	0.812	1.4	1.000	
	0.0145	0.850	0.861	1.3	1.000	17.6
	0.0341	0.938	0.942	0.4	1.000	6.6
	0.0504	0.970	0.978	0.8	1.000	3.1
	0.106	1.033	1.039	0.6	1.000	-3.2
	0.245	1.079	1.079	0.0	1.000	-7.3
	0.416	1.089	1.076	-1.2	1.000	-8.2
	0.514	1.089	1.067	-2.0	1.000	-8.2
	0.620	1.086	1.054	-2.9	1.000	-7.9
	0.819	1.078	1.027	-4.7	1.000	-7.2
	(0.951)	1.069			1.000	-6.5
	(0.756)	1.058			1.000	-5.5
	(0.487)	1.037			1.000	-3.6
	(0.268)	1.015			1.000	-1.5
	(0.0)	1.000			1.000	0.0
140°	0.0085	0.583	0.587	0.7	1.000	
	0.0155	0.653	0.661	1.2	1.000	
	0.0203	0.688	0.695	1.0	1.000	
	0.0730	0.875	0.873	-0.2	1.000	14.3
	0.105	0.921	0.924	0.3	1.000	8.6
	0.362	1.064	1.062	-0.2	1.000	-6.0
	0.446	1.079	1.074	-0.5	1.000	-7.3
	0.535	1.088	1.080	-0.7	1.000	-8.1
	0.628	1.094	1.083	-1.0	1.000	-8.6
	0.880	1.099	1.077	-2.0	1.000	-9.0
	(0.955)	1.098			1.000	-8.9
	(0.739)	1.092			1.000	-8.4
	(0.474)	1.072			1.000	-6.7
	(0.255)	1.036			1.000	-3.5
	(0.0)	1.000			1.000	0.0
160°	0.0365	0.513	0.515	0.4	1.000	
	0.0436	0.541	0.544	0.6	1.000	
	0.0508	0.566	0.569	0.5	1.000	
	0.0651	0.608	0.611	0.5	1.000	
	0.102	0.690	0.694	0.6	1.000	
	0.208	0.840	0.831	-1.1	1.000	19.0
	0.370	0.943	0.938	-0.5	1.000	6.0
	0.536	1.007	0.997	-1.0	1.000	-0.7
	0.712	1.043	1.034	-0.9	1.000	-4.1
	0.893	1.067	1.057	-0.9	1.000	-6.3
	(0.924)	1.083			1.000	-7.7
	(0.595)	1.105			1.000	-9.5
	(0.336)	1.102			1.000	-9.3
	(0.224)	1.083			1.000	-7.7
	(0.0)	1.000			1.000	0.0

$$\sigma(b/a)=f_{\theta}(b/a)^{m1}+f_{\theta 2}(b/a)^{m2}+f_{\theta 3}(b/a)$$
$$=B(b/a)^{m1}+C(b/a)^{u}[\cos\{v\log(b/a)\}]$$
$$+D(b/a)^{u}[\sin\{v\log(b/a)\}]$$

8-2-9

ここで、m_1=-0.4555、m_2=0.6293 + i 0.2313=u + i v、m_3 は、m_2 と共役である。上式を、式 8-2-8の応力分布に代入し、既知の３つの応力拡大係数を代入して、係数を求めると、それぞれB=0.889 、C=0.216 、D=0.312 を得る。B=0.889 の値は、図 6-3-4の隅角部の強さ f_{θ}=0.892にほぼ等しい。これらより応力分布を求めることもできる。さらに、応力拡大係数を求める式を次のようにおく。

$$F'=A[B(b/a)^{m1}+C(b/a)^{u}[\cos\{v\log(b/a)\}]$$
$$+D(b/a)^{u}[\sin\{v\log(b/a)\}]]\ \sqrt{b}/\sqrt{(a+b)}\ P$$

8-2-10

表 8-2-4に、上式を用いて任意のクラックの応力拡大係数を計算し、解析値と比較した結果を示す。この表から、より精度よく応力拡大係数が求まることが分る。

表 8-2-3には、矩形孔とクラックの全体の長さ(2a+2b) と同じ長さのクラックの応力拡大係数も示し、解析値と比較している。これより矩形孔から発生したクラックの応力拡大係数がクラックのみの場合の応力拡大係数に漸近しているのが分る。但し、解析値はクラックの短い場合を除き、クラックのみの場合の応力拡大係数より大きな値であるのでより危険である。

以上三角形切欠きや矩形孔から発生したクラックの応力拡大係数を求める近似式 8-2-5、8-2-6、 8-2-8において隅角部の強さ f_{θ} が対応しているのが分る。さらに式 8-2-5、8-2-6、 8-2-8における係数Aは、半無限板の縁にある三角形切欠きから発生したクラックの場合と、無限板中の矩形孔から発生したクラックの場合に対して、角度のみに依存する同じ値を用いているにもかかわらず、応力拡大係数の近似値はクラックの短い場合にはかなりよい精度である。このことから短いクラックの応力拡大係数を求める場合、係数Aは角度のみに依存すると言える。荷重条件の違いによる応力分布の違いは、隅角部の強

表8-2-4　式8-2-10の応力拡大係数の値及び誤差

b／a	0.0051	0.0134	0.0207	0.0478	0.0950	0.153	0.222	0.473	0.623	0.804
F	0.969	1.012	1.026	1.053	1.066	1.070	1.068	1.053	1.045	1.037
F' 式8-2-10	0.974		1.027	1.053		1.069		1.063	1.065	1.073
Error(%) $\frac{F'-F}{F}$	0.5		0.1	0.0		-0.1		0.9	1.9	3.5

さで表わされる。たとえば、Y字形の板の隅角部から発生したクラックの応力拡大係数は、その隅角部角度 240° に応じた係数Aの値とクラック発生前の応力の式を用いて求められる。つまり式 5-2-1と同じように表わすことができる。

8－3　薄板の面外曲げ問題の場合

x軸方向無限遠での一様な面外曲げ荷重Mを受ける、半無限板の縁にある三角形切欠きからY軸に沿って発生したクラックについて示す。式 5-3-2を次に示す。

$$F_B = \frac{(1+\nu)}{(3+\nu)} A \frac{M(b)}{M} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(a+b)}} \qquad 8\text{-}3\text{-}1$$

ここで、νはポアソン比、M(b) はクラック長bに対応する位置でのクラック発生前の曲げモーメント値である。つまり切欠きの応力分布で、式6-2-25のように表わされる。よって式6-2-25を式 8-3-1に代入すると次式を得る。

$$F_B = \frac{(1+\nu)}{(3+\nu)} A \sum_{j=1}^{\infty} f_j b^{mj} \frac{\sqrt{b}}{M\sqrt{(a+b)}} \qquad 8\text{-}3\text{-}2$$

隅角部先端近傍では、式6-2-25の最初の数項で応力分布が表わされる。対称性より応力拡大係数は面外曲げに対するものとなり、クラック発生前の応力としてはM_xが対応する。ここでクラック発生前の曲げモーメント分布を次式のように表わす。

$$M_x(b) = f_\theta b^{m1} + f_{\theta 2} b^{m2} + f_0 \qquad 8\text{-}3\text{-}3$$

ここで、$M_x(b)$ はクラック長bに対応する位置でのM_xの値、f_θは切欠きのx軸方向無限遠での一様面外曲げ荷重による隅角部の強さ、$f_{\theta 2}$ は応力の級数表示式の第２項の係数、f_0 は定数である。式 8-3-3のf_θ、$f_{\theta 2}$、及びf_0 の値は、3-3節で解析

表8-3-1　式8-3-3 のf_θ　$f_{\theta 2}$ f_0 値

$\delta\pi$		20°	40°	60°	80°	90°	100°	120°	140°
ν = 0.0	f_θ/M	0.852	0.985	1.086	1.208	1.176	1.231	1.267	1.254
	$f_{\theta 2}/M$	3.761	2.022	1.022	0.597	0.227	0.218	0.077	0.013
	f_0/M	-3.485	-1.848	-0.937	-0.612	-0.206	-0.230	-0.109	-0.046
ν = 0.5	f_θ/M	0.829	0.934	1.015	1.115	1.105	1.154	1.212	1.237
	$f_{\theta 2}/M$	2.989	1.607	0.867	0.545	0.251	0.252	0.118	0.039
	f_0/M	-2.687	-1.383	-0.712	-0.472	-0.182	-0.195	-0.103	-0.053

した応力分布より、隅角部先端近傍の応力値を数個選んで決定した。表 8-3-1に切欠き角度20°、40°、60°、80°、90°、100°、120°、140°、ポアソン比 0.0、0.5に対する式 8-3-3のf_{θ}、$f_{\theta 2}$及びf_0の値を示す。よって三角形切欠きから発生したクラックの面外曲げの応力拡大係数を求める近似式は次式のように表わされる。

$$F_B = \frac{(1+\nu)}{(3+\nu)} A \{ f_{\theta} b^{m1} + f_{\theta 2} b^{m2} + f_0 \} \frac{\sqrt{b}}{M\sqrt{(a+b)}}$$

8-3-4

ここで、Aは図 5-3-1の値である。式 8-3-4で計算したF_Bの値、及び解析値との誤差を表 8-3-2に示す。この表より 8-2節と同様クラックが短い時は、かなりよい精度で近似値が求められることが分る。クラックが長い時の精度が悪いのは、クラック発生前の応力分布を式 8-3-3で表わしていることによる。より多くの項数で応力分布を表わせば、精度はよくなる。

表 8-3-2には、切欠きとクラックの全体の長さ（２ａ＋２ｂ）と同じ長さのクラックの応力拡大係数も示し、解析値と比較している。これよりクラックのみの場合で近似できるクラック長が分る。

次に、ｘ軸方向無限遠での一様面外曲げ荷重Ｍを受ける、無限板中の矩形孔からＹ軸に沿って対称に発生したクラックについて示す。この場合もクラックの応力拡大係数を求める近似式は式 8-3-1、8-3-2と同じである。対称性より応力拡大係数は面外曲げに対するものとなる。よってクラック発生前の曲げモーメントとしてはM_xを用いる。ここで、クラック発生前の応力を次式で表わす。

$$M_x(b) = f_{\theta} b^{m1} \qquad 8\text{-}3\text{-}5$$

$$M_x(b) = f_{\theta} b^{m1} + f_{\theta 2} b^{m2} \qquad 8\text{-}8\text{-}6$$

ここで、$M_x(b)$ クラック長b に対応する位置でのM_xの値、f_{θ}は矩形孔のｘ軸方向無限遠での一様な面外曲げ荷重による隅角部の強さ、$f_{\theta 2}$は応力の級数表示式の第２項の係数である。式 8-3-5、8-3-6のf_{θ}の値は、6-3節で解析した図 6-3-7の値を用いる。$f_{\theta 2}$の値は 6-3節で解析した応力分布より、隅角部先端近傍の応力値を数個選んで決定した。よって、矩形孔から対称に発生したクラックの面外曲げの応力拡大係数を求める近似式は次のように表わされる。

表8-3-2　式 8-3-4の応力拡大係数の値及び誤差

*[1.0107 − (1)]/(1),　　**[1.0019 − (3)]/3

$\delta\pi$	b/a	POISSON'S RATIO 0.0					POISSON'S RATIO 0.5				
		F_B (1)	式 8-3-4 (2)	Error $\frac{(2)-(1)}{(1)}$	A	*	F_B (3)	式 8-3-4 (4)	Error $\frac{(4)-(3)}{(3)}$	A	**
0°		1.0107		%		%	1.0019		%		%
20°	0.044	0.9543	0.9518	-0.27	1.35		0.9554	0.9562	0.09	1.36	
	0.078	0.9712	0.9652	-0.62	1.34	4.07	0.9695	0.9681	-0.14	1.35	3.34
	0.199	0.9928	0.9888	-0.40	1.32	1.80	0.9874	0.9911	0.39	1.33	1.47
	0.428	1.0039	0.9980	-0.59	1.29	0.68	0.9967	0.9948	-0.19	1.29	0.52
	0.609	1.0068				0.39	0.9991				0.28
40°	0.060	0.9049	0.9029	-0.22	1.30		0.9148	0.9177	0.32	1.32	
	0.103	0.9363	0.9288	-0.81	1.29		0.9414	0.9404	-0.11	1.31	
	0.250	0.9755	0.9759	0.04	1.28	3.61	0.9753	0.9770	0.17	1.29	2.73
	0.515	0.9963	0.9933	-0.30	1.25	1.45	0.9921	0.9954	0.33	1.26	0.99
	0.722	1.0034				0.73	0.9967				0.52
60°	0.084	0.8641	0.8603	-0.44	1.25		0.8814	0.8805	-0.11	1.27	
	0.139	0.9077	0.9058	-0.20	1.25		0.9185	0.9140	-0.49	1.26	
	0.319	0.9645	0.9668	0.23	1.24		0.9657	0.9694	0.38	1.25	
	0.634	0.9932	0.9924	-0.08	1.22	1.76	0.9889	0.9875	-0.14	1.22	1.31
	0.875	1.0007				1.00	0.9948				0.71
80°	0.120	0.8340	0.8355	0.18	1.21		0.8565	0.8585	0.24	1.23	
	0.420	0.9556	0.9594	0.40	1.20	5.77	0.9593	0.9621	0.29	1.21	4.44
	0.803	0.9900	0.9944	0.45	1.19	2.09	0.9869	0.9886	0.17	1.19	1.52
	1.090	0.9990	0.9984	-0.06	1.18	1.17	0.9938	0.9952	0.14	1.18	0.82
	1.300	1.0025				0.82	0.9964				0.55
90°	0.064	0.7137	0.7120	-0.24	1.18		0.7470	0.7461	-0.12	1.20	
	0.146	0.8238	0.8252	0.17	1.18		0.8476	0.8464	-0.14	1.20	
	0.230	0.8801	0.8841	0.45	1.18		0.8964	0.8975	0.12	1.20	
	0.917	0.9891	0.9904	0.13	1.17	2.18	0.9863	0.9777	-0.87	1.18	1.58
	1.465	1.0022				0.85	0.9962				0.57
100°	0.081	0.6982	0.6982	0.00	1.16		0.7357	0.7347	-0.14	1.18	
	0.278	0.8760	0.8780	0.22	1.16		0.8930	0.8974	0.49	1.18	
	0.577	0.9516	0.9535	0.20	1.15	6.21	0.9565	0.9652	0.90	1.17	4.75
	1.060	0.9863	0.9937	0.75	1.15	2.47	0.9860	0.9875	0.15	1.16	1.61
	1.414	0.9983				1.24	0.9934				0.86
120°	0.126	0.6772	0.6754	-0.26	1.11		0.7151	0.7122	-0.41	1.13	
	0.286	0.8163	0.8129	-0.42	1.11		0.8402	0.8389	-0.15	1.13	
	0.845	0.9536	0.9556	0.21	1.11		0.9582	0.9592	0.11	1.12	4.56
	1.492	0.9898	0.9910	0.12	1.11	2.11	0.9869	0.9925	0.57	1.12	1.52
	2.291	1.0026				0.81	0.9966				0.53
140°	0.261	0.7179	0.7169	-0.14	1.08		0.7463	0.7443	-0.26	1.09	
	0.746	0.8956	0.8958	0.02	1.08		0.9080	0.9097	0.18	1.09	
	1.393	0.9645	0.9636	-0.09	1.08	4.79	0.9652	0.9705	0.55	1.09	3.80
	2.360	0.9936	0.9896	-0.40	1.08	1.72	0.9898	0.9946	0.48	1.09	1.22
	3.041	1.0012	0.9924	-0.87	1.08	0.95	0.9955	0.9987	0.32	1.09	0.64

$$F_B = A f_\theta b^{m1} \frac{\sqrt{b}}{M\sqrt{(a+b)}} \qquad \text{8-3-7}$$

$$F_B = A\{f_\theta b^{m1} + f_{\theta 2} b^{m2}\} \frac{\sqrt{b}}{M\sqrt{(a+b)}} \qquad 8\text{-}3\text{-}8$$

ここで、Aは図 5-3-1の値である。表 8-3-3に式 8-3-7、 8-3-8で計算した値、及び解析値との誤差を示す。この表によりクラックが短い場合はかなりよい精度で近似値が求められることが分る。式 8-3-8の方がより長いクラックの場合も精度よく近似値が求められる。より多くの項数で応力分布を表わせば、精度はよくなる。この場合も 8-2節と同様、近似式としての簡便さと精度との兼ね合いで、適切に使い分ければよい。

表 8-3-3には、矩形孔とクラックの全体の長さ(2a+2b) と同じ長さのクラックの応力拡大係数も示し、解析値と比較している。これより矩形孔から発生したクラックの応力拡大係数がクラックのみの場合の応力拡大係数に漸近しているのが定量的に分る。

以上、薄板の面外曲げ問題の場合でも、三角形切欠きや矩形孔の隅角部から発生したクラックの応力拡大係数を求める近似式 8-3-4、 8-3-7、 8-3-8に、隅角部の強さ f_θ が対応しているのが分る。さらに式 8-3-4、 8-3-7、 8-3-8における係数Aは、半無限板の縁にある三角形切欠きから発生したクラックの場合と、無限板中の矩形孔から発生したクラックの場合について、同じ値を用いているにもかかわらず、応力拡大係数の近似値は、かなりよい精度である。このことから短いクラックの応力拡大係数を求める場合、係数Aは隅角部の角度とポアソン比のみに依存する。荷重条件の違いによる応力分布の違いは、隅角部の強さで表わすことができる。第３章で解析したＹ字形の板の隅角部から発生したクラックの応力拡大係数も、その隅角部の角度とポアソン比に応じた係数Aの値を用いて、式 5-3-1と同じように表わすことができる。

表8-3-3　式8-3-7,8-3-8 の応力拡大係数の値及び誤差

$\delta\pi=90^\circ$ and $\nu=0.25$							
b/a(a/b)	解析値 (1)	Eq.8-3-7 (2)	Error (%) $\frac{(2)-(1)}{(1)}$	Eq.8-3-8 (3)	Error (%) $\frac{(3)-(1)}{(1)}$	クラック (2a+2b) (4)	Error (%) $\frac{(4)-(1)}{(1)}$
0.100	0.788	0.785	-0.4	0.793	0.6		
0.200	0.872	0.864	-0.9	0.877	0.6		
0.400	0.938	0.919	-2.0	0.940	0.2	1.0	6.6
0.600	0.966	0.933	-3.4	0.960	-0.6	1.0	3.5
0.800	0.979			0.956	-2.3	1.0	2.1
1.000	0.986					1.0	1.4
(0.800)	0.992					1.0	0.8
(0.600)	0.996					1.0	0.4
(0.400)	0.999					1.0	0.1
(0.0)	1.000					1.0	0.0

8－4　まとめ

切欠きから発生したクラックが、短い場合、そのクラックの応力拡大係数は、切欠きの隅角部の強さを用いて計算できる。さらにクラック発生前の応力分布が分れば、任意の長さのクラックの応力拡大係数が計算できることを示した。さらに、このことより角度が異なる２つの切欠きＡ、Ｂが、２つの異なる荷重Ｃ、Ｄを受ける場合、切欠きＡ、Ｂのどちらが危険であるかという問題に応用できる。切欠きＡ、Ｂの隅角部の強さ f_A 、f_B を比較しても、f_A 、f_B の［次元］が異なるので意味がない。そこで２つの切欠きＡ、Ｂから発生した、ある長さ b_0 のクラックに対する応力拡大係数の大小によって判断する。Rolfe(1977) によると、疲労き裂発生寿命は 0.01 インチの長さのクラックが生ずるまでの繰り返し数で定義され、十分短いクラックを想定している。このように短いクラックが問題となる場合が多いので、その応力拡大係数を前述の近似式を用いて求める。この場合はクラック長 b_0 が短くてもかまわないので、隅角部の強さのみによって次式のように計算できる。

$$K_A = A_A\ f_A\ b_0^{\ m1A} \sqrt{b_0}$$

$$K_B = A_B\ f_B\ b_0^{\ m1B} \sqrt{b_0} \qquad \text{8-4-1}$$

ここで、A_A 、A_B は分っているので、２つの切欠きＡ、Ｂの荷重Ｃ、Ｄに対する隅角部の強さ f_A 、f_B が分れば、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数は式 8-4-1から計算できる。よってその値の大小によって切欠きの危険度が比較できる。

つまり、応力拡大係数を求める近似式によって、切欠きの強さがクラックの強さに結びつけられ、切欠きにクラックの力学が適用できるようになる。

第９章　切欠きの力学のまとめ

本章では、主に第５、６、７、８章で解明した鋭い隅角部先端付近の応力分布、先端に丸みのある場合の応力集中一般表示式、隅角部の強さと応力集中との関係、鋭い又は、丸みのある切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数を求める式等、切欠き一般について成り立つ関係を相互に結びつけることによって得られる切欠きの力学の体系を示す。

さらに、応力拡大係数を求める式によって、クラックの力学と切欠きの力学が結びつけられることも示す。これらの事実は、応力集中、クラック等に関する実験や、解析のデータを整理する上で、又現象を見通す上で有意義なものとなろう。さらに数値計算や実験等により応力集中部の現象を解明しようとする時、一つの因子について求めれば、すべての因子について実験等をすることなく、それらの相互関係式を用いて求められる。いくつかの因子について得られた結果が、相互関係式をどの程度満足するかによって、実験等の結果の精度的な検証もできる。

１．　切欠きの角度と先端の丸みの曲率半径を考えた、平面及び薄板の曲げ問題における切欠きの力学

図 7-1-1に示すように切欠きの角度2α、切欠き先端に丸みのある場合、その曲率半径をρとする。2αとρを切欠きの因子とし、図 7-1-1のように分類し、それぞれの形状について平面問題で自由及び、固定境界、薄板の曲げの問題で自由及び、固定境界の場合について示す。

１－１　平面問題で自由境界の場合

平面弾性問題で、自由境界、切欠きの２等分線に対称な応力状態、そして切欠き先端が鋭い場合と丸みを有する場合のＶ字形切欠きを考える。

［鋭い切欠きの場合］

一般に、鋭いＶ字形切欠き先端付近の応力成分は、極座標を用いて次式のように表わされる[Williams(1952 b)]。

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -\Sigma(m_j+1)\, r^{m_j}\{B(m_j-2)\cos m_j\theta + D(m_j+2)\cos(m_j+2)\theta\}\\
\sigma_\theta &= \Sigma(m_j+1)(m_j+2)\, r^{m_j}\{B\cos m_j\theta + D\cos(m_j+2)\theta\}\\
\tau_{r\theta} &= \Sigma(m_j+1)\, r^{m_j}\{Bm_j\sin m_j\theta + D(m_j+2)\sin(m_j+2)\theta\}
\end{aligned} \tag{9-1}$$

なお、$B\cos m_j\alpha + D\cos(m_j+2)\alpha = 0$が成り立つ。
ここで、r、θは切欠きの先端からとった極座標、B，Dは荷重条件によって決まる係数、m_j（$j=1,2,3,\cdots$）は次の方程式の根である。

$$(m+1)\sin 2\alpha + \sin\{2(m+1)\alpha\} = 0 \qquad 9\text{-}2$$

式 9-2よりm_j（$j=1,2,3,\cdots$）の値は、角度2αのみに依存するのが分かる。表 6-2-1に、式 9-2の方程式の最初の２根を示す。$2\alpha \geqq 180°$の場合、どの角度でも第１根m1は、$0 \geqq m1 \geqq -0.5$である。これより式 9-1の第１項は、rが小さい時、第２項以降に比べて大きな値になる。よって第１項が重要になる。特に$\theta=0$、つまり対称軸上の応力成分σ_θについて考えると式 9-1より次式を得る。

$$\sigma_\theta(r) = \Sigma(m_j+1)(m_j+2)r^{mj}(B+D)$$

$$\equiv f_\theta r^{m1}/\sqrt{2} + f_{\theta 2} r^{m2} + f_{\theta 3} r^{m3} + \cdots \qquad 9\text{-}3$$

ここで、第１項の係数f_θを「隅角部の強さ」と定義する。$\sqrt{2}$は応力拡大係数との対応の関係で付けている。rが小さいとき、第１項のみで応力値を表わし得るので、この係数は切欠きの１つの要素となる。それの求め方は文献Hasebe and Iida(1983) に詳しい。切欠き角度 360° の場合（クラックに相当）も式 9-3のように表わせるが、一般には次式のように表わして、係数K_Iを応力拡大係数と定義している[Irwin(1958)] 。

$$\sigma_\theta(r) = K_I/\sqrt{2\pi r} + f_2 + f_3\sqrt{r} + \cdots \qquad 9\text{-}4$$

よって、式 9-3の係数f_θ、つまり隅角部の強さは、クラックの応力拡大係数に相当し、任意の角度の切欠きに拡張した考え方である。さらに、$\theta=0$に対称な応力状態でf_θが分かっている場合、式 9-3の$\sigma_\theta(r)$の第１項の係数から、係数B、Dが分かる。したがって式 9-1の第１項より切欠き先端付近の任意点の任意の応力成分が分かる。逆に切欠き先端付近の任意点の応力が分かれば、B、Dが分かるのでf_θの値がわかる。

［切欠き先端に丸みのある場合］
切欠き先端に丸みのある場合の２等分線上の応力集中値は、一般に丸みの曲率半径ρを用いて次式のように表わされる［長谷部(1971)］。

$$応力集中値 = \Sigma h_j \rho^{m_j} \qquad 9\text{-}5$$

ここで、m_j は式 9-2の根であり、h_j は荷重、形状によって決まる係数である。いま2等分線上の接線方向の最大応力を$\sigma_{\theta max}$ とおくと、式 9-5より次式のように表わされる。

$$\sigma_{\theta max} = h_{\theta}\rho^{m1} + h_{\theta 2}\rho^{m2} + h_{\theta 3}\rho^{m3} + \cdots \qquad 9\text{-}6$$

$0 \geqq m_1 \geqq -0.5$であるので、曲率半径ρが小さいとき、第１項は第２項以降に比べて大きな値となる。つまり第１項のみで応力集中値が表わされる。したがって第１項の係数h_{θ}は応力集中に関する１つの要素となる。また、式 9-6の収束は速いので、実用的には始めの２～３項で十分な精度を有する応力集中値の式となる(3-4節,3-5節）［長谷部(1971 a , b)、長谷部、飯田 (1981)］。

［隅角部の強さと応力集中との関係］

式 9-3のf_{θ}と式 9-6のh_{θ}は、次式のように関係づけられる（7-4 節）［Hasebe and Iida (1983)］。

$$f_{\theta} / h_{\theta} = C_{\theta} \qquad 9\text{-}7$$

式 9-7の関係は、切欠きの角度のみに依存し、荷重条件によらない。よってこの式よりf_{θ}、h_{θ}のどちらか一方の係数が既知の時、他方の値が計算できる。このC_{θ}を表 7-4-1に表す。表中の$\delta\pi$は、領域の外側角度（図 7-1-1参照）である。

楕円形や、Ｕ字形のような先端の丸みの曲率半径$\rho \to 0$のとき、形状→クラックとなる切欠きは、隅角部角度$2\alpha = 360°$（$\delta\pi = 0°$）の場合で、クラックの応力拡大係数と応力集中値とは、次式で関係づけられる。

$$K_I = \lim_{\rho \to 0} 1/2 \left(\sqrt{\pi\rho}\,\sigma_{\theta max}\right) \qquad 9\text{-}8$$

式 9-8より、モードＩのクラックの応力拡大係数が、応力集中の式から計算できる。この式はクラックの応力拡大係数を求める方法の一つでもある。また、式 9-6のh_{θ}の値が既知ならば、$K_I = \sqrt{\pi}\,h_{\theta}/2$である。Hasebe and Kutanda(1978)は、応力集中の式 9-6を用いて応力拡大係数を求める一方法を提案している。またいくつかの応力集中値とρの

値が分かっているとき、式 9-6の始めの数項（２、３項）を用いて応力集中表示式を作ることができる。これによって任意のρに対する応力集中値を求めることができる。この応力集中の式または、$\sigma_{\theta max}$がρの関数として分かっているとき、f_θは次式から求められる。

$$f_\theta = \lim_{\rho \to 0} C_\theta (\rho^{-m1} \sigma_{\theta max}) \qquad 9\text{-}9$$

もちろん、切欠き角度 360°（つまりクラック）の場合、式 9-9は式 9-8と同じ内容である。式 9-8の係数１／２、が表 7-4-1の$\delta\pi = 0°$ の場合のC_θの値 0.5に相当する。式 9-7、 9-9によって任意の角度の鋭い切欠きにおける隅角部の強さと、丸みのある場合の応力集中値とが関係づけられたので、たとえば小さなρの応力集中値がわかればh_θがわかり、f_θがわかる。よって、式 9-1のＢ、Ｄがわかるので、鋭い隅角部付近の応力分布がわかる。また、この逆もいえる。

１－２　平面問題で固定境界の場合

平面弾性問題で、固定境界、そして隅角部２等分線に対称及び逆対称な応力状態、形状は先端が鋭い場合と丸みを有する場合のＶ字形状を考える。まず対称な応力状態を考える。

［鋭い隅角部の場合］

一般に、鋭い隅角部先端付近の応力成分は次式のように表わされる［Williams(1952b)］。

$$\sigma_r = -\Sigma(m_j+1)\, r^{mj} [\{(m_j-2)A + 2C\} \cos m_j \theta + C m_j \cos(m_j-2)\theta]$$
$$\sigma_\theta = \Sigma(m_j+1)\, r^{mj} [\{(m_j+2)A + 2C\} \cos m_j \theta + C m_j \cos(m_j-2)\theta]$$
$$\tau_{r\theta} = \Sigma(m_j+1)\, r^{mj} \{(m_j+2) A \sin mj\theta + C m_j \sin(m_j-2)\theta\}$$
$$9\text{-}10$$

なお$C = \{-A(m_j+2)\sin(m_j+2)\alpha\} / \{(m_j+\nu+1)\sin m_j \alpha\}$が成り立つ。ここで、$r$、$\theta$は隅角部先端からとった極座標、Ａ、Ｃは荷重条件によって決まる係数、m_j（$j = 1, 2, 3, \cdots$）は次の方程式の根である。

$$\kappa \sin\{(m+1)2\alpha\} - (m+1)\sin 2\alpha = 0$$
$$\kappa = (3-\nu)/(1+\nu) \qquad 9\text{-}11$$

νはポアソン比である。表 6-2-4に、式9-11の最初の２根を示す。特に$\theta = 0$、つまり対

称軸上の応力成分σ_rについて考えると次式を得る。

$$\sigma_r = -\Sigma (m_j + 1)\ r^{m_j} \{(m_j + 2)\ A + (m_j - 2)\ C\}$$

$$\equiv f_r\ r^{m1} + f_{r2} f^{m2} + f_{r3} r^{m3} + \cdots \qquad 9\text{-}12$$

ここで、自由境界の場合と同様、第１項の係数f_rを「隅角部の強さ」と定義する。σ_rが法線方向応力成分であるので、f_rは剥離に対する強さをあらわす。rが小さいとき、式9-10の第１項のみで応力値が表わされるので固定境界の場合もこの係数は、隅角部の１つの要素となる。それの求め方は 6-3節［Iida et al.(1987 b)］に示されている。

［隅角部先端に丸みのある場合］

隅角部先端に丸みのある場合で、形状が角度の２等分線に対称なとき、２等分線上の応力集中値は、一般に丸みの曲率半径ρを用いて次式のように表わされる［Hasebe et al.(1986)］。

$$\text{応力集中値} = \Sigma h_j\ \rho^{m_j} \qquad 9\text{-}13$$

ここで、m_jは式9-11の方程式の根である。σ_rの応力集中値をσ_{rmax}とおくと、式9-13より次式のように表わされる。

$$\sigma_{rmax} = h_r\ \rho^{m1} + h_{r2} \rho^{m2} + h_{r3} \rho^{m3} + \cdots \qquad 9\text{-}14$$

自由境界の場合と同様に、第１項の係数h_rは応力集中に関する１つの要素となる。式9-14の収束は速く、始めの２～３項で十分な精度を有する応力集中値の式となる［Hasebe et al.(1986)］。また固定境界上の接線方向応力成分σ_θと法線方向応力成分σ_rの間には次式の関係が成り立つ［Hasebe(1979)］。

$$\sigma_\theta / \sigma_r = (3 - \kappa) / (1 + \kappa) \qquad 9\text{-}15$$

［隅角部の強さと応力集中との関係］

式9-12のf_rと式9-14のh_rは、次式のように関係づけられる。

$$f_r / h_r = C_r \qquad 9\text{-}16$$

式9-16の関係は、隅角部の角度とポアソン比に依存し、荷重条件によらない。この場合のC_rを、表 7-4-3に示す。またσ_{rmax}が、ρの関数として分かっているときは、式 9-9と同様の式によってf_rが求められる。

又、法線方向応力成分の場合と同様、接線方向成分についても、次式のような関係がある（6-3 節）［Iida et al.(1987 b)］。

$$\sigma_\theta = f_\theta r^{m1} + f_{\theta 2} r^{m2} + f_{\theta 3} r^{m3} + \cdots \qquad 9\text{-}17$$

$$\sigma_{\theta max} = h_\theta \rho^{m1} + h_{\theta 2} \rho^{m2} + h_{\theta 3} \rho^{m3} + \cdots \qquad 9\text{-}18$$

しかし、C_rの値が分かっているのでf_θ、h_θ、f_r、h_rの内どれか一つが分かれば式6-3-16, 7-4-4より他の値を求めることができる。つまりどれか一つが分かれば、応力集中値や隅角部付近の応力成分を求めることができる。

次に逆対称な応力状態の場合を考える。

［鋭い隅角部の場合］

一般に、鋭い隅角部の応力成分は次式のように表わされる［Williams(1952b)］。

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -\Sigma(m_j+1)\, r^{mj}\,[\,\{(m_j+2)B-2D\}\sin m_j\theta + Dm_j \sin(m_j-2)\theta\,] \\
\sigma_\theta &= \Sigma(m_j+1)\, r^{mj}\,[\,\{(m_j+2)B+2D\}\sin m_j\theta + Dm_j \sin(m_j-2)\theta\,] \\
\tau_{r\theta} &= -\Sigma(m_j+1)\, r^{mj}\,\{(m_j+2)B\cos m_j\theta + Dm_j \cos(m_j-2)\theta\}
\end{aligned} \qquad 9\text{-}19$$

なお、$D=(m_j+2)B\sin\{(m_j+2)\alpha\}/\{(\kappa-m_j-1)\sin m_j\alpha\}$が成り立つ。ここで、B、Dは荷重条件によって決まる係数、m_j（$j=1,2,3,\cdots$）は次の方程式の根である。

$$\kappa \sin\{2(m+1)\alpha\} + (m+1)\sin 2\alpha = 0 \qquad 9\text{-}20$$

表 6-2-4に式9-20の最初の２根を示す。対称軸上の$\tau_{r\theta}$について考えると次式を得る。

$$\tau_{r\theta} = -\Sigma(m_j+1)\, r^{mj}\,\{(m_j+2)B + D\,m_j\}$$

$$=f_{r\theta}r^{m1}+f_{r\theta 2}\,r^{m2}+f_{r\theta 3}\,r^{m3}+\cdots \qquad 9\text{-}21$$

ここでも、第１項の係数$f_{r\theta}$を「隅角部の強さ」と定義する。これは固定辺上のずれに対する強さを表わす。この係数の求め方は 6-3節［Iida et al.(1987 b)］に示されている。

［隅角部先端に丸みのある場合］

隅角部先端に丸みがあり、形状が角度の２等分線に対称のとき、２等分線上のせん断応力の集中値も、一般に丸みの曲率半径ρを用いて、次式のように表わされる［Hasebe et al.(1986)］。

$$応力集中値=\Sigma h_j\,\rho^{mj} \qquad 9\text{-}22$$

ここで、m_jは式9-20の方程式の根であり、h_jは荷重、形状によって決まる係数である。今、２等分線上のせん断応力を考え、それを$\tau_{r\theta\max}$とおくと、式9-22より次式のように表わされる。

$$\tau_{r\theta\max}=h_{r\theta}\rho^{m1}+h_{r\theta 2}\,\rho^{m2}+h_{r\theta 3}\,\rho^{m3}+\cdots \qquad 9\text{-}23$$

同様に第１項の係数$h_{r\theta}$は、応力集中値に関する一つの要素となる。式9-23の収束は速いので、実用的には始めの２～３項で、十分な精度を有する応力集中値の式となる［Hasebe et al.(1986)］。

［隅角部の強さと応力集中との関係］

式9-21の$f_{r\theta}$と式9-23の$h_{r\theta}$は次式のように関係づけられる。

$$f_{r\theta}/h_{r\theta}=C_{r\theta} \qquad 9\text{-}24$$

式9-24の関係は、隅角部の角度とポアソン比のみに依存し、荷重条件によらない。この場合の$C_{r\theta}$を、表 7-7-7に示す。$\tau_{r\theta\max}$がρの関数として分かれば応力集中値や隅角部付近の応力成分を求めることができる。

1－3　薄板の曲げ問題で自由境界の場合

薄板の曲げ問題も平面問題の場合と同様な関係が求められる。これらの関係を簡単に示す。まず自由境界で、切欠きの２等分線に対して対称な応力状態を考える。

［鋭い切欠きの場合］
一般に、鋭いＶ字形切欠き先端付近の曲げ及び、ねじりモーメントは、次式のように表わされる［Williams（1952 a）］。

$$M_r = -\Sigma D r^{m_j}[\{(m_j+1)(m_j+2)+\nu(m_j+2)-\nu m_j^2\}F\cos m_j\theta + \{(m_j+1)(m_j+2)+\nu(m_j+2)-\nu(m_j+2)^2\}H\cos(m_j+2)\theta]$$

$$M_\theta = -\Sigma D r^{m_j}[\{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-m_j^2\}F\cos m_j\theta + \{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-(m_j+2)^2\}H\cos(m_j+2)\theta]$$

$$H_{r\theta} = \Sigma D r^{m_j}[\{-(1-\nu)(m_j+1)m_j\}F\sin m_j\theta + \{-(1-\nu)(m_j+1)(m_j+2)\} + H\sin(m_j+2)\theta] \qquad \text{9-25}$$

なお、$F(4+m_j-\nu m_j)\sin m_j\alpha + H(m_j+2)(1-\nu)\sin(m_j+2)\alpha=0$が成り立つ。ここで、Ｄは曲げ剛さ、Ｆ、Ｈは荷重条件によって決まる係数、m_j（$j=1,2,3,\cdots$）は次の方程式の根である。

$$(3+\nu)\sin\{2(m+1)\alpha\}-(m+1)(1-\nu)\sin 2\alpha=0 \qquad \text{9-26}$$

式9-26より、mj（j=1,2,3,…）の値は、角度２αとポアソン比に依存するのが分かる。表 6-2-2に式9-26の最初の２根を示す。対称軸上のM_θについて考えると次式のようになる。

$$M_\theta = -\Sigma D r^{m_j}[\{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-m_j^2\}F + \{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-(m_j+2)^2\}H]$$
$$\equiv f_\theta r^{m1}/\sqrt{2} + f_{\theta 2} r^{m2} + f_{\theta 3} r^{m3} + \cdots \qquad \text{9-27}$$

ここでも第１項の係数f_θを「隅角部の強さ」と定義する。この係数は薄板の面外曲げ問題でも、切欠きの１つの要素となる。それの求め方は 6-3節［Hasebe and Iida （1983）］

示されている。

［切欠き先端に丸みのある場合］

切欠き先端に丸みがあり、形状が角度の２等分線に対称のとき、２等分線上の点の曲げモーメントの応力集中値は、一般に丸みの曲率半径ρを用いて次式のように表わされる［長谷部(1971)］。

$$応力集中値 = \Sigma h_j \rho^{mj} \qquad 9\text{-}28$$

ここで、m_j は式9-26の根であり、h_j は荷重、形状によって決まる係数である。今、２等分線上の接線方向曲げモーメントを考え、それを$M_{\theta max}$ とおくと、式9-28より次式のように表わされる。

$$M_{\theta max} = h_{\theta} \rho^{m1} + h_{\theta 2} \rho^{m2} + h_{\theta 3} \rho^{m3} + \cdots \qquad 9\text{-}29$$

同様に第１項の係数h_{θ}は応力集中に関する１つの要素となる。又、式9-29の収束は速いので、実用的には始めの２～３項で十分の精度を有する応力集中値の式となる（3-5 節）［長谷部　(1971)、長谷部、飯田(1981)］。

［隅角部の強さと応力集中との関係］

式9-27のf_{θ}と式9-29のh_{θ}は、次式のように関係づけられる。

$$f_{\theta} / h_{\theta} = C_{\theta} (3+\nu)/(1+\nu) \qquad 9\text{-}30$$

式9-30の関係は、切欠きの角度とポアソン比のみに依存し、荷重条件によらない。この場合のC_{θ}を、表 7-4-2に示す。いくつかのρと$M_{\theta max}$ の値が分っているとき、式9-29より$M_{\theta max}$ の式を作り、又は$M_{\theta max}$ がρの関数として分かっているとき、この式を用いてf_{θ}は次式から求められる。

$$f_{\theta} = C_{\theta} \{(3+\nu)/(1+\nu)\} \lim_{\rho \to 0} [\rho^{-m1} M_{\theta max}] \qquad 9\text{-}31$$

クラックのときC_{θ}の値は、表 7-4-2の$\delta\pi = 0°$ の場合の 0.5となる。またこのときf_{θ}は曲げモードの応力拡大係数k_B になり、応力集中から応力拡大係数を求める式になる。平面問題の場合と同様、何か一つの要素が分かれば応力集中値や隅角部先端の曲げモ

ーメント等の成分が求められる。

1－4　面外曲げ問題で固定境界の場合

固定境界で、隅角部の２等分線に対称な応力状態を考える。

［鋭い隅角部の場合］

一般に鋭い隅角部付近の曲げ及び、ねじりモーメントは、次式のように表わされる。

$$M_r=-\Sigma Dr^{m_j}[\{(m_j+1)(m_j+2)+\nu(m_j+2)-\nu m_j^2\}F\cos m_j\theta+\{(m_j+1)(m_j+2)+\nu(m_j+2)-\nu(m_j+2)^2\}H\cos(m_j+2)\theta]$$

$$M_\theta=-\Sigma Dr^{m_j}[\{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-m_j^2\}F\cos m_j\theta+\{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-(m_j+2)^2\}H\cos(m_j+2)\theta]$$

$$H_{r\theta}=\Sigma Dr^{m_j}[\{-(1-\nu)(m_j+1)m_j\}F\sin m_j\theta+\{-(1-\nu)(m_j+1)(m_j+2)\}H\sin(m_j+2)\theta]$$

9-32

なお、$F\cos m_j\alpha+H\cos(m_j+2)\alpha=0$が成り立つ。
ここで、F、Hは荷重条件によって決まる係数、m_j（$j=1,2,3,\cdots$）は次式の根である。

$$(m+1)\sin 2\alpha+\sin\{2(m+1)\alpha\}=0 \qquad 9\text{-}33$$

式9-33は式 9-2と同じであるので、m_1、m_2の値は表 6-2-1の値を用いればよい。式9-32より対称軸上のM_r、M_θについて考えると次式のようになる。

$$M_r=-\Sigma Dr^{m_j}[\{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-m_j^2\}F+\{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-(m_j+2)^2\}H]$$
$$\equiv f_r r^{m1}+f_{r2}r^{m2}+F_{r3}r^{m3}+\cdots$$

$$M_\theta=-\Sigma Dr^{m_j}[\{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-m_j^2\}F+\{(m_j+2)+\nu(m_j+1)(m_j+2)-(m_j+2)^2\}H]$$

$$\equiv f_{\theta} r^{m1} + f_{\theta 2} r^{m2} + F_{\theta 3} r^{m3} + \cdots \qquad 9\text{-}34$$

ここで、第１項の係数f_r、f_θを「隅角部の強さ」と定義する。f_rは固定辺上の剥離に関する、f_θは弾性体中へのクラック発生に関する強さを表す。それの求め方は 6-3節［Iida et al.(1987 a)］に示されている。

［隅角部先端に丸みのある場合］

隅角部先端に丸みがあり、形状が角度の２等分線に対称なとき、２等分線上の点の応力集中値は、一般に、隅角部先端の曲率半径ρを用いて、次式のように表わされる［Hasebe et al.(1986)］。

$$応力集中値 = \Sigma h_j \rho^{mj} \qquad 9\text{-}35$$

ここで、m_jは式9-33の根であり、h_jは荷重、形状によって決まる係数である。この場合、２等分線上の境界の、法線及び接線方向断面に生ずる曲げモーメントを考え、それを$M_{r\,max}$、$M_{\theta\,max}$とおくと、式9-35より次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} M_{r\,max} &= h_r \rho^{m1} + h_{r2} \rho^{m2} + h_{r3} \rho^{m3} + \cdots \\ M_{\theta\,max} &= h_\theta \rho^{m1} + h_{\theta 2} \rho^{m2} + h_{\theta 3} \rho^{m3} + \cdots \end{aligned} \qquad 9\text{-}36$$

自由境界の場合と同様に、第１項の係数h_r、h_θは、応力集中に関する一つの要素となる。又、式9-36の収束は速いので、始めの２～３項で十分な精度を有する応力集中値の式となる［Hasebe et al.(1986)］。また固定辺上の法線方向及び接線方向の断面に生ずる曲げモーメントM_n、M_t、固定辺上のねじりモーメントH_{nt}には次の関係がある［Hasebe (1984)］。

$$M_t = \nu M_n \quad , \quad H_{nt} = 0 \qquad 9\text{-}37$$

固定辺ではねじりモーメントはすべて零であるので、ねじりモーメントの集中は生じない。

［隅角部の強さと応力集中との関係］

式9-34のf_rと式9-36のh_r、f_θとh_θは次式のように関係づけられる。

$$f_r / h_r = C_r \qquad f_\theta / h_\theta = C_\theta \qquad \text{9-38}$$

式9-38の関係は、隅角部角度とポアソン比のみに依存し、荷重条件によらない。この場合のC_rを表-7-4-5に示す。式9-38のC_rの値がわかっているのでf_r、f_θ、h_r、h_θの内一つがわかれば、式6-3-20, 7-4-4より他は計算できる［Iida et al.(1987 a)］。以上より平面問題と同様の事が言える。たとえば、隅角部付近のある点の一成分の曲げモーメントの値がわかれば、式9-32のF、Hがわかり、任意点の応力成分が分かる。さらに、f_r、f_θがわかるのでh_r、h_θがわかり、小さなρの応力集中値がわかる。

２．　クラックの力学と切欠きの力学との関連

前章で示したように、クラックは切欠きの特別な場合と考えられる。クラックの解析は数多くなされ、また応力拡大係数は多く利用されているので、切欠きの力学を、クラックの力学と関連づけることは合理的である。

２－１　平面問題で自由境界の場合

図 7-1-1のように平面問題で切欠きから発生したクラックについて考える。具体的にはV字形切欠きから、切欠き角度の２等分線に沿って発生したクラックを対象として示す。今、長さbのクラックの応力拡大係数K_I（b）を、クラック発生前の切欠き角度の２等分線上の応力値σ_θ（b）を用いて次式のように表わす。

$$K_I(b) = A\sigma_\theta(b)\sqrt{\pi b} \qquad \text{9-39}$$

ここで、係数Aは切欠きの角度、クラック長に因る。たとえば、一様引張を受ける半無限板の縁のV字形切欠きから発生したクラックについては、短いクラックから比較的長いクラックまで適用できるA値が 5-2節［Hasebe and Iida （1978）］に示されている。クラック発生前のσ_θ（b）は関数形としてわかっていないが、いくつかのbに対して応力値がわかっているときは、式 9-3の初めの数項を用いて、σ_θ（b）の式を決めることができる。これを用いて式9-39よりK_I値を計算できる。しかし式 9-3の第一項の係数f_θを精度よく求めるためには小さなb、すなわち切欠き先端近傍の応力値が分かっていなければならない。切欠き先端近傍（r、つまりbが小さい範囲）では、応力σ_θ（b）は式 9-3の第１項のみで次式のよう表わされる。

$$\sigma_\theta(b) = f_\theta b^{m1} / \sqrt{2} \qquad 9\text{-}40$$

よって上式を式9-39に代入すると次式を得る。

$$K_I(b) = A f_\theta b^{m1} \sqrt{\pi b} / \sqrt{2} \qquad 9\text{-}41$$

クラックが短いとき、上式のＡ値は角度のみに依存する値となる。この値を図 5-2-1に示す。式9-41より、切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が隅角部の強さf_θで表わされることがわかる。つまり、隅角部の強さf_θが分かれば切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が計算できる。逆に、切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が分かっていれば、式9-41から隅角部の強さf_θが計算できる。f_θが分かれば 1-1節で述べたように、切欠き先端付近の任意の応力成分、またh_θが分かるので小さいρの応力集中値が分かる。

次に、切欠き角度が異なる２つの切欠きが２つの異なる荷重を受けるとき、どちらが危険かという問題を考えてみる。単に隅角部の強さの比較では、各々の次元が異なるので意味がない。よって２つの切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数の値によって判断する。その応力拡大係数は隅角部の強さが分かっていれば、式9-41から計算できる。クラックが発生しないための切欠きの強さは、式9-41の適当なｂに対する応力拡大係数の値が破壊靱性値K_{IC}を越えないようにすればよい。このように切欠きの強さにクラックの力学が適用できる。

鋭い切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数を求める近似式を示したが、先端に丸みのある切欠きからクラックが発生する場合も多く、その応力拡大係数を求める近似式も重要である。しかし、このような場合を一般的に表わすのは難しいのでここでは１つの方法を示す。西谷（1973）によって、一様引張を受ける無限板中の楕円孔から発生したクラックの解析がなされ、楕円孔の形、クラック長を変化させてその応力拡大係数が求められている。さらにクラック発生前、つまり無限板中の楕円孔の応力の式は分かっているのでこれらの解析結果を式9-39に代入し、Ａ値を逆算してみる。

図 5-4-1に楕円孔のそれぞれの曲率半径ρについて、クラック長さｂと楕円孔のクラック方向半軸長ａの比に対するＡ値を示す。この図より次のことが分かる。ｂが充分に小さい時、すべてのＡ値が 1.12 に漸近している。この 1.12 は、一様引張を受ける半無限板の縁クラックの応力拡大係数である。図よりρの影響がよくわかり、ρが大きい場合しか 1.12 の値は使えない。楕円曲線でない場合でも、クラック発生前の応力σ_θ（ｂ）と図 5-4-1のＡ値を用いて応力拡大係数のよい近似値は得られよう。

2－2　面外曲げ問題で自由境界の場合

この場合も図 7-1-1に示すＶ字形切欠きから、切欠き角度の２等分線に沿って発生したクラックを対象として示す。長さｂのクラックの面外曲げの応力拡大係数$k_B(b)$を、クラック発生前の切欠き角度の２等分線上の曲げモーメント$M_\theta(b)$を用いて次式のように表わす（ 5-3節）［Hasebe and Iida(1979) ］。

$$k_B(b) = \{(1+\nu)/(3+\nu)\} A M_\theta(b)\sqrt{b} \qquad 9\text{-}42$$

ここで、係数Ａは切欠き角度、クラック長、ポアソン比に因る。たとえば、一様引張りを受ける半無限板の縁のＶ字形切欠きから発生したクラックの場合のＡ値は、 5-3節［Hasebe and Iida(1979) ］に示されている。平面問題の場合と同様切欠き先端近傍（ｒ、つまりｂが小さい範囲）では、曲げモーメントは式9-27の第１項のみで表わされるので、この項を用いて短いクラックの応力拡大係数は次式から求められる。

$$k_B(b) = \{(1+\nu)/(3+\nu)\} A f_\theta b^{m1}\sqrt{b}/\sqrt{2} \qquad 9\text{-}43$$

クラックが短いとき、Ａ値は、切欠き角度のみに依存する。ポアソン比に対するＡ値を図 5-3-1に示す。式9-43より、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数が隅角部の強さf_θで表わされるので、つまり、隅角部の強さf_θが分かれば切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が計算できる。また、切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数が分かっていれば隅角部の強さf_θが計算できる。f_θが分かれば 1-3節で述べたように、クラック発生前の切欠き先端付近の任意の応力成分や小さなρに対する応力集中値も求まる。同様に切欠き角度が異なる２つの切欠きが２つの異なる荷重をうけるときの危険性の比較も、その２つの切欠きから発生した短いクラックの応力拡大係数の値によって判断できる。

第10章　あとがき

本章では、各章の主な内容、解析した事柄、及び得られた結果等について簡単に述べる。

第２章では、本論文で用いた解析方法を示した。この解析方法は、重調和微分方程式の一般解である複素応力関数を、与えられた境界条件を満足するように決めるものである。さらに複素変数に有理写像関数を導入し、多元連立一次方程式を解くことによって解析解が得られる。これは有理写像関数の表わす形状に対して厳密解となる有効な方法である。

第３章では、具体的に応力解析を行なった。対象としては、工学的に応用範囲が広い、三角形切欠きについて、切欠きの角度20°、40°、60°、80°、90°、 100°、 120°、 140°、 160°の場合を解析した。荷重条件は平面弾性問題に対してｘ軸方向無限遠での一様引張、薄板の面外曲げ問題に対してｘ軸方向無限遠での一様面外曲げを扱った。

切欠き先端の応力集中値、境界上の応力値、切欠き角度の影響、ポアソン比の影響について考察した。又、応力集中部からのクラックの発生を考え、半無限板の縁にある三角形切欠きの切欠き先端からクラックが発生した場合について、前述と同じ条件で応力解析を行なった。そしてクラック先端や、クラック縁の応力について考察した。

さらに、Ｙ字形帯板について角点に大小の丸みをつけて応力解析を行った。荷重条件は、平面弾性問題に対して、Ｙ字形３軸方向の引張りとＹ字形の２軸の面内の偶力を、薄板の面外曲げ問題に対して、Ｙ字形３軸の面外曲げとねじりを扱った。そして、応力集中値に対する丸みの曲率半径、ポアソン比の影響について考察した。

又、矩形孔のある無限板について、矩形孔の角度20°、40°、60°、80°、90°、 100°、 120°、 140°、 160°の場合の応力解析を行った。荷重条件は、Ｘ軸方向無限遠での一様引張、及び一様面外曲げを扱った。応力集中値、境界上の応力値に対する、矩形孔の角度の影響、ポアソン比の影響について考案した。さらに無限板中の矩形孔から対称にクラックが発生した場合について、前述と同じ条件で応力解析を行い、クラック先端付近の応力や、クラック縁の応力について考察した。

第４章では、クラックの応力拡大係数を解析した。工学的に重要な、応力集中部から発生したクラックについて、半無限板の縁にある三角形切欠きの切欠き先端から発生したクラックの応力拡大係数を、切欠きの角度20°、40°、60°、80°、90°、 100°、 120°、 140°、 160°の場合で解析をした。荷重条件は、モードⅠとなるｘ軸方向無限遠での一様引張りと、面外曲げとなるｘ軸方向無限遠での一様面外曲げを扱った。そして、切欠き角度の影響、クラック長と切欠きの関係、面外曲げの応力拡大係数とポアソン比との関係について考察した。さらに、無限板中の矩形孔から対称に発生したクラックの応力拡大係数を、矩形孔の角度20°、40°、60°、80°、90°、 100°、 120°、 140°、 160°の場合について求めた。荷重条件は、ｘ軸方向無限遠での一様引張りと、一様面外曲げを扱

った。矩形孔の角度の影響、クラック長と矩形孔の関係、面外曲げの応力拡大係数とポアソン比との関係について考察した。

第５章では、切欠きから発生したクラックの応力拡大係数を求める一つの方法として、クラック発生前の応力値を用いる方法を示した。この方法はモードⅠについては式 5-2-1で示される。そして第４章で解析した、半無限板の縁にある三角形切欠きの切欠き先端から発生したクラックと、無限板中の矩形孔から対称に発生したクラックの応力拡大係数を比較して、数％の誤差で応力拡大係数が求められ、実用的な近似式であることを示した。さらに、式 5-2-1の係数Ａは、三角形切欠きや矩形孔のように概ね形状、荷重が類似している場合で、短いクラックにおいては角度のみに依存することを示した。

又、面外曲げについては式 5-3-1で示され、第４章の解析結果と比較して、数％の誤差で応力拡大係数が求められ、実用的な近似式であることを示した。式 5-3-1の係数Ａも、三角形切欠きや矩形孔のように概ね形状、荷重が類似している場合で、短いクラックにおいては角度とポアソン比のみに依存することを示した。さらに係数Ａとポアソン比はほぼ線形であることも示した。

この近似式を用いて、いくつかのクラック長に対する応力拡大係数が分かっていれば、クラック発生前の応力分布が求められることや、他の任意のクラック長に対する応力拡大係数も計算できることを示した。

第６章、第７章では、主に切欠き一般について成り立つ関係を示した。任意の角度の隅角部先端付近の応力分布は、一般に式 6-1-1のように表わされる。隅角部先端近傍においては、式 6-1-1の第１項が第２項以降に較べて十分に大きく、この係数を「隅角部の強さ」と定義し、任意の角度の隅角部の強さを表わすパラメーターと位置付けた。角度 0°（クラック）の場合は応力拡大係数と一致する。つまりクラックの応力拡大係数を含み、任意の角度の隅角部に拡張した考え方である。

又、先端に丸みを有する任意の角度の隅角部先端の応力集中値は、一般に式 7-2-1で表わされる。そして隅角部を有する簡単な形状として、無限板中の矩形孔を扱い、式 7-2-1の第１項の係数を解析した。その解析結果より、自由境界の平面弾性問題で、隅角部角度２等分線に対称な応力状態の場合、接線方向応力成分について $f_\theta / h_\theta = C_\theta$、自由境界の面外曲げ問題で、隅角部角度２等分線に対称な応力状態の場合、接線方向応力成分について、$f_\theta / h_\theta = C_\theta$、固定境界の平面弾性問題で、隅角部角度２等分線に対称な応力状態の場合、法線方向応力成分について、$f_r / h_r = C_r$、固定境界の平面弾性問題で、隅角部角度２等分線に逆対称な応力状態の場合、セン断応力成分について、$f_{r\theta} / h_{r\theta} = C_{r\theta}$、固定境界の面外曲げ問題で、隅角部角度２等分線に対称な応力状態の場合、法線方向応力成分について、$f_r / h_r = C_r$、となる関係を求め、この各関係式が荷重条件や形状によらず、隅角部角度及びポアソン比のみに依存することを示した。これ

らの関係式によって、任意の場合において隅角部の強さと応力集中が関係づけられる。
第８章では、第５章で述べた応力拡大係数を求める近似式と第６章で述べた隅角部の強さとの関係を示した。また、応力拡大係数がより簡便に求まることを示した。さらにこの関係によって、任意の荷重を受ける、任意の角度の切欠きの強度の比較が出来ることも示した。
第９章では、論文全体を通して切欠きの力学としてまとめられる事柄を述べた。

参考文献及び既発表論文一覧

Albrecht, P. and Yamada, k., (1977) "Rapid calculation of stress intensity factors." Jour. Struc. Div. Pro.,ASCE,Vol. 103, pp. 377-389.

淡路英夫、横堀寿光、横堀武夫(1985)"き裂と切欠きとの区別に関する研究"日本材料強度学会誌，第20巻，pp.24-31.

Bowie,O.L.(1956)"Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating from the boundary of an internal circular crack." Jour. Mathe. phys.,Vol.35, pp.60-71.

Carpenter,W.C.(1984)"Calculation of fracture mechanics parameters for a general corner", Inter.Jour. of Frac.,Vol.24,pp.45-58.

Carpenter,W.C.(1985)"The eigenvector solution for a general corner or finite opening crack with studies on the collocation procedure.",Inter.Jour.of Frac.,Vol.27,pp.63-74.

Carpinteri,A.(1987) "Stress-singularity and generalized fracture toughness at the vertex of re-entrant corners," Eng.Frec.Mech., Vol. 26,pp.143-155.

England,A.H.,(1971),Compelex Variable Methods in Elasticity,John Wiley & Sons LTD.

Fung,Y.C., (1965),Foundation of Solid Mechanics,Prentice-Hall,Inc.

Goodier,J.N. and Lee, G.H.(1941)"An extension of the photoelastic method of stress measurement to plates in transverse bending." Jour. Appl. Mech, Vol.8, p.A 27.

Goursat,E.,(1898),Bull.Soc.Math.,de France, 26, p.236.

長谷部宣男（1971 a）“十字形板の応力解析”土論，第 185号，pp.9-20.

長谷部宣男（1971 b）“三角形切欠きおよび突起を有する半無限板の応力解析”土論，第194号，pp.29-40.

長谷部宣男(1972)“半楕円切欠きを有する半無限板の応力解析”名古屋工業大学学報，第24巻，pp.295-301.

長谷部宣男，飯田字朗(1981)“ぐう角部に丸みを有するＹ字形板の応力解析と応力集中係数”機論Ａ編，47巻，pp.1347-1353.

長谷部宣男，上田　稔(1980 a)“段付き半無限板のぐう角部から発生したクラック”機論，46巻，pp.739-744.

長谷部宣男，上田　稔(1980 b)“段付きぐう角部にき裂を有する半無限板の面外曲げ”機論，46巻，pp.985-989.

Hasebe,N.(1978) “Bending of strip with semielliptic notches or cracks. ” Jour. Eng. Mech. Div.,ASCE,Vol.104,pp.1433-1450.

Hasebe,N.(1984) “Mixed boundary value problem of plate with crack. ” Jour. Eng.Mech.,ASCE,Vol.110,pp.37-48.

Hasebe,N.,Matuura ,S.,and Kondo,N.(1984)“Stress analysis of a strip with a step and a crack.” Eng.Frac. Mech.,Vol.20,pp. 447-462.

Hasebe,N.,Sugimoto,T.,and Nakamura,T.(1986 a) “Stress concentration in clamped edge of thin plate. ” Jour. Eng.Mech.,ASCE,Vol.112,pp.642-653.

Hasebe,N.,Sugimoto,T.,and Nakamura,T.(1986 b) “Stress analysis of a blunted notch in a clamped edge. ” Jour.Eng.Mech.,ASCE,Vol.112,pp.142-153.

Hsebe,N.,and Iida,J.(1978)“A crack originating from a triangular notch on a rim of a semi-infinite plate. ” Eng.Frac.Mech.,Vol.10,pp.773-782.

Hasebe,N.,and Iida,J.(1979) " A crack originating from a triangular notch on a rim of a semi-infinite plate under transverse bending." Eng.Frac.Mech., Vol.11 ,pp.645-652.

Hasebe,N.,and Iida,J.(1983) "Intensity of corner and stress concentration factor. " Jour.Eng.Mech.,ASCE,Vol.109,pp.346-356.

Hasebe,N.and Inohara,S.(1981) "Stress intensity factor at a bilaterally-bent crack in the bending problem of thin plate. " Eng.Frac.Mech.,Vol.14,pp.607-616

Hasebe,N.,and Kutanda,Y.(1978) "Calculation of stress intensity factor from stress concentration factor." Eng.Frec.Mech.,Vol.10,pp.215-221.

Hasebe,N.,and Takemura,M.(1981) "Cracks occurring at a joint of a strip and a semi-infinite plate under out-of-plane load." Theore.Appl.Mech.,Vol.29,pp.145--156.

Hasebe,N.,and Ueda, M.(1980) "Crack originating from a corner of a square hole. " Eng.Frac.Mech.,Vol.13,pp.913-923.

長谷川久夫，常世田　聡(1985) "両縁に二対の半円切欠きをもつ帯板の引張り．(応力集中の干渉効果)" 機論A，51巻，pp.1796-1803.

Heywood,R.B.(1952) Designing by Photoelasticity,Chapman & Hall,p.167.

Higuchi ,S.,and Suzuki,M.,(1949) "Distribution of stresses in the semi-infinite plate having an elliptic notch under uniform tension. " Technical Report on Tohoku University,Vol.14,pp.95-107.

平野富士夫(1950) "二次元弾性体の形状係数の研究（第２報）" 機論，16巻，pp.52-58.

Iida,J.,Hasebe,N.,and Nakamura,S.(1987 a) "Intensity of corner in fixed edge of thin plate. " Jour.Eng.Mech.,ASCE,Vol.113,pp.1138-1146.

Iida, J., Hasebe, N., and Matuura, S. (1987 b) "Intensity of corner in fixed edge of plane problem." Jour. Eng. Mech., ASCE, Vol. 113, pp. 1194-1207.

Irwin, G. R., (1958) Handbuch der Physik, Bd. VI, pp. 551-590.

石田 誠(1979) "半無限板におけるき裂群，分岐き裂及び鋭い切欠きからのき裂の解析" 機論，45巻 392号，pp. 306-317.

石田 誠，陳 玳珩，西谷弘信(1984) "だ円孔から発生した任意の縁き裂群の平面問題" 機論A，50巻 451号，pp. 330-340.

Isida, M. (1977) Mechanics of Fracture 3 Plates and Shells with Cracks, Sih, G.C., ed., Noordhoff, pp. 1-43.

Inglis, E. (1913) "Stresses in a plate, due to the presence of cracks and sharp corners." Trans. Inst. Naval Arch., Vol. 55.

Isibasi, T. (1940) "Stresses in a semi-infinite plate with a circular notch under uniform tension " Memoirs of the Faculty of Engineering Kyushu Imperial University, Vol. 9, pp, 131-143.

Jeffery, G. B. (1921) "Plane stress and plain strain in bipolar co-ordinate. " Phil. Trans. Roy., Vol. 221.

Jergeus, H. A., (1978) "A simple formula for the stress intensity factors of cracks in side notches. " Int. Jour. Frac., Vol. 14, pp. 113-116.

河本実、赤沢信(1951) "切欠効果に関する研究（第１報）" 機論，Vol. 17, pp. 118-123.

河本実(1951) "切欠効果に関する研究（第 2報）" 機論，Vol. 17, pp. 123-127.

河本実、関護雄(1951) "切欠効果に関する研究（第３報）" 機論，Vol. 17, pp. 112-131.

Kirch, G., (1898) Die Theorie der Elastizitat und die Bedurfnis der Festgkeitlehre

, V.D.I.,42

Kobayashi,A.S.,(1986) Computational Methods in the Mechanics of Fracture,Atluri, S.N., ed.,North-Holland, Chapter2.

熊谷一男，島田平八(1968)“突出部を有する板の引張りにおける応力集中”機論，34巻，pp.249-254.

Ling,C.B.,(1947) “Stresses in a notched strip under tension.” Jour.Appl.Mech., Vol.69,A-275.

Ling,C.B.,(1968)Jour.Appl.Mech.,Vol.35, p.833.

Lukas,P., and Klesnil,M.,(1978) “Fatigue limit of notched bodies.” Mater.Sci. Eng.,Vol.34,pp.61-66.

森口繁一，(1975)，二次元弾性論，東京生産技術センター．

Murakami,Y.(1976) “A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method. ” Eng.Frac.Mech.,Vol.8,pp.643-655.

村上敬宣(1978)“任意形状の穴から発生したき裂または任意形状の穴の近傍のき裂の応力拡大係数の計算法について２”機論，44巻，pp.423-432.

Murakami,Y.,ed.,(1986) Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press.

Muskhelishvili,N.I.,(1963) Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity,Noordhoff.

中井善一，田中啓介，川島理生司(1983)“低炭素鋼切欠き材における疲労き裂の伝ぱと停留”材料，Vol.32,pp.75-81.

中井善一，久保司郎，大路清嗣(1984)“切欠き底に発生したき裂の応力拡大係数の簡便評価式”機論Ａ ,Vol.50,pp.2017-2021.

Neal,D.M.(1970) "Stress intensity factors for cracks emanating from rectangular cutouts." Inter.Jour.Frac.Mech.,Vol.6,pp.393-400.

Neal,D.M., and Bowie,O.L.(1966) "Rectangular cut-out with corner cracks. " U.S. Army Materials Research Agency, T.N.66-08.

Neuber,H.(1958) Kerbspannungslehre-Grundlagen fur genaue Festigkeitsberechnung mit Berucksichtigung von Konstruktionsform und Werkstoff,Springer.

Neuber,H.(1985) Kerbspannungslehre, Springer-Verlag.

Newman,J.C.(1971) NASA, TN D-6376,pp.1-45.

西田正孝(1981)応力集中、森北出版

西谷弘信(1975)"両縁にだ円弧切欠きまたはき裂を有する帯板の引張り" 機論, 第41巻, pp.2518-2526.

西谷弘信, 石田誠 (1973) "主軸端にき裂をもつだ円孔の引張りにおける応力拡大係数" 機論, 39巻 317号, pp.7-14.

Nisitani,H., and Isida,M.(1982) "Simple procedure for calculating K_I of a notch with a crack of arbitrary size and its application to non-propagating fatigue crack." Proc.Joint JSME-SESA Conf.on Experimental Mechanics,pp.150-155.

西谷弘信, 陳　玳珩, 石田誠 (1984) "だ円孔縁に発生した各種縁き裂のK_I, K_{II}の近似計算法" 機論A, Vol.50,pp.341-350.

西谷弘信, 野田尚昭, 深迫泉, 原田昭治 (1985) "両縁に60° V 形または円弧形切欠きを有する帯板の引張り. " 機論A, 51巻, pp.1804-1810.

Nisitani,H. (1987) "Linear notch mechanics as an extension of linear fracture mechanics." Role of Fracture Mechanics in Modern Technology, Sih,G.C.et al., NortH-Holland.

野田尚昭，西谷弘信，深迫泉，原田昭治（1985）“両縁に60° V 形または円弧形切欠きを有する帯板の面内曲げ．”機論A，51巻，pp.1467-1470.

野田尚昭，西谷弘信，深迫泉（1986）“片側に60° V 形切欠きを有する帯板の引張りおよび面内曲げ．”機論A，52巻，pp.1066-1072.

野田尚昭，椿正昭，西谷弘信（1988）“60° V 形または円弧形切欠きを有する帯板の面内曲げ．”機論A，54巻，pp.518-523.

野村恭雄(1959)，機論，25巻，p.1075.

野村恭雄(1961 a)，“不連続箇所を有する平板の平面応力（第４報，十字形板の場合）”機論，27巻 179号，pp.1025-1035.

野村恭雄(1961 b)，“不連続箇所を有する平板の平面応力（第５報，両側に長方形出張りを有する帯板および段付きを有する帯板の場合）”機論，27巻 179号，pp.1036-1048.

岡林　稔(1965)，“領域が有理写像関数によって直線境界の半平面に等角写像される場合の二次元弾性問題の解法およびくさび状の裂目を有する無限薄板へのその応用”士論、第 119号，pp.

Peterson,R.E.,(1966) Stress Concentration Design Factors,John Wiley & Sons,Inc..

Rolfe,S.T.,and Barsom,J.M.(1977)Fracture and Fatigue Control in Structures, Prentice-Hill,Inc.p.210.横堀武夫監訳，培風館

Rooke,D.P., and Cartwright,D.J.,(1976) Stress Intensity Factors, Her Majesty's stationery Office.

Rooke,D.P., Baratta,F.L., and Cartwright,D.J.,(1981)” Simple methods of determining stress intensity factors. ” Eng.Frac.Mech. ,Vol.14,pp.397- 426.

Savin,G.N.,(1961) Stress Concentration around Holes, Pergamon Press.

Schijve,J.(1983) “Stress intensity factors of hole edge cracks. Comparison between one crack and two symmetric cracks.” Int.Jour.Frac.,Vol.23,pp.R111-R116.

清家政一郎 (1959) 機論, 25巻, p. 613.

Seika,M.,(1960) Ingenieur-Archiv XXVⅡ,p.220.

Sih,G.C.,(1973) Handbook of Stress Intensity Factors, Lehigh University.

Sih,G.C.,Paris,P.C.,and Erdogan, F.(1962) “Crack-tip,stress intensity factors for plane extension and plate bending problems. ” Jour.Appl.Mech.,ASME,Vol.29, pp.306-312.

Sokolnikoff, I.S.,(1956) Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill.

鈴木正彦(1949)東北大学工学部内力および弾性学研究室報, 2,p.61.

Tada,H.,Paris,P.C.,and Irwin, G.R.,(1973)The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Reserch Corporation.

玉手統 (1978) “面外曲げを受ける弾性平板内の円孔とき裂の干渉” 機論, 第44巻, pp. 2200-2208 .

Timoshenko,S.and Goodier,J.N. (1970) Theory of Elasticity, McGraw-Hill.

Timoshenko,S.and Woinowsky-Krieger,S. (1959)Theory of Plates and Shells,Mcgraw-Hill.

Tweed,J.,and Rooke,D.P.(1973) Int. Jour. Eng.Scie, Vol.11, pp.1185-1195.

鵜戸口英善 (1950) 機論, 16巻, p.44.

鵜戸口英善 (1968) , 弾性学, 共立出版

Weinel,E.,(1941) “Die spannung serhoehung dursh keisbogenkerben.” Zeitschrift fur Angewandte Mathematik and Mechanik, Band 21,pp.228-230.

Williams,M.L., (1952 a) 1st U.S. National Congress of Appl. Mech., McGraw-Hill, pp. 325-329 .

Williams,M.L., (1952 b) “Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. ” Jour. Appl. Mech.,Vol. 19,pp. 526-528.

Williams,J.G. and Isherwood, D.P. (1968) “Calculation of the strain energy release rates of cracked plates by an approximate method. ” Jour.Strain Anal., Vol.3,pp.17-22.

Yamamoto, Y.,Sumi,Y., and Ao,K. (1974) “Stress intensity factors of cracks emanating from semi-elliptical side notches in plates.” Int.Jour. Frac.,Vol. 10, pp.593-595.

横堀武夫, (1977) , 材料強度学, 技報堂.

横堀武夫, (1974) , 材料強度学第２版, 岩波全書.

Yokota,S.(1932) “Stresses in a plate with two holes, and the examination of congnate problems.” J.F.Eng.Tokyo Univ.,20.

既発表論文一覧

① Hasebe,N. and Iida,J.(1978)
'A crack originating from a triangular notch on a rim of a semi-infinite plate.'
Engineering Fracture Mechanics,Vol.10,pp.773-782.

② Hasebe,N. and Iida,J.(1979)
'A crack originating from a triangular notch on a rim of a semi-infinite plate under transverse bending.'
Engineering Fracture Mechanics,Vol.11,pp.645-652.

③ 長谷部宣男、飯田宇朗(1981)
'ぐう角部に丸みを有するＹ字形板の応力解析と応力集中係数'
日本機械学会論文集（Ａ編）47巻424号pp.1347-1353.

④ Hasebe,N. and Iida,J.(1983)
'Intensity of corner and stress concentration factor.'
Journal of Engineering Mechanics,ASCE,Vol,109,pp.346-356.

⑤ Iida,J.,Hasebe,N. and Nakamura,T.(1987)
'Intensity of corner in fixed edge of thin plate.'
Journal of Engineering Mechanics,ASCE,Vol,113,pp.1138-1146.

⑥ Iida,J.,Hasebe,N. and Matuura,S.(1987)
'Intensity of corner in fixed edge of plane problem.'
Journal of Engineering Mechanics,ASCE,Vol,113,pp.1194-1207.

⑦ 長谷部宣男、飯田宇朗、中村卓次(1989)
'平面及び薄板の曲げ問題における切欠きの力学'
構造工学論文集　Vol.35 A

謝　辞

浅学の私を、今日まで御指導していただいた名古屋工業大学　長谷部宣男教授に厚くお礼を申しあげます。先生には、名古屋工業大学の卒業論文、修士論文でもお世話になり、多くの御助言と暖かい励ましをいただきました。さらに、本論文の研究の機会を与えて下さり、学問に対する姿勢といったものも教えていただきました。ここに本論文をまとめることができましたのも、ひとえに先生のおかげと心より感謝しております。

名古屋工業大学　松浦　聖教授、中村卓次助教授には、名古屋工業大学の学部生の時から暖かい御指導をいただきました。今日まで、研究を続けてこられたのも、先生方の御尽力のおかげです。

又、松浦　聖教授、機械工学科　川嶋紘一郎教授、社会開発工学科（建築）　福知保長教授には忙しいなか本論文の審査をしていただきました。

名古屋工業大学社会開発工学科の諸先生方にも、多大な御援助をいただきました。この他にも多くの方々の御援助、御協力をいただきました。本論文中の図、表の作成等には名古屋工業大学　加藤育徳技官の多大な御協力をいただきました。改めて心より感謝の意を表します。

名古屋工業大学修士課程を昭和５２年３年に修了してから１０数年たった今、振り返ると、長くもあり、短くもあった１０数年であり、胸がいっぱいでありますが１つのステップが終ったと考えたい。

昭和６３年末　記