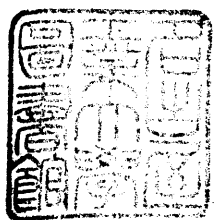


地盤物性値の空間分布特性の確率論的記述と
地盤工学における信頼性設計の基礎的研究

鈴木 誠



目 次

ページ

第1章 概 論	1
1.1 本研究の背景	1
(1) 設計における不確定性	1
(2) 信頼性設計法(確率論的アプローチ)による安全性の定義	4
(3) 地盤工学における信頼性設計	6
1.2 本研究の目的	10
1.3 既往の研究と本研究の位置づけ	12
1.4 本研究の構成	19
第2章 地盤物性値のモデル化	23
2.1 概 説	23
2.2 不確定性のモデル化	26
2.3 エルゴード仮説による確率モデル	29
2.4 クリッキングによる空間分布推定法	33
(1) ユニバーサル・クリッキング	33
(2) ブロック・クリッキング	38
2.5 クリッキングによる地盤物性値の空間分布推定の特性	39
2.6 統計的推定における不確定性	42
2.7 まとめ	47
第3章 確率有限要素法による確率応答値	49
3.1 概 説	49
3.2 2次モーメント法の概要	52
3.3 2次モーメント法と正規化近似法を用いた 確率有限要素法の定式化	58
(1) 変位, 応力に関する定式化	58
(2) 破壊確率の算定	64

3.4	モンテカルロ・シミュレーション法の確率場の定式化	70
(1)	三角級数モデルによる方法	71
(2)	コレスキー分解による方法	73
(3)	条件付シミュレーション法	74
3.5	解析精度の検証と手法の適用性	76
(1)	相関性のない確率変数モデルへの適用	76
(2)	確率場への適用	81
3.6	まとめ	88
第4章	確率場と要素分割	90
4.1	概説	90
4.2	要素間の相関特性	93
4.3	要素分割と解析精度の検討	98
(1)	解析モデルと解析条件	98
(2)	要素における材料物性値のシミュレーション	100
(3)	要素分割と解析精度	103
4.4	まとめ	108
第5章	拡張カルマン・フィルタによる	
	地盤物性値の空間分布推定	110
5.1	概説	110
5.2	拡張カルマン・フィルタのアルゴリズム	112
5.3	有限要素法を用いた空間分布推定法の定式化	116
(1)	観測方程式	116
(2)	システム状態方程式	117
(3)	初期条件	117
5.4	解析精度の検証と手法の適用性	122
(1)	観測点の影響と解析精度の検証	122
(2)	解析手法の適用性	126
5.5	まとめ	134

第6章 盛土工における地盤物性値の空間分布推定と沈下量予測	135
6.1 概 説	135
6.2 解析モデルと解析条件	136
6.3 土質調査から地盤物性値の空間分布推定	138
6.4 設計段階における沈下量予測	140
6.5 施工中の地盤物性値の空間分布推定	143
6.6 まとめ	148
第7章 斜面安定性評価への確率有限要素法の適用	149
7.1 概 説	149
7.2 確率有限要素法による斜面安定解析	153
(1) 概 要	153
(2) 解析モデルと解析条件	155
(3) 性能関数の定義と破壊確率の定式化	157
(4) 破壊確率の定式化	163
(5) 解析結果	165
7.3 円弧すべり法による斜面安定解析	171
(1) 概 要	171
(2) 解析方法と解析条件	172
(3) 解析結果	173
7.4 地震時安定性評価の感度分析	176
(1) 概 要	176
(2) 解析条件	179
(3) 解析結果	181
7.5 まとめ	183

第8章	斜面安定対策工としての水平排水管設置の 最適設計案評価	
	—確率有限要素法の信頼性設計への適用—	185
8.1	概 説	185
8.2	解析モデルと代替案の設定	188
(1)	解析モデル	188
(2)	代替案の設定	190
8.3	地下水の浸透流解析	191
8.4	性能関数の定義と破壊確率の算定	195
(1)	性能関数の定義	195
(2)	すべり円弧の選定	196
(3)	破壊確率の算定結果	198
(4)	透水係数の影響	199
8.5	期待総費用の評価と最適案の選定	201
(1)	初期建設費, 破壊時損失費の算定	201
(2)	期待総費用の算定	203
(3)	最適案の選定	204
8.6	まとめ	207
第9章	結論と今後の展望	208
	参考文献	212
	謝 辞	223

第1章 概 論

1.1 本研究の背景

(1) 設計における不確定性

橋梁、ダム、海洋・港湾構造物、原子力発電所施設、一般建築物などの土木・建築構造物は、自然環境下で作られ供用されるため、耐用期間中に苛酷な荷重・外力にみまわれることがある。たとえば、構造物の近くで中規模(マグニチュード7程度)以上の地震が発生すれば、地震のエネルギー量は膨大なので、通常の構造物であれば、ある程度の被害はまぬがれない。台風時の風荷重や海洋・港湾構造物に作用する波浪荷重も同様である。また、設計や施工を通して構造物の品質管理は十分に行われるわけであるが、材料や施工の不備による欠陥が入り込む余地は大きい。欠陥の程度が大きいと、施工中に欠陥が現れることになるが、反対に欠陥が小さくて発見されにくいと、検査を逃れて欠陥を残した構造物として供用されることになる。この欠陥は、やがて部材強度の低下やひびわれとして、構造物の耐用年数を縮めるもとになる。

設計に際して、設計荷重の設定や使用材料の選択は、学会などによる規準類(示方書、指針など)をガイドラインとして、建設地点や構造物の用途・機能などを考慮して慎重に行われる。しかし、数多い構造物の中には耐用期間に損傷を受けたり、欠陥を生じるものがあることは衆知のとおりである。それでは、何故、このようなことが生じるのかといえ、現実と設計との間にはギャップである多くの不確定性が存在するからである。たとえば設計段階において、構造物に将来作用するであろう荷重の大きさを正確に精度よく予測することは不可能である。すなわち、荷重に関する不確定性としては、荷重がもつ発生過程の不規則性や発生時点、継続時間、大きさなどの変動性があり、このほかにも複数の荷重が同時に作用することも考えられる。また、構造物の強度に関する不確定性としては、材料物性値のばらつき、疲労や経時変化による材料物性値の変化、強度低下のほかに、断面寸法や組立て誤差などがある。計算モデル自体、理想化されたもので

あるので、安全性を照査する計算にも不確定性がある。これらの不確定性は、超高層ビル、海洋構造物、地下大空間、大深度地中構造物などのニューフロンティアの開発によってさらに増える方向にある。

さて、これらの設計における荷重や強度の不確定性を処理するのに、現在まで用いられてきた最も一般的な設計方法は許容応力度設計法である。許容応力度設計法というのは、材料の降伏応力度を経験的に定めた安全率で除した許容応力度に対して、構造部材の応力度がこの範囲内に収まるようにする設計法である。ここで用いられる安全率は、各種不確定要因を1つの数値で表現しており、現在までに至った実績の積上げから安全設計の保証をしているに過ぎないため、安全性の余裕に対して定量的な意味を求めることは困難である。たとえば、同じ構造物の設計に対して異なる安全率を用いて設計した場合や、異なる種類の構造物を同じ安全率で設計した場合に、安全性の余裕に関する定量的な違いを議論することはできない。今までに大きな不都合もなく多くの構造物が設計されてきた実績からすれば、これらの構造物の安全性はともに問題はないといえるにすぎない。たとえば、コンクリートダムとフィルダムの安全率が3.0で設計されているのに対し、フィルダムの安全率が1.5で設計されているのはなぜか。また、このときコンクリートダムの安全性はフィルダムの2倍あるかという疑問も安全率が定量的な尺度でないために答えることができない。図-1.1は、確率変数 R と S の確率密度関数を示したものであり、 R が耐荷力で S が荷重作用とすると、 $R < S$ のときにこの構造物が破壊することになる。安全率は、一般にこれら R と S の代表値で定義される。いま、図-1.1に示すように、 R と S の分散が大きい破線の場合は破壊する確率が大きく、逆に分散が小さい実線の場合には破壊する確率が小さくなる。すなわち、確率変数の分散が安全性に影響しているため、同じ安全率でも安全性が異なることがわかる。

一方、経済性を無視して安全性を大きくとることもできるが、現実には経済性は無視できない制約である。経済性を重視するあまり安全性を犠牲にすることになれば、初期の建設費は安くなるかもしれないが、使用期間中の事故や損傷が発生する可能性は増える。したがって、事故や損傷の発生する可能性までを考え合わせた費用は、逆に増大するかもしれない。今後ますます安全性の評価に不確定

性が増えるであろう新規構造物の設計を、安全性と経済性の両面からより合理的なものにするためには、不確定性の取扱いに確率論・統計学といった数学的手法を積極的に用いることが考えられる。これにより、従来の安全率が安全性の定量的な尺度でないため、安全性と経済性のトレードが客観的に行うことができなかった欠点を改善することができることになる。

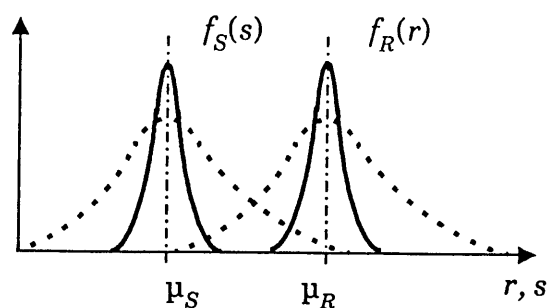


図-1.1 $f_R(r)$ と $f_S(s)$ の分散の破壊確率への影響

(2) 信頼性設計法(確率論的アプローチ)による安全性の定義

信頼性設計法では、確率論を用いて安全性の余裕を次式で示される信頼度 P_s で定義している。

$$P_s = \text{Prob.}(R > S | T) \quad (1.1)$$

ここで、 P_s : 信頼度

R : 構造物の耐荷力

S : 荷重作用

T : 構造物の使用期間

$\text{Prob.}(\quad | \quad)$: 条件付確率

また、使用期間中に構造物が破壊する確率(破壊確率) P_f は、次のように表せる。

$$P_f = 1 - P_s = \text{Prob.}(R \leq S | T) \quad (1.2)$$

ここで、安全性の余裕 M を R と S との差、すなわち次式で定義すると、 M の分布はたとえば図-1.2のように模式的に表せる。

$$\begin{array}{lll} M = R - S & > 0 & \text{安全} \\ & \leq 0 & \text{破壊} \end{array} \quad (1.3)$$

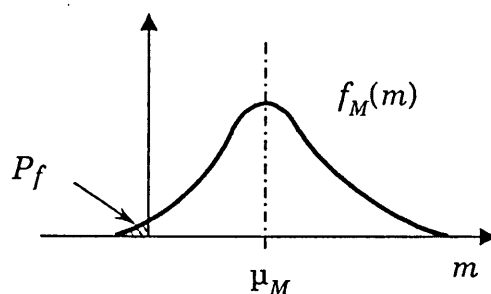


図-1.2 安全性余裕 M の確率密度関数

ここで、式(1.3)は性能関数とよばれ、一般には複数の確率変数を含む関数となる。構造物の破壊確率 P_f は次式で表せ、 M が0.0以下となる面積(斜線部分)によって与えられることになる。

$$P_f = \text{Prob.}(M \leq 0 | T) = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm \quad (1.4)$$

これを、安全率($\Theta = R/S$)の概念で示すと図-1.3のようになる。すなわち、安全性の余裕 M を次式で表すと、一般的に安全率が1.0を下回るところが破壊確率 P_f となる。

$$M = R/S - 1 = \Theta - 1 \quad \begin{array}{ll} > 0 & \text{安全} \\ \leq 0 & \text{破壊} \end{array} \quad (1.5)$$

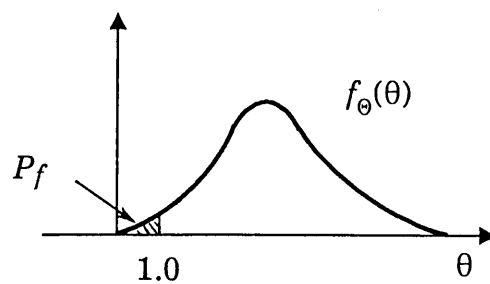


図-1.3 安全率 Θ の確率密度関数

以上のように、信頼性設計法で安全性の定義をするためには、安全性の余裕を表現する性能関数(performance function)の定義が必要である。また、その関数は設計対象や安全性照査の内容等によって適宜選択されることになる。

(3) 地盤工学における信頼性設計

構造物の安全性は、使用期間内に作用する最大の荷重や構造物の耐荷力に依存する。使用期間中の最大荷重や構造物の真の耐荷力を正確に予測することは難しく、いかなる予測も不確定性を伴うことになるので、安全性の評価に確率論を導入した信頼性設計法が必要であることは先に述べた。特に地盤工学では、その対象の多くが自然地盤であるから、鋼構造やコンクリート構造と比べて、材料物性値のばらつきが大きく、また挙動を予測する解析モデル(構成式)も単純ではない。このため、地盤工学では鋼構造やコンクリート構造と比べて不確定性を多く含むことになる。地盤工学の分野では、20年ほど前から安全性と経済性とのバランスをとることの重要性が指摘され、信頼性設計法の研究が行われてきた。この分野の研究は、地盤物性値の統計的性質を調べるための土質調査・試験から始まった。そして特に、鉱山工学で扱う斜面の安定性や海洋構造物の据え付け(着底)時の安定性などは、短い耐用期間と安全性との関係、さらに経済性が同時に要求されてきたことから、比較的早くから設計に確率論や統計学が取り入れられてきた。

さて、地盤工学における信頼性設計には、構造物の挙動予測が必要となる。この挙動予測は、一般に計画、調査、設計、施工、維持・保全の各段階で行われるもので、この過程の中において、それぞれに不確定性が含まれることになる(図-1.4 参照)。

設計を行う場合、複雑な挙動を示す実際の地盤を理想化したものに置き換える(①)。理想化された条件下での力学的挙動は、構成則によっては多少複雑な計算は必要ではあるが、実際の挙動に比べて単純で容易に現象を予測することができる。この作業は、経験豊かな責任技術者が行う工学的判断によるが、この過程で不確定性が入ることを避けることはできない。また、地盤物性値を求めるとき、すべての場合に厳密な土質調査・試験を行うことは、技術的にも不可能に近い。そのため、技術者が入手可能な地盤物性値は、理想条件下における状態や挙動を単純化した条件のもとで求められたものとなる(②)。よって、土質調査・試験による偏りやばらつきが入ることになる。また、理想化した挙動と標準化した試験の間にも、試験条件や試験精度に関して多くの不確定性が含まれる。たとえば、円弧

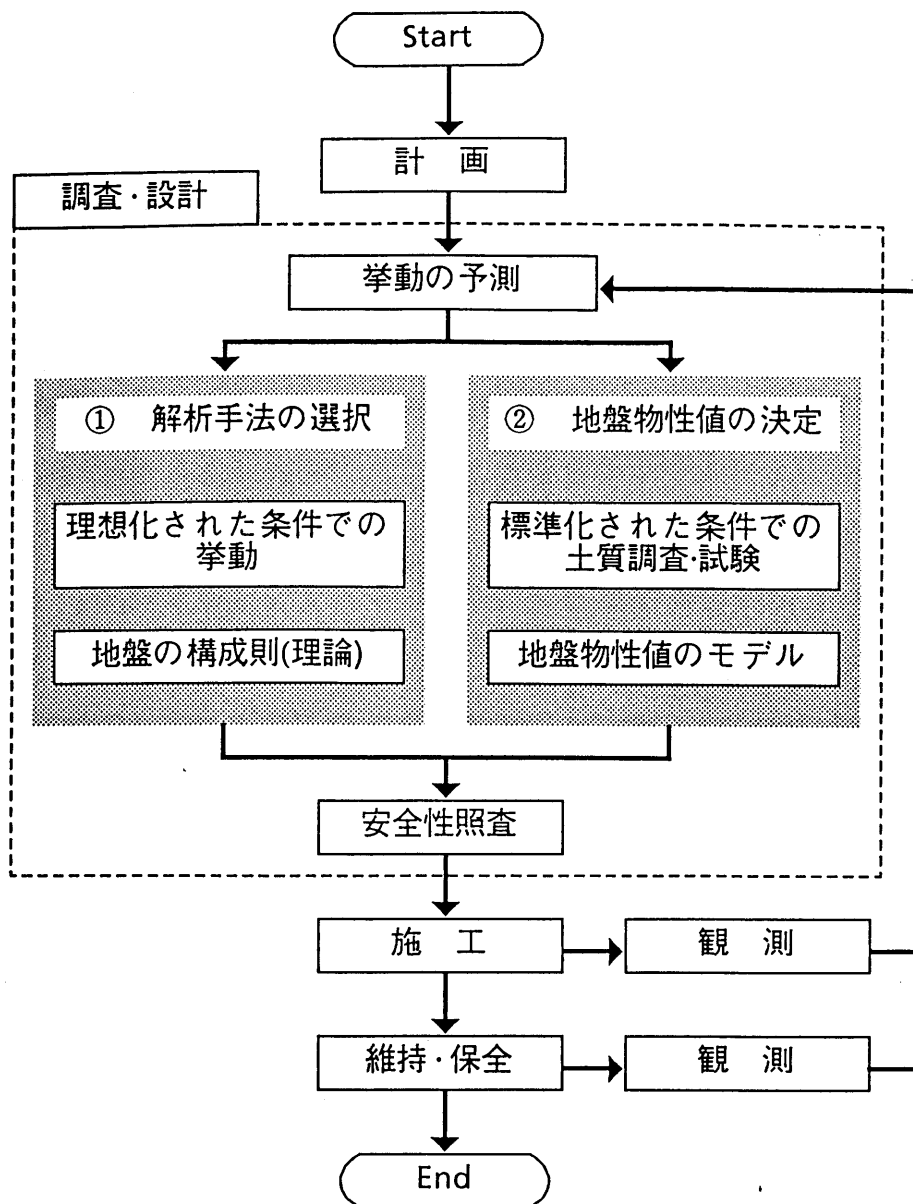


図-1.4 挙動の予測

すべり解析を考えたとき、三軸圧縮試験、三軸伸張試験、一面せん断試験から求められた地盤のせん断強度の差異を、明確な区別をすることなく用いるのは典型的な例といえる。設計計算を行う段階において、数値解析誤差や現実に大きくばらついている試験結果から特定の地盤物性値を採択するときに不確定性が含まれる。この不確定性は、地質学的に地盤物性値が空間的に分布している地盤が本来もっている不確定性である。さらに、地盤物性値の統計的性質を扱うときには、統計的推定による不確定性が含まれることになる。このように、設計では幾重に

もおよぼ単純化のために、出力結果に大きな不確定性を含む原因となっている。そのほかにも、地盤に作用する荷重に関しても、本来は不確定性を考慮しなければならない。

以上、地盤工学における不確定性をまとめると、(i) 地盤物性値のモデル化に関する不確定性、(ii) 挙動を予測する解析モデル等による数値解析精度に関する不確定性、(iii) 地盤に作用する外力に関する不確定性となる。(i) の不確定性は、地質学的に地盤物性値が空間的にばらついている本来の不確定性、この不確定性に対して統計的性質を推定するときに生じる不確定性、さらに土質調査・試験の精度に対して標本値に含まれる試験誤差などがあり、試験誤差には、たとえば、一方に偏りをもつものや白色雑音(ノイズ)のような不確定性がある。また、(ii) は種々の解析手法や解析モデル(構成式)などに対する不確定性である。(iii) は解析するときに想定した外力と実際に作用するであろう外力との差を不確定性としたものである。地盤や土構造物は、一般的に地震力の影響が大きく、地震による加速度と地盤物性値の単位体積重量の不確定性を考慮する必要があるため、一部は(i) の不確定性にも関連することになる。

設計段階において、上に述べたような種々の不確定性を考慮して、施工完了後の地盤や土構造物の挙動を適切に予測し、安全性や安定性を定量的に評価することは、より合理的な設計を行う上で重要な研究課題の1つである。ここで、地盤や土構造物の安全性や安定性を定量的に評価するためには、解析に用いる荷重や地盤物性値が適切に評価されていること、また挙動を予測する数値解析手法が適切なものであること、さらに安全性に対する評価規準が、定量的であり妥当なものであることが必要である。

さて、設計段階に限定して話を進めたが、地盤や土構造物を対象とした場合、施工途次や施工完了後において構造物の挙動を観測して、その観測結果をもとに安全性や安定性を確認し、挙動を予測できるようにすることが行われている。このような解析は一般的に挙動の観測値から地盤物性値を推定するため、逆解析手法であることが多い。むろん、地盤の挙動の予測を行う段階においても、観測が可能な場合と観測が不可能な場合がある。Lambe(1973)は、これらを表-1.1のように分類している。沈下量の予測を考えると、タイプAは施工前の計画・設計段階

で入手可能なデータ、たとえば土質データに基づいて予測するものである。施工中に行う予測の中で、結果(構造物の挙動や作用力など)の観測が不可能なものをタイプB、可能なものをタイプB1とする。さらに、施工後の維持・保全段階での予測は、圧密予測などのような一種の検査であるが、これも結果の観測が不可能なものをタイプC、可能なものをタイプC1とする。よって、逆解析ではタイプB1とタイプC1の予測問題を対象とすることになる。

表-1.1 予測の分類 (Lambe, 1973)

予測タイプ	予測段階	観測の可能性	備考
A	計画・設計	—	事前の調査・試験結果のみ
B	施工	不可能	
B1		可能	
C	維持・保全	不可能	
C1		可能	

従来の逆解析手法は、得られた観測値から平均的な地盤物性値を推定することであった。しかし、この方法では地盤物性値の空間分布による応答の変動を観測誤差としてしか扱うことができない。これは、限られた観測値から地盤物性値を推定するとき、地盤物性値である未知数の数が観測値より少なくないと、通常の逆解析は不可能であるからである。そこで、地盤物性値の空間分布の問題を解決することは、不等沈下量を予測するときなどに特に重要となる。

さらに、安全性の評価が計画, 調査, 設計, 施工, 維持・保全のどの段階において実施されるのかということや、解析に取り入れることができる情報の量・質的な差異によっても、評価手法に大きな違いをもたらす。そのため、計画, 調査, 設計, 施工, 維持・保全のすべての段階において、統一した不確定性の取扱いとその不確定性を考慮できる解析手法の開発も重要な研究課題になる。

1.2 本研究の目的

構造物の安全性は、使用期間内に作用する最大の荷重や構造物の耐荷力に依存する。使用期間中の最大荷重や構造物の真の耐荷力を正確に予測することは難しく、いかなる予測も不確定性を伴うことになる。本研究では、地盤工学における不確定性の内、1.1(3)節で示した(i)の地盤物性値のモデル化に関する不確定性に着目して、計画、調査、設計、施工の各段階を通して安全性評価を行うことができる信頼性解析手法の開発とその適用を目的としている。特に、地質学的な地盤物性値の空間的なばらつきは、土質調査・試験の技術が進歩しても確定できないものであることから、本研究ではこの不確定性の取扱いに限定している。

本研究の具体的な目的は、次に示すように設計段階において地盤の挙動を予測する手法と、施工段階において地盤の挙動を観測して地盤物性値を推定する手法を開発し、それらの手法を斜面安定性評価や沈下量予測の信頼性設計に適用することにある。

まず、土質データから地盤物性値の空間分布を推定して地盤の挙動を予測する手法である確率有限要素法の開発を行う。確率有限要素法とは、従来の地盤工学において多くの適用事例のある有限要素法に確率論を導入することにより、荷重、地盤物性値と境界条件等の不確定性を考慮できるように拡張された数値解析手法である。この方法によれば、地盤物性値の平均値と分散のほかに、地盤物性値が有する空間的な相関特性という統計的性質を扱うことができる。また、解析結果として、変位や応力などの応答値の不確定性が定量的に求められ、これをもとに安全性や安定性に対する判断を下すことができるようになる。ここで提案する確率有限要素法は、従来の確率有限要素法に比べて、地盤物性値の空間分布特性を扱うことができ、確率変数の変動係数が大きいときや確率変数が正規分布に従わないときでも精度よく解を求めることができるように改良する。さらに、土質データから地盤物性値の空間分布を推定する手法を取り入れることができるように機能を追加し、土質調査・試験があるときには従来よりも応答値の不確定性を小さ

くできることを示す。

次に、逐次最小自乗法のアルゴリズムであるカルマン・フィルターを有限要素法に組み込んだ空間分布の逆解析手法の開発を行う。有限要素法は、地盤工学における地盤の変形問題や地下水位の予測問題などに対する有効な解析手法である。しかし、有限要素法の解析結果の精度は、入力データである地盤物性値の信頼性に強く依存するが、実際の問題を解く場合には、必ずしも信頼性の高い値が常に得られるとは限らない。そこで、施工中や施工後において、変位量などの種々の観測値から地盤物性値の空間分布を推定する逆解析手法が、将来の挙動を予測するために必要となる。ここでは、有限要素法に統計的手法であるベイズ理論と制御理論であるカルマン・フィルターを適用した逆解析手法を開発する。ここで提案した逆解析手法は地盤物性値の空間分布を扱うために、地盤物性値である未知数の数が観測値の数より多いときにも解を求めることができることを特徴としている。また、推定された地盤物性値の空間分布から、再度、確率有限要素法を用いて地盤の挙動を予測することができるため、施工中の設計変更などが可能となり、一貫した信頼性設計を行うことができる。

最後に、具体的な設計事例に対して、確率有限要素法を信頼性設計に適用する。確率有限要素法を適用して斜面安定性を定量的に評価し、これらの安全性と経済性と結び付けることにより、斜面安定対策工の信頼性設計を行う。斜面安定対策工としては設計代替案を考え、初期建設費、破壊時損失費と破壊確率から計算される期待総建設費を用いて最適設計案を選択する。このように、信頼性設計法は安全性と経済性をトレードオフすることにより、客観的に設計代替案を評価することができることを示す。

1.3 既往の研究と本研究の位置づけ

本研究に関連する既往の研究は数多く存在するが、ここでは地盤工学における信頼性設計法の適用研究という立場から、1.2節で示した本研究の目的に則した主要な研究について概説し、本研究の位置づけを明らかにする。

地盤工学において、1960年代から地盤物性値に関する統計的性質の研究やデータの収集が、Hooper and Butler(1966), Lumb(1971), 松尾・黒田(1971), Meyerhof(1970)などによって行われた。当初、飽和粘土の一軸圧縮強度や非排水強度の統計的性質に関するものが多かったが、圧縮特性や含水比、間隙比、単位体積重量などにも研究が進み、砂や不飽和土のせん断強度などの統計的性質も扱われてきた(松尾・黒田, 1972 a; Matsuo and Kuroda, 1974; Matsuo and Asaoka, 1977; 堀内・川村, 1977)。また、これと同時に、これらの統計的性質を基にした確率論的解析が行われるようになってきた(Cornell, 1971; 松尾・浅岡, 1974)。

信頼性設計法として、Matsuo and Kuroda(1974, 1975)やWu et al.(1975)は、個々の問題を対象としながら、地盤の破壊確率や破壊確率と設計安全率の関係、それらと期待総費用との関係をまとめ、確率論を設計過程に適用する研究を行った。さらに、軟弱地盤上の盛土、自然および人工斜面、掘削地盤などの破壊問題や沈下量の予測などの問題に対して、システム全体を対象とした信頼性設計の定式化を行い、実用化をはかっている(松尾・浅岡, 1975; 松尾・上野, 1978, 1979 a, b; Schlitz, 1979; 安江, 1984; Matsuo and Suzuki, 1983 a, b; Asaoka and Matsuo, 1983)。さらに、設計にまではいかないにしても、部分的なサブシステム内の決定、たとえば、土質調査・試験の規模の決定や、各種設計代替案からの最適案の選択などに、確率論が次第に用いられていくようになってきた(松尾・黒田, 1972 b; Alonso, 1976; Burgess et al., 1980 c; Vieira et al., 1983)。設計という点では、Baikie(1985)とMeyerhof(1984)は斜面や土留めなどの設計における部分安全率を検討し、Wu(1974)は沈下問題に、Haldar(1982)は液状化問題における意思決定を扱っている。そのほか、施工中に沈下量などを観測して、設計を見直しながら施工する観測施工法も研究されている(Matsuo and Kawamura, 1980; Asaoka 1977; Asaoka and Matsuo, 1979, 1980, 1984)。

次に、1.2節の本研究の目的で示した項目ごとに関連研究を紹介する。当初の研究では、地盤物性値の不確定性は確率変数(random variable)として主に平均値と分散で表現されていた。しかし、これでは地盤物性値がもつ空間分布を考慮できないため、Vanmarcke (1983)やShinozuka (1987)らより異なる2地点における相関特性を表す自己相関関数を用いた確率過程(random / stochastic process)あるいは確率場(random / stochastic field)として地盤物性値が取り扱われるようになってきた。確率場の概念は、母集団(ensemble)を想定したものであり、設計規準と同じように不特定多数の構造物への適用を前提とする場合には適当である。しかし、サイトが特定され、解析対象から直接に土質データが得られている場合には、地盤物性値の空間分布を確率場の1つの実現事象である標本場あるいは標本関数(sample field / sample function)として扱うことができる。土質調査・試験により地盤物性値の空間分布である標本場を推定するために、クリッキング(kriging)とよばれている手法がある(Riplay, 1981 ; Journel and Huijbregts, 1978)。この手法は、提案者である南アフリカ共和国の大学教授Krigeから名付けられており、フランスの統計学者Mathoronが理論的な定式化を行った(Mathoron, 1963)。この標本場の考え方は鉱山工学、水文工学や農業分野などでは用いられてきた(Yates et al., 1983; Hoeksema and Kitanidis, 1984; Vieira et al., 1983; 原田・高木, 1986; Aboufirassi and Mariño, 1984; Burgess et al., 1980)。地盤工学の分野においては、Christakos (1985, 1987)や上田ら (1986), 本城ら (1987)は沈下問題に、Kulatilake and Miller (1987)は土質調査に、本城・松永 (1987)は地盤の締固めの管理に用いた。

ここで標本場を扱うといっても、実際には測定誤差あるいは推定誤差を考えると、推定される地盤物性値の空間分布は確定的に1つに定めることはできず、やはり誤差自体がばらつきをもつ確率場となるが、本論文では両者を明確に区別するため、このような確率場を扱うときには「標本場を扱う」ということにする。また、確率場の概念と標本場の推定値の概念は、得られる土質データや観測値などの情報量の質により区別して適用することが必要となる。すなわち、図-1.1における地盤物性値の空間分布の確率モデルをどのように構築するかと問題である。本研究では、盛土などのように設計段階でサイトでの土質データが不明確

なときの地盤物性値は確率場で、切土斜面などのようにサイトでの土質データが明確なときの地盤物性値は標本場として扱う。さらに、施工中や施工後においては沈下量や側方変位量などの観測値が得られたときにも、地盤物性値は標本場として扱う。

次に、確率有限要素法に関連した研究について述べる。地盤の挙動を解析するためには、図-1.1に示すように地盤の構成則の研究も必要であるが、確率論を用いた地盤の挙動解析手法の開発も必要である。確率有限要素法(Stochastic Finite Element Method)は、材料物性値、荷重(外力)、境界条件などに含まれる不確定性を認めて、構造物(あるいはシステム)の信頼性や安全性を定量的に評価しようとする解析手法である。特に、最近の研究では、材料物性値あるいは荷重が有する空間的な分布が、応答値(変位や応力)や安全性に与える影響を検討することに関心が集められている(例えば 中桐・久田, 1985, Vanmarcke et al. 1986; 中桐, 1987; 石井, 1988)。確率有限要素法に関する研究は、摂動法(perturbation method)や階層法(hierarchy method)などの解析的近似化手法を用いるものと、モンテカルロ・シミュレーション法やResponse Surface法などの統計的手法を用いるものに大別できる。

摂動法に基づく確率有限要素法は、最もよく研究されており、特に1次近似法を取り入れた摂動法は、式の表現も容易で演算時間も少ないことから、多くの研究者がこれを利用している。最初に、この1次近似摂動法(線形1次近似理論ともよばれる)を有限要素法に取り入れたのは、Cambou(1975)である。これと同様の手法は、Baecher and Ingra(1981)が地盤工学の問題に、Handa and Andersson(1981)が梁とフレームの静的問題に取り入れている。これらを更に体系化して、静的、動的さらには固有値問題などに幅広く適用したのが、中桐・久田の一連の研究であり(Hisada and Nakagiri, 1981, 1985; 中桐・久田, 1985)、これらの中で、2次近似までの摂動法が定式化されている。そのほか、有限要素システムの破壊確率や安全性指標に着目した研究として、桜井・土居(1983), Der Kiureghian(1983, 1985), 辰巳・鈴木(1986)などの研究がある。

1次近似法の基本的な概念は、Cornell(1969)の提案した2次モーメント法に基

づいている。つまり、破壊を定義する性能関数において、確率変数の結合確率密度関数が得られるだけの情報がないことが多いため、確率変数の情報を平均値と分散(共分散を含む)である1次および2次モーメントに基づいて定式化した。次に、性能関数を確率変数でテーラー展開し、2次以降の項を無視することにより線形化を行った。すると、正規確率変数の線形和が正規確率変数になるという性質を利用して、本来複雑な多重積分を行うことによって求められる破壊確率の代わりに安全性指標 β とよばれる安全性の尺度を得ることができるようになった。この方法は1次近似2次モーメント法(first-order second moment method)とよばれており、もとの確率変数が正規確率変数であれば、破壊確率と対応づけることができる。Cornell (1969) や Ang and Cornell (1974) の研究では、1次近似は確率変数の平均値において評価していたが、こうすると性能関数が非線形の場合には等価な限界状態に対する性能関数の定義式による不変性の問題を生じる。Hasofer and Lind (1974) は、確率変数を正規化することにより原点から限界状態までの距離が最小となる点(これは破壊点(failure point)または設計点(design point)とよばれている)においてテーラー展開を行うことによって、この不変性の問題を解決した。この方法は修正2次モーメント法(invariant second moment method)とよばれることもある。また、Shinozuka (1983) は、破壊点を最も破壊しそうな点(most probable failure point)とよんで、ラグランジェの未定係数法を用いることによって求めることができることを示した。さらに、確率変数が正規分布に従わないときには破壊確率を求めることができなかったが、Rackwitz and Fiessler (1978) は任意確率変数を等価な正規確率変数に変換する方法を提案した。また、Parkinson (1978) は、それまでの2次モーメント法が確率変数を互いに独立して仮定されていたのに対して、確率変数間の相関が存在しても求めることができるように改良した。

一方、コンピュータを用いた数値実験手法であるモンテカルロ・シミュレーション法で代表される統計的手法に基づいた確率有限要素法についても研究が進んでいる。モンテカルロ・シミュレーション法の基本的な考えは、通常の確定的な有限要素解析を何回も繰り返すことにより、信頼度を評価すると考えてよい。したがって、解析的近似法でうまく取り扱えないような問題も対処でき、既存の

解析プログラムをそのまま利用できるという利点がある。しかし、系の自由度が大きい場合には、当然ながら演算時間が問題となり、その計算の効率化が課題となってくる。Yamazaki et al.(1987, 1988)は、剛性マトリックスのノイマン(Neumann)展開に基づくモンテカルロ・シミュレーション法の効率化手法を、確率場は扱っていないがWong(1984, 1985)は近似的に破壊確率を計算する点推定法に基づくResponse Surface法を、溜・桜井(1988)は線形1次近似とモンテカルロ積分の結合解法により破壊確率を計算する手法を、それぞれ提案している。モンテカルロ・シミュレーション法の研究では、インポート・サンプリング法などシミュレーションを効率よく行う方法の研究が精力的に行われている(Rubinstein, 1981; Schueller and Stix, 1987; Bucher, 1988)。

確率有限要素法に関する研究は、静的な線形問題については急激な発展を遂げつつあり、理論的に残された領域は、非線形問題や動的問題といえる。しかし、確率場の実測値に基づくモデル化やパラメータに関する吟味などの実用面の検討は、静的問題についてさえあまりなされておらず、今後の課題として残されている。また、静的な線形問題においても、(i)地盤物性値の空間分布に対するモデル化、(ii)要素分割および各要素に対する物性値、および(iii)数値計算の効率化と高精度化の問題が残されている。そこで、本研究では、地盤物性値の空間分布を確率場として扱う確率有限要素法として、計算の効率化から2次モーメント法と正規化近似法を用いた確率有限要素法を開発する。また、確率場としての地盤物性値の空間分布に対する要素分割については、各要素の物性値は要素内での物性値を平均する局所平均で扱う手法を開発する。

なお、本研究では、確率有限要素法の適用対象として、斜面安定解析および沈下量予測問題等を取り扱う。この中で、斜面安定解析ではすべり円弧を仮定した安定解析手法を用いているが、この解析に対する確率有限要素法の適用自体に問題が指摘されることもある。このため、7.1節と7.3節において解析手法の適用性について論及する。また、本研究の立場として、有限要素法がすでに地盤工学において有用な手法の1つであるとの認識に立ち、その拡張として確率有限要素法の開発を行うのであって、具体的な適用例から得られる結果に対する工学的な判断については、他の手法による結果も合わせて総合的に判断を下すものとしてい

る。

次に、観測値から地盤物性値の空間分布を推定する方法に関連した研究について述べる。施工中の沈下量などの観測値を用いて地盤物性値を推定するという手法は、出力を測定して入力やシステムの状態を把握するため、パラメータ同定とか逆解析とよばれている。パラメータ同定により、図-1.4に示すように観測値が得られれば、初期に与えた地盤物性値を更新し、次の状態の挙動を把握することができる。すなわち、この手法は表-1.1に示したタイプB1とタイプC1の段階の挙動予測に必要となるものである。逆解析手法には、大別して数理計画法の最適化手法により確定論的にデータを取り扱う手法と、ベイズ理論により確率論的にデータを取り扱う手法とに分類される(Gioda, 1985)。確定論的手法には、Kavanagh and Clough(1971)や桜井・武内(1983)が用いている通常の順解析の逆定式化による直接法と、Arai et al.(1983)やHisatake and Ito(1985)が用いている逆定式化を必要とせずに繰り返し収束計算を行う間接法とがある。また、確率論的手法は、ベイズ理論における事前分布を観測値を用いて更新し、事後分布を作成するベイズ理論による手法であり、この手法を用いている研究としてはAsaoka(1978)やCividini et al.(1983)の研究がある。村上・長谷川(1987)は、間接法の一つであるカルマン・フィルターと有限要素法を結び付けたカルマン・フィルター有限要素法により観測点配置を検討している。

カルマン・フィルターは、Kalman and Bucy(1961)により開発され、アルゴリズムが比較的平易であることから、工学分野に広く応用されている(片山, 1983)。カルマン・フィルターの最大の特徴は、最小自乗近似を時間ステップにおける漸化式の形で表したところにある。土木工学の予測問題に応用したものとして、星谷・斉藤(1983)は地盤の液状化を一次元等価線形モデルと仮定し、このパラメータ同定にカルマン・フィルターを用いている。さらに、杭のK値の推定、動的問題における減衰定数や固有振動数の同定、非線形回帰モデルのパラメータ同定に、重み付き反復計算を含む拡張カルマン・フィルター(EK-WGI)が適用されている(星谷・斉藤, 1983, 1984 a, b; Hoshiya and Saito, 1984)。また、斉藤ら(1988)による土留め掘削工事における側圧、地盤反力係数と壁体の曲げモーメントの推定、さら

に、酒井・星谷(1987)におけるシールド位置の予測と制御など、観測施工にも幅広くカルマン・フィルターが用いられている。そのほか、Murakami and Hasegawa(1988)は、ダムの漏水量の予測にカルマン・フィルターを用いている。平野(1985)は、有限要素法による浸透流解析にカルマン・フィルターを適用し、透水量係数と地下水位の同定と予測を行った。この手法は、逆解析手法の中では唯一地盤物性値の空間分布を扱えるものである。この研究では、透水量係数の空間分布として、画像処理の分野でよく用いられる非因果的モデル(楕円型の2階偏微分方程式)を用いており、少ないデータから次期予測を行う方法として有効であることが示されている。しかし、カルマン・フィルターの繰り返し計算の収束性のために、初期値の設定方法に工学的判断が必要であり、解析にあたっては経験が必要となることが問題となる。

そこで、本研究では、ベイズ理論による事前分布を用いた拡張カルマン・フィルターにより、地盤物性値の空間分布を標本場として推定する逆解析手法を開発する。この手法により、施工中の観測値を用いて地盤物性値の空間分布を推定し、推定値と推定誤差を確率有限要素法に入力することによって挙動の予測が行えるため、設計から施工を通した信頼性設計ができることになる。

1.4 本研究の構成

本研究では、地盤工学における不確定性を考慮して、計画、調査、設計、施工の各段階を通して安全性評価を行うことができる信頼性解析手法の開発を行う。

本論文は、第1章から第9章で構成されている。第2章以降の構成を以下に示す。

第2章では、地盤物性値の不確定性に関するモデル化についてまとめる。

Wu and Kraft(1970)が言及しているように、明確な理論に基づく精度の高い試験方法を構築することができれば、調査・試験による誤差は小さくなるし、そのときにある程度の標本数があれば統計的推定による不確定性もかなり小さくなる。しかし、これらの不確定性をいくら小さくできても、地盤をくまなく探索することは不可能なので、地盤物性値の空間分布を確率論を用いて表現することが必要となる。ここでは、地質学的な地盤物性値の空間分布を、地盤が本来有している不確定性であるとし、主に確率論の立場から研究を進める。すなわち、信頼性設計では、統計学的な立場から、土質データから地盤物性値の統計的性質を議論することが多いが、本研究では、地盤物性値の統計的性質は土質データから推定(統計的推定)されうるものとして議論を展開する。

まず、不確定性のモデル化と適用範囲について整理し、モデル化に際して仮定している確率場と、この確率場を仮定するときに必要なエルゴード性について説明する。次に、本研究で用いる空間分布推定法であるクリッキングの定式化と標本場の推定についてまとめる。地盤物性値の空間分布に対するモデル化としては、適用対象に応じて次の2種類を扱う。すなわち、盛土のように設計段階では存在していない構造物は、サイトでの土質データがないため確率場の考え方を取り入れ、切土斜面のようにサイトでの土質データが明らかなきときには標本場として取り扱う。最後に、不確定性に対する統計的な推定法についてふれる。

第3章では、地盤物性値の不確定性を考慮して、地盤の挙動を確率論的に取り扱う手法として確率有限要素法の開発を行う。確率有限要素法は、従来の地盤工学に

において多くの適用事例のある有限要素法に確率論を導入することにより、荷重、地盤物性値と境界条件等の不確定性を考慮できるように拡張された数値解析手法であり、表-1.1に示したすべての予測段階で用いることができる。そこで、地盤物性値の空間分布を考慮することができ、モンテカルロ法のように数多くの試行計算を必要としない、従来の線形1次近似理論による確率有限要素法を改良した手法を開発する。特に、ここで提案する確率有限要素法は、線形1次近似するためにテーラー展開を行う点を、従来の平均値から設計点に変更することによって、確率変数の変動係数が大きいとき、また確率変数が正規分布に従わないときにでも応答の確率特性を精度よく求めることができる。さらに地盤物性値の空間分布を取り扱うこともできるようになっている。

次に、本研究で開発した解析手法の検証や精度が要求される問題に適用するために、モンテカルロ・シミュレーション法に基づく確率有限要素法についてまとめ、この応用としてクリッキングを用いた条件付シミュレーションについてもまとめる。最後に、簡単な例題を通して開発した手法の精度を検証する。

第4章では、地盤物性値の空間分布を考慮して確率有限要素解析を行うときの要素分割について、その問題点と手法をまとめる。これは、地盤物性値を空間的に相関性をもっている確率場として扱うと、要素における物性値を平滑化して求める方法が問題となるためである。本研究では、地盤物性値の空間分布を要素内で局所平均することによって、離散化した要素の物性値を求めることを行う。そのため、要素の物性値の変動係数はもとの確率場の変動係数よりも小さくなる。そこで、要素分割が解の精度に与える影響について、モンテカルロ・シミュレーション法に基づく確率有限要素法を用いて検討を行う。

第5章では、カルマン・フィルターを有限要素法に組み込んだ空間分布推定法の開発を行う。有限要素法は、地盤工学における地盤の変形問題や地下水位の予測問題などに対する有効な解析手法である。しかし、有限要素法の解析結果の精度は、入力データである地盤物性値の信頼性に強く依存するが、実際の問題を解く場合には、必ずしも信頼性の高い値が常に得られるとは限らない。そこで施工中

や施工後において、1.3 (3)節で示される表-1.1のタイプB1とタイプC1の予測段階で用いる手法として、変位量などの種々の観測値から地盤物性値の空間分布を推定する解析手法を開発する。この手法は、土質データが十分でない場合にも地盤物性値の空間分布を確率論的に推定し、推定された地盤物性値の空間分布から、再度、地盤の挙動を予測することができる。このため、施工中に設計変更などが可能となり、一貫した信頼性設計を行うことができる。さらに、施工管理として観測点や観測位置が問題となるが、逆解析結果に与える影響の観点から検討を加える。ここでは、統計的手法であるベイズ理論と制御理論であるカルマン・フィルターの関係についてまとめ、次にカルマン・フィルターの初期値にベイズ理論の事前分布をあてはめた定式化を示す。最後に、観測点が逆解析結果に与える影響を、簡単な例題による感度解析から検討する。

第6章では、本研究で開発した解析手法を盛土による沈下予測問題に提要する。まず、第2章で述べたクリッキングを適用して設計段階に得られた土質データから地盤物性値の空間分布を推定し、第3章で述べた確率有限要素法を用いて確率論的な沈下予測を行う。さらに、施工時の沈下量の観測データから第5章で述べたカルマン・フィルターを用いた有限要素法により地盤物性値の空間分布の確率論的な逆解析を行う。

第7章では、確率有限要素法を斜面安定解析に適用して、その有効性を確認するとともに、手法の適用に際して検討すべき2,3の問題を解決する。ここでは、有限要素法がすでに斜面安定解析においても有用な手法の1つであるという認識に立ち、確率有限要素法を位置づける。最初に、斜面安定解析の概要を述べ、簡単な岩盤斜面の例題において局部破壊と層理面に沿った全体破壊を対象に、斜面安定性評価での確率有限要素法の適用性と精度を検証する。斜面安定性評価に確率有限要素法を適用するにあたり、破壊モードであるすべり円弧を固定しなければならないために適用性の問題が指摘されることもある。このことから、従来の円弧すべり法に地盤物性値の空間分布を考慮した解析を行い、破壊モードと破壊確率について定量的に検討する。最後に、岩盤斜面の地震時安定性に与える地盤物性値

の影響について感度解析を行い、不確定性を評価すべき地盤物性値を検討する。

第8章では、具体的な設計事例に対して、確率有限要素法を信頼性設計に適用する。対象構造物とした3辺が斜面からなるドライドックは、排水時に浸透力が作用して斜面が不安定になる。このため、確率有限要素法を適用して排水時の斜面安定性を定量的に評価して、これらの安全性と経済性とを結び付けることにより、斜面安定対策工の信頼性設計を行う。斜面安定対策工としては水平排水管を考え、初期建設費、破壊時損失費および破壊確率から計算される期待総建設費を用いて、設置間隔の最適設計代替案の選択を行う。

第9章では、本研究の結論をまとめ、今後の展望を述べる。

第2章 地盤物性値のモデル化

2.1 概 説

設計あるいは解析に用いる地盤物性値は、土質調査・試験をもとに決められるのが基本である。もちろん、ほかの場所から採取してきた土砂によって施工される盛土工事では、採取予定の地盤を調査することにより、経験をふまえて盛土の地盤物性値を定めることになる。このとき、地盤物性値を推定する作業において、その目的から土質調査・試験の数量は自ずと限られたものにならざるを得ない。したがって、対象となる敷地全体の地盤物性値は、限られた土質データをもとに、適切な方法を用いて推定することになる。今、これらの土質データから地盤物性値の平均値や分散などが得られたとするならば、地盤物性値の確率モデルを作ることができる。さらに、地盤物性値が本来もつ空間的な分布(ばらつき)を考慮するのであれば、異なる2地点における地盤物性値の相関特性が問題となる。ここで、地盤物性値の空間分布を考慮することのできる確率モデルは、確率過程(stochastic process)あるいは確率場(random field)とよばれ、数学における一分野となっている。本節では確率過程や確率場について分類し、本研究における地盤物性値の取扱いについて、その位置づけを明らかにする。なお、第1章で述べたように、自然地盤の切土によって施工される斜面などは、確率場として母集団を対象とするよりは、標本場としてモデル化する方がより自然である。確率場と標本場との係わりについては本節の後半でふれるが、標本場といえども確率場に属する1つの標本であるとの立場に立てば、その基本は確率場の理論にあることになる。

さて、確率過程や確率場について、その特性を一般的に分類すると、表-2.1に示すようになる。確率変数には時間の概念が入っていないのに対して、物理量の時間的変化の問題を扱う場合には確率過程という言葉が一般に使われる。ごく最近一般的になって聞かれる確率場という言葉は、狭義には、何か物理量の空間座標での変動を取り扱うような確率過程、広義には、時間および空間両座標での変動を取り扱うような確率過程を指すものである(Vanmarcke, 1983)。なお

表-2.1 確率過程/確率場の分類

項 目	確率過程 (stochastic process)	確率場 (stochastic field)	確率波 (stochastic wave)
記 号	$f(t)/S(\omega)$	$f(x)/S(\kappa)$	$f(t, x)/S(\omega, \kappa)$
座 標 (coordinate)	時間/周波数	空間/波数	時間・空間/周波数・波数
次 元 (dimension)	1次元	1~3次元	2~4次元
変 量 (variate)	1変量~多変量	1変量~多変量	1変量~多変量
定常性 (stationarity)	定常/非定常	均質/非均質	定常/非定常 × 均質/非均質
確率分布 (distribution)	正規/非正規	正規/非正規	正規/非正規
例	ある地点の地震 波時刻歴	ある時点の地表 面変位の空間変動	地震による地表面変位の空 間変動の時刻歴

Shinozuka(1987)は、この広義の確率場を確率波(stochastic wave)とよんでいる。表-2.1において、記号の $f(\cdot)$ は確率過程/確率場を表しており、 t は時間を x は空間座標を表している。また、 $S(\cdot)$ はスペクトルを表しており、 ω は周波数を、 κ は波数を表している。確率過程において時間により確率特性が変化しないとき、その確率過程を定常(stationary)確率過程といい、確率場では空間座標により確率特性が変化しないときに均質(homogenous)という言葉を用いる。この場合、統計的性質は時間/空間的に一定とするエルゴード過程を仮定していることになる。すなわち、本研究においては、均質な地盤とはすべての位置の物性値が同じという意味ではなく、空間的なばらつきを有するものである。しかし、たとえば深さ方向に単調増加する粘着力などは、均質な地盤では表現できない。そのため、全体的な挙動をマクロ的に捕らえたトレンド成分と均質として扱うランダム成分の和で表現する方法が考えられた。ランダム成分で表現できる空間分布の確率モ

デルを定めるには、少なくとも平均値、分散、自己相関関数が必要であり、これらは標本値から統計的推定によって求めることになる。

ところで、確率場の概念は母集団を想定したものであって、不特定多数の構造物への適用を前提としている場合には適当であるが、サイトが特定された場合には確率場の1つの実現事象である標本場が存在していることになる。もちろん、この標本場を求めることは不可能なので、何らかの方法で推定することになる。そのため、推定による誤差による不確定性を考慮しなければならず、本来は唯一であるべき標本場があたかもばらつきをもつ確率場となる。しかし、ここでは母集団を想定した確率場と明確に区別するために、単に標本場とよぶことにする。地盤物性値の空間分布に関する確率モデルとして、確率場や標本場を想定することは、対象とする構造物によって使い分ける必要がある。すなわち、盛土などは設計段階では存在していないため、過去の土質データから統計的性質を予測することから、確率場としての取り扱う。また、切土などの設計段階で存在している地盤で、そのサイトの土質データや変位などの観測値がある場合には標本場としての取り扱うことになる。もちろん、標本場は確率場に属する1つの標本であることから、標本場を扱う場合にも確率場の仮定が成り立つ必要があることになる。

本章では、本研究の主題である地盤物性値の空間分布のモデル化についてまとめる。まず、地盤物性値の不確定性について2.2節で詳細に説明する。次に、2.3節で地盤物性値の空間分布を確率場として扱うときに必要となるエルゴード仮説について説明する。この説明により、確率場で考えている確率モデルの特性が理解できる。標本場を扱うときに、土質データなどの標本値から地盤物性値の空間分布を推定する手法として、クリッキングの定式化を2.4節に示す。このクリッキングの特性を把握するために、2.5節で1次元のモデルを用いて検討する。さらに、2.6節で確率場の統計的手法における不確定性についてまとめる。

2.2 不確定性のモデル化

地盤物性値は、本来空間的なばらつきをもつものであるが、一般の設計や解析などで行われるような確定的なアプローチでは、ばらつきを無視して確定値とする。これに対して、本研究では確率論に基づき地盤物性値がもつ空間的な分布(ばらつき)を考慮して解析を行うことを基本的な立場としている。本節では、地盤物性値がもつ不確定性に対する確定論および確率論に基づく取扱いについて考察し、本研究の立場を明らかにする。

図-2.1(a)に1次元における地盤物性値の空間分布を概念的に示す。この図では、横軸は1次元の位置的な座標を示し、縦軸が地盤物性値の値である。座標はこの場合、水平面内の方向としても、深さ方向としてもよいが、地盤物性値の分布は1つの土層内のものであると仮定する。また、図中の・印は、土質調査から得られた標本値であるとする。従来の設計では、地盤物性値の連続的な分布に対して、土質調査を実施し、得られたデータ(図中の・印で示される)は同一の母集団、上の例では同じ土層から得られた標本値であると仮定する。この仮定のもとに、データから平均値と分散を求め、地盤物性値の設計値を定める(図-2.1(b))。

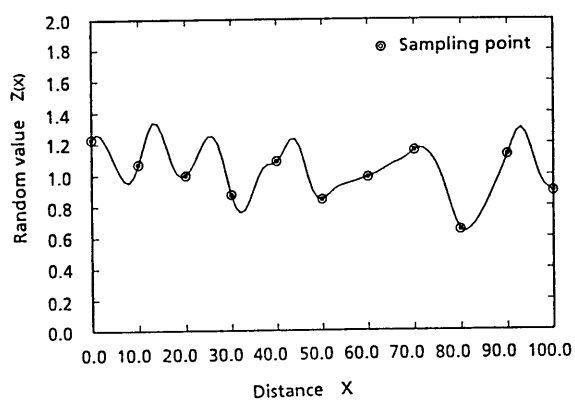
各土層における地盤物性値の確率論的な取扱いの中で最も単純なものは、確率変数として取扱うものである。この考え方によれば、地盤物性値は確率変数とし、平均値と分散を考慮して解析を行う(図-2.1(b))。地盤物性値の不確定性は平均値と分散として考慮されているが、土層内の空間的な分布は、当然従来の設計と同じように無視されていることになる。しかし、このような取扱いによって得られる情報も、地盤や土構造物の安全性や安定性を定量的に評価する上では有効であることから、数多くの研究が行われてきた。

地盤物性値の空間分布を考慮しようとする研究は、考え方を大きく2つに分けることができる。1つは確率過程論に基づく方法であり、ある1点のばらつきは空間全体のばらつきに等しいとするエルゴード性を仮定する確率場(エルゴード過程)として、地盤物性値の空間分布を扱う方法である。エルゴード仮説では、土質調査による地盤物性値の空間分布を1つの標本場(標本関数)とし、平均値、分散、2地点間の相関特性(一般にこの特性は自己共分散関数や自己相関関数によって表され

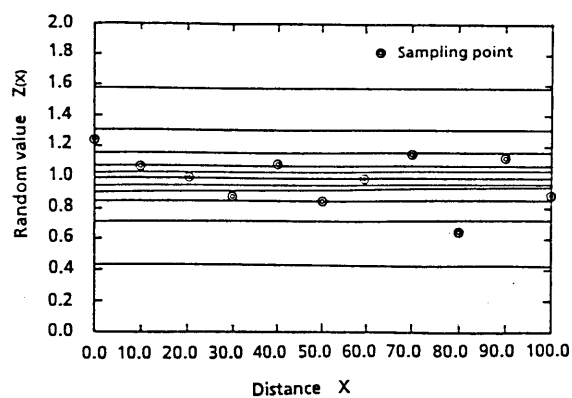
る)によって統計的性質が表される。この考え方によれば、これら平均値、分散、自己相関関数で規定される確率場全体(個数は理論的には無限にある)を母集団として定義する。例えば、図-2.1(a)に示した地盤物性値の空間分布を1次元の標本関数として扱うと、再合成されたエルゴード過程の標本関数は図-2.1(c)に示されるものとなる。再合成された標本関数は、土質調査から得られた標本値(○印)を必ずしも通るものではない。したがって、土質調査から得られたデータから、どのように地盤物性値の空間分布を推定していけばよいかという問題には必ずしも適しているわけではない。しかし、標本数が少なかったりする計画段階や、盛土やコンクリート・鋼製材料のように人工的に作られら構造物(この場合テスト・サンプルの採取となり、データは位置に関して意味をもたない)を対象とした安全性や安定性の評価には、このような考え方が適用可能である。例えば、盛土は、設計段階では実在しないので、過去のデータ・ベースを考慮して物性値の平均値、分散、自己相関関数を推定することになるので、上述の考え方が適用できる。

もう1つは、空間分布を確率場の1つの実現事象である標本場とする考え方である。すなわち、得られた標本値より唯一の空間分布を推定する。クリッキングとして知られている内挿は、標本点での推定値が標本値となる推定法であり、推定にともなう誤差を確率論的に取り扱うことができる。そのため、クリッキングは空間分布の推定誤差を地盤物性値の不確定性として確率論的に取り扱うことができる有利な手法である。クリッキングの定式化と特徴については2.4節と2.5節で示す。

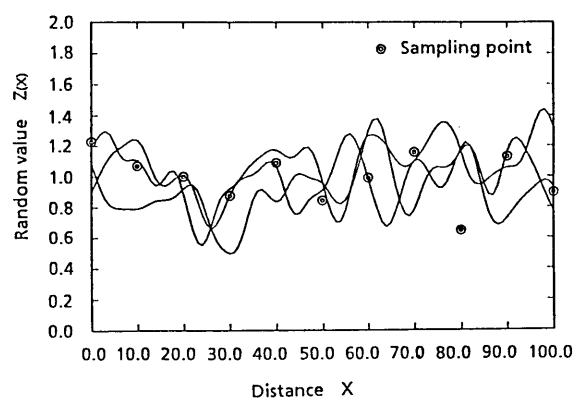
なお、確率場としてのモデル化と、標本場の推定値としてのモデル化とは、どちらが正しいとか正統であるとかの差はなく、むしろ解析対象の特性によって適宜選択されるべきものである。もちろん、標本場として扱うときにも、確率場の1つの標本であることからエルゴード仮説が必要である。



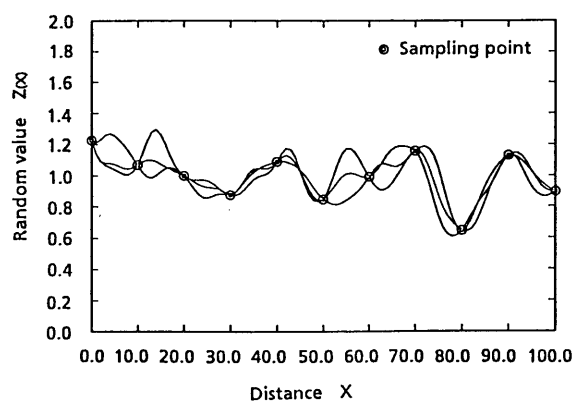
(a) 地盤物性値の空間分布



(b) 確率変数



(c) 確率場



(d) 標本場

図-2.1 地盤物性値の不確定性の考え方

2.3 エルゴード仮説による確率モデル

土質調査・試験が1か所において1つしか実施できないことや資料が少ないことから地盤物性値の統計的性質を推定することが難しいため、エルゴード仮説は地盤物性値の空間分布を確率場としてモデル化するときに必要な仮説である。本節では、盛土や位置の情報がない土質データをもった地盤を確率場として扱うときのエルゴード仮説について説明する。また、確率場、標本場とも、統計的推定法により土質データから平均値、分散や自己相関関数を推定するとき、正確にはトレンド成分を除いたものに対して、エルゴード仮説を仮定して解析が行われる。

一般に地盤物性値の空間分布は均質な確率場としてはモデル化できないため、全体的な挙動をマクロ的にとらえたトレンド成分と均質な確率場で扱うランダム成分の和で表現することになる(Baecher, 1983 a)。この場合、地盤物性値の空間分布は式(2.1)により表される。

$$Z(x) = \mu(x) + e(x) \quad (2.1)$$

ここに x : 地盤中の位置ベクトル
 $\mu(\cdot)$:トレンド成分(平均値関数)
 $e(\cdot)$:ランダム成分(確率関数)

さて、この式で表現しているランダム成分を均質な確率場として取り扱うとき、エルゴード仮説が必要になる。

一般に確率場は、土質データなどから与えられた統計的性質(平均値, 分散, 自己相関関数)を満足する標本場の母集団である。しかし、地盤物性値の空間分布を考えたときに、このような母集団を想定することが難しいので、本節では地震波を例にして確率過程の中でエルゴード仮説を説明する。もちろん、2.1節で説明したように、確率場と確率過程の概念は空間領域と時間領域の違いを除けば全く同じである。

一般的に地震波のようなランダム現象を表す一つの時刻歴は、標本関数とよばれており、このランダム現象から生じたであろうすべての可能な標本関数の集まりを確率過程とよぶ。すなわち、データの標本関数は確率過程の一つの物理現

象と考えることができる。図-2.2にみられるような確率過程をなす標本関数の母集団のうち、ある時刻 x_1 における平均値は時刻 x_1 のアンサンブル(母集団)について各々の標本関数の値をとり、それを足し合わせて標本数で割ることにより求められる。同様に、2つの異なった時刻における標本関数の値の相関性(自己相関関数 (auto-correlation function)) は、2つの時刻 x_1 と $x_1 + \tau$ における値の積の集合平均をとることによって求められる。確率過程を標本関数の母集団の意味で使うと、確率過程 $\{Z(x)\}$ に対して平均値 $\mu_Z(x_1)$ と自己相関関数 $R_Z(x_1, x_1 + \tau)$ は、

$$\mu_Z(x_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k(x_1) \quad (2.2 a)$$

$$R_Z(x_1, x_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z_k(x_1) z_k(x_1 + \tau) \quad (2.2 b)$$

によって与えられる。ここで N は標本数である。一般的な場合として、式 (2.2) で定義された $\mu_Z(x_1)$ と $R_Z(x_1, x_1 + \tau)$ が時刻 x_1 が変わるとともに変わるとき、確率過程 $\{Z(t)\}$ は非定常 (nonstationary) であるという。特別な場合として、 $\mu_Z(x_1)$ は弱定常 (weakly stationary) あるいは狭い意味で定常になる。弱定常確率過程では、平均値は一定で、自己相関関数はただ時間間隔 τ にみに依存する。すなわち、 $\mu_Z(t_1) = \mu_Z$ 、そして $R_Z(x_1, x_1 + \tau) = R_Z(\tau)$ である。また、確率過程 $\{Z(x)\}$ のすべての求めうるモーメントと結合モーメントが時間に対し不変な場合、確率過程 $\{Z(x)\}$ は強定常 (strongly stationary) あるいは強い意味で定常という。多くの例では弱定常であることを確かめることにより、強定常性の仮定を行っている。

また、多くの場合、集合の中の特定の標本関数について時間平均を計算することによって、定常確率過程の性質を記述することができる。たとえば、図-2.2 に示されている過程の k 番目の標本関数を考えよう。 k 番目の標本関数の平均値 $\mu_Z(k)$ と自己相関関数 $R_Z(\tau, k)$ は、

$$\mu_Z(k) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{U} \int_0^U z_k(x) dx \quad (2.3 a)$$

$$R_Z(\tau, k) = \lim_{U \rightarrow \infty} \frac{1}{U} \int_0^U z_k(x) z_k(x+\tau) dx \quad (2.3 b)$$

によって与えられる。もし確率過程 $\{Z(x)\}$ が定常であつて、式で定義される $\mu_Z(k)$ と $R_Z(\tau, k)$ が、異なった標本関数について計算したときと変わらないなら、確率過程はエルゴード過程 (ergodic process) であるという。エルゴード過程に対しては、時間平均および自己相関関数 (またすべての他の時間の平均的性質も) は母集団のそれに等しくなる。すなわち $\mu_Z(k) = \mu_Z$, $R_Z(\tau, k) = R_Z(\tau)$ である。よつて、定常確率過程のみがエルゴード過程となりうる。エルゴード過程のすべての性質はただ一つの標本関数についての時間平均的操作を行うことによって定めることができる。そのため、定常的な物理現象はエルゴード過程と仮定されていることが多く、地盤工学においても数少ない資料から確率特性を推定することが必要となるため、エルゴード仮説が導入される。

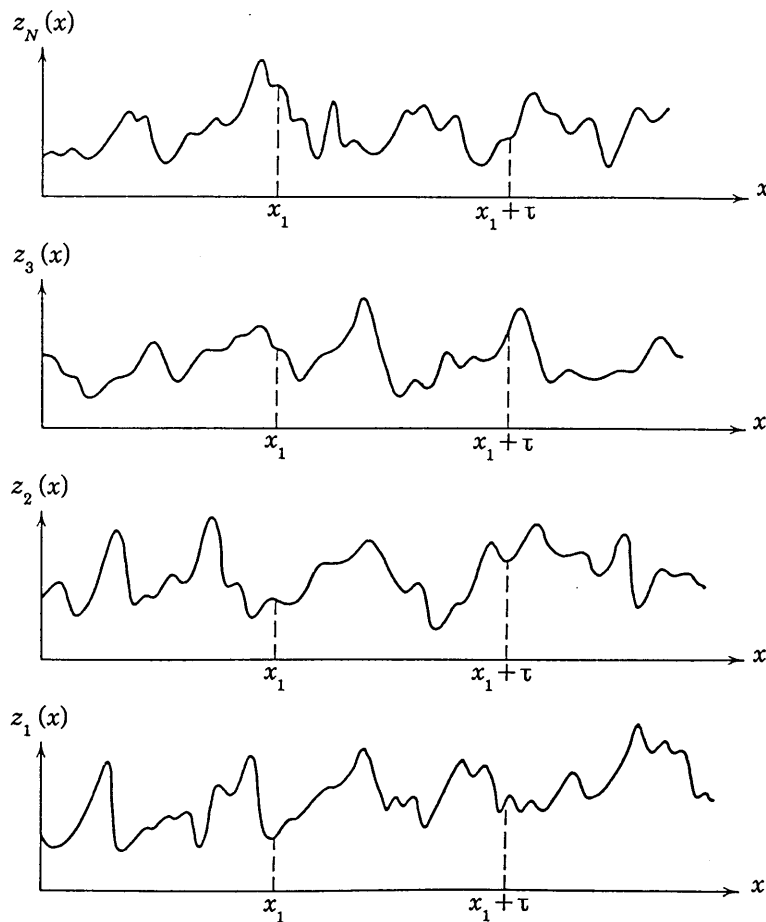


図-2.2 確率過程をなす標本関数の集合

地盤物性値は、確率過程の時刻 x が位置ベクトル \mathbf{x} に対応した空間分布と考えることができる。この意味において地盤物性値の確率モデルに確率場を考えるときのエルゴード仮説の必要性が理解できる。エルゴード仮説により確率モデルを定めるとき、均質性すなわち確率過程の定常性が必要条件であった。この均質性を検討したものは少ないが、沖積粘土層の深さ方向に沿う非排水せん断強度 c_u に図-2.3のような確率モデルを用いて検討されている(土質工学会, 1985)。

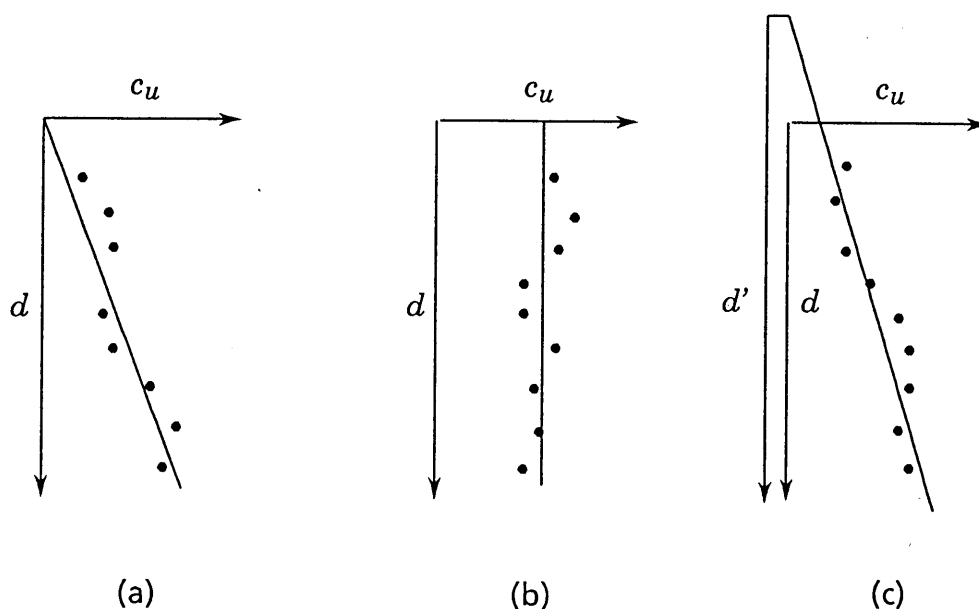


図-2.3 c_u の深さ z に沿う分布

このような均質性の検討例として、Asaoka and Grivas (1982) はベーンせん断強度の深さ方向の分布に対して図-2.3(a) のタイプを適用し、Asaoka and Matsuo (1983) は一軸圧縮試験に対して図-2.3(b) のタイプを適用した。さらに、浅岡ら (1981) は沖積粘土層を対象に、圧密降伏荷重 P_c と体積圧縮係数と荷重増分 $m_v \cdot q$ に図-2.3(c) のタイプを適用した。

以上、本節ではエルゴード仮説についてまとめたが、同一土層の地盤物性値の空間分布はトレンド成分を除けばエルゴード仮説が成り立つと考えられること、さらに確率論を実際に適用するとしても、母集団の統計的推定に対しては土質データが十分あることはまれであることから、本研究ではエルゴード仮説を仮定して理論を展開する。

2.4 クリッキングによる空間分布推定法

本節では標本場を対象として、クリッキングといわれる手法を用いて、土質データから地盤物性値の空間分布を推定する方法をまとめる。定式化は、一般的なユニバーサル・クリッキングと確率有限要素法に用いるときに使用するブロック・クリッキングについて行う(鈴木・石井, 1988)。

(1) ユニバーサル・クリッキング (Universal Kriging)

ユニバーサル・クリッキングにより内挿を行う標本場 $Z(\mathbf{x})$ を、確定値として与えられるトレンド成分 $m(\mathbf{x})$ と、ランダム成分 $W(\mathbf{x})$ の線形和として表現できると仮定する。ここでは、 \mathbf{x} は座標を表すベクトルであり、ランダム成分 $W(\mathbf{x})$ が、平均値が0となる均質な確率場となるようにトレンド成分 $m(\mathbf{x})$ を考える。

$$Z(\mathbf{x}) = m(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

まず、トレンド成分 $m(\mathbf{x})$ は、 \mathbf{x} に関する多項式によって表現できると仮定する。

$$m(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^L \beta_l f_l(\mathbf{x}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}^T \{\boldsymbol{\beta}\} \quad (2.5)$$

ここで、 $f_l(\mathbf{x})$ ($l=1,2,\dots,L$) は \mathbf{x} に関する多項式で、 β_l はその係数である。肩添字 T は転置を意味する。また、 $\{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}^T = \{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_L(\mathbf{x})\}$ と $\{\boldsymbol{\beta}\}^T = \{\beta_1, \dots, \beta_L\}$ である。たとえば、 \mathbf{x} が2次元であれば、多項式の次数により次のように表現できる。

$$0 \text{ 次} ; m(x,y) = \beta_1$$

$$1 \text{ 次} ; m(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$$

$$2 \text{ 次} ; m(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2$$

さて、次に、 N 個の標本点 \mathbf{x}_i ($i=1,2,\dots,N$) において、標本値が $Z(\mathbf{x}_i)$ として与えられていると、任意点の推定量 $\hat{Z}(\mathbf{x})$ は標本値 $Z(\mathbf{x}_i)$ の線形和として次のように表せると仮定する。

$$\hat{Z}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Z(\mathbf{x}_i) = \{\mathbf{Z}_N\}^T \{\boldsymbol{\lambda}\} \quad (2.6)$$

ここで、 $\{Z_N\}^T = \{Z(x_1), \dots, Z(x_N)\}$ と $\{\lambda\}^T = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ である。式(2.6)の重み係数 λ_i は、推定量 $\hat{Z}(x)$ の不偏性と推定誤差分散 $\sigma_E^2(x)$ の最小化の2つの条件を満たす必要がある。

多くの推定値に対して誤差は平均的に0となる。

$$E[Z(x) - \hat{Z}(x)] = 0 \quad (2.7)$$

このためには、

$$E[Z(x)] = E[\hat{Z}(x)] = \sum_{i=1}^N \lambda_i E[Z(x_i)] \quad (2.8)$$

となる。すなわち、エルゴード仮説から $E[Z(x)] = E[\hat{Z}(x)]$ となるため、 $\sum \lambda_i = 1$ を満足する必要がある。また式(2.4)より、 $\hat{Z}(x)$ の期待値はトレンド成分 $m(x)$ となる。

$$E[\hat{Z}(x)] = m(x) \quad (2.9)$$

式(2.5)と式(2.6)より、式(2.9)は次のようになる。

$$\begin{aligned} E[\hat{Z}(x)] &= E\left[\sum_{i=1}^N \lambda_i Z(x_i)\right] = \sum_{i=1}^N \lambda_i m(x_i) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{l=1}^L \beta_l f_l(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \{f(x_i)\}^T \{\beta\} = \{\lambda\}^T [F] \{\beta\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

ここで、

$$[F] = \begin{bmatrix} \{f(x_1)\}^T \\ \vdots \\ \{f(x_N)\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1), \dots, f_L(x_1) \\ \vdots \\ f_1(x_N), \dots, f_L(x_N) \end{bmatrix}$$

である。式(2.5)、式(2.9)および式(2.10)より、

$$\{\lambda\}^T [F] = \{f(x)\}^T \quad (2.11)$$

となる。すなわち、式(2.11)が任意の β_l に関して成立するためには、次式が成り立つ必要がある。

$$f_l(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i f_l(x_i) \quad (2.12)$$

推定誤差分散 $\sigma_E^2(x)$ は次のように表現する。

$$\begin{aligned}
E[\{Z(\mathbf{x}) - \hat{Z}(\mathbf{x})\}^2] &= E[\{m(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N \lambda_i (m(\mathbf{x}_i) + W(\mathbf{x}_i))\}^2] \\
&= E[\{m(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N \lambda_i m(\mathbf{x}_i) + W(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N \lambda_i W(\mathbf{x}_i)\}^2] \\
&= E[\{W(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N \lambda_i W(\mathbf{x}_i)\}^2] \\
&= E[W(\mathbf{x})^2] - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i E[W(\mathbf{x}_i)W(\mathbf{x})] \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j E[W(\mathbf{x}_i)W(\mathbf{x}_j)] \\
&= \text{Var}\{W(\mathbf{x})\} - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{Cov}\{W(\mathbf{x}_i), W(\mathbf{x})\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j \text{Cov}\{W(\mathbf{x}_i), W(\mathbf{x}_j)\} \tag{2.13}
\end{aligned}$$

これより、推定誤差分散を最小とするため最小自乗法を用いる。式(2.13)をベクトルとマトリックスで表現すると、次のようになる。

$$\sigma_E^2(\mathbf{x}) = \min E[\{Z(\mathbf{x}) - \hat{Z}(\mathbf{x})\}^2] = \text{Var}\{W(\mathbf{x})\} - 2\{\Lambda\}^T\{\mathbf{k}(\mathbf{x})\} + \{\Lambda\}^T[\mathbf{K}]\{\Lambda\} \tag{2.14}$$

ここで、 $\{\mathbf{k}(\mathbf{x})\}$, $[\mathbf{K}]$ は以下に示す。標本値よりトレンド成分を除いた $W(\mathbf{x}_i)$ から共分散関数を求め、この共分散関数を用いて $\{\mathbf{k}(\mathbf{x})\}$ および $[\mathbf{K}]$ を求める。

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{k}(\mathbf{x})\} &= \begin{bmatrix} \text{Cov}\{W(\mathbf{x}), W(\mathbf{x}_1)\} \\ \vdots \\ \text{Cov}\{W(\mathbf{x}), W(\mathbf{x}_N)\} \end{bmatrix} \\
[\mathbf{K}] &= \begin{bmatrix} \text{Var}\{W(\mathbf{x}_1)\}, & \cdots, & \text{Cov}\{W(\mathbf{x}_1), W(\mathbf{x}_N)\} \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}\{W(\mathbf{x}_N), W(\mathbf{x}_1)\}, & \cdots, & \text{Var}\{W(\mathbf{x}_N)\} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

さて、 $\sigma_E^2(\mathbf{x})$ を求めるためには、式(2.11)の条件下で式(2.14)を最小としなければならない。そこで、ラグランジェの未定係数法を用いて、重み係数 $\{\lambda\}$ を求める。ラグランジェ乗数を $\{\mu\}$ とすると、式(2.14)は次のようになる。

$$\text{Var}\{W(\mathbf{x})\} - 2\{\lambda\}^T\{\mathbf{k}(\mathbf{x})\} + \{\lambda\}^T[\mathbf{K}]\{\lambda\} + 2(\{\mathbf{f}(\mathbf{x})\}^T - \{\lambda\}^T[\mathbf{F}])\{\mu\} \quad (2.15)$$

式(2.15)が極小値をとるためには、 $\{\lambda\}$ で微分して0となる必要がある。

$$-2\{\mathbf{k}(\mathbf{x})\} + 2[\mathbf{K}]\{\lambda\} - 2[\mathbf{F}]\{\mu\} = 0$$

$$\therefore [\mathbf{K}]\{\lambda\} = \{\mathbf{k}(\mathbf{x})\} + [\mathbf{F}]\{\mu\} \quad (2.16)$$

次に、式(2.16)を式(2.14)に代入すると、

$$\sigma_E^2(\mathbf{x}) = \text{Var}\{W(\mathbf{x})\} - 2\{\lambda\}^T\{\mathbf{k}(\mathbf{x})\} + \{\lambda\}^T(\{\mathbf{k}(\mathbf{x})\} + [\mathbf{F}]\{\mu\}) \quad (2.17)$$

$\{\lambda\}^T\{\mathbf{k}(\mathbf{x})\}$ の項について整理し、式(2.11)を代入すれば、

$$\sigma_E^2(\mathbf{x}) = \text{Var}\{W(\mathbf{x})\} - \{\lambda\}^T\{\mathbf{k}(\mathbf{x})\} + \{\mu\}^T\{\mathbf{f}(\mathbf{x})\} \quad (2.18)$$

となる。したがって、 $\{\lambda\}$ と $\{\mu\}$ が求まれば、 $\sigma_E^2(\mathbf{x})$ を求めることができる。

さて、計算では、未知数である $\{\lambda\}$ と $\{\mu\}$ を統合した新たなベクトル $\{\mathbf{L}\}$ を考えることにより、式(2.16)を次のように表現する。

$$[\mathbf{K}']\{\mathbf{L}\} = \{\mathbf{M}\} \quad (2.19)$$

ここで、マトリックス $[\mathbf{K}']$ 、ベクトル $\{\mathbf{L}\}$ と $\{\mathbf{M}\}$ は次のように与えられる。

$$[\mathbf{K}'] = \begin{bmatrix} \text{Var}\{W(\mathbf{x}_1)\}, & \cdots, & \text{Cov}\{W(\mathbf{x}_1), W(\mathbf{x}_N)\}, & 1, & f_2(\mathbf{x}_1), & \cdots, & f_L(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}\{W(\mathbf{x}_N), W(\mathbf{x}_1)\}, & \cdots, & \text{Var}\{W(\mathbf{x}_N)\}, & 1, & f_2(\mathbf{x}_N), & \cdots, & f_L(\mathbf{x}_N) \\ \hline 1, & \cdots, & 1 & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ f_2(\mathbf{x}_1), & \cdots, & f_2(\mathbf{x}_N), & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_L(\mathbf{x}_1), & \cdots, & f_L(\mathbf{x}_N), & 0, & 0, & \cdots, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{L}\}^T = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_N, -\mu_1, \cdots, -\mu_L\}$$

$$\{\mathbf{M}\}^T = \{\text{Cov}\{W(\mathbf{x}_1), W(\mathbf{x})\}, \cdots, \text{Cov}\{W(\mathbf{x}_N), W(\mathbf{x})\}, 1, f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_L(\mathbf{x})\}$$

また、 $f_1(\mathbf{x}_i)$ あるいは $f_1(\mathbf{x})$ は、 \mathbf{x} に関する多項式における定数項として、1.0としている。

これより、

$$\{\mathbf{L}\} = [\mathbf{K}']^{-1} \{\mathbf{M}\} \quad (2.20)$$

となり、 $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ および $\{\boldsymbol{\mu}\}$ が求められ、これを式(2.6)と式(2.18)に代入することにより推定量と推定誤差分散が求められる。

$$\hat{Z}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{Z}_N\}^T \{\boldsymbol{\lambda}\} \quad (2.21)$$

$$\sigma_E^2(\mathbf{x}) = \text{Var}\{W(\mathbf{x})\} - \{\mathbf{L}\}^T \{\mathbf{M}\} \quad (2.22)$$

さらに、推定誤差共分散も式(2.20)より求められた $\{\mathbf{L}\}$ を次式に代入することにより求められる。

$$\begin{aligned} E[\{Z(\mathbf{x}) - \hat{Z}(\mathbf{x})\}\{Z(\mathbf{x}') - \hat{Z}(\mathbf{x}')\}] \\ = \text{Cov}\{W(\mathbf{x}), W(\mathbf{x}')\} - \{\boldsymbol{\lambda}'\}^T \{\mathbf{k}(\mathbf{x})\} - \{\boldsymbol{\lambda}\}^T \{\mathbf{k}(\mathbf{x}')\} + \{\boldsymbol{\lambda}'\}^T [\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\lambda}\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここで、 $\{\boldsymbol{\lambda}'\}$ は \mathbf{x}' のときの $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ である。

(2) ブロック・クリッキング (Block Kriging)

ブロック・クリッキングは、要素に対して局所平均を用いてクリッキングを行う推定法である。定式化はユニバーサル・クリッキングと同様で、式(2.20), 式(2.21), 式(2.22), 式(2.23)において、 $Var\{W(\mathbf{x})\} \rightarrow Var\{V\}$, $Cov\{W(\mathbf{x}), W(\mathbf{x}_i)\} \rightarrow Cov\{V, W(\mathbf{x}_i)\}$, $Cov\{W(\mathbf{x}), W(\mathbf{x}')\} \rightarrow Cov\{V, V'\}$ および $\{f(\mathbf{x})\} \rightarrow \{f_V\}$ を用いればよい。ここで、 $Var\{V\}$ は要素 V の局所平均をとった分散であり、 $Cov\{V, V'\}$ は要素 V, V' で局所平均をとった共分散である。これらは、任意の三角形要素について小要素に分割し、数値積分により求めることができる。また、 $Cov\{V, W(\mathbf{x}_i)\}$ は \mathbf{x}_i 点のランダム成分の値と要素 V の共分散で、 $\{f_V\}$ は要素 V のトレンド成分の多項式の局所平均である。両者とも、同様の数値積分により求めることができる。これより、式(2.21), 式(2.22), 式(2.23)は、式(2.25), 式(2.26), 式(2.27)に書き換えられ、要素 V の推定量 \hat{Z}_V と推定誤差分散および共分散が求められる。

$$\{\mathbf{L}\} = [\mathbf{K}']^{-1} \{\mathbf{M}\} \quad (2.24)$$

ここで、

$$\{\mathbf{M}\}^T = \{Cov\{V, W(\mathbf{x}_1)\}, \dots, Cov\{V, W(\mathbf{x}_N)\}, 1, f_{V2}, \dots, f_{VL}\}$$

となる。ゆえに、

$$\hat{Z}_V = \{\mathbf{Z}_N\}^T \{\boldsymbol{\Lambda}\} \quad (2.25)$$

$$E\{[Z_V - \hat{Z}_V]^2\} = Var\{V\} - \{\mathbf{L}\}^T \{\mathbf{M}\} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} E\{[Z_V - \hat{Z}_V][Z_{V'} - \hat{Z}_{V'}]\} \\ = Cov\{V, V'\} - \{\boldsymbol{\Lambda}'\}^T \{\mathbf{k}_V\} - \{\boldsymbol{\Lambda}\}^T \{\mathbf{k}_{V'}\} + \{\boldsymbol{\Lambda}'\}^T [\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\Lambda}\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

ここで、

$$\{\mathbf{k}_V\} = \begin{bmatrix} Cov\{V, W(\mathbf{x}_1)\} \\ \vdots \\ Cov\{V, W(\mathbf{x}_N)\} \end{bmatrix}$$

である。

2.5 クリッキングによる地盤物性値の空間分布推定の特性

本節では、2.4節で説明したクリッキングの特性を検討するために、図-2.4に示される1次元のモデルについて、クリッキングにより標本場の推定を行う。まず、図-2.4の実線で示すような地盤物性値が存在し、◎印の標本値が得られたとする。次にこの標本値から、前節で説明したユニバーサル・クリッキングにより推定値と推定誤差を求める。この例では、計算を簡単にするためトレンド成分を0次(パンクチュアル・クリッキング)とし、単位は無次元とする。また、統計的性質は平均値を1.0, 変動係数を0.2として、自己相関係数を次のように定める。

$$\rho(\Delta x) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{5.0} \right)^2 \right\} \right] \quad (2.28)$$

実際の問題への適用にあたっては、これらの統計的性質もまた、調査結果から得られた標本値あるいは経験的な知識等も合わせて設定することになる。

図-2.5において実線が推定値を、破線が推定値±推定誤差を示している。図-2.4に比べて、図-2.5の推定値がなめらかになっているのは、推定値は平均的な変動のみを表しているためである。また、推定値が標本値を通り、推定誤差が標本点では0、標本点から離れるに従って大きくなることがわかる。したがって、標本点を多くすれば推定誤差は小さくなり、推定値は真の値に近づくことになる。

次に、標本場と確率場の概念を比較した。統計的性質である平均値, 分散および自己相関関数より求められた確率場の概念を示したものが図-2.6である。図中の実線は、確率場のいくつかの標本場を表したものである。また、図-2.7に標本場の推定の概念を示した。図-2.7より、標本場の推定では確率場の中から、特に標本値を通る標本場だけを扱っていることがわかる。すなわち、標本場の推定値は、標本値から得られる情報として統計的性質だけでなく標本値自体も考慮しており、地盤物性値の不確定性を標本点以外の値を推定するときの推定誤差としている。したがって、土質調査からの土質データについて調査位置が判明していれば、クリッキングを用いることにより地盤物性値の不確定性を相当に小さくすることができる。

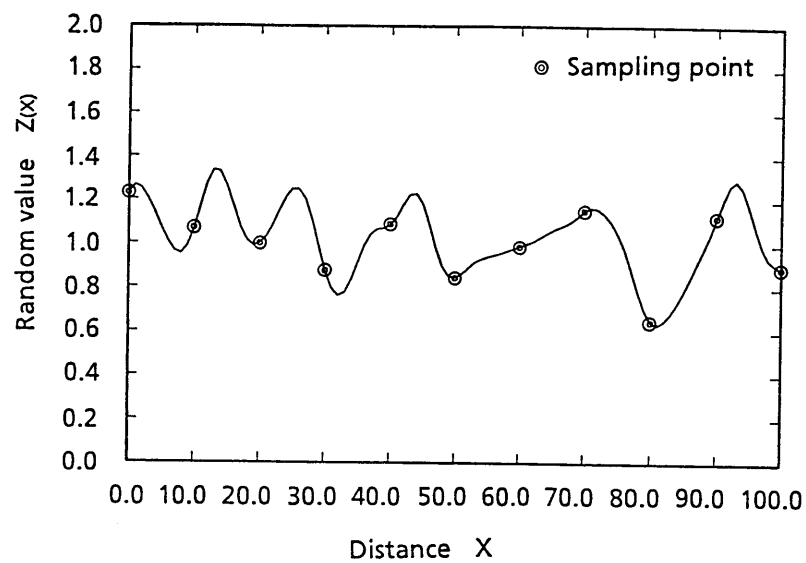


図-2.4 地盤物性値の空間分布と標本値

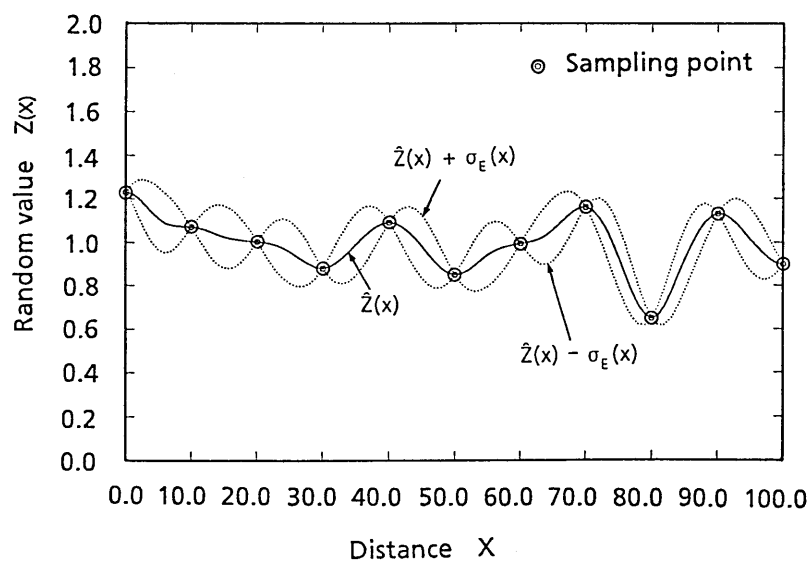


図-2.5 クリギングによる推定値と推定誤差

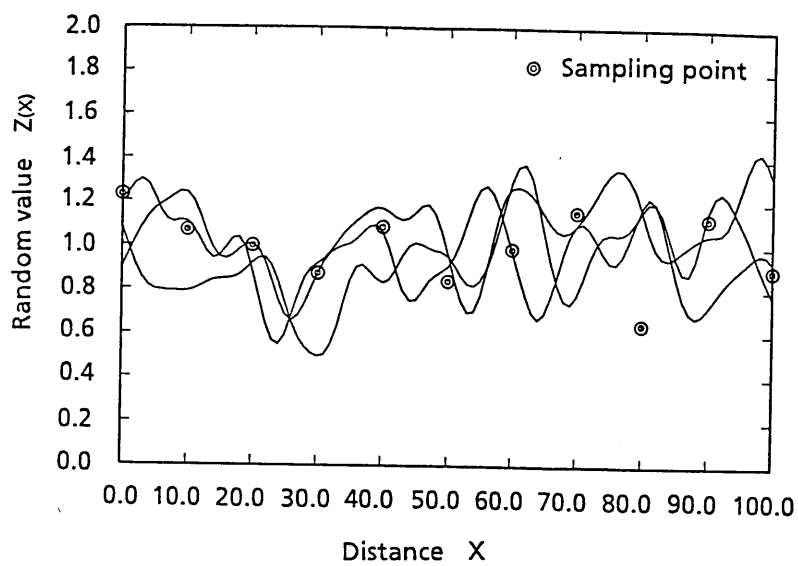


図-2.6 確率場の概念

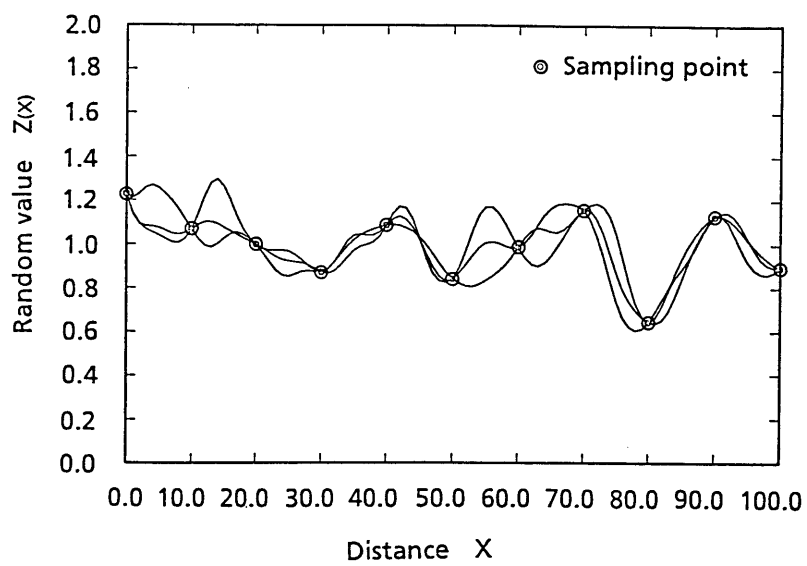


図-2.7 標本場推定の概念

2.6 統計的推定における不確定性

地盤物性値の統計的性質は、地盤内より採取した標本値に対する限られた情報から推定せざるを得ない。そのため、土質調査・試験による標本値を求める過程で、調査・試験の誤差や理想化された条件と現実の条件との差による不確定性が含まれる。また、限られた数の標本値であるため、統計的性質を表す母数(μ, σ^2 などパラメータ)は統計的推定誤差が含まれることになる。本節ではこれらの不確定性について検討をする。

正垣・日下部(1987)は、物性値の設計値を求める過程に存在する不確定性の要因を原位置調査と室内試験に分けて整理した。また、Tang et al.(1976)は人為的な要因について原位置での非排水せん断強度 s を、室内せん断強度 S と補正係数でモデル化している。そのほか、小林ら(1982), 松尾・正垣(1982), (1984), (1986)や土田ら(1988 a, b), (1986)は調査、試験者の相違の大きさを指摘している。しかし、現在では限られたものしか測定されておらず、信頼性解析にこの不確定性を正しく取り入れることはできない。このことから、本研究では今後の研究に期待し、この不確定性を考慮しないこととする。

また、統計的推定誤差は標本数が増加するに従って低下するものである。北浦・池本(1988)は、地盤物性値と地震動強さの統計的推定の不確定性を考慮した盛土の信頼性解析を行っているが、標本数がある程度あればこの不確定性は小さくなる。

次に、母平均 μ と母分散 σ^2 の標本数 n に対する統計的推定誤差についてまとめ、さらに分布の適合度検定を行うための必要標本数を示し、本研究での扱い方をまとめる。

母分散 σ^2 が未知の場合、 n 個の標本値から求めた標本平均 \bar{x} 、標本標準偏差 s に関して、確率変数 $(\bar{X} - \mu)/(s/\sqrt{n})$ は自由度 $f = n - 1$ の t 分布に従い、母平均 μ の信頼区間(α)は次式で表される

$$\mu_{1-\alpha} = \left[\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.29)$$

標本数 n が増加するにつれて、上式で表される信頼区間の幅が狭くなり、母平均 μ の推定精度が向上する。いま、この標本平均 \bar{x} まわりの幅を $\lambda \cdot s$ とすると次のようになる。

$$\lambda = t_{\alpha/2, n-1} / \sqrt{n} \quad (2.30)$$

標本数 n と λ の関係を示したのが図-2.8である。標本数 $n < 10$ では λ の値が大きく、 $10 < n < 20$ の範囲が $\lambda \sim n$ 関係の変化点であり、 $n > 20$ では n が増加しても λ はさほど低下しなくなる。この結果から、単純に母平均の推定には少なくとも $n > (10 \sim 20)$ の標本数が必要と思われる。

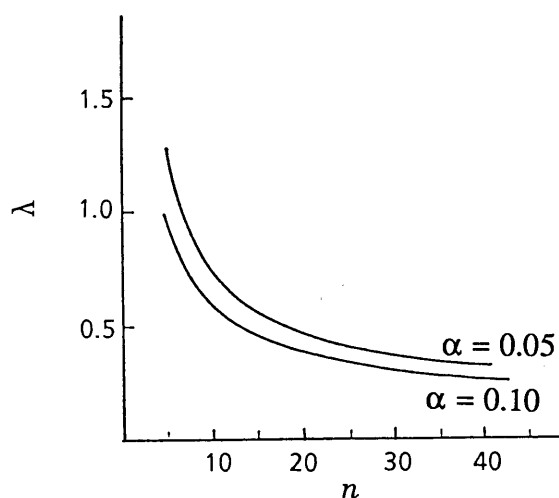


図-2.8 標本数 n による母平均信頼区間の変化

分散 σ^2 の推定に必要な標本数に関しても、同様にして何らかの目安をつけることができる。Ang and Tang (1977)によれば、標本数 $n > 20$ であれば標本分散 s^2 は母分散 σ^2 のよい推定量であるとされている。 c_u の変動係数に対する標本数 n の影響を、Tang et al. (1976)は修正係数 N_0 (平均を1、変動係数を Δ_0)で評価している。この変動係数 Δ_0 は次式で表示される。

$$\Delta_0 = \delta_s / \sqrt{n} \quad (2.31)$$

ここに、 δ_s は標本値の変動係数である。 Δ_0 と n の関係を図-2.9に示すが、やはり $n < 10$ で Δ_0 の値が大きいのに対し、 $n > 20$ では Δ_0 の値が小さく、しかも Δ_0 の低下

の度合いが減ることがわかる。この結果からも、 σ^2 の推定には少なくとも20個以上の標本数が必要であることが分かる。

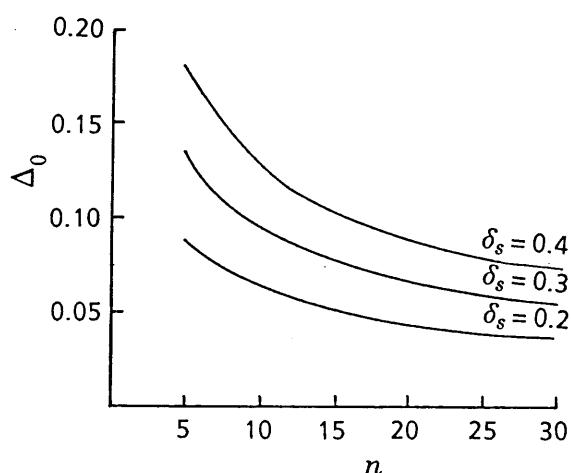


図-2.9 修正係数の変動係数 Δ_0 と標本数 n

次に、分布モデルの推定に必要な調査規模に関しては、仮定した分布の適合度検定に必要な標本数が目安となる。いま、分布モデルの χ^2 (カイ自乗)検定を行うとする。変数を k 個の区間に分け、各区間の標本数を n_1, \dots, n_k と仮定した分布から得られる理論度数を e_1, \dots, e_k とする。Ang and Tang(1977)によれば、分布の適合度検定においては、 $k \geq 5$ 、 $e \geq 5$ が必要とされているので、分布モデルの推定には少なくとも25個以上の調査規模が必要であるといえる。

ランダム成分で表現できる空間的な相関特性は、自己相関関数で表されるわけであるが、この関数は次のように求める。土質調査を標本間隔の狭いものから、いろいろな間隔の多くの標本値を採取し、その組合せを各間隔ごとに分けてそれぞれの相関係数を求める。さらに、この結果をもとに種々提案されている相関モデルの中から適合度のよいものを選び、そのパラメータを定めればよい。1次元の自己相関関数モデルの一例を次に示す。

$$\textcircled{1} \exp\left(-\frac{|\Delta z|}{d_z}\right) \qquad \textcircled{2} \exp\left\{-\left(\frac{\Delta z}{d_z}\right)^2\right\}$$

$$\textcircled{3} \exp\left(-\frac{|\Delta z|}{d_z}\right) \cos\left(\frac{\Delta z}{d_z}\right) \quad \textcircled{4} \left(1 + \frac{|\Delta z|}{d_z}\right) \exp\left(-\frac{\Delta z}{d_z}\right)$$

ここで、相関特性の減衰の程度を表すパラメータ d_z を相関パラメータと呼ぶことにする。①は、Matsuo and Asaoka (1977)が沖積粘土の非排水強度の深さ方向の特性を表すのに用いたり、Alonso and Krizek (1975)が、コーン貫入抵抗値の深さ方向の特性を表すのに用いている。②は、Tang (1979)が水平方向の一軸強度に関して用いている。 Δz は、2点間の距離である。さらに、2次元モデルとして次のものがある。

$$\textcircled{5} \exp\left[-\left\{\left(\frac{\Delta x}{d_x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{d_y}\right)^2\right\}\right]$$

$$\textcircled{6} \exp\left[-\left\{\left(\frac{\Delta x}{d_x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{d_y}\right)^2\right\}^{1/2}\right]$$

ここで、 d_x, d_y は x 方向, y 方向の相関パラメータであり、 $\Delta x, \Delta y$ は x 方向, y 方向の2点間の距離である。また、Vanmarcke and Fuleihan (1975)は、相関係数が1から $1/e (=0.368)$ に減少するときの距離 r_0 を相関距離とよんでいる。地盤物性値に関する1次元モデルの r_0 をまとめれば、表-2.2のようになる(鈴木・石井, 1987 b)。

表-2.2 相関距離 r_0

Material	Property	r_0 (m)	Source
North Sea Clay	cone penetration test (CPT)	3.0	Tang (1979)
Plastic Clay	dry density (vertical)	1.3	Vanmarcke & Fuleihan (1975)
Clean Sand Clay	CPT	1.6	Alonso & Kreizek (1975)
	CPT	1.91	
	water content	0.16	
Silty Loam Sea Clay	undrained shear strength (vertical)	0.63	Matsuo & Asaoka (1977)
		1.25	
		0.91	
Sea Clay	undrained shear strength (horizontal)	5.23	Matsuo (1984)
		333.3	
Sea Clay	undrained shear strength (vertical)	1.20	Horiuchi & Kawamura (1977)

Vanmarcke(1977)は、自己相関性の工学的意味とその定式化は次のように説明している。いま、ある土層の深さ Δz なる部分で平均化した地盤物性値のばらつきを考える。全土層での平均が μ 、分散が σ^2 と表されるとき、 Δz なる区間で平均化された値のばらつき $\sigma_{\Delta z}^2$ は次のように減少する。

$$\sigma_{\Delta z}^2 = \sigma^2 \Gamma^2(\Delta z) \quad (2.32)$$

ここに、 $\Gamma^2(\Delta z)$ は分散関数(variance function)、また $\Gamma(\Delta z)$ は減少係数(reduction factor)よばれ、 $\rho(\Delta z) = \exp(-|\Delta z|/d_z)$ あるいは $\rho(\Delta z) = \exp(-\Delta z^2/d_z^2)$ のように自己相関関数が表されるとき、それぞれ次のように定義される。

$$\textcircled{1} \quad \Gamma^2(\Delta z) = \left(\frac{d_z}{\Delta z}\right)^2 \left\{ 2\left(\frac{d_z}{\Delta z} - 1 + e^{-\Delta z/d_z}\right) \right\}$$

$$\textcircled{2} \quad \Gamma^2(\Delta z) = \left(\frac{d_z}{\Delta z}\right)^2 \left\{ \frac{\Delta z}{d_z} \sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{\Delta z}{d_z}\right) + e^{-\left(\Delta z/d_z\right)^2} - 1 \right\}$$

ここに、 Φ は標準正規分布関数であり、 d_z が相関パラメータとなる。

以上より、自己相関性の程度により、ある区間で平均化された地盤物性値のばらつきの程度が変化するという工学的意味が理解される。また、相関モデルを一般性をもって決めることは難しいが、実際の適用に際しては自己相関モデルの関数形はそれほど重要ではなく、むしろ相関パラメータの評価のほうが意味をもつことが多いことをCalle et al. (1987)が示している。

本研究では、以上の諸点より、地盤物性値の不確定性としては、本来地盤が有している不確定性のみを対象として確率論に基づき議論を進める。

2.7 まとめ

本章は、地盤物性値の不確定性に関するモデル化についてまとめたものである。結果は次のようにまとめることができる。

- ① 地盤物性値の空間分布に関する確率モデルとしては、対象とする構造物によって次の2つが考えられる(2.2節)。すなわち、盛土などは設計段階では存在していないため、過去の土質データから統計的性質を予測することから、確率場として取り扱う。また、切土などの設計段階で存在している地盤で、そのサイトの土質データや変位などの観測値がある場合には、標本場として取り扱うことができる。
- ② 均質な確率場を扱うときに必要となるエルゴード仮説についてまとめた(2.3節)。エルゴード仮説を仮定して理論を展開する理由は次のとおりである。すなわち、同一土層の地盤物性値の空間分布はトレンド成分を除けばエルゴード仮説が成り立つと考えられること、さらに確率論を実際に適用するとしても、母集団の統計的推定に対しては土質データが十分あることはまれであるためである。
- ③ 地盤物性値の空間分布を標本場としたときに、土質データから地盤物性値の空間分布を推定する手法としてユニバーサル・クリッキングの定式化を示した(2.4節)。さらに、第3章で説明する確率有限要素法に用いるときに必要となるブロック・クリッキングの定式化を示した。
- ④ クリッキングによる地盤物性値の空間分布推定に関する特性をまとめた(2.5節)。土質調査・試験が行われた位置(標本点)における地盤物性値は、調査・試験による誤差を除けば確定値として取り扱われる。このことから、地盤物性値の空間分布に関する不確定性は標本点以外の位置において生じ、その誤差は標本点からの距離の関数として与えられる。すなわち、クリッキングではこの推定誤差についても推定と同時に評価され、標本点からの距離が離れるに従って推定誤差が大きくなるものとして、地盤物性値の空間分布が推定される。したがって、土質調査から得られる土質データについて調査位置が判明

していれば、地盤物性値の空間分布を標本場として取り扱うことができるので、地盤物性値の不確定性は相当に小さくすることができる。

- ⑤ 地盤物性値の統計的性質を求めるときに問題となる土質調査・試験による誤差や統計的推定誤差などの不確定性についてまとめた(2.6節)。なお本研究では、土質調査・試験による誤差や統計的推定誤差に係わる不確定性は、正確な土質調査・試験と数多くの標本数があれば小さくなるものと考えて無視し、本来地盤が有する地質学的な不確定性のみを対象とする。

第3章 確率有限要素法による確率応答値

3.1 概 説

地盤に盛土や地震などの荷重が作用したとき、地盤の変位や応力等の応答を確率論的に計算する手法の1つに確率有限要素法がある。ここでは、地盤工学における確率有限要素法の位置づけを示し、開発する手法の特徴をまとめる。表-3.1は、有限要素法を構造系(システム)と外力(入力)の性質によって、4つに分類したものである。

表-3.1 確率論による有限要素法の分類

	構造系 演算子: $L(\cdot)$	入力 外力: $F(t, \mathbf{x})$	出力 応答: $Y(t, \mathbf{x})$
a. 完全確定問題	確定的	確定的	確定的
b. 確率入力問題	確定的	確率的	確率的
c. 確率構造問題	確率的	確定的	確率的
d. 完全確率問題	確率的	確率的	確率的

注) 表では、方程式 $L[Y(t, \mathbf{x})] = F(t, \mathbf{x})$ を解く問題を考えている。

表中のb. 確率入力問題は、広義のランダム振動問題と呼ぶことができ、構造物に作用する外力を確率変数(静的問題)や確率過程(動的問題)としてモデル化し、応答を求める手法であり、以前より多くの研究がなされている(たとえばLin, 1967)。一方、材料物性値などの構造系自体に含まれる不確定性を考慮するc. 確率構造問題は、数学的な取扱いが複雑なこと、および構造系に含まれる不確定性は外力のそれに比して一般に小さいと考えられることなどにより、比較的研究がなされていなかった。近年のコンピュータの発達にともなって、このような確率構造問題の解析手法として、確率有限要素法を利用しようとする動きが土木、建築、機械などの分野で盛んになってきた。この研究では、材料物性値の不確定性を確率場としてモデル化し、その空間的な変動をより詳細に評価することが主流になりつつある。地盤工学においても地盤物性値の不確定性は、構造物の安全性

に大きく影響することから、確率有限要素法が必要となってきた。地盤工学に確率論の導入を考えると、地盤物性値の不確定性を考慮することになるので、表-3.1の分類に従えば確率構造問題となるが、自重は荷重側に分類されるため、一般的にd. 完全確率問題の範ちゅうに属することになる。

本章では地盤物性値の空間分布を考慮でき、数値計算の効率化と高精度化を得られる手法を開発する。確率有限要素法は、解析的近似法によるものとモンテカルロ・シミュレーション法(Monte Carlo simulation method)とに大別される。数値実験法の1つであるモンテカルロ・シミュレーション法は、破壊確率を求めるために一般に数多くの試行を繰り返す必要があり、有限要素法のような複雑なモデルにこの手法を適用した場合には多大な計算機費用が必要になる。そこで解析的近似法として、線形1次近似理論を適用した確率有限要素法が提案された。この手法は2次モーメント法とよばれ、いくつかの確率変数からなる非線形な性能関数をその平均値まわりにテーラー展開して、2次以降の項を無視して線形化する手法である。しかし、材料物性値や荷重などの確率変数が正規分布のときには精度のよい解を与えるが、正規分布以外のときには得られた解の精度が必ずしも良くない。これは、線形近似に平均値まわりのテーラー展開を用いているため、性能関数の定義式により応答値の確率が変わり、解は不変性をもたない。そこで、Hasofer and Lind (1974)は各確率変数を最も破壊しやすい点(以後設計点とよぶ)まわりにテーラー展開することにより不変性のある解を求める方法を提案した。また、Rackwitz and Fissler (1978)は、正規分布以外の確率変数を設計点において、正規分布で近似(正規化近似)することを提案した。さらにParkinson (1978)は、それまでは独立として扱っていた確率変数の相関性を考慮できる定式化を示した。したがって、これらの2次モーメント法と正規化近似法を確率有限要素法に導入することによって、性能関数の定義式によらず不変性のある解を得ることができ、さらに確率変数が正規分布以外の場合においても、精度よく解を求めることができる一般性のある確率有限要素法を開発することができる。

本研究で必要となる2次モーメント法の概要について、3.2節にまとめる。提案する確率有限要素法は、この2次モーメント法の概念に基づいた1次近似摂動法の1つである。

次に、提案する確率有限要素法の定式化とフローを、3.3節に示す。本研究では確率有限要素法を地盤工学の問題に適用するため、地盤物性値としては、応答値に影響を与える弾性係数 E 、ポアソン ν 、荷重に関連する単位体積重量 γ_t を考慮し、地盤物性値間の相関性や空間的な相関性も考慮して定式化する。また、斜面安定解析などのすべり破壊問題にも確率有限要素法を適用することから、その性能関数に含まれる粘着力 c および内部摩擦角 ϕ も含めている。なお、斜面安定解析に対する性能関数の定式化については第7章に、沈下量予測の性能関数については3.5(2)節に示す。

モンテカルロ・シミュレーション法では、平均値、分散、自己共分散関数を満足する地盤物性値の空間分布を、確率場として乱数を用いて生成することが行われる。抽出された標本場は、従来の(確定論的な)有限要素法の入力条件となり、計算から応答値(変位、ひずみなど)が得られる。そして、これらの試行を数多く繰り返すことにより、応答のデータを作成して、その結果を統計解析することにより、確率特性を求めたり安全性を評価することができる(津田, 1977; Rubinstein, 1981)。このようなモンテカルロ・シミュレーション法による確率有限要素法は、複雑な問題や高精度な解を要求される問題に用いるのに適しており、本論文中でも要素分割の精度や本研究で提案している手法の検証に用いることから、3.4節に定式化を示す。さらに、この手法の応用として、第2章で説明したクリッキングを導入した条件付シミュレーション法についても定式化を合わせて示している。

すべり破壊を対象とした簡単な数値解析例から、本研究で開発した確率有限要素法の精度をモンテカルロ・シミュレーション法による結果と比較することにより検証するとともに、その適用限界についての考察を3.5節で行う。さらに、地盤物性値の空間的な相関性を考慮した確率場に適用したときの精度についても、地盤の沈下量予測の問題から検討する。

3.2 2次モーメント法の概要

信頼性設計法では、安全性照査のために性能関数(performance function)または破壊基準関数を用いている。いま、設計変数を $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_n)^T$ として表現すると、式(1.3)で示した安全性の余裕 M は、性能関数 $g(\mathbf{X})$ として次のように設計空間を分けることになる。

$$g(\mathbf{X}) > 0 : \text{安全状態}$$

$$g(\mathbf{X}) = 0 : \text{限界状態}$$

$$g(\mathbf{X}) < 0 : \text{破壊状態}$$

ここで、 $g(\mathbf{X})=0$ は限界状態曲面とよばれる n 次元曲面となる。

設計変数 \mathbf{X} の結合確率密度関数を $f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ とすれば、破壊状態となる確率(破壊確率)は次式で表現できる。

$$P_f = \int \cdots \int_{\{g(\mathbf{X}) \leq 0\}} f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (3.1)$$

現実にはこの結合確率密度関数を $f_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ を与えるための情報を得ることは困難である。また、たとえ結合確率密度関数が規定できるとしても、 $g(\mathbf{X})=0$ も強い非線形関数のことが多く、上式で示したような多重積分は不可能であることが多いため実用的でない。

そこで、破壊を求める計算において、設計変数の情報を平均値と分散(共分散を含む)である1次および2次モーメントに限定せざるを得ないことが多い。この条件のもとでは、性能関数が設計変数の線形和で表現できれば、性能関数の平均値と分散を容易に求めることができる。この定式化はCornell(1969)により提案され、2次モーメント定式化(second moment formulation)とよばれ、信頼性の尺度を性能関数の平均値 μ_g を標準偏差値 σ_g で割った値 μ_g / σ_g (信頼性指標または安全性指標 β) で定義する。また、一般には性能関数は非線形であるため、これを設計変数の平均値 $(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})$ においてテーラー展開して、2次以降の項を無視することにより線形化(1次近似)することが行われた。そのため、この手法は1次近似2次モーメント法(first-order second-moment method)とよばれている(Ang and Cornell, 1974)。

設計変数の平均値における1次近似は、等価な限界状態に対する不変性 (invariance) の問題を生じることになる (Hasofer and Lind, 1974)。すなわち、性能関数の定義によって安全性指標 β の値が異なるという問題である。そこで、この不変性の問題を解決するために安全性指標を次に示すように別の点から考えらた。

一般に設計変数 $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ を平均値が0、標準偏差値が1.0となるように、次式で基準化する。

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

安全状態および破壊状態を定義する限界状態方程式を、基準化した空間内に写像する(2変数の場合には図-3.1に示すとおりである)。基準化された変数 X'_i を用いて限界状態方程式は次のように表される。

$$g(\sigma_{X_1} X'_1 + \mu_{X_1}, \dots, \sigma_{X_n} X'_n + \mu_{X_n}) = 0 \quad (3.3)$$

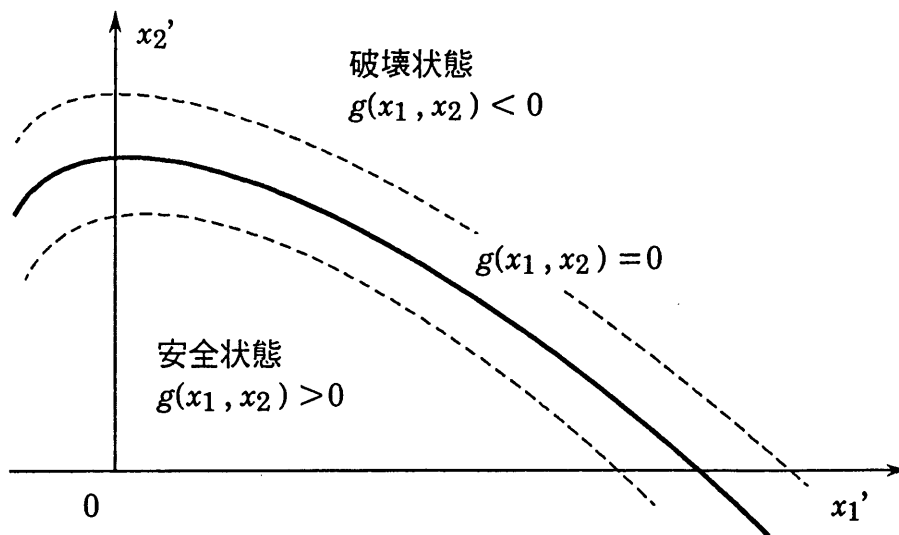


図-3.1 基準化した空間における安全状態と破壊状態

図-3.1からわかるように、限界状態曲面(あるいは破壊曲面) $g(\mathbf{X}) = 0$ が原点から遠くへ動くにつれ、安全領域 $g(\mathbf{X}) > 0$ は大きくなる。したがって原点に対する限界状態曲面の相対位置は安全性、信頼性を表すことになる。そこで安全性指標 β を、限界状態曲面 $g(\mathbf{X}) = 0$ から原点への最小距離で表すことが提案された

(Hasofer and Lind, 1974 ; Ditlevsen, 1979)。Shinozuka (1981) は、原点から最小距離にある限界状態曲面上の点は最も破壊しそうな点 (most probable failure point) であることを示した。また、この最も破壊しそうな点は破壊点(failure point) や設計点(design point) ともよばれることがある(本研究では設計点としている)。このような背景から、性能関数の設計点 \mathbf{x}^* においてテーラー展開を行う1次近似2次モーメント法が提案された。性能関数 $g(\mathbf{X})$ を限界状態曲面 $g(\mathbf{x}^*)=0$ 上の点 \mathbf{x}^* においてテーラー展開する。すなわち、

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) (X_j - x_j^*) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_* + \dots \quad (3.4)$$

ここに偏微分係数 $(\partial g / \partial X_i)_*$ は $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ における値である。しかし、限界状態曲面上では $g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$ であるから

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) (X_j - x_j^*) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_* + \dots \quad (3.5)$$

ここで

$$X_i - x_i^* = (\sigma_{X_i} X'_i + \mu_{X_i}) - (\sigma_{X_i} x'_i + \mu_{X_i}) = \sigma_{X_i} (X'_i - x'_i)$$

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial X'_i} \frac{dX'_i}{dX_i} = \frac{1}{\sigma_{X_i}} \frac{\partial g}{\partial X'_i}$$

になることをより、

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X'_i - x'_i) \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)_* + \dots \quad (3.6)$$

したがって、2次以降の項を無視すると、性能関数 $g(\mathbf{X})$ の平均値および分散はそれぞれ次のようになる。

$$\mu_g \approx - \sum_{i=1}^n x'_i \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)_* \quad (3.7)$$

$$\sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \quad (3.8)$$

これら両式より、安全性指標 β が求められる。

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{-\sum_{i=1}^n x_i' \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2}} \quad (3.9)$$

この方法は、テーラー展開をする点を平均値から設計点に修正したので、修正2次モーメント法(invariant second-moment method)とよんで区別したり、または、もとの方法を平均値1次近似2次モーメント法(mean-value first-order second-moment method)とよんだりすることもある。

さて、設計点 \mathbf{x}^* は、性能関数が非線形の場合には簡単には見つけることができない。そこで、限界状態曲面における接平面のうち最も原点からの距離が短い点を探す。具体的には、まず基準化した設計点 \mathbf{x}'^* を次のように定義する。

$$x_i'^* = -\alpha_i^* \beta \quad (3.10)$$

ここに、 α_i^* は次式に示す方向余弦である。

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2}} \quad (3.11)$$

すなわち、 \mathbf{x}^* は次のようになる。

次に、限界状態方程式

$$x_i^* = \sigma_{X_i} x_i'^* + \mu_{X_i} = \mu_{X_i} - \alpha_i^* \sigma_{X_i} \beta \quad (3.12)$$

から、安全性指標 β を求め、 \mathbf{x}^* が収束するまで繰り返し計算をする。

また、Shinozuka (1981) はこれを解くのにラグランジェの未定係数法を用いている。 \mathbf{X}' の原点から限界状態曲面 $g(\mathbf{X})=0$ の上の設計点 $\mathbf{x}'^*=(x_1'^*, x_2'^*, \dots, x_n'^*)^T$ までの距離は、

$$D = \sqrt{X_1'^2 + \dots + X_n'^2} = (\mathbf{X}'^T \mathbf{X}')^{1/2} \quad (3.13)$$

そこで、原点からの距離が最小な限界状態曲面上の設計点 \mathbf{x}'^* は、 $g(\mathbf{X})=0$ なる制約のもとで関数 D を最小にすることにより定められる。すなわち、

$$L = D + \lambda g(\mathbf{X}) \quad (3.14a)$$

あるいは

$$L = (\mathbf{X}'^T \mathbf{X}')^{1/2} + \lambda g(\mathbf{X}) \quad (3.14b)$$

とする。スカラー表示では、 $X_i = \sigma_{X_i} X'_i + \mu_{X_i}$ として、

$$L = \sqrt{X_1'^2 + \dots + X_2'^2 + \dots + X_n'^2} + \lambda g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.14c)$$

L を最小にする条件から、 $n+1$ 個の未知数を含む次の $n+1$ 個の方程式を得る。

$$\frac{\partial L}{\partial X'_i} = \frac{X'_i}{\sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial X'_i} = 0 ; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.15)$$

かつ、

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (3.16)$$

上記の連立方程式の解より設計点 \mathbf{x}'^* が求められる。

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial g}{\partial X'_1}, \frac{\partial g}{\partial X'_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial X'_n} \right)^T \quad (3.17)$$

を要素とする勾配ベクトル

$$\frac{\partial g}{\partial X'_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial X'_i} = \sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \quad (3.18)$$

を導入すれば、式(3.15)の方程式はマトリックス表示で次のように書ける。

$$\frac{\mathbf{X}'}{(\mathbf{X}'^T \mathbf{X}')^{1/2}} + \lambda \mathbf{G} = 0 \quad (3.19)$$

これより

$$\mathbf{X}' = -\lambda D \mathbf{G} \quad (3.20)$$

したがって

$$D = [(\lambda D \mathbf{G}^T)(\lambda D \mathbf{G})]^{1/2} = \lambda D (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{1/2} \quad (3.21)$$

よって

$$\lambda = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1/2} \quad (3.22)$$

これを式(3.19)に代入すれば

$$\mathbf{X}' = \frac{-\mathbf{G} D}{(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{1/2}} \quad (3.23)$$

一方、式(3.23)に前から \mathbf{G}^T を乗じて

$$D = \frac{-G^T X'}{(G^T G)^{1/2}} \quad (3.24)$$

式(3.23)を式(3.16)に代入すると未知数 D を含む1個の方程式となり、その解は最小距離 β を与える。すなわち

$$\beta = \frac{-G^{*T} x'^*}{(G^{*T} G^*)^{1/2}} \quad (3.25a)$$

ここに G^* は設計点 x'^* における勾配ベクトルである。式(3.25a)をスカラー表示すれば、

$$\beta = \frac{-\sum_{i=1}^n x'_i{}^* \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)^2}} \quad (3.25b)$$

ここに偏微分係数 $(\partial g / \partial X'_i)^*$ は x'^* における値である。上記の β を式に適用すれば、 x'^* は

$$x'^* = \frac{-G^* \beta}{(G^{*T} G^*)^{1/2}} \quad (3.26a)$$

となる。この x'^* の要素はスカラーの形では

$$x'_i{}^* = -\alpha_i^* \beta ; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.26b)$$

であり、ここに

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)^2}} \quad (3.27)$$

α_i^* は軸 X'_i に沿う方向余弦である。式(3.9)と式(3.25b)が、また式(3.10)と式(3.26b)が同じであり、両者は等しいことがわかる。

さらに、2次モーメント法は確率変数が正規分布に従わないときには破壊確率が求めることができなかったが、Rackwitz and Fiessler (1978)により任意確率変数を等価な正規確率変数に変換する方法を提案されたり、Parkinson (1978)によりそれまでの2次モーメント法が確率変数を互いに独立していたのに対して、確

率変数間の相関が存在しても求めることができるように改良されるようになってきた。

本研究では、従来の平均値まわりでテーラー展開していた1次近似摂動法を用いた確率有限要素法に、これらの優れた方法を導入することにより、新しい確率有限要素法を開発する。すなわち、設計点まわりでテーラー展開を行うことにより、確率変数が正規分布に従わないときや確率変数間に相関性をもつときにも精度のよい解が得られるように改良する。

3.3 2次モーメント法と正規化近似法を用いた確率有限要素法の定式化

本節では、2次モーメント法と正規化近似法を確率有限要素法に導入し、一般性のある確率有限要素法を開発する。ここでは、地盤物性値として応答に影響を与える弾性係数 E 、ポアソン ν 、荷重に関連する単位体積重量 γ_t を確率変数として扱っており、さらに地盤物性値間の相関性や空間的な相関性を考慮できる定式化となっている(鈴木・石井, 1985, 1987 a)。

(1) 変位, 応力に関する定式化

一般の有限要素法において、変位と荷重の関係は次の剛性方程式によって与えられる。

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.28)$$

ここで、 \mathbf{K} は剛性マトリックス、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 \mathbf{f} は荷重ベクトルである。

また、応力と変位の関係は次のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (3.29)$$

ここで、 \mathbf{D} および \mathbf{B} は、それぞれ応力とひずみ、ひずみと変位を結び付けるマトリックスである。

各要素の変位の平均値 $E[u_i]$ 、分散 $\text{Var}[u_i]$ および共分散 $\text{Cov}[u_i, u_j]$ は次のように計算される。まず、変位 u_i を確率変数 X_k の設計点まわりにテーラー展開し、2次以降の項を無視して線形化する。

$$u_i = u_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{k=1}^n (X_k - x_k^*) \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right)_* \quad (3.30)$$

ここで、 X_k は確率変数であり、その個数を n 個とする。また、 x_k^* は X_k の設計点、 $(\partial u_i / \partial X_k)_*$ は設計点における偏微分係数の値を示す。

式(3.29)から、変位 u_i の平均値と分散は次のように与えられる。

$$E[u_i] = u_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{k=1}^n (\mu_{X_k} - x_k^*) \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right)_* \quad (3.31)$$

$$\text{Var}[u_i] = E[\{E[u_i] - u_i\}^2]$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\left\{ \sum_{k=1}^n (\mu_{X_k} - X_k) \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right)_* \right\}^2 \right] \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right)_* \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_l} \right)_* E[(\mu_{X_k} - X_k)(\mu_{X_l} - X_l)] \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right)_* \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_l} \right)_* \text{Cov}[X_k, X_l] \quad (3.32)
\end{aligned}$$

ここで、 μ_{X_k} は X_k の平均値、 $\text{Cov}[X_k, X_l]$ は X_k と X_l の共分散である。また、変位 u_i と u_j の共分散は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[u_i, u_j] &= E[\{E[u_i] - u_i\}\{E[u_j] - u_j\}] \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right)_* \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_l} \right)_* \text{Cov}[X_k, X_l] \quad (3.33)
\end{aligned}$$

さらに式(3.31)~(3.33)の計算に必要な $u_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ および $(\partial u_i / \partial X_k)_*$ は次のように算定される。また、確率変数 X_k と X_l の共分散マトリックスを含むことにより、地盤物性値間の相関あるいは空間的な位置による地盤物性値の相関を考慮することができる。

有限要素法において変位と荷重の関係は式(3.28)によって与えられる。ここで、式(3.28)は未知の変位 \mathbf{u}'' と既知の変位 \mathbf{u}' に分けることにより次のように表される。

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \hline \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}'' \\ \mathbf{u}' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{array} \right) \quad (3.34)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}'' \\ \mathbf{u}' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{f}_1 - \mathbf{K}_{12} \mathbf{u}' \\ \mathbf{u}' \end{array} \right) \quad (3.35)$$

式(3.35)より、未知の変位 \mathbf{u}'' は次のように表される。

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{K}_{11}^{-1} \{ \mathbf{f}_1 - \mathbf{K}_{12} \mathbf{u}' \} \quad (3.36)$$

ここで、確率変数である E, ν は $\mathbf{K}_{11}, \mathbf{K}_{12}$ に、また γ_t, f は \mathbf{f}_1 に、 \mathbf{u} は \mathbf{u}' のベクトルに含まれる。したがって、後述する収束計算によりこれらの確率変数の設計点における値 $x_k^* (k=1, 2, \dots, n)$ を求めれば、式(3.36)により破壊点 x_k^* における未

知の変位 \mathbf{u}'' 、すなわち $u_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ が求められる。

$(\partial u_i / \partial X_k)_*$ の計算は確率変数 X_k が変位のときと、それ以外のときとは定式化が異なる。確率変数 X_k が変位 u_i 以外の場合(すなわち、確率変数が E, v, γ_t, f, u のとき)には、式(3.28)の両辺を X_k で偏微分する。

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_k} \right)_* = \mathbf{K}^{*-1} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X_k} \right)_* - \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_k} \right)_* \right\} \quad (3.37)$$

収束計算により X_k^* を求めれば、式(3.37)の右辺に含まれる各項は既知となり、 $(\partial \mathbf{u} / \partial X_k)_*$ を計算することができる。

また、確率変数 X_k が変位 u_i の場合には、式(3.36)の両辺を X_k で偏微分する。

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}''}{\partial X_k} \right)_* = -\mathbf{K}_{11}^{*-1} \mathbf{K}_{12}^* \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial X_k} \right)_* \quad (3.38)$$

ここで、 $(\partial \mathbf{u}' / \partial X_k)_*$ は $X_k = u_i$ のとき 1、それ以外では 0 となる要素より構成されるベクトルである。

各要素の応力の期待値 $E[\sigma_i]$ 、分散 $Var[\sigma_i]$ および共分散 $Cov[\sigma_i, \sigma_j]$ は、次のように計算される。変位の計算と同様に、応力 σ_i を確率変数 X_k の破壊点まわりにテーラー展開し、2次より高次の項を無視して線形化する。

$$\sigma_i = \sigma_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{k=1}^n (X_k - x_k^*) \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial X_k} \right)_* \quad (3.39)$$

式(3.39)から、応力 σ_i の期待値、分散および応力 σ_i と σ_j の共分散は次のように与えられる。

$$E[\sigma_i] = \sigma_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{k=1}^n (\mu_{X_k} - x_k^*) \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial X_k} \right)_* \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} Var[\sigma_i] &= E[\{E[\sigma_i] - \sigma_i\}^2] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial X_k} \right)_* \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial X_l} \right)_* Cov[X_k, X_l] \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} Cov[\sigma_i, \sigma_j] &= E[\{E[\sigma_i] - \sigma_i\}\{E[\sigma_j] - \sigma_j\}] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial X_k} \right)_* \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial X_l} \right)_* Cov[X_k, X_l] \end{aligned} \quad (3.42)$$

式(3.40)~(3.42)の計算に必要な $\sigma_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ および $(\partial\sigma_i/\partial X_k)_*$ の誘導方法を以下に示す。

有限要素法において、式(3.29)より要素 j について応力と変位の関係は次式で与えられる。

$$\sigma_j^* = D_j^* B_j^* u_j^* \quad (3.43)$$

ここで、 σ_j は図-3.2に示される要素をもつ応力ベクトル $\sigma_j^T = \{\sigma_\xi, \sigma_\zeta, \tau_{\xi\zeta}\}_j$ である。 σ_j^* は、収束計算の結果から得られる u_j^* を式(3.43)に代入することにより、 $\sigma_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ が求められる。

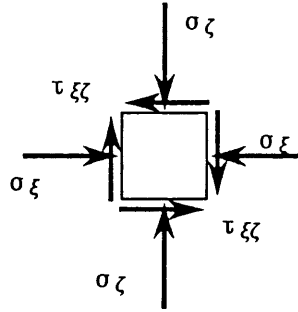


図-3.2 要素に作用する応力

式(3.43)の両辺を X_k で偏微分すると次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial\sigma_j}{\partial X_k}\right)_* = \left(\frac{\partial D_j}{\partial X_k}\right)_* B_j^* u_j^* + D_j^* B_j^* \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k}\right)_* \quad (3.44)$$

ここで B_j は X_k とは独立であるので $(\partial B_j/\partial X_k) = 0$ となり、 B_j の偏微分係数の項は省かれている。 $(\partial\sigma_j/\partial X_k)_*$ は u_j^* および $(\partial u_j/\partial X_k)_*$ を式(3.44)に代入することにより、 $(\partial\sigma_i/\partial X_k)_*$ が求められる。

主応力の平均値、分散および共分散は次のように求められる。平面問題を考えると、主応力および最大せん断力は ξ, ζ 方向の応力を用いて次式によって与えられる。(式(3.46)~(3.51)において、要素番号を示す添字 j は省略している。)

$$\sigma_j'^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{max}\}_j \quad (3.45)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\zeta}{2} + \left\{ \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_{\xi\zeta}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.46)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_\xi + \sigma_\zeta}{2} - \left\{ \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_{\xi\zeta}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.47)$$

$$\tau_{max} = \left\{ \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_{\xi\zeta}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.48)$$

また、主応力の偏微分係数は式(3.46)~(3.48)を X_k に関して偏微分することにより与えられる。

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial X_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial X_k} + \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial X_k} \right) + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial X_k} - \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial X_k} \right) (\sigma_\xi - \sigma_\zeta) + 2 \tau_{\xi\zeta} \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial X_k}}{2 \left\{ \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_{\xi\zeta}^2 \right\}^{1/2}} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial X_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial X_k} + \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial X_k} \right) - \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial X_k} - \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial X_k} \right) (\sigma_\xi - \sigma_\zeta) + 2 \tau_{\xi\zeta} \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial X_k}}{2 \left\{ \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_{\xi\zeta}^2 \right\}^{1/2}} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial \tau_{max}}{\partial X_k} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial X_k} - \frac{\partial \sigma_\zeta}{\partial X_k} \right) (\sigma_\xi - \sigma_\zeta) + 2 \tau_{\xi\zeta} \frac{\partial \tau_{\xi\zeta}}{\partial X_k}}{2 \left\{ \left(\frac{\sigma_\xi - \sigma_\zeta}{2} \right)^2 + \tau_{\xi\zeta}^2 \right\}^{1/2}} \quad (3.51)$$

式(3.46)~(3.48)および式(3.49)~(3.51)より、主応力の平均値、分散および共分散も求めることができる。また、 ξ, ζ 方向の応力は単に式(3.43)および式(3.44)を式(3.40)~(3.42)に代入することにより得られる。

(2) 破壊確率の算定

性能関数を $g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$ と定義し、性能関数が負になる確率を破壊確率とする。ここで、破壊という言葉を使ったがある限界状態を越える確率という意味である。この性能関数を設計点 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ においてテーラー展開し、2次以降の項を無視して線形化すると次のようになる。

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* \quad (3.52)$$

ここに偏微分係数は $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ における値である。したがって、性能関数 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の平均値および分散はそれぞれ次のようになる。

$$\mu_g \approx \sum_{i=1}^n (\mu_{X_i} - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* \quad (3.53)$$

$$\sigma_g^2 \approx \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_*^2 \quad (3.54)$$

これら両式より、安全性指標 β が求められる。

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{\sum_{i=1}^n (\mu_{X_i} - x_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_*^2}} \quad (3.55)$$

また、安全性指標 β は設計点における確率変数の値に依存するので、設計点を確定するための収束計算が必要になる。まず確率変数 X_i による性能関数の偏微分係数より以下の式で α_i を計算する。

$$\alpha_i^* = \frac{\sigma_{X_i} \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_*^2}} \quad (3.56)$$

ここに、 α_i^* は次式に示す方向余弦である。安全性指標 β を用いて、確率変数 X_i の設計点 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ は次のように計算する。

$$x_i^* = \mu_{X_i} - \alpha_i^* \sigma_{X_i} \beta \quad (3.57)$$

安全性指標 β が収束するまで新しい β, α_i^* を与え、収束計算を繰り返す。 β, α_i^* の初期値には平均値まわりのテーラー展開の計算結果を用いる。

すべての確率変数が正規分布であれば、各要素の安全性指標 β から、破壊確率 P_f は次式により計算できる。

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.58)$$

となる。ここで、 Φ は標準正規確率分布関数を表す。

しかし、個々の確率変数が正規分布でなければ破壊確率は容易には算出できない。このことから、Paloheimo(1974), Rackwitz and Fiessler (1978)は、確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の確率分布が正規分布でないとき、性能関数が線形ならば破壊確率は等価正規分布を用いても計算できることを示した。理論的には、そのような等価正規分布はRosenblatt変換により得られ(Rosenblatt, 1952)、この等価正規分布を用いれば、破壊確率の計算は正規変数の場合と同じように扱うことができる。個々の確率変数について、設計点 x_i^* において、等価正規分布およびもとの非正規分布の累積確率ならびに確率密度の値がともにそれぞれ等しくなるように、非正規分布に対する等価正規分布を求める。

上述のように設計点 x_i^* における累積確率を等しいと置くと次のようになる。

$$\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = F_{X_i}(x_i^*) \quad (3.59)$$

ここに、 $\mu_{X_i}^N, \sigma_{X_i}^N$ は X_i に対する等価正規分布のそれぞれ平均値、標準偏差、 $F_{X_i}(x_i^*), f_{X_i}(x_i^*)$ は X_i のもとの分布関数と密度関数の x_i^* における値、 Φ は標準正規分布関数である。この式を解けば

$$\mu_{X_i}^N = x_i^* - \sigma_{X_i}^N \Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i^*)\right] \quad (3.60)$$

また、対応する確率密度の x_i^* における値を等しいと置いて、

$$\frac{1}{\sigma_{X_i}^N} \phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = f_{X_i}(x_i^*) \quad (3.50)$$

ここに、 ϕ は標準正規密度関数である。これより $\sigma_{X_i}^N$ は次のようになる。

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{\Phi\left\{\Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i^*)\right]\right\}}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (3.51)$$

ここに、肩添字 N は等価正規分布に対する統計量を意味する。したがって設計点は、次のように表すことができる。

$$x_i^* = \sigma_{X_i}^N x_i'^* + \mu_{X_i}^N = -\alpha_i \beta \sigma_{X_i}^N + \mu_{X_i}^N \quad (3.52)$$

これまで確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n は無相関あるいは独立と仮定して、破壊確率の計算を行ってきた。相関性のある確率変数についてはもとの確率変数を一組の無相関な確率変数に変換することができる。この変換を行うことにより、これまで述べてきた手法にそのまま適用できることになる。変換はもとの確率変数の共分散あるいは共分散行列に依存し、次のように行われる。もとの確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の共分散行列は、

$$\mathbf{C}_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Cov}(X_1, X_3) & \dots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \sigma_{X_2}^2 & \text{Cov}(X_2, X_3) & \dots & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \text{Cov}(X_n, X_3) & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

であるとする。つぎに、確率変数ベクトル \mathbf{X} から平均値 μ_X を引いた確率変数ベクトル \mathbf{X}' を作成する。

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} - \mu_X \quad (3.54)$$

ここに、 $\mathbf{X}' = \{X'_1, X'_2, \dots, X'_n\}^T$, $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$, $\mu_X = \{\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}\}^T$ である。また、変換された \mathbf{X}' の共分散マトリックスも \mathbf{C}_{XX} となる。

ここで求めたい無相関の確率変数ベクトル \mathbf{Y} は、確率変数ベクトル \mathbf{X}' から次の直交変換によって求めることができる。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T \mathbf{X}' \quad (3.55)$$

ここに、 $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}^T$

\mathbf{A} = 直交変換マトリックス

\mathbf{A} を共分散マトリックス \mathbf{C}_{XX} の固有ベクトル、 λ を \mathbf{C}_{XX} の固有値の対角マトリックスとすると、 \mathbf{A} は次のような関係を保つ。

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C}_{XX} \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} \quad (3.56)$$

共分散マトリックス \mathbf{C}_{XX} は常に実数で対称となるため、固有ベクトルは互いに直交する。

式(3.55)の直交変換を用いて、安全性指標は次のようになることが示される。

$$\beta = \frac{-\mathbf{G}^{*T} \mathbf{x}^*}{(\mathbf{G}^{*T} \mathbf{C}_{XX} \mathbf{G}^*)^{1/2}} \quad (3.57)$$

ここで、 \mathbf{G}^* は性能関数を確率変数ベクトル \mathbf{X}' で偏微分したベクトル、すなわち $\{(\partial g / \partial X_1'), (\partial g / \partial X_2'), \dots, (\partial g / \partial X_n')\}^T$ である。また、添字*は設計点での値を示す。

ところで、もとの確率変数ベクトル \mathbf{X} は次のように \mathbf{Y} と関係づけられる。 \mathbf{A} は直交性を有するため、 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ となる。よって、式(3.55)を反転させると

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{Y} \quad (3.58)$$

\mathbf{Y} の共分散マトリックス \mathbf{C}_{YY} は

$$\mathbf{C}_{YY} = E[\mathbf{A}^T \mathbf{X}' \mathbf{X}'^T \mathbf{A}] = \mathbf{A}^T E[\mathbf{X}' \mathbf{X}'^T] \mathbf{A} \quad (3.59)$$

であるが、

$$E[\mathbf{X}' \mathbf{X}'^T] = \mathbf{C}_{XX} \quad (3.60)$$

となるため、式(3.56)を用いて

$$\mathbf{C}_{YY} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{XX} \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda} \quad (3.61)$$

と表すことができる。したがって、 \mathbf{C}_{YY} の固有値もまた確率変数 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ それぞれの分散である。変換された確率変数ベクトル \mathbf{Y} の空間において、偏微分係数は次のように求められる。

$$\frac{\partial g}{\partial Y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial X'_j} \frac{\partial X'_j}{\partial Y_i} \quad (3.62)$$

式(3.55)の変換は \mathbf{X}' から \mathbf{Y} への座標軸の回転を意味する。図-3.3は2変数の場合のこの変換を図示したものである。

これまでの説明では、相関性をもつ確率変数ベクトル \mathbf{X} から独立な確率変数ベクトル \mathbf{Y} への座標変換が必要であり、そのために固有値分解を行った。しかし、実際の計算では、式(3.57)に示すように固有値分解せずに安全性指標を求めること

ができることが、Parkinson (1978)や長 (1986)によって示されている。すなわち、安全性指標は式(3.57)となり、設計点を求める式は次のようになる。

$$\mathbf{x}'^* = - \mathbf{C}_{XX} \mathbf{G}^* \frac{\mathbf{G}^{*T} \mathbf{x}'^*}{(\mathbf{G}^{*T} \mathbf{C}_{XX} \mathbf{G}^*)} \quad (3.63)$$

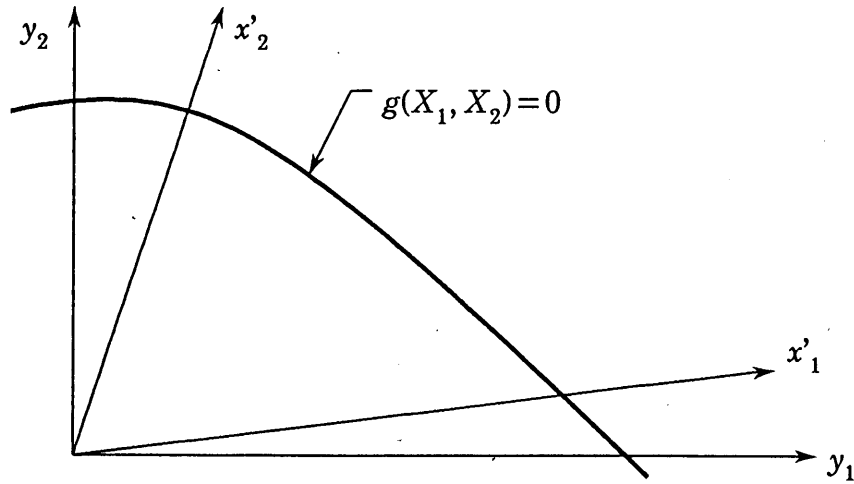


図-3.3 X'のYへの回転

以上のように、非正規確率変数や互いに相関性を有する確率変数から定式化される性能関数でも、収束計算で設計点を探索しながら安全性指標 β を求めることが必要となる。解析フローを図-3.4に示す。このフローは、収束の打切りなどの計算上の項目は省略している。

ここでは、設計点および安全性指標や破壊確率の求め方についてまとめた。これらの手法を確率有限要素法に導入するわけであるが、性能関数はそれぞれの問題に合わせて定義することになる。

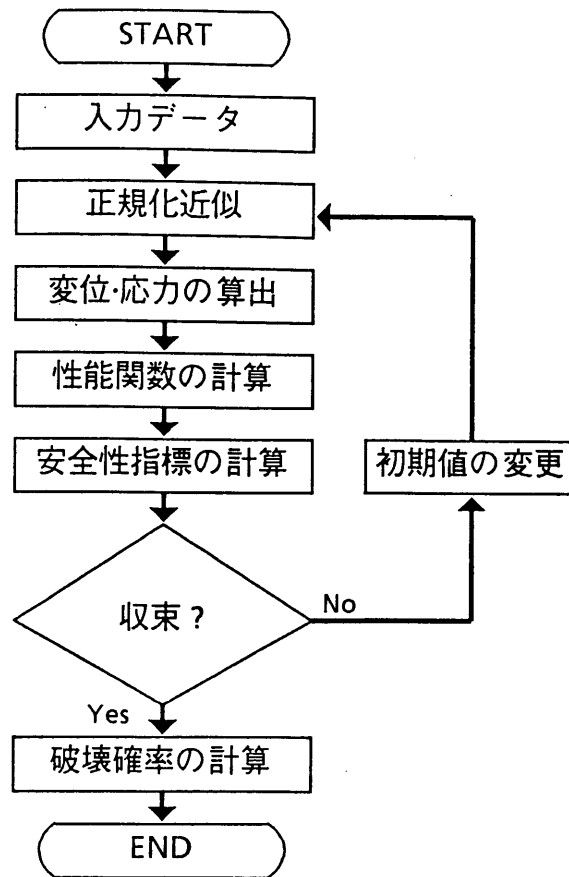


図-3.4 解析フロー

3.4 モンテカルロ・シミュレーション法による確率場の定式化

本節では、確率有限要素法の要素分割が解析精度に与える影響を検討したり、本研究で提案している確率有限要素法の解析精度を検証するために用いるモンテカルロ・シミュレーション法について定式化を行う。確率場のシミュレーション法としては、一般に次に述べる方法が知られている。(i) 三角級数モデルによる方法、(ii) AR(自己回帰), MA(移動平均)および ARMA(自己回帰・移動平均)モデルによる方法、(iii) 共分散マトリックスのコレスキー分解または、モード分解を用いる方法である。

(i)に示される三角級数モデルによる方法は、スペクトル表現法(spectral representation)ともよばれ最も基本的な方法であり、確率場の波数領域で表したパワースペクトルとランダム位相角を用いて確率場の標本関数を三角級数で表すものである。この方法は、Shinozuka and Jan(1972)やShinozuka (1974, 1977, 1987)によって多次元多変量(multi-dimensional multi-variate)の均質(定常)な確率場のシミュレーションに一般化されている。

次に、(ii)の方法では、確率場 $X(t)$ とし、これとは独立な自己無相関過程(ホワイトノイズ) $Y(t)$ を考える。ここで、 $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$ なる離散点のみに注目した場合には、 $X(t)$ は定常確率系列を構成するが、この場合 $X(t)$ が

$$X(t) = \sum_{k=1}^p a_k X(t-k) + \sum_{l=0}^q b_l Y(t-l) \quad (3.64)$$

で表されるとき、 $X(t)$ を自己回帰・移動平均(Auto-Regressive and Moving-Average)過程を呼ぶ。ここで、 p, q は、これらのモデルの次数である。この式で右辺第2項がない $X(t)$ を自己回帰(Auto-Regressive)過程と呼び、右辺第1項がない $X(t)$ を移動平均(Moving-Average)過程と呼ぶ。代表的な研究としては、スカラー過程に関して Gersch and Liu (1976)やSpanos (1983)があり、ベクトル過程に関して、Gersch and Yonemoto (1977)、Samaras et al. (1985)、Mignolet and Spanos (1987)、Spanos and Mignolet (1987)などがあり、多次元確率場に関して Naganuma et al. (1987)がある。これらのモデルの長所としては、三角級数モデルによる方法に比べて演算時間が短く、記憶域が少なく済むこと、さらには時

系列予測やシステム同定に利用できることなどが挙げられる。一方、目標とするスペクトル特性に対する精度は、三角級数モデルによる方法よりは今のところ劣っている。

(iii)の方法は、離散化した確率場のシミュレーション法であり、確率過程のシミュレーション法というより確率ベクトルのシミュレーション法とも考えられる。この方法は、共分散マトリックスをコレスキー分解やモード分解して、独立な自己無相関過程の線形和でシミュレーションするもので、共分散マトリックスが非負定性であれば比較的簡単な方法である。

ここでは、本研究で用いる三角級数モデルによる方法とコレスキー分解による方法について説明し、この手法の応用として、第2章で説明したクリッキングを導入した条件付シミュレーション法についても説明する。

(1) 三角級数モデルによる方法

2次元確率場を三角級数モデルで表現すると次のようになる(鈴木・石井, 1987 a)。

$$X(u, v) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m C_{k,l} \cos(\omega_k u + \phi_{k,l}) \cos(\omega_l v + \phi_l) \quad (3.65)$$

ここで、 $\phi_{k,l}$ と ϕ_l は $0 \sim 2\pi$ の乱数であり、 ω_k と ω_l は次のようになる。

$$\omega_k = (k-1)\Delta\omega_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$\omega_l = (l-1)\Delta\omega_l \quad (l=1, 2, \dots, m)$$

$$\Delta\omega_k = 2\pi / (\Delta u \cdot N_x) \quad (N_x; x \text{方向の個数})$$

$$\Delta\omega_l = 2\pi / (\Delta v \cdot N_y) \quad (N_y; y \text{方向の個数})$$

ここで、 $C_{k,l}$ が求めることができれば、2次元確率場を発生させることができる。まず、 $C_{k,l}$ の算定手順を次に述べる。距離が x, y 離れた2点間の共分散は次のように表現できる。

$$\text{Cov}[X(u, v), X(u+x, v+y)] = E[X(u, v) X(u+x, v+y)]$$

$$= \frac{1}{U \cdot V} \int_0^U \int_0^V X(u, v) X(u+x, v+y) du dv$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m C_{k,l}^2 \cos(\omega_k x) \cos(\omega_l y) \quad (3.66)$$

これを2次元フーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} S(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[X(u, v) X(u+x, v+y)] e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m C_{k,l}^2 \{\delta(\omega_1 + \omega_k) + \delta(\omega_1 - \omega_k)\} \{\delta(\omega_2 + \omega_l) + \delta(\omega_2 - \omega_l)\} \end{aligned} \quad (3.67)$$

となる。ここで δ は次のような性質をもつ関数である。

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 1 \quad (x = 0) \\ \delta(x) &= 0 \quad (x \neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 2\pi \end{aligned}$$

また、空間的な相関特性が次式で表現できるとする。

$$\rho = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right\} \right] \quad (3.68)$$

これより、この確率場の分散を σ^2 とすると共分散は次のようになる。

$$\text{Cov}[X(u, v), X(u+x, v+y)] = \sigma^2 \exp \left[- \left\{ \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right\} \right] \quad (3.69)$$

これを2次元フーリエ変換すると

$$\begin{aligned} S(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 \exp \left[- \left\{ \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right\} \right] e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy \\ &= \frac{ab\sigma^2}{4\pi} \exp \left[- \left\{ \left(\frac{a\omega_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{b\omega_2}{2} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.70)$$

式(3.67)と式(3.70)が等しいとすると、 $\omega_1 = \omega_k$, $\omega_2 = \omega_l$ のとき

$$C_{k,l}^2 = \frac{4ab\sigma^2}{\pi} \exp \left[- \left\{ \left(\frac{a\omega_k}{2} \right)^2 + \left(\frac{b\omega_l}{2} \right)^2 \right\} \right] \Delta\omega_k \Delta\omega_l \quad (3.71)$$

これより $C_{k,l}$ が求められるので式(3.65)を計算し、高速フーリエ変換(FFT)を利用して確率場を発生させることができる。

(2) コレスキー分解による方法

相互に相関をもつ n 個の正規確率変数 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ の共分散マトリックス C_{XX} を、コレスキー分解により三角形マトリックスの積の形に分解する。

$$C_{XX} = L L^T \quad (3.72)$$

ここで、 L は下三角形マトリックスである。これを用いて、正規確率ベクトル $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ は次式で作成できる。

$$X = L Z \quad (3.73)$$

ここで、 $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}^T$ は平均値が0、分散が1となる相互に独立な正規確率変数 n 個のベクトルである。すなわち、

$$E[Z] = 0, \quad E[Z Z^T] = I \quad (3.74)$$

である。 I は単位マトリックスである。また、正規確率ベクトル X の共分散マトリックスは次のようになる。

$$E[X X^T] = E[L Z (L Z)^T] = L E[Z Z^T] L^T = C_{XX} \quad (3.75)$$

一度、コレスキー分解により L が求められれば、異なった Z を用いることで X をシミュレートできる。しかし、 X の相関性が強いときには、 C_{XX} は非負定性のマトリックスにならないため、コレスキー分解が困難なこともある。この場合に、 X の m 個の成分が他の成分の線形結合で与えられるなら、 C_{XX} はランク $n-m$ の特異マトリックスになる。

この手法は正規確率ベクトルのシミュレーションとして便利な手法である。確率有限要素法に適用するときには、要素間の共分散マトリックス C_{XX} を作成し、次に X をシミュレートして平均値 μ_X を加えれば容易に要素の値が求められる。

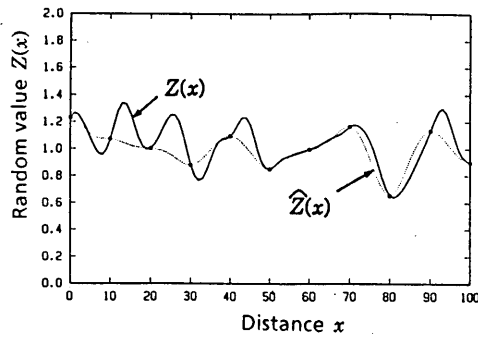
(3) 条件付シミュレーション法

3.3節(1),(2)で述べた方法はいずれも母集団を想定したものである。地盤工学の問題においても、設計規準と同じように不特定多数の構造物への適用を前提とする場合には、このような母集団としての取扱いは適当である。しかし、サイトが特定され、解析対象から直接に標本値(たとえば土質データ)が得られている場合には、ある領域の地盤物性値は、ある確率場の1つの標本場として取り扱う方が自然である。通常のシミュレーション法は、この確率場から他の標本場を作成することであるが、作成された実現事象のうち、標本点で標本値と同じになると条件を設けたシミュレーションを、条件付シミュレーション(conditional simulation)とよんでいる(Dagan, 1982; Journel, 1974)。本研究では、第6章の盛土による沈下量予測の問題の6.3節と6.4節で、クリッキングを用いた確率有限要素法の精度を検証するために用いる。

条件付シミュレーション法による標本関数作成法は、クリッキングによる推定法を用いており、図-3.6にその手順を示す(Journel and Huijbregts, 1978)。その要点は、標本値と同じ統計的性質をもつ確率場において、シミュレーション法より得られた標本関数 $S(\mathbf{x})$ から、クリッキングによる推定誤差関数 $\epsilon(\mathbf{x}) (= (S(\mathbf{x}) - \hat{S}(\mathbf{x})))$ を求め、標本値からの推定量 $\hat{Z}(\mathbf{x})$ に加えて作成する。すなわち、確率場の標本関数 $c(\mathbf{x})$ は次式で求められる。

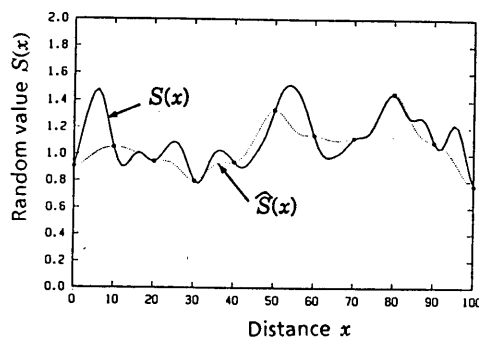
$$c(\mathbf{x}) = \hat{Z}(\mathbf{x}) + (S(\mathbf{x}) - \hat{S}(\mathbf{x})) \quad (3.76)$$

このようにして計算された標本関数 $c(\mathbf{x})$ は、標本と同じ統計的性質をもち、さらに標本点で標本値と同じになる。このような手法は、当初、鉱山工学や水文工学で用いられていたが、地盤工学においても、標本値を満足する標本場をシミュレートなどに用いられている。



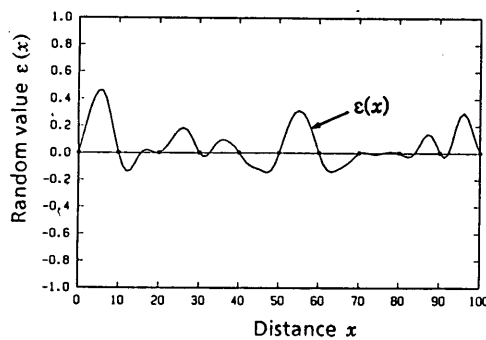
【 Step 1 】

観測値から推定量 $\hat{Z}(x)$ を求める。



【 Step 2 】

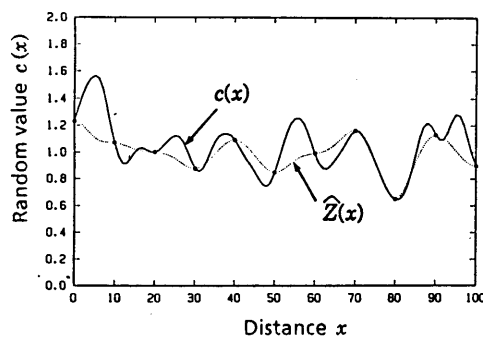
通常のモンテカルロ法により標本関数 $S(x)$ を求め、観測値から推定量 $\hat{S}(x)$ を求める。



【 Step 3 】

$S(x)$ と $\hat{S}(x)$ の残差 $\epsilon(x)$ を計算する。

$$\epsilon(x) = S(x) - \hat{S}(x)$$



【 Step 4 】

$\hat{Z}(x)$ に $\epsilon(x)$ を加える。

$$c(x) = \hat{Z}(x) + \epsilon(x)$$

図-3.5 条件付シミュレーション法の手順

3.5 解析精度の検証と手法の適用性

本節では、簡単なモデルを用いて、提案した確率有限要素法の解析精度をモンテカルロ・シミュレーション法による結果と比較することによって検証し、さらにその適用性を検討する。ここでは、相互に相関性のない確率変数を扱ったモデル(鈴木・石井, 1985)と空間的な相関性をもつ確率場を扱ったモデル(鈴木・石井, 1987 b)の2つについて検討する。

(1) 相関性のない確率変数モデルへの適用

解析モデルは、3つの三角形要素からなる4自由度のモデルで、防波堤を想定している。荷重条件としては、自重、水平震度0.5および波力による節点集中荷重をそれぞれ図-3.6に示すように与えた。

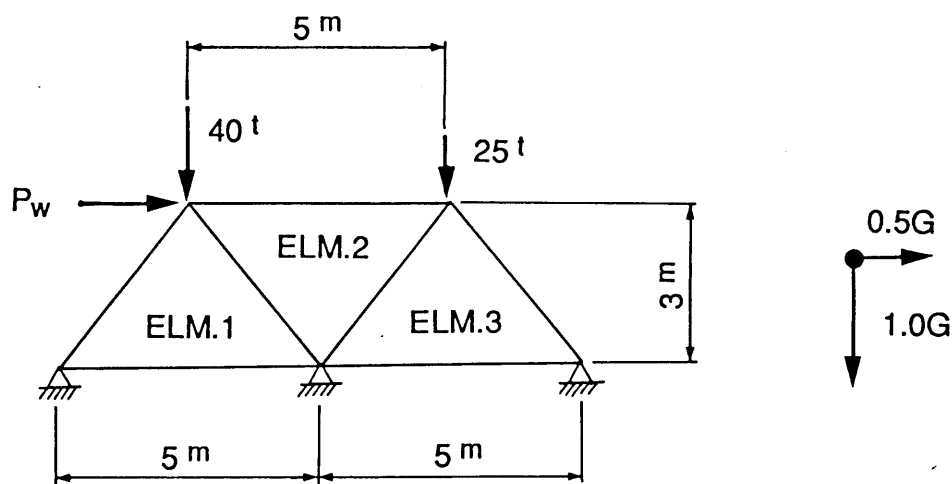


図-3.6 解析モデル

また、解析における確率変数は、弾性係数 E 、単位体積重量 γ_t 、内部摩擦角 ϕ 、粘着力 c および波高 H である(ポアソン比 ν は結果への影響が少ないことから確定値: $\nu=0.48$ とした)。また、荷重のうち確率変数 P_w は波高 H の関数として次式により与えられるものとする。

$$P_w = 0.2308 H + 0.2308 H^3 \quad (3.77)$$

各確率変数の統計的性質は、その目的から表-3.2に示すように、CASE-1~3

の3ケースを想定している。CASE-1では、 E, γ, ϕ, c は正規分布として仮定し、 H は確定値とする。また反対に、CASE-2および3では、 E, γ, ϕ, c は確定値として、 H のみを確率変数とした。 H はCASE-2では正規分布、CASE-3ではワイブル分布に従うとする。さらに、それぞれの確率変数および各要素は互いに独立で、変動係数C.O.V.はすべて0.2と仮定している。

表-3.2 解析に用いる変数

材料特性	平均値	変動係数 (C.O.V.)		
		CASE-1	CASE-2	CASE-3
弾性係数	10 000 tf/m ²	0.2	(確定値)	(確定値)
ポアソン比	0.48	(確定値)	(確定値)	(確定値)
単位体積重量	1.8 tf/m ³	0.2	(確定値)	(確定値)
粘着力	0.5 tf/m ²	0.2	(確定値)	(確定値)
内部摩擦角	30.0°	0.2	(確定値)	(確定値)
波高	5.0 m	(確定値)	0.2	0.2
備考		分布形は正規分布	分布形は正規分布	分布形はワイブル分布

CASE-3における波高 H の確率密度関数は、次式で与えられるワイブル分布とする。

$$f_H(H) = \frac{K}{A} \left(\frac{H-B}{A} \right)^{K-1} \exp \left\{ - \left(\frac{H-B}{A} \right)^K \right\} \quad (3.78)$$

また、定数 A, B, K は、 $K=1.5$ と仮定して、 H の平均値が5.0 m、変動係数が0.2となるように $A=1.634, B=3.524$ とした。波高 H の確率密度関数を図-3.7に示す。

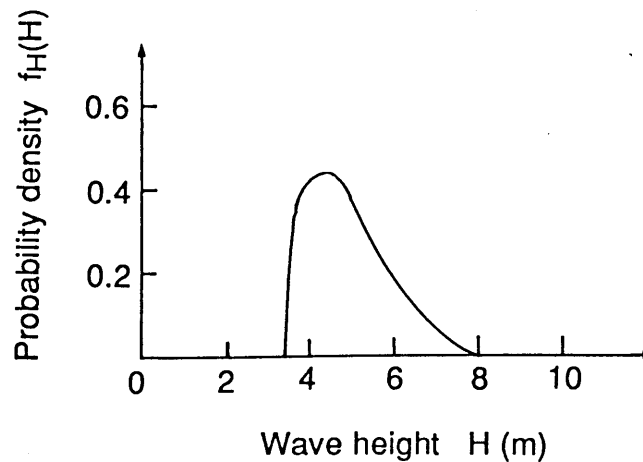


図-3.7 ワイブル分布

要素の破壊を定義する性能関数は、第7章に示す層理面の存在しない場合の局所すべり破壊を用いている。各要素の破壊確率について、確率有限要素法による結果とモンテカルロ・シミュレーション法による結果(試行回数2000回)を表-3.3に示す。確率有限要素法による解の収束誤差の判定は安全性指標で0.01とすると、解は3~4回の繰り返し計算で収束する。また、モンテカルロ・シミュレーション法による結果は辰巳ら(1984)の文献による。

表-3.3 解析結果

CASE	要素	モンテカルロ法	平均値まわり	破壊点まわり
CASE-1	ELM.1	30.9%	30.8%	30.8%
	ELM.2	36.2%	36.4%	36.4%
	ELM.3	32.8%	32.6%	32.6%
CASE-2	ELM.1	45.5%	45.5%	45.5%
	ELM.2	3.5%	6.1%	6.1%
	ELM.3	40.7%	40.5%	40.5%
CASE-3	ELM.1	36.5%	45.5%	38.2%
	ELM.2	0.0%	6.1%	0.0%
	ELM.3	32.5%	40.5%	34.5%

これらの結果から以下のことがわかる。

- ① 確率変数が正規分布の場合、すなわち CASE-1 および CASE-2 では平均値まわりのテーラー展開を用いる従来の確率有限要素法と同様に本手法による解はモンテカルロ・シミュレーション法の解とよく一致している。
- ② 確率変数がワイブル分布のような複雑な分布形に従う場合、CASE-3 に示されるように、従来の確率有限要素法による解析結果はモンテカルロ・シミュレーション法の解とあまり良く一致しないが、性能関数の設計点に対してテーラー展開を行う本手法の解析結果は、モンテカルロ・シミュレーション法の解とよく一致している。

上述の検討結果から、モデルに含まれる確率変数が正規分布以外にも本手法が適用可能であり、その精度が、平均値まわりのテーラー展開を用いている従来の確率有限要素法解析と比べて改善されていることがわかった。

しかしながら、本手法もすべての解析条件に適用可能であるとは考えられない。たとえば、計算に線形1次近似理論を用いていることから、適用限界の1つとして確率変数の変動(係数)が大きくなった場合が想定される。このことから、確

率変数の変動係数の大きさによる確率有限要素法の精度への影響の検討を行った。解析には、図-3.7 のモデルを用いて、本手法により得られた解とモンテカルロ法により得られた解を比較することによって解の精度を検討した。

荷重条件として、自重、水平震度および鉛直方向の節点集中荷重はCASE-1 と同じものとし、波圧 P_w を平均値 30 t の正規分布として、その変動係数を変化させることとした。また、解の精度はモンテカルロ・シミュレーション法の試行回数 5000 回の結果を正解値として、本手法により得られた解との相対誤差により示すことにした。

解析結果を図-3.8 に示す。これより、 P_w の変動係数の増加に従って、ELM.1 および 3 の誤差はほとんど大きくならないが、ELM.2 の誤差は大きくなっている。この計算結果のみから速断はできないが、確率変数の変動係数の増加に従って計算誤差が大きくなる可能性があることは示唆される。しかし、変動係数 0.3 および 0.5 で、ELM.1~3 の誤差はそれぞれ 4% および 8% 以内であり実用上は問題ないと考えられる。

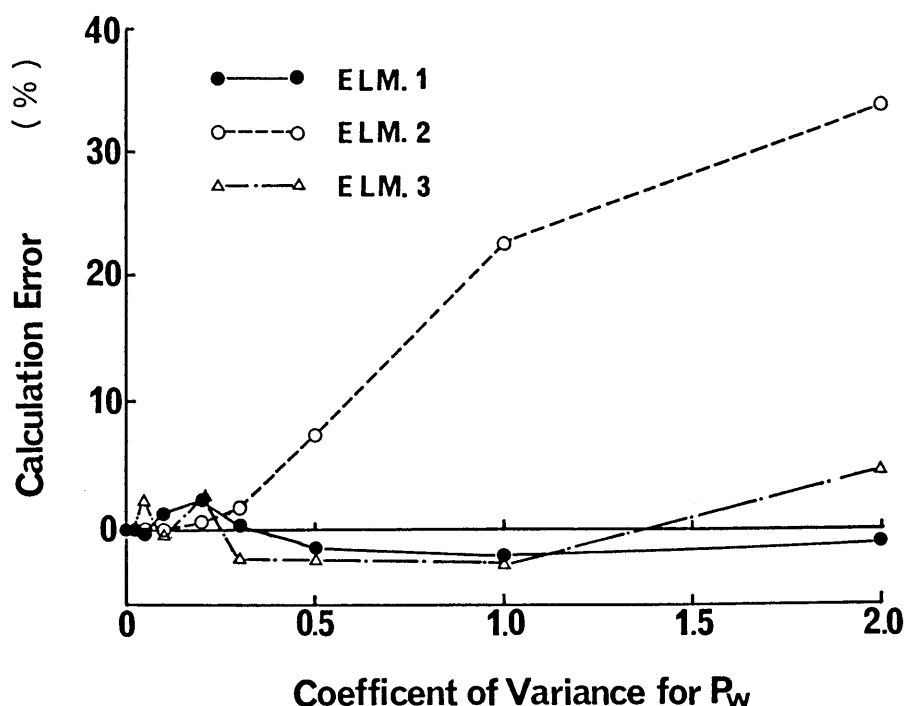


図-3.8 荷重 P_w の変動係数と計算誤差

本研究は確率有限要素法の定式化とその数値解析例を示したものである。結果は以下のようにまとめられる。Hasofer and Lind (1974)による設計点まわりのテーラー展開による線形1次近似理論、また Rackwitz and Fiessler (1978)による確率変数の正規化近似手法を用いることにより性能関数の定義式によらず不変性のある安全性指標(破壊確率)が得られ、かつ確率変数が正規分布以外の場合にも、解を精度よく求めることができる。3つの三角形よりなる簡単なモデルを用いて、本手法の精度および適用性の検討した。結果として、本手法による解はモンテカルロ・シミュレーション法による解とよく一致し、平均値まわりのテーラー展開による線形1次近似理論を用いている従来の手法よりも解の精度が向上していることがわかった。

(2) 確率場への適用

確率有限要素法を地盤物性値の確率場に適用したときの精度について、図-3.9に示す節点数105、要素数168の平面ひずみモデルで、沈下量や不等沈下量を対象に検証する。地盤物性値として、弾性係数 E は平均値300 tf/m²で変動係数0.1の正規確率場とし、ポアソン比は0.3の確定値とした。また、外力として1.0 tf/mの分布荷重を4mの幅で載荷しており、載荷面の剛性は無視した。

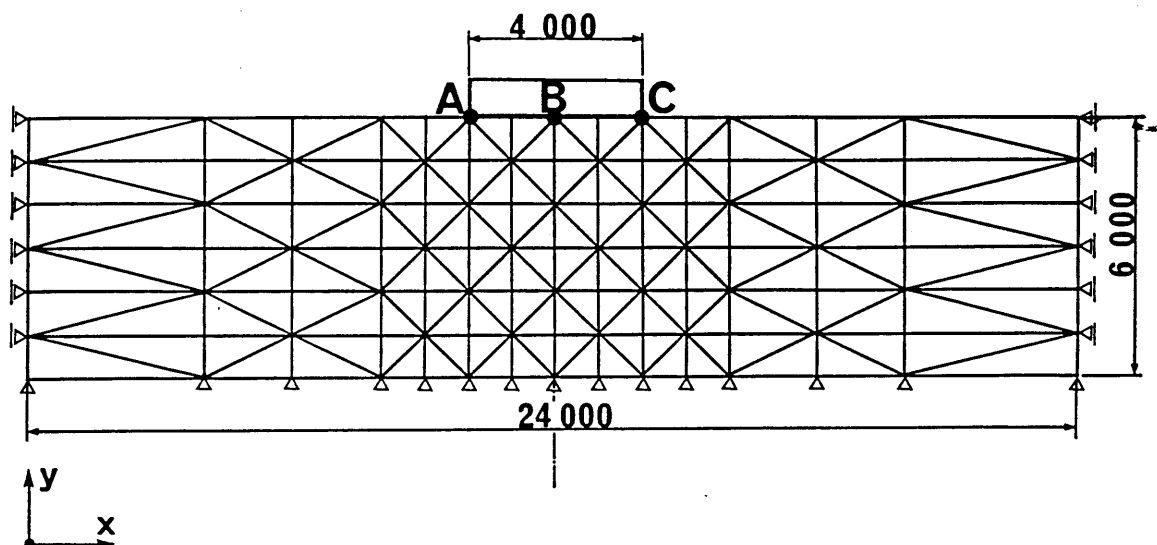


図-3.9 解析モデル

まず、確率場の空間的な相関特性が地盤工学における沈下量や不等沈下量の評価に与える影響を、モンテカルロ・シミュレーション法による確率有限要素法を用いて検討した。なお、この解析では2次元確率場をシミュレートする方法として三角関数モデルを用い、標本場から要素の物性値を求める際に、三角形要素の頂点、辺の中央および重心の7か所を代表点としてその平均で値を定めている。空間的な相関特性を表す相関モデルは、次式を用いる。

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{a} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{b} \right)^2 \right\} \right] \quad (3.79)$$

ここで、式中の a, b は相関特性の減衰の程度を決定する相関パラメータである。式(3.79)からも明らかなように、相関パラメータ a, b が小さくなると、異なる2地点における弾性係数の相関係数は指数関数的に小さくなる。式(3.79)によれば、相関特性は距離の自乗で減少するもので、図-3.10に示されるような特性を示す。こ

の図の格子間隔は0.2mであり、 $\Delta x, \Delta y$ の全長は図-3.9の解析モデルと同様である。また、図は相関パラメータ $a=4.0\text{m}$, $b=0.8\text{m}$ の場合を示している。

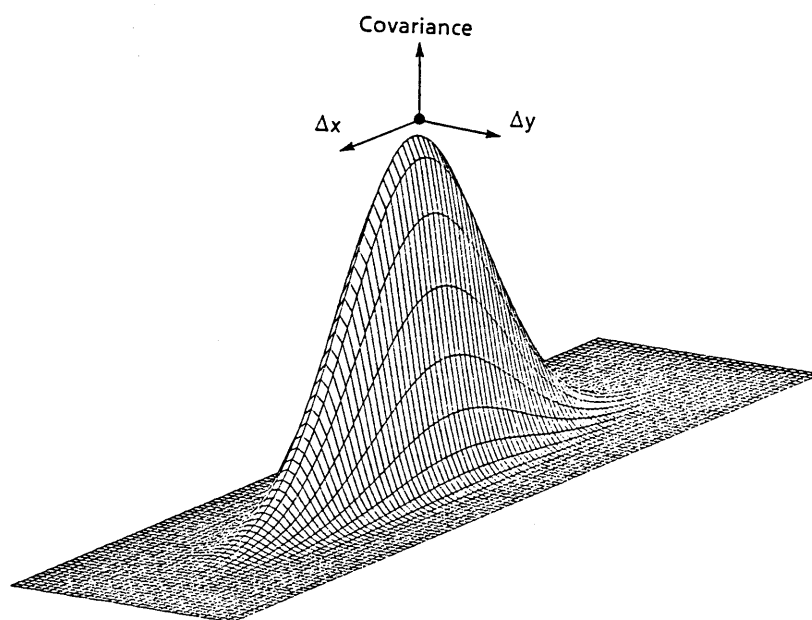


図-3.10 自己共分散関数

相関パラメータ a, b を変化させ、図-3.9のB点の沈下量 δ_B とA点とC点の不等沈下量($\delta_A - \delta_C$)の計算を行った。このときの相関パラメータ b は成層地盤の形成を考え、鉛直方向の相関性は水平方向の相関性に比べ低くなることより $0.2a$ と仮定した。1000回の試行をもとに求められたB点の沈下量 δ_B の累積分布を図-3.11に示す。この図から、相関パラメータが小さくなる(すなわち、2点間の相関性が小さくなる)と沈下量の変動が小さくなり、反対に相関パラメータが大きくなると沈下量の変動は大きくなることがわかる。これは相関パラメータが大きくなることにより、標本中には各要素の弾性係数の平均値が確率場の平均値から大きく離れたものも現れるためである。また、相関パラメータが小さくなると、標本中の各要素の弾性係数が独立に近くなり、その平均値が確率場の平均値に近づくためである。

さらに、A点とC点の不等沈下量($\delta_A - \delta_C$)を求めたものが図-3.12である。相関パラメータが大きくなると2点間の沈下量の相関性が高くなり、不等沈下量の変動が小さくなる。一方、沈下量は図-3.11に示したように相関パラメータが大き

くなると変動が大きくなる。よって、この相反する2つの原因があるため、相関パラメータの不等沈下量に対する影響は小さくなると考えられる。

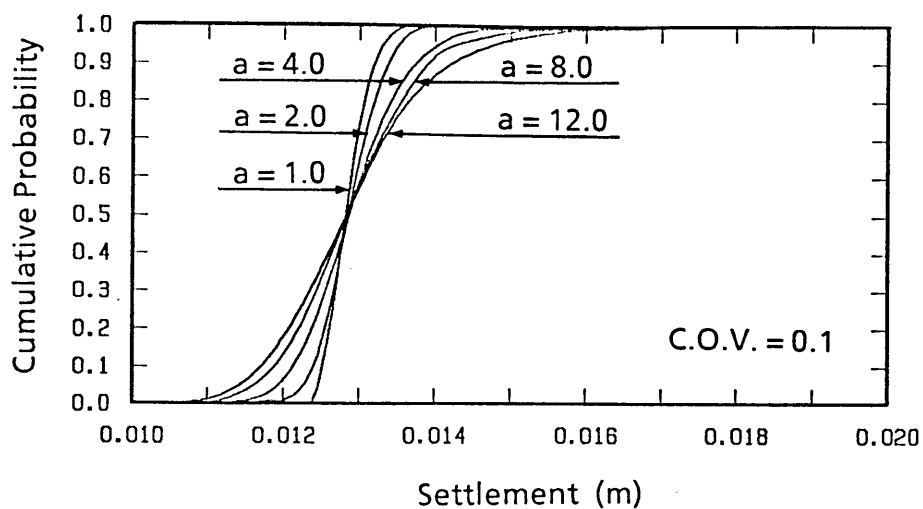


図-3.11 B点の沈下量の累積分布

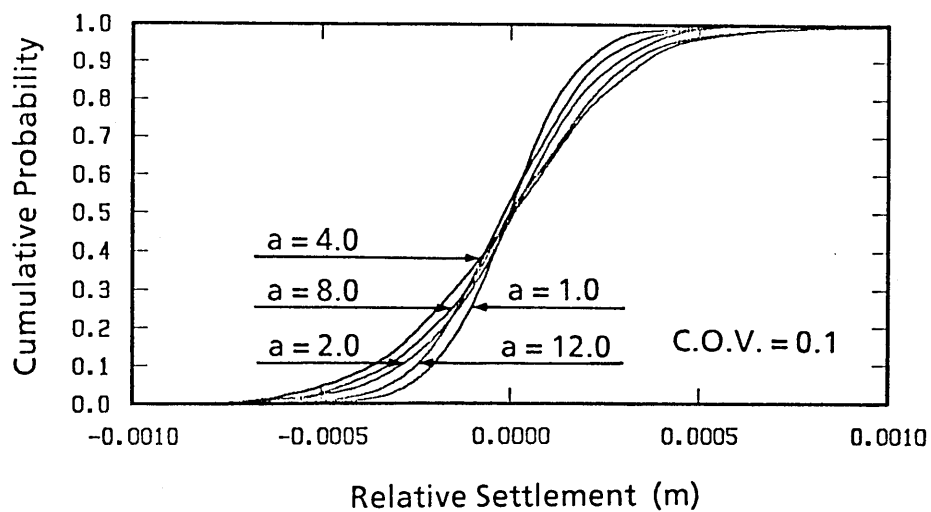


図-3.12 A点とC点の不等沈下量の累積分布

次に、提案した確率有限要素法の精度を、モンテカルロ・シミュレーション法による解との比較から検証する。確率有限要素法の各要素の物性値 X は確率場の要素平均で扱うが、この精度については次章で詳細に検討するため、ここでは2次モーメント法を用いた確率有限要素法の精度のみを対象とする。確率場を扱うときには、各要素の物性値の相関性を考慮しなければならない。そのため、3.3 (2) 節に示したよう相互に相関のない確率変数に変換して、設計点を求めることになる。しかし、提案した方法では、破壊を定義する性能関数を設計点まわりにテーラー展開するため、直接に沈下量 U の累積分布を求めることはできない。そこで、求めたい節点の沈下量 U を変化させることにより、これを超えない確率(非超過確率)を求めて累積分布を作成した。その際、性能関数 $g(X)$ は次式で定義した。

$$g(X) = \delta - U \quad (3.80)$$

ここで、 δ は確率有限要素法から求められる節点の沈下量である。また、 $g(X)$ が負になる確率が非超過確率となる。さらに、不等沈下量の性能関数 $g(X)$ は次式で定義した。

$$g(X) = \Delta\delta - (U - U') \quad (3.81)$$

ここで、 $\Delta\delta$ は確率有限要素法から求められる2点の不等沈下量としたものある。解析は表-3.4に示す3ケースの沈下量・不等沈下量に対して行った。

表-3.4 検討ケース

Case	a, (b=0.2a)	C.O.V.
CASE-1	4.0 (0.8)	0.1
CASE-2	4.0 (0.8)	0.2
CASE-3	4.0 (0.8)	0.3

図-3.13~15に、それぞれCASE-1, CASE-2, CASE-3と変動係数を変化させたときの沈下量の累積分布を示す。ここで、実線がモンテカルロ・シミュレーションの結果であり、破線が提案した確率有限要素法の結果を示している。変動係数が0.1のときは両者はよい一致を示しているが、変動係数が0.3になると差が生じる。これは弾性係数が沈下量に与える影響の非線形性が強いため、変動係数

が大きくなると誤差が大きくなると考えられる。また結果を示していないが、相関距離を変更させても、変動係数が0.1と小さければ両者はよい一致を示した。

図-3.16~18に、それぞれCASE-1, CASE-2, CASE-3と変動係数を変化させたときの不等沈下量の累積分布を示す。不等沈下量は変動係数によらず両者はよい一致を示している。これは、沈下量は非線形性が強いが、不等沈下量は沈下量の差で定義されているため非線形性が弱くなったものと考えられる。また結果を示していないが、相関パラメータを変更させても、両者はよい一致を示した。

以上の結果より、沈下量は弾性係数の影響に非線形性が強いいため、2次モーメント法を用いた確率有限要素法の適用にあたっては、弾性係数の変動係数に注意を払う必要があることがわかった。また、不等沈下量は弾性係数の変動係数や相関パラメータによらず精度のよい実用的な近似解といえる。

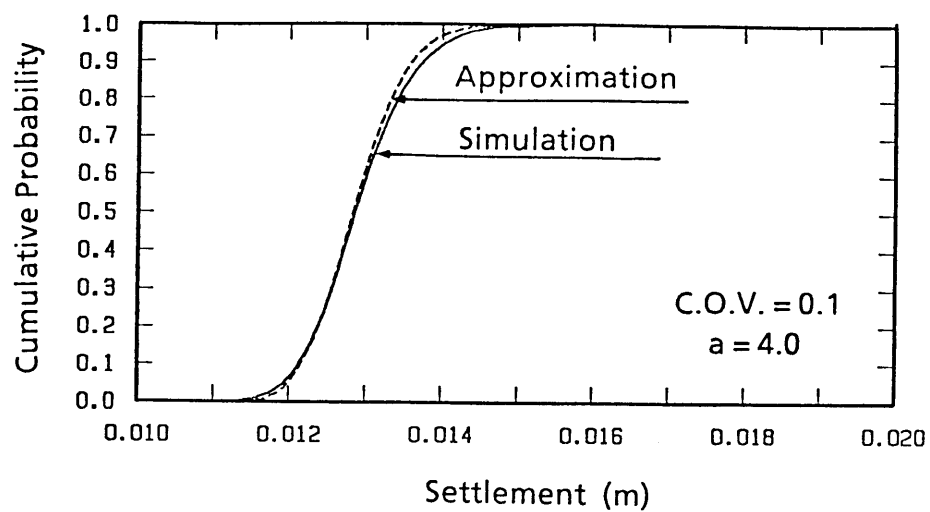


図-3.13 B点の沈下量の累積分布 (CASE-1)

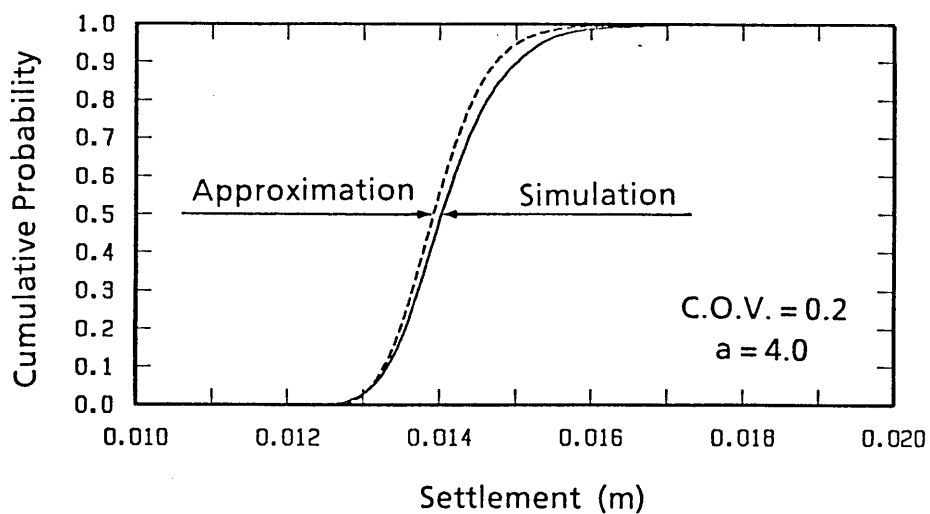


図-3.14 B点の沈下量の累積分布 (CASE-2)

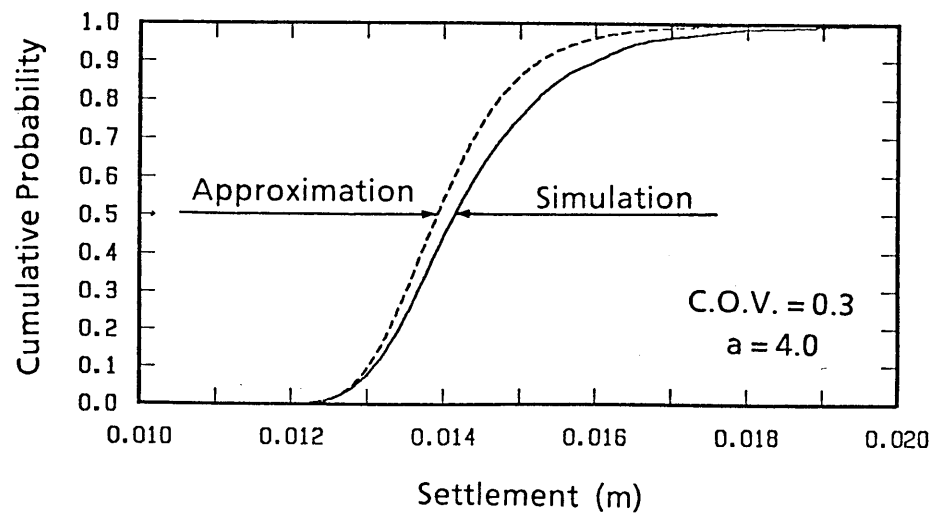


図-3.15 B点の沈下量の累積分布 (CASE-3)

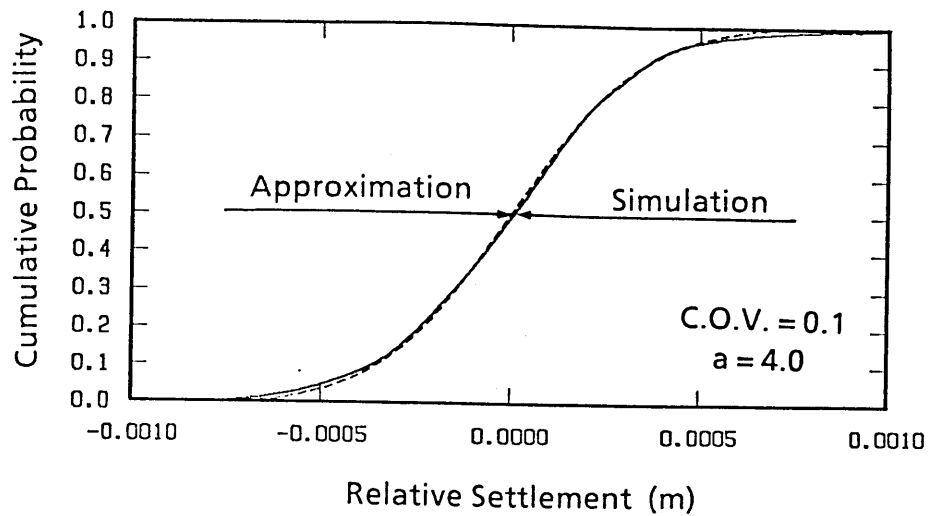


図-3.16 A点とC点の不等沈下量の累積分布 (CASE-1)

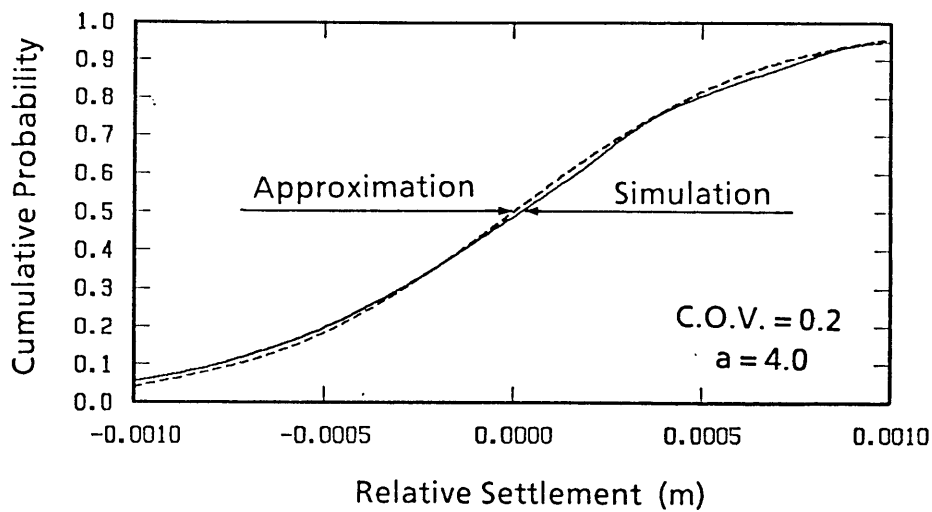


図-3.17 A点とC点の不等沈下量の累積分布 (CASE-2)

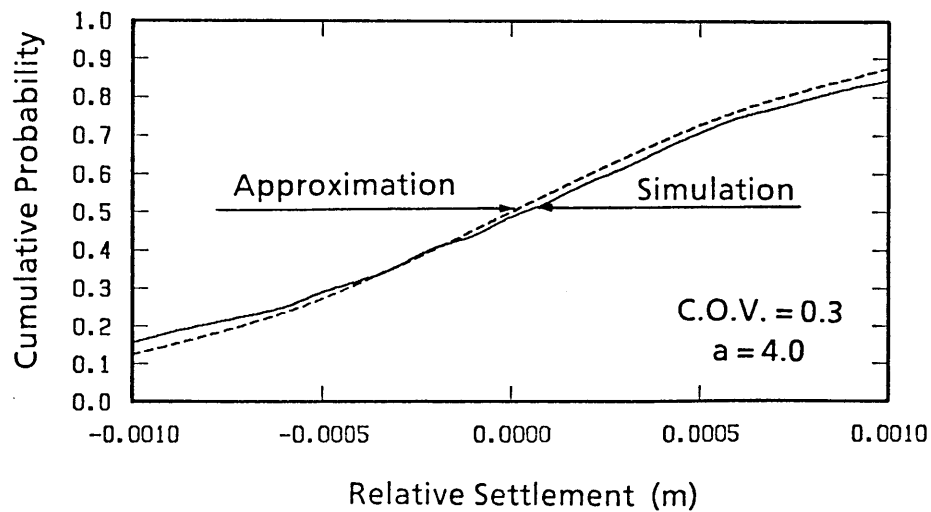


図-3.18 A点とC点の不等沈下量の累積分布 (CASE-3)

3.6 まとめ

本章は、本研究で提案している確率有限要素法の定式化とモンテカルロ・シミュレーション法による確率場の作成方法について示した。さらに、提案した方法による解の精度を、簡単な2つのモデルを用いて検証した。

結果は以下のようにまとめることができる。

- ① 性能関数の定義式によらず不変性のある安全性指標(破壊確率)が得られ、かつ確率変数が正規分布以外の場合にも、解を精度よく求めることができる確率有限要素法の定式化を行った(3.3節)。この方法では、前者を設計点まわりの線形1次近似手法により、また後者を正規化近似手法を用いることにより、手法の改善をはかった。
- ② 本研究で提案している確率有限要素法の解析精度を検証するため、また確率有限要素法の要素分割が解析精度に与える影響を検討するために使用するモンテカルロ・シミュレーション法の定式化を示した(3.4節)。この定式化では、三角級数モデルとコレスキー分解を用いて確率場を作成することができる。また、標本場を作成するために用いるクリッキングを用いた条件付シミュレーション法についても説明した。
- ③ 材料物性値を独立な確率変数とした3つの三角形要素から構成される簡単なモデルを用いて、提案した確率有限要素法の精度および適用性を検討した(3.5(1)節)。結果として、本手法による解はモンテカルロ・シミュレーション法による解とよく一致し、平均値まわりのテーラー展開による線形1次近似理論を用いている従来の手法よりも解の精度を向上させることができた。
- ④ 提案した確率有限要素法は線形1次近似理論を用いているため、材料物性値の変動係数の大小が解の精度に影響する。このことから材料物性値の変動係数をパラメータとして、本手法の適用性を検討した(3.5(1)節)。検討の結果として、材料物性値の変動係数の増加に従って計算誤差は常に大きくなるとはいえないが、影響を強く受ける可能性もあることがわかった。ただし、変動係数が0.5よりも小さい範囲では、誤差は8%以内に入り、誤差は実用上十分に小さいことが確認された。

- ⑤ 地盤の弾性係数を1層地盤よりなる確率場として、盛土載荷時における沈下量と不等沈下量の予測に確率有限要素法を適用した(3.5(2)節)。沈下量の予測では、弾性係数の影響による非線形性のために、提案した確率有限要素法によっても適用性に問題が生じるときがあり、弾性係数の変動係数に注意を払う必要があることがわかった。具体的には、弾性係数の変動係数が0.3と大きくなると沈下量の予測誤差が大きくなる。しかし、不等沈下量に関しては、地盤の弾性係数の変動係数や相関パラメータによらず、精度のよい解が得られた。

第4章 確率場の要素分割

4.1 概 説

地盤物性値の空間分布を確率場として考えたとき、確率有限要素法などの解析手法での地盤物性値の取扱いが問題になる。第2章においても、簡単にこの問題について触れたが、本章では特に確率有限要素法における問題として、地盤物性値の空間分布に対するモデル化と相互に深く関連している要素分割について検討する。本章における検討内容は、次のように位置づけられる。すなわち、確定的な有限要素解析においては、要素分割は応力やひずみの変化率を考慮して経験的に決められるが、確率有限要素法においては、さらに確率場の変動に追従できるように考慮する必要がある。通常、各要素の物性値は要素内で一定値とされることが多いため、確率場も対応する領域で一つの値を選ばねばならない。

この要素の代表値の取り方には(i)要素の重心における値を用いる方法(中桐・久田, 1985)と(ii)要素内局所平均をとる方法(Vanmarcke, 1977, 1983; Der Kiureghian and Ke, 1988)の2つが考えられる。要素分割が十分に細かい場合、2つの方法はほぼ同一の結果を与えるが、要素分割が粗い場合は、(i)では確率変動を過大に、(ii)では過小に評価することになるとの指摘がある。後者の方法、すなわち、要素の材料物性値として確率場から求められる局所平均を用いれば、材料物性値の要素における分散は、もとの分散よりも小さくなる。また、確率場における異なる2地点間の相関特性も、要素間の相関係数として与えられることになるので、例えば2次元平面問題であれば、数値解析的に面積分(実際には畳み込み積分)を行うことにより確率場において対応する領域において均された形で与えられる。

また最近では、高田(1989)は局所積分の概念を用いて、直接に確率場の離散化を行わないで厳密に連続確率場を取り扱う確率有限要素法を提案している。この方法は、確率要素剛性マトリックス(stochastic element stiffness matrix)を作成するのに、厳密に変分原理に基づいて連続確率場を要素積分の中に取り込んだ方法である。結果として、連続確率場はいくつかの離散化された確率ベクトルに変換

され、いいかえれば確率場の問題が確率変数の問題となり、取扱いが容易となるが、要素剛性マトリックス内で複数の確率変数を考えることになる。さらに、応答の確率特性の精度は従来の確率有限要素法と違って、あまり要素の大きさに依存しないことが示された。一方、この局所積分の概念の特殊なものとして、Vanmarkeの提案している局所平均が位置づけられる。

地盤工学において、円弧すべり法のような破壊モードの検索と破壊確率を同時に考えている問題では、破壊モードがあらかじめ決まらないため、どのような破壊モードに対しても等価な破壊確率を与えるように確率場の離散化を考える必要がある。このような問題は、非常に複雑であるため解析的にはほとんど解決されていないのが現状である。唯一、浅岡ら(1983)は、粘性土の円弧すべりに対して、ある深さのせん断強度が破壊確率に与える影響を深さ方向の重み関数を仮定することによって解決した。重み関数の未知数と多層地盤の数を同じにすることによって、確率場が互いに独立な確率変数に置き換えられ、この地盤は同じ安全率の分布のうち少なくとも2次までのモーメントがもとの地盤と同じものを与えるという意味で等価多層系地盤とよばれている。このような考え方は、いくつかの破壊モードの相関性を問題にするとときに重要な概念である。

この分野の研究はまだ数が少ないため現在までに得られている知見はわずかであることから、解析結果に要求される精度に応じて確率場の細部の挙動がとらえられるように、要素分割を十分に細かくするというのが基本的な考え方である。しかし、確率有限要素法といえども要素分割を無制限に多くすることはできないし、また実用的でもない。特に、解析結果として評価する対象が、変位や全体の破壊など各要素の変形や局所破壊の和の形で表現される場合には、解の精度をあまり低下させることなく要素の分割数をある程度少なくできると考えられる。このような点から、確率場から要素モデルに変換する場合の材料物性値の取り扱い自体が、確率有限要素法における1つの重要な研究課題になるわけである。もちろん、要素分割の考え方については、今後に残されている問題も多いが、ここでは次章以下で用いる有限要素法の適用にも関連するため、比較的簡単なモデルを用いてこの問題に取り組むこととした(鈴木・石井, 1987 a)。

本章では、まず弾性係数などの材料物性値が位置により変化する1次元のはり要

素を例に、空間的な相関特性を考慮すると各要素間の共分散は、要素の重心間の共分散とは異なったものとなることを4.2節に示す。次に、適用する数値解析手法における誤差を極力除くために、モンテカルロ法を適用して要素の分割数と解の精度との関係を4.3節で検討する。ここでは解析モデルとして、一辺の要素節点をピン支持され、他の一辺を一樣に引張られる正方形の板を考え、弾性係数 E の確率場を考える。したがって、端部の変位は各要素の変形の和として与えられ、その変動は、各要素の弾性係数の不確定性に起因することになる。ひずみについては、要素を小さくすると要素の分散は大きくなり、もとの確率場の分散に近づく。逆に、要素を大きくすると要素の分散は小さくなる。また応力度は、ひずみと弾性定数との積により求められる。これより、弾性係数が小さいときはひずみが大きく、反対に弾性係数が大きいときにはひずみが小さくなるため、応力度は弾性係数の値にかかわらず一定となる。すなわち、応力度は力のつりあいで求まるため、弾性係数の値には影響を受けないことになる。このため、解析において引張側の端部の変位に着目する。

4.2 要素間の相関特性

本節では、確率有限要素法における要素分割と要素物性値の確率特性(平均値、分散、異なる2つの要素間の相関性等)について、基本的な定式化を示す。空間的なばらつきを有する確率場を確率有限要素法を用いて解析する場合、解析対象範囲をある大きさをもつ有限個の要素で分割することになるので、確率場が有する本来の相関特性を、解析上設けられる要素間の相関特性に変換する必要がある。ここでは、最初に1次元要素についてその理論を説明し、本研究の主題を明確にし、次に、2次モーメント法を適用した確率有限要素法解析で用いる2次元要素について、要素間の相関特性の求め方を示す。

いま、1次元のはり要素を考え、弾性係数などの材料物性値が位置により変化するものとする。ここで、図-4.1に示すように位置 u の材料物性値を $X(u)$ と表現し、これが1次元の定常確率過程に従うものとする。

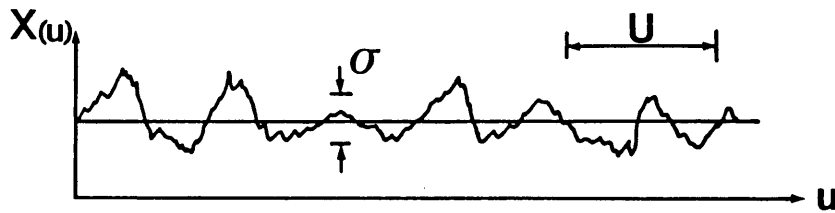


図-4.1 1次元定常確率過程の標本

要素の長さを U とすると、その移動平均過程(moving average process) $X_U(u)$ は次のように表すことができる。

$$X_U(u) = \frac{1}{U} \int_{u-U/2}^{u+U/2} X(u) du \quad (4.1)$$

また、任意の点 u_1 と u_2 の間の相関係数を $\rho(u_1 - u_2)$ で表現し、 $X(u)$ の分散を σ^2 とすると、 $X_U(u)$ の分散は次のようになる。

$$\text{Var}[X_U(u)] = \frac{\sigma^2}{U^2} \int_0^U \int_0^U \rho(u_1 - u_2) du_1 du_2$$

$$= \frac{2\sigma^2}{U} \int_0^U \left(1 - \frac{u}{U}\right) \rho(u) du \quad (4.2)$$

この式より、要素の材料物性値として確率場の局所平均値を用いると、要素の分散は材料物性値が本来有する分散に比べて変化する(小さくなる)ことがわかる。

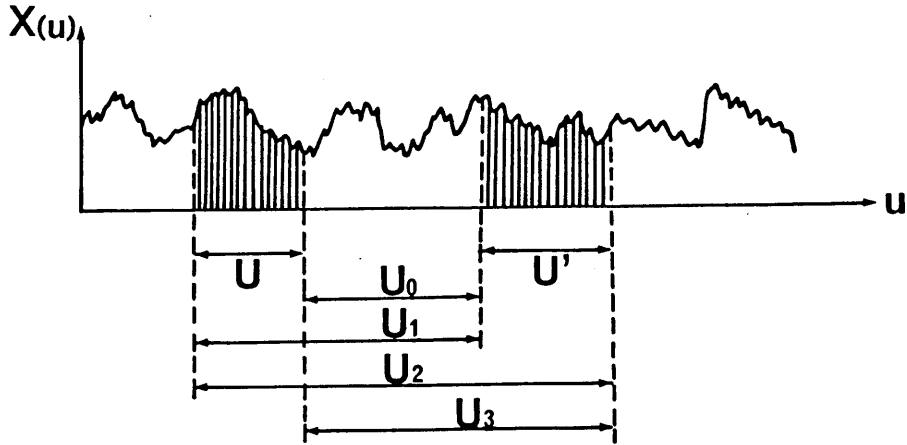


図-4.2 区間 U_0, U_1, U_2, U_3 の定義

さらに、図-4.2に示す長さ U の要素と U' の要素の共分散は、 U_0 から U_3 を用い次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_U, X_{U'}] = & \frac{1}{2U \cdot U'} (U_0^2 \text{Var}[X_{U_0}] - U_1^2 \text{Var}[X_{U_1}] \\ & + U_2^2 \text{Var}[X_{U_2}] - U_3^2 \text{Var}[X_{U_3}]) \end{aligned} \quad (4.3)$$

さて、簡単な例として、 $X(u)$ が平均値0、分散1.0で、自己相関関数は以下に示す。相関パラメータ a は10.0とする。

$$\rho(\Delta u) = \exp \left\{ -\left(\frac{\Delta u}{a} \right)^2 \right\} \quad (4.4)$$

ここで、 Δu は2点間の距離である。要素の分散は式(4.2)から次式のようにになる。

$$\text{Var}[X_U(u)] = \sigma^2 \left(\frac{a}{U} \right)^2 \left[\frac{2\sqrt{\pi}U}{a} \left\{ \Phi \left(\frac{\sqrt{2}}{a} U \right) - \frac{1}{2} \right\} + \exp \left\{ -\left(\frac{U}{a} \right)^2 \right\} - 1 \right] \quad (4.5)$$

ここで、 Φ は標準正規分布関数である。

図-4.3には2つの要素の中心間の距離を変数として共分散の値を示している。実線は、確率場自体の共分散である。要素の長さでは、5, 10, 15, 20, 25としている。実線は、確率場自体の共分散である。これより、確率有限要素法の要素の中心間の共分散は、空間的な相関特性を考慮した確率場では、要素の長さが大きくなると各要素の中心間距離から求めた共分散と比べて大きく値が変化することがわかる。もちろん、4.1節で述べたように要素を短くすれば、各要素の値を中心における値で代表させても問題は生じない。しかし、広い範囲を解析対象とする場合には実用上できるだけ要素数を少なくしたいのであるから、これらの特性を解析上考慮することも必要となる。

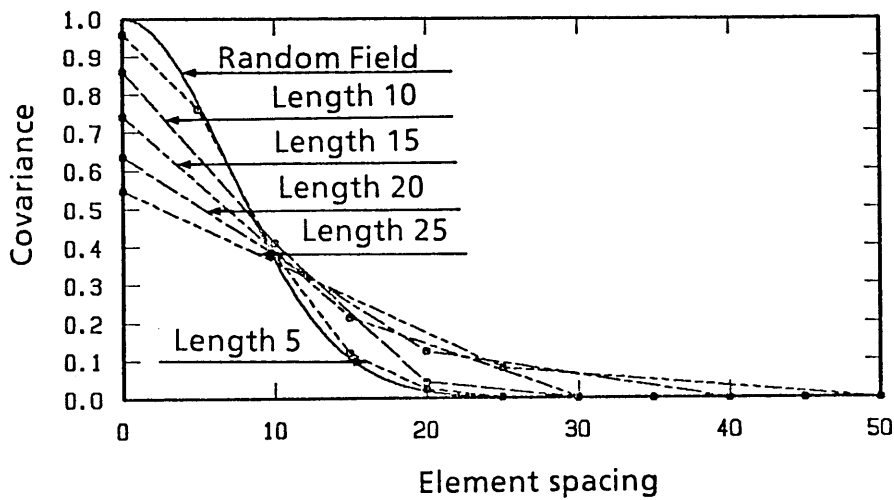


図-4.3 要素の中心間の距離と共分散

上に述べた例では、材料物性値を1次元の確率場で表したが、要素間の相関特性は2次元モデルについても同様に現れる。ただし、2次元確率場における任意の要素間の相関特性は、1次元のように理論的に求めるのは難しいため、数値解析的に面積分により求めることになる。2次元要素の例として、ここでは図-4.4に示すような三角形の組み合わせを考える。自己相関関数モデルとしてはいくつか提案されているが、その中で相関特性が急激に低下するモデルを用いた。分散は1.0で、自己相関関数は次式で表現できる2次元確率場とする。

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{a} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{b} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (4.6)$$

この自己相関関数モデルは、距離の増加に従って指数関数的に相関が減少するモデルである。CASE-1~3では、要素①に2つの要素が重なっている状態(この場合、重心間の距離は0となる)について、相関パラメータ a, b を $a=b=5.0$, $a=b=10000.0$ (ほぼ完全相関)、さらに、 $a=b=0.01$ (ほぼ完全独立)としたものを考えた。CASE-1, 2, 3は要素①の分散を求めることである。また、CASE-4~7は距離による差異をみるため $a=b=5.0$ として、要素①と他の要素の共分散を求めたものである。

要素の分割数と共分散の関係を図-4.5に示す。ここでは、要素間の共分散は次のように求めるものとする。各要素を x, y 方向に相似形の小要素に分割して、小要素重心間の共分散をその小要素間の共分散とする。次に面積比の重みを考えて数値積分し、もとの要素間の共分散を求める。図-4.5の分割数は x 方向や y 方向の分割数を示しており、3分割では $3^2=9$ の小要素に分割して計算を行っている。CASE-1では5分割で一定値に収束しているが、このように確率場より局所平均を用いて求めた要素の分散は、本来の分散より小さくなることがわかる。CASE-2では完全相関に近い場合、要素内ではばらつきはほとんどなく、結果として分割数によらず要素の分散は一定値となるが、CASE-3では逆に完全独立に近い場合、要素内ではかなりばらついており、共分散は0に収束することになる。また、CASE-4からCASE-7より同じ形の要素や距離が離れている要素などは少ない分割数で収束することがわかるが、どのような場合でも10分割もすれば十分であると言える。

以上示したような計算を行えば、任意の形状の三角形であっても共分散を求めることができる。

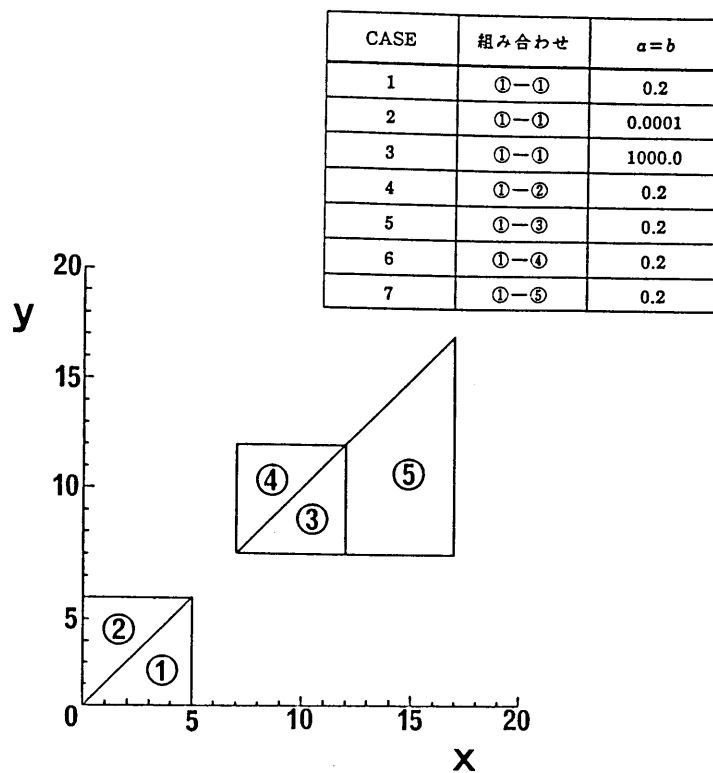


図-4.4 要素モデルと組合せ

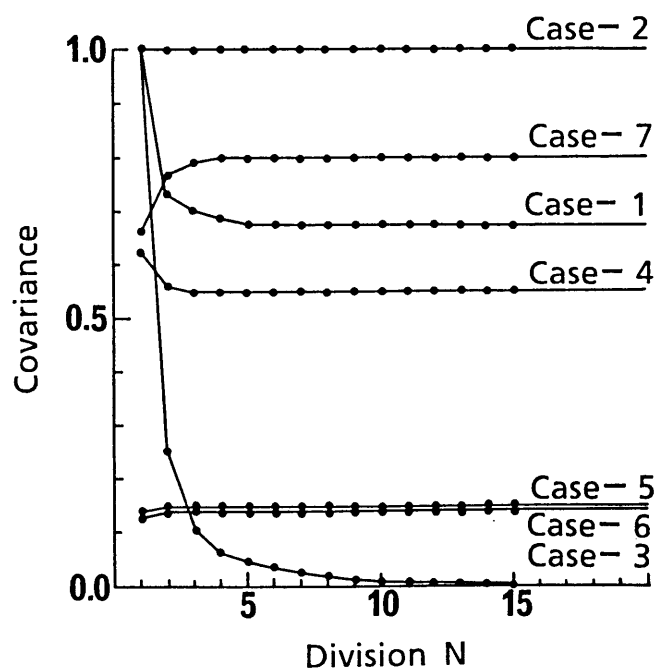


図-4.5 分割数と共分散

4.3 要素分割と解析精度の検討

(1) 解析モデルと解析条件

解析モデルは、図-4.6に示されるように一辺の長さを10.0とする正方形の板であり、一辺の要素節点をピン支持とし、他の一辺に一様な引張荷重を受けるモデルとした。ここで、要素分割数は2~20の間で変化させ、三角形要素で分割している。図-4.6に示される有限要素(三角形)分割ならびに荷重状態(引張荷重)について確率有限要素法を実際に適用する場合には、要素分割や荷重条件により解析精度が大幅に変化する可能性がある。そのため、解析対象は、材料物性値が有する空間的な相関特性が、確率有限要素法の解析精度に与える影響のみを検討できるように、荷重を一様な引張状態として解析モデルに生じる応力状態を単純化するとともに、要素分割にも規則性をもたせている。

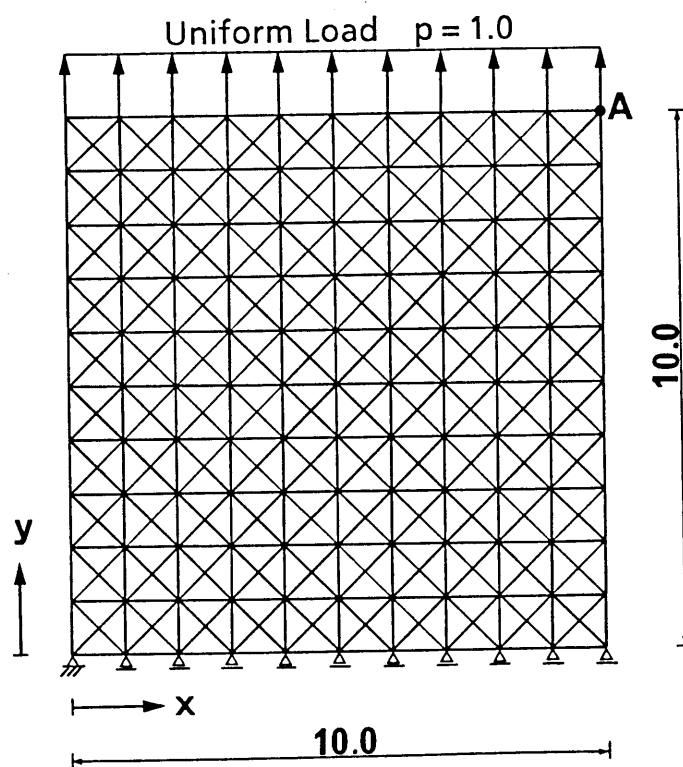


図-4.6 解析モデル

確率場としては弾性係数 E の空間的な分布を考え、平均値を1.0、変動係数を0.3の正規確率場とし、自己相関関数を式(4.7)で与えられるものとした。ここでは、式(4.7)の相関パラメータ a, b は、確率場の等方性を仮定し、 $a=b$ =定数として変化させる。荷重は確定値として、その大きさは1.0としている。

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{a} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{b} \right)^2 \right\} \right] \quad (4.7)$$

さて、本章の検討では、数値解析手法による誤差を極力排除するために、モンテカルロ・シミュレーション法を適用して端部A点の変位の統計値を求めることにする。端部の変位は各要素の変形の和として与えられ、その変動は、各要素の弾性係数の不確定性に起因することになる。ひずみについては、要素を小さくすると要素の分散は大きくなり、もとの確率場の分散に近づく。逆に、要素を大きくすると要素の分散は小さくなる。また応力度は、ひずみと弾性定数との積により求められる。これより、弾性係数が小さいときはひずみが大きく、反対に弾性係数が大きいときにはひずみが小さくなるため、応力度は弾性係数の値にかかわらず一定となる。すなわち、応力度は力のつりあいで求まるため、弾性係数の値には影響を受けないことになる。このため、解析において引張側の端部の変位に着目する。

この手法では、まずシミュレーションにより確率場の標本場を求め、この標本場から直接要素の材料物性値を計算し、次にA点の変位を静的解析から算定した。さらにA点における変位に関する統計値を求めるために、シミュレーションを繰り返し、必要な標本数を集めた。なお、この解析では、標本場から要素の材料物性値を求める際に、三角形要素の頂点、辺の中央および重心の7か所を代表点としてその平均で値を定めている。したがって、分割数が少ないときには、平均化に伴う誤差が結果に入り込むことになる。そこで、シミュレーション法自体の精度について、はじめに確認しておくことにする((2))。その後、要素分割の精度の検討を行う((3))。

(2) 要素における材料物性値のシミュレーション

材料物性値の空間的なばらつきを、2次元定常正規確率過程で表現し、三角関数モデルを用いてシミュレートする。図-4.7には、相関パラメータ $a=b=2.0$ をもとにして、上述の手法で求めた2次元確率過程の一例を示す。ここで、確率場は発生間隔を0.1きざみとして x, y の長さを102.4(データ数一辺1024)として発生させたが、図では、その一部として格子は0.2間隔で x, y の長さは20.0としている。図-4.8は、図-4.7の確率場から求められた空間的な共分散である。この図では実線がシミュレーションの結果を、破線が理論値を示す。図の格子間隔は0.2であり、 $\Delta x, \Delta y$ の全長は約6.0になっている。両者はよい対応を示しており、当初に定めた空間的な相関特性を十分精度よくシミュレートしていることがわかる。

図-4.6に示される10分割のモデルについて、標本場から求められた弾性係数 E の空間的な共分散を図-4.9に示す。この図では実線がシミュレーションの結果を、破線が確率場本来の共分散である。格子間隔は三角形の重心間の距離であり、 $\Delta x, \Delta y$ の全長は図-4.9に示されるモデルのほぼ全長(10.0)になる。後述の計算では、 $a=b=0.01$ から $a=b=2.0$ までの値を用いているが、 $a=b=1.0$ のときには4分の1の距離で図-4.9と同じように相関が減少し、 $a=b=0.01$ のときには40000分の1の距離で相関が減少することになる。図-4.10には、前節で述べた方法により求めた理論的な共分散を示す。

Simulated Sample Variation of Young's Modulus

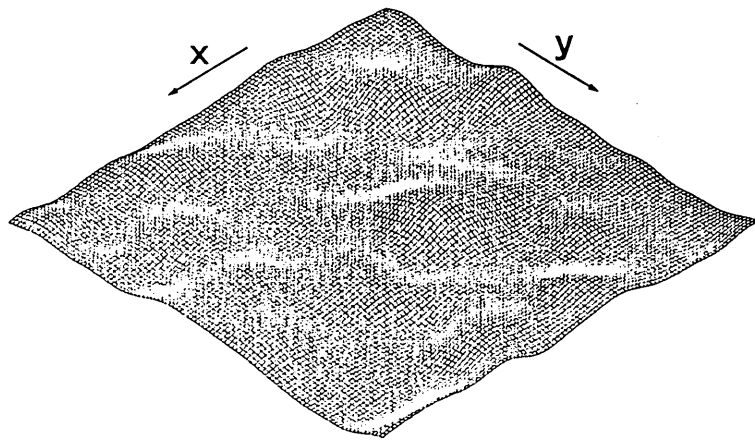


図-4.7 2次元確率場の標本場

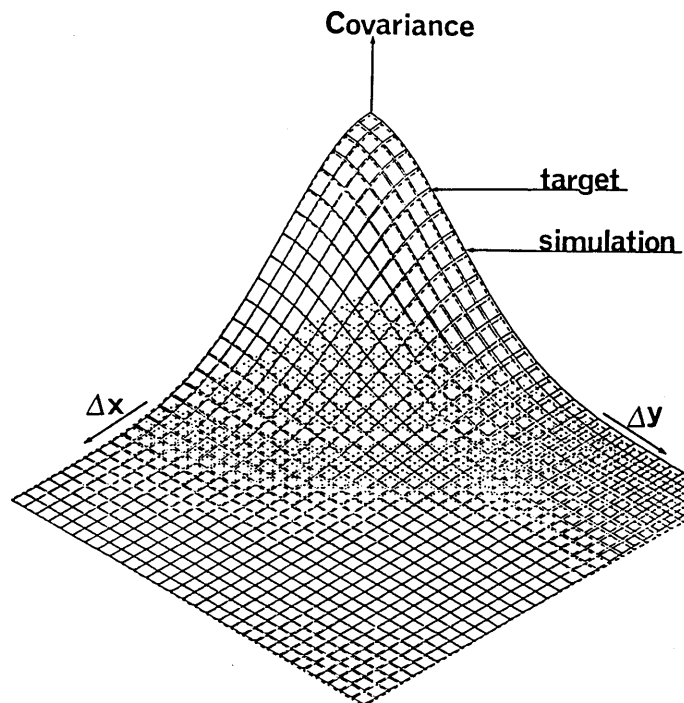


図-4.8 2次元確率場の自己共分散

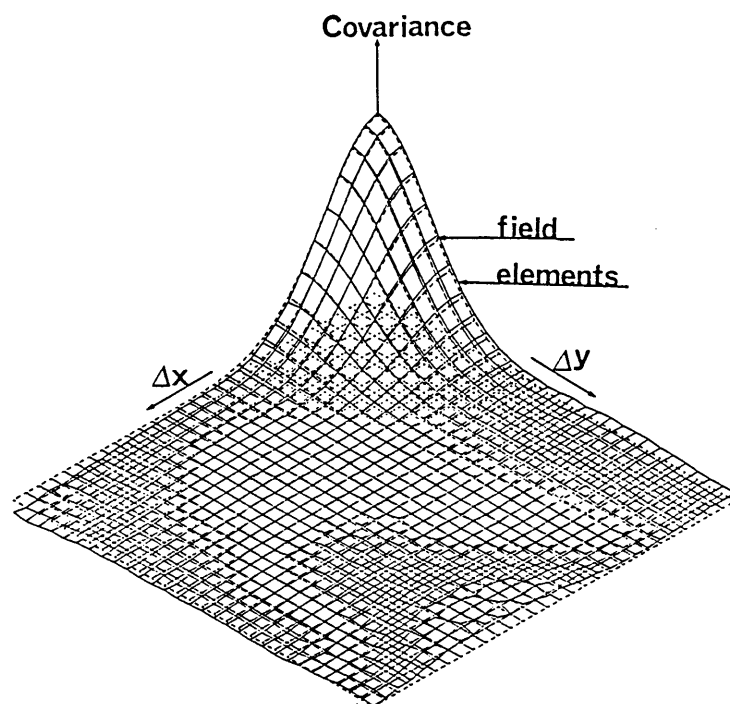


図-4.9 シミュレーションによる要素の空間的な共分散

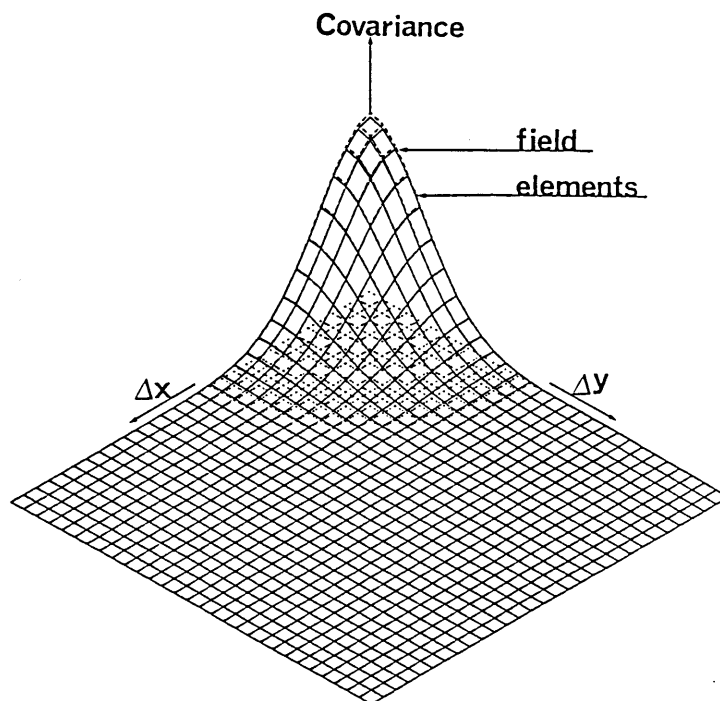


図-4.10 理論的な要素の空間的な共分散

(3) 要素分割と解析精度

相関パラメータ a, b を変化させて、材料物性値をシミュレートさせた後、有限要素法でA点における y 方向の変位を計算した。100回の試行をもとに求められたA点の y 方向変位の累積分布を図-4.11に示す。なお、完全相関の場合の結果は全要素の値を平均値1.0、変動係数0.3の確率変数として計算したものである。この図から、相関パラメータが大きくなる(すなわち2点間の相関が強くなる)と、変位の変動が大きくなり、反対に相関パラメータが小さくなると、変位の変動が小さくなることがわかる。これは、前者では、相関パラメータが大きくなることにより、標本中には各要素の弾性係数の平均値が、確率場の平均値(母平均)から大きく離れたものも出現するようになるためである。また後者では、相関パラメータが小さくなることにより、標本中の各要素の弾性係数が独立に近くなり、各要素の弾性係数の平均値は確率場の平均値(母平均)に近づくことによる。

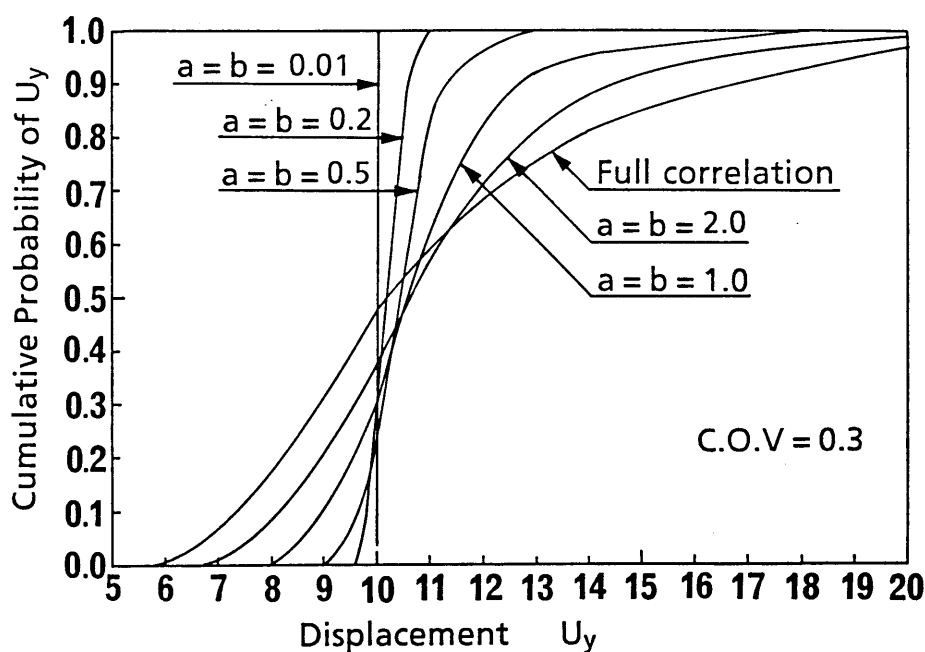


図-4.11 変位 U_y の累積分布 (C.O.V. = 0.3)

さらに、A点における x 方向と y 方向の変位に対して平均値と標準偏差をもとめたものを図-4.12から図-4.15にそれぞれ示す。ここで試行回数は100回である。

これらの結果からは、次のことがいえる。

図-4.12と図-4.13より、相関パラメータが大きいとき、すなわち2点間の相関が強くなると、平均値は大きくなることがわかる。これは、同じ平均値と変動係数をもった確率場でも、それが弾性係数のように変位に非線形に影響するときには、空間的な相関特性の影響を受けるためである。また、要素分割数を多くすると、平均値は多少大きくなるが、その影響は顕著ではない。

図-4.14と図-4.15より、相関パラメータが大きい($a=b=2.0$)、標準偏差は要素分割数を多くするに従って大きくなっている。これは、要素数を少なくすると要素内で平均化が図られ、各要素の材料物性値の変動が確率場自体の変動(母分散)に比べ小さくなるが、要素数を多くしていくと要素内で平均化が図られなくなり、標本中に極端な弾性係数を持つ要素が現れてくるためである。このため、要素の弾性係数の平均値が確率場の平均値(母平均)から大きく隔たることになり、極端に大きな(あるいは小さな)変位を与える場合が発生する。これを異常値として、JIS Z8402のGrubbsの方法により検定し、取り除いたものを太実線で示している。結果として、異常値を取り除いたデータによれば少ない要素分割数でも、標準偏差の値はほぼ一定値に収束している。

図-4.14と図-4.15において、相関パラメータが小さいとき($a=b=0.2$)、すなわち各要素が独立に近づくときは標準偏差が小さくなり、しかも要素数の影響を受けないように見える。この原因は2つに分けて考えられる。1つは、要素数が少ないときである。このとき、確率場は大きな要素で分割されることになり、要素の値を平均化していることになる、すなわち、相関パラメータが大きいときに説明したように、要素数を少なくすると要素内で平均化が図られ、各要素の材料物性値の変動が確率場自体の変動(母分散)に比べ小さくなるためである。また一方、要素数が多いときには要素内で平均化が図られなくなり、1回の試行の各要素の分散は大きくなっている。しかし、確率場が独立であるため要素の平均値はどの試行回でもほぼ一定となる。これより、今回対象としている問題、すなわち各要素の変形の和として得られる変位の変動が小さくなり、結果として標準偏差は小さいものになる。

以上の結果より、各要素の変形の和で表現できる変位などを問題にするのであ

れば、相関パラメータが小さいときにも必ずしも細かい要素分割は必要でないことがわかった。さらに、今回のモデルでは、相関パラメータの大きさによらず統計値(平均値, 標準偏差)はほぼ一定になり、モデル全体の要素分割数が10以上であれば、解は一定値に収束している。

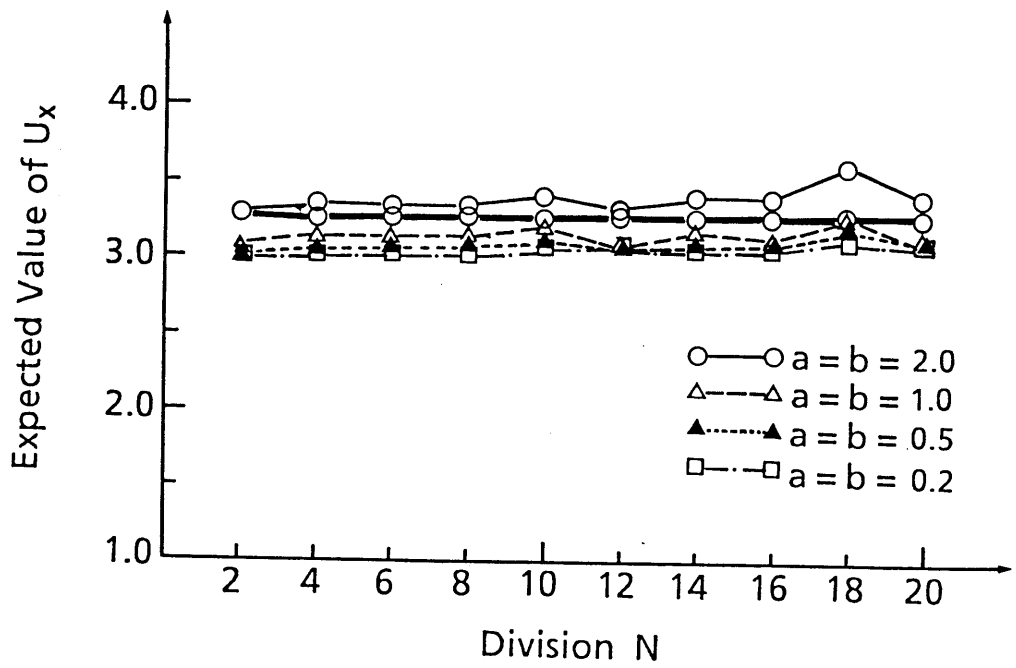


図-4.12 要素分割と変位の平均値 (x 方向)

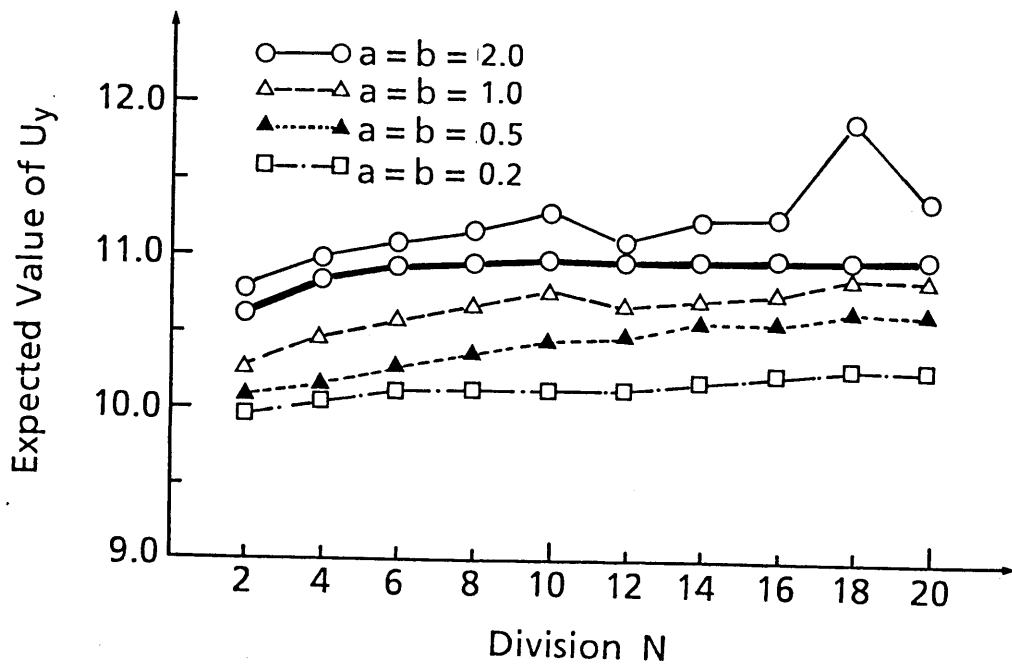


図-4.13 要素分割と変位の平均値 (y 方向)

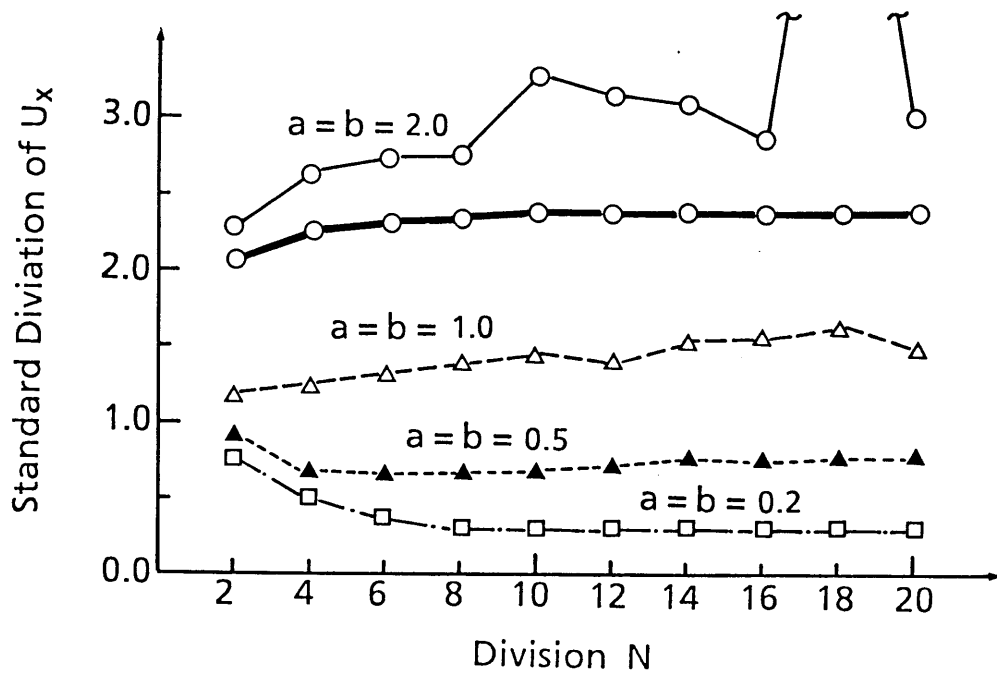


図-4.14 要素分割と変位の標準偏差 (x方向)

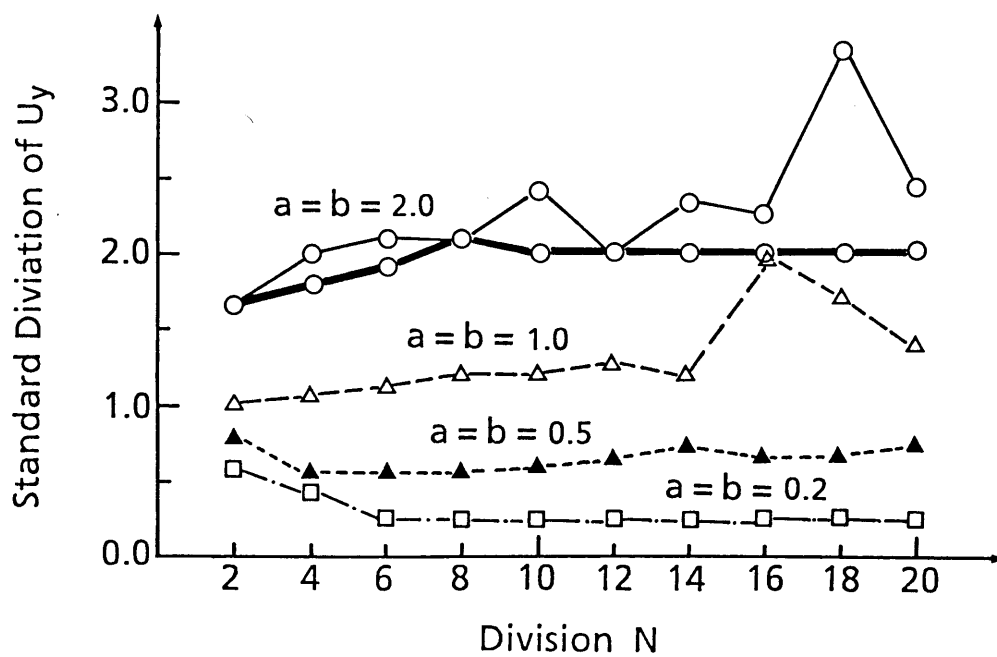


図-4.15 要素分割と変位の標準偏差 (y方向)

4.4 まとめ

本章は、地盤物性値の空間的な相関特性を有する確率場に、確率有限要素法を適用するときの問題となる要素分割の問題、すなわち確率場の離散化について検討したものである。まず最初に、確率場である地盤物性値から要素の物性値に変換するときの局所平均の手法について説明した。結果は次のようにまとめられる。

- ① 本研究では、要素間の共分散を求めるために数値積分を用いている。すなわち、2次元要素の共分散を求める場合に、各要素を x, y 方向に相似形の小要素に分割して、小要素重心間の共分散を面積比の重みを考えて数値積分を行う方法を提案している。
- ② この方法により求められる共分散の精度を簡単な例題から検証した。要素の大きさと相関性の強さにもよるが、この方法によれば、各要素を10分割すると共分散の値が十分に収束することが確認された。

次に、相関特性と要素分割数が、解の精度に与える影響をシミュレーション法を用いて検討した。解析対象は、材料物性値が有する空間的な相関特性が、確率有限要素法の解析精度に与える影響のみを検討できるようにしたモデルであり、幅、長さがともに10.0の正方形の板の一辺を固定して、他の一辺を一様に引張るという解析モデルである。解析モデルに生じる応力状態は一様な引張状態となり、極めて単純化されたものになる。また、要素分割にも三角形要素を用いて規則性をもたせた。結果は次のようにまとめられる。

- ① 2点間の距離が離れるに従って、相関特性が急激に小さくなる場合には、必ずしも細かい要素分割は必要ではない。これは次の理由による。すなわち要素分割数が少ないときには、確率場は大きな要素で分割されることになり、要素内の弾性係数は十分に平滑化され平均化した値になるためである。また、要素分割数が多いときには、要素内では平均化が図られなくなり、各試行ごとの各要素の分散は大きくなるが、確率場が独立に近い場合、領域全体の要素の平均値はどの試行回でもほぼ一定となることによる。

② 2点間の距離が離れるに従って、相関特性が急激に小さくならない場合には、細かい要素分割は必要ではない。これは、確率場全体が平均化されているため、要素内での影響があまり顕著でないためである。

③ 全体的に、今回のモデルでは、相関パラメータの大きさによらず統計値(平均値, 標準偏差)は、要素分割数が10(400要素)以上であれば一定となった。

以上、限られた検討結果からではあるが、変位や全体の破壊など各要素の変形や局所破壊の和の形で表現される場合には、要素分割数をある程度少なくすることができることがわかった。

第5章 拡張カルマン・フィルタによる

地盤物性値の空間分布推定法

5.1 概 説

有限要素法は、地盤工学における地盤の変形問題や地下水位の予測問題などに対する有効な解析手法である。有限要素法の解析結果の精度は、入力データである地盤物性値の信頼性に強く依存するが、実際の問題を解く場合には、必ずしも信頼性の高い値が常に得られるとは限らない。そこで、有限要素法に地盤物性値などに含まれる不確定性を考慮できるようにした確率有限要素法や、通常の有限要素法とは逆に、観測された変位量や地下水位の高さなどから、地盤物性値を精度よく求めて、その後の予測を確かなものにしようとする逆解析のアプローチが試みられている。

地盤物性値の不確定性は、地質学的な不確定性と、土質調査・試験による標本の質的・量的不足からの統計的不確定性とに分けられる。前者の不確定性では、平均値、分散という代表的な統計的性質のほかに、地盤物性値の空間的な分布特性が問題にされることを第2章で示した。地盤物性値の空間分布は、均質と見なせる地盤に設置された基礎の不等沈下の原因となるものであり、地盤の比較的細かな変化をもとらえようとするときに、地盤の土層区分とともに問題となる。

本章では、標本場/標本関数と仮定した地盤物性値の空間分布を、沈下量などの観測値を用いて推定するという逆解析手法の開発を行う。提案する手法は、標本場の概念を基にしてカルマン・フィルタとベイズ理論を結び付けた有限要素法であり、従来では土質調査からのみ推定していた地盤物性値の空間分布に対して、観測値を用いることにより地盤物性値の推定誤差を小さくできる確率論的手法である。この手法により求めた地盤物性値を確率有限要素法に入力することにより、沈下量などの将来予測がより正確にできるようになる(鈴木・石井, 1989a)。

カルマン・フィルタは、システムの線形性、システムの状態量および観測値に付加される雑音の正規白色性の仮定をもとにした最小自乗推定法で、Kalman-

Bucyによって理論化された。本章では、はじめに拡張カルマン・フィルターの基礎定式化とそのアルゴリズムを5.2節で示し、次に、地盤物性値の空間分布を観測値から推定(逆解析)するため、有限要素法を組み込んだ拡張カルマン・フィルターの定式化を5.3節に示す。さらに、5.4節において、簡単な正方形モデルで解析精度の検証と手法の適用性の検討をする。

5.2 拡張カルマン・フィルターのアルゴリズム

カルマン・フィルターは、次式に示す観測方程式とシステム状態方程式により構成される。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (5.1)$$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t \quad (5.2)$$

式(5.1), (5.2)は離散表示されており、添字 t は時間あるいは繰り返しのステップ数を示す。ここで、

\mathbf{x}_t : 状態量ベクトル (n)

\mathbf{y}_t : 観測値ベクトル (p)

\mathbf{H}_t : 観測マトリックス ($p \times n$)

\mathbf{F}_t : 状態遷移マトリックス ($n \times n$)

\mathbf{G}_t : システム雑音係数マトリックス ($n \times m$)

\mathbf{v}_t : 観測雑音ベクトル (p)

\mathbf{w}_t : システム雑音ベクトル (m)

式(5.1)は観測方程式で、状態量と観測値との関係を示す。詳細は5.3節で示すが、今回の問題では地盤物性値が状態量(未知数)に、沈下量あるいは側方変位量が観測値となる。式(5.2)はシステム状態方程式で、状態量の時間的遷移を記述するものである。さらに、雑音ベクトルは正規性のホワイトノイズを考えて、以下の性質を有するものとする。

$$E[\mathbf{w}_t] = E[\mathbf{v}_t] = 0 \quad (5.3)$$

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{v}_t \end{pmatrix} (\mathbf{w}_s^T, \mathbf{v}_s^T) \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_t & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_t \end{pmatrix} \delta_{ts} \quad (5.4)$$

ここで、 δ_{ts} はクロネッカーデルタ関数である。また、 $\mathbf{Q}_t, \mathbf{R}_t$ はシステム雑音および観測雑音の共分散マトリックスである。

カルマンフィルターは、式(5.1)と式(5.2)に示したように線形観測方程式と線形システム状態方程式を基本として、システムの漸化的な最適状態推定のアルゴリ

ズムを構成したものである。これに対して拡張カルマンフィルターは、次式に示す非線形観測方程式と非線形システム状態方程式を基本としたものである。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \quad (5.5)$$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t \quad (5.6)$$

この基本式に対するアルゴリズムでは、式(5.5)と式(5.6)を線形化するために、 \mathbf{h}_t と \mathbf{f}_t を推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}$ と $\hat{\mathbf{x}}_{t/t}$ のまわりにテーラー展開し、2次以降を無視する。

$$\mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) \approx \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}) + \mathbf{H}_t(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}) \quad (5.7)$$

$$\mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t) \approx \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t}) + \mathbf{F}_t(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t/t}) \quad (5.8)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{x}}$ の添字 \wedge は推定値を、また、 $t/t-1$ は \mathbf{y}_{t-1} が与えられたときの t ステップの推定値を、 t/t は \mathbf{y}_t が与えられたときの t ステップの推定値を示す。 \mathbf{H}_t と \mathbf{F}_t は次式で定義されるマトリックスである。

$$\mathbf{H}_t = \left(\frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial \mathbf{x}_t} \right)_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}} \quad (p \times n) \quad (5.9)$$

$$\mathbf{F}_t = \left(\frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{x}_t} \right)_{\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_{t/t}} \quad (p \times n) \quad (5.10)$$

式(5.7), (5.8)を式(5.5), (5.6)に代入すると、

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t + \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}) - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{G}_t \mathbf{w}_t + \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t}) - \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t/t} \quad (5.12)$$

となる。ここに、

$$\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}) + \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} \quad (5.13)$$

とおくと、式(5.11)は次式のようにになる。

$$\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (5.14)$$

拡張カルマン・フィルターでは、式(5.11)と式(5.12)、あるいは式(5.11)の代わりに式(5.14)と式(5.12)が基礎式となる。

次に、拡張カルマン・フィルターによる最適化のアルゴリズムを、以下に示す。フィルター方程式は、基礎式から雑音を除いたもので、状態量の更新を行う式である。

フィルター方程式：

$$\hat{\mathbf{x}}_{t+1/t} = \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t}) \quad (5.15)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{t/t} = \hat{\mathbf{x}}_{t/t-1} + \mathbf{K}_t \{ \mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t/t-1}) \} \quad (5.16)$$

カルマン・ゲイン：

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t/t-1} \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (5.17)$$

推定誤差共分散マトリックス：

$$\mathbf{P}_{t+1/t} = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t/t} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{G}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{G}_t^T \quad (5.18)$$

$$\mathbf{P}_{t/t} = \mathbf{P}_{t/t-1} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{P}_{t/t-1} \quad (5.19)$$

初期条件：

$$\hat{\mathbf{x}}_{0/-1} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{P}_{0/-1} = \Sigma_0 \quad (5.20)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{x}}_{t/t} : \mathbf{y}_t$ が与えられたときの、時間 t における状態量の推定値 (n)

$\mathbf{P}_{t/t} : \hat{\mathbf{x}}_{t/t}$ と真値 \mathbf{x}_t との推定誤差共分散マトリックス ($n \times n$)

\mathbf{K}_t : 時間 t におけるカルマン・ゲイン ($n \times n$)

$\bar{\mathbf{x}}_0, \Sigma_0$: 状態推定量と推定誤差共分散の初期値 (n), ($n \times n$)

推定誤差共分散 $\mathbf{P}_{t/t}$ は、状態量の推定値と真値の差の共分散を表し、カルマン・ゲイン \mathbf{K}_t は、状態量の推定値と推定誤差共分散の更新を行う際の、 \mathbf{x}_t の修正量を調整するものである。

計算は次の手順で行われる。まず $\bar{\mathbf{x}}_0, \Sigma_0$ が与えられると、式(5.20)より初期値 $\hat{\mathbf{x}}_{0/-1}, \mathbf{P}_{0/-1}$ が定まり、式(5.9)より \mathbf{H}_0 を求め、式(5.17)より \mathbf{K}_0 が計算される。次に $t=0$ ステップにおいて、観測値 \mathbf{y}_0 をもとに、式(5.16), (5.19)より $\hat{\mathbf{x}}_{0/0}, \mathbf{P}_{0/0}$ が求まる。ついで、式(5.15), (5.18)より $\hat{\mathbf{x}}_{1/0}, \mathbf{P}_{1/0}$ が、式(5.9)より \mathbf{H}_1 が、さらに式(5.17)より \mathbf{K}_1 が計算される。次に $t=1$ ステップに移り、観測値 \mathbf{y}_1 が得られると、再び式(5.16), (5.19)より $\hat{\mathbf{x}}_{1/1}, \mathbf{P}_{1/1}$ が求められるので、以下同様の手順で推定値および推定誤差共分散マトリックスが計算される。以上の計算手順(フロー)を図-5.1に示す。

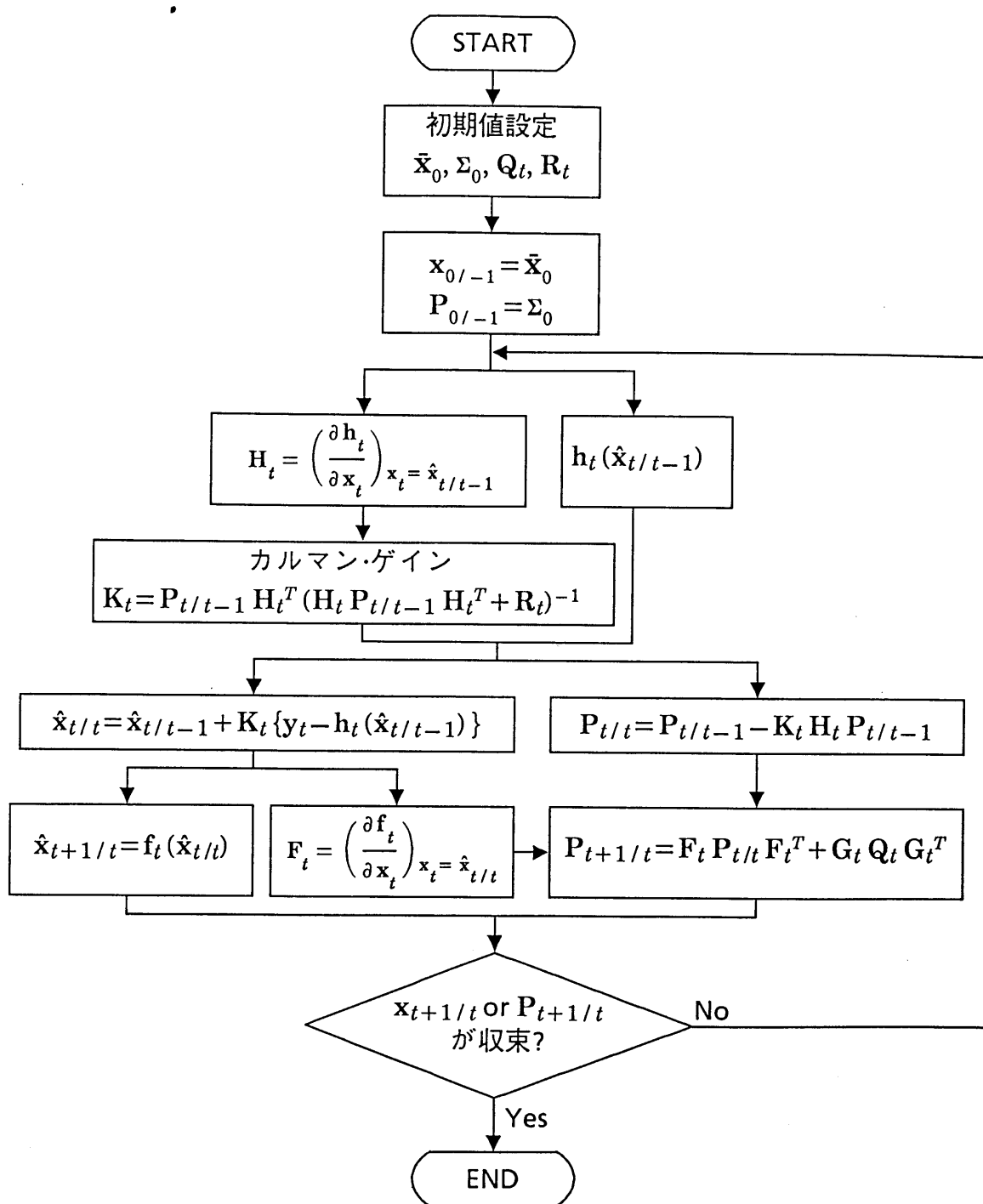


図-5.1 拡張カルマンフィルターによる逆解析フロー

5.3 有限要素法を用いた空間分布推定法の定式化

拡張カルマン・フィルタに有限要素法を組み込み、変位の観測値から地盤物性値の空間分布を推定するための定式化を次に示す。提案する方法では、初期値設定にベイズ理論の事前分布を導入している。

(1) 観測方程式

一般の有限要素法において、変位と荷重の関係は次の剛性方程式で与えられる。

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_t) \mathbf{u}_t = \mathbf{f}_t \quad (5.21)$$

ここで、 \mathbf{K} は剛性マトリックスであり、地盤物性値である状態量(未知数) \mathbf{x}_t の関数となる。 \mathbf{u}_t は変位ベクトル、 \mathbf{f}_t は荷重ベクトルである。

変位 \mathbf{u}_t は、式(5.21)より次のように表現する。

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{K}(\mathbf{x}_t)^{-1} \mathbf{f}_t \quad (5.22)$$

観測値 \mathbf{y}_t は、変位 \mathbf{u}_t に観測雑音ベクトル \mathbf{v}_t を加えたものになるので、観測方程式は次のように定義できる。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{u}_t + \mathbf{v}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \quad (5.23)$$

また、式(5.21)の両辺を \mathbf{x}_t で偏微分すると

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x}_t)}{\partial \mathbf{x}_t} \mathbf{u}_t + \mathbf{K}(\mathbf{x}_t) \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{x}_t} = \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{x}_t} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{x}_t} = \mathbf{K}(\mathbf{x}_t)^{-1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{x}_t} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x}_t)}{\partial \mathbf{x}_t} \mathbf{u}_t \right\} \quad (5.25)$$

となり、荷重 \mathbf{f}_t と状態量 \mathbf{x}_t は独立であるとすれば、

$$\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{x}_t} = -\mathbf{K}(\mathbf{x}_t)^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x}_t)}{\partial \mathbf{x}_t} \mathbf{u}_t = \mathbf{H}_t \quad (5.26)$$

となる。式(5.23)は式(5.5)の観測方程式に対応し、式(5.26)は式(5.9)の偏微分係数 \mathbf{H}_t に対応している。後で示す例題では、観測値が一時に一度だけ収録されたことから、拡張カルマン・フィルタは状態量(未知数)を初期値より漸次改善し

ていくためのものであり、時間 t は時間的な遷移を示すのではなく、収束計算の繰り返しステップを表すことになる。

(2) システム状態方程式

観測値が一時に(一組)収録されたとすれば、地盤物性値である状態量 \mathbf{x} は変化しないので、状態遷移マトリックス \mathbf{F}_t を単位マトリックス \mathbf{I} として、式(5.12)あるいは式(5.2)によるシステム状態方程式は次式で表せる。

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{I} \mathbf{x}_t \quad (5.27)$$

式(5.27)において、 \mathbf{x}_t について誤差は混入しないものと考えて、システム雑音は無視している。

(3) 初期条件

本手法では、カルマン・フィルターの推定値と推定誤差共分散マトリックスの初期値は、ベイズ理論の事前分布の平均値と共分散を用いる。これは、次に示すようにカルマン・フィルターのアルゴリズムが、ベイズ理論による標本過程の推定のアルゴリズムと同じになることによっている。

標本場は確率場の1つの標本であることから、正規確率過程の確率特性である平均値および共分散を、標本場に対する事前分布の平均値と共分散とそれぞれ仮定する。そして、ベイズ理論にしたがって、観測値を用いて状態量を更新する。すなわち、観測値を事後情報として、分散が既知な正規分布の平均値の確率分布を、ベイズ理論により更新するものである。推定誤差に対する自乗誤差を基準(損失関数)として定式化を行うと、推定値は最小分散推定値になる。ベイズ理論による逆解析のアルゴリズムを、Cividini et al.(1983)の定式化に従って示すと、次のようになる。

観測値 \mathbf{y} が、真値 \mathbf{u} と観測誤差 \mathbf{v} との和により表現できるものとする。

$$\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad (5.28)$$

ここで、観測誤差 \mathbf{v} の平均値と共分散は次のように表現されると仮定する。

$$E[\mathbf{v}] = 0, \quad E[\mathbf{v} \mathbf{v}^T] = \mathbf{R} \quad (5.29)$$

もし、 \mathbf{R} が \mathbf{v} の共分散マトリックスであり、観測誤差が統計的に独立なら、 \mathbf{R} は対角行列となる。

標本場の状態量を \mathbf{x} とし、その推定値と推定誤差共分散は、次のように表現できるものとする。

$$E[\mathbf{x}] = \mathbf{x}_0 \quad (5.30)$$

$$E[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T] = \mathbf{P}_0 \quad (5.31)$$

ここで、 \mathbf{x}_0 と \mathbf{P}_0 は標本場の状態量に対する事前分布の平均値と共分散である。

次に観測値 \mathbf{y} を導入することにより、 \mathbf{x}_0 と \mathbf{P}_0 を更新を行う。ここで、状態量と観測値が、線形ならば次のように表現することができる。

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (5.32)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{K}_0 (\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{x}_0) \quad (5.33)$$

ここで、

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{P}_0 \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (5.34)$$

さらに、推定誤差共分散は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 - \mathbf{K}_0 \mathbf{H} \mathbf{P}_0 \\ &= \mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0 \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_0 \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}_0 \\ &= [\mathbf{P}_0^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} \end{aligned} \quad (5.35)$$

状態量と観測値が非線形の場合は、次のように表現できる。

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (5.36)$$

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$ を \mathbf{x}_0 のまわりにテーラー展開し、2次以降を無視すると、

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (5.37)$$

と表現でき、線形化される。ここで、 \mathbf{H} は次式で定義される行列である。

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0} \quad (5.38)$$

また、式(5.33)は次のようになる。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{K}_0 \{ \mathbf{y} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) \} \quad (5.39)$$

よって、これらの式を用いて、収束計算を行うことにより、 \mathbf{x} と \mathbf{P} を求めることができる。フローを図-5.2に示す。

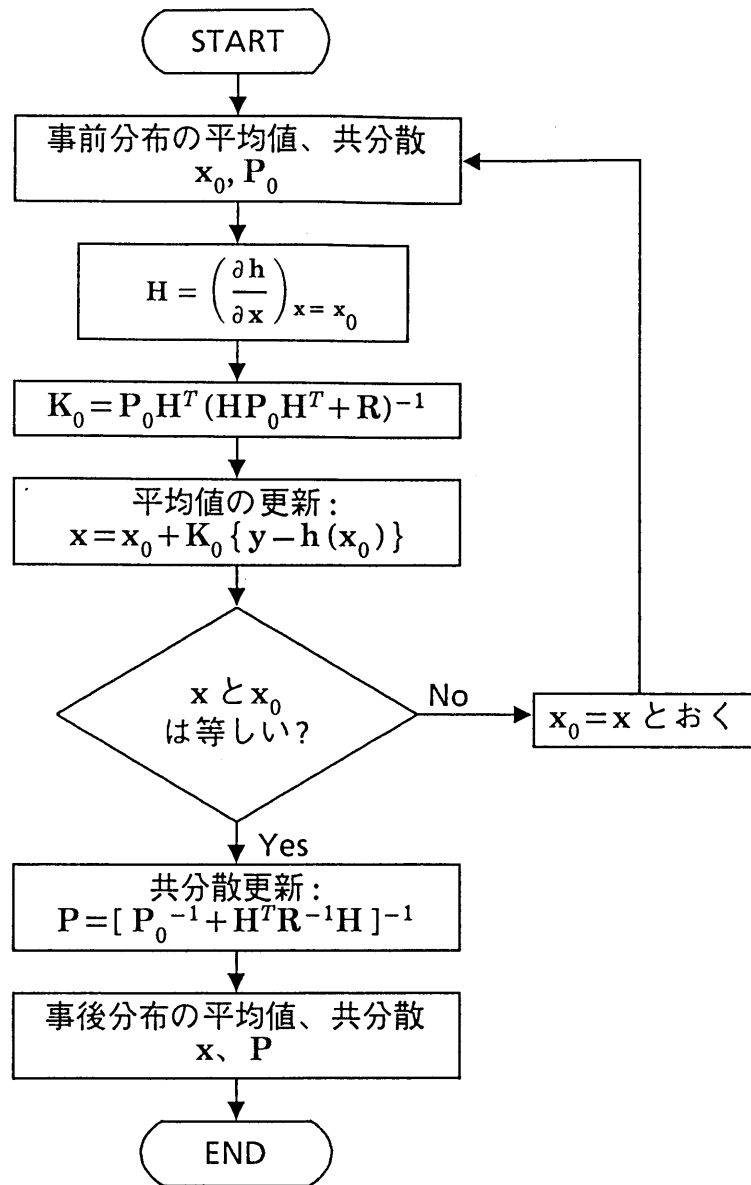


図-5.2 ベイズ理論による逆解析フロー

さて、ベイズ理論による逆解析のアルゴリズムを長々と示したが、その目的は、上に示した定式化と標本過程を仮定したカルマン・フィルターのアルゴリズムとが同じものであることを示すためのものであった。式(5.35)と式(5.19)あるいは式(5.39)と式(5.16)を比べることにより、2つのアルゴリズムの同一性は理解できる。このことから、カルマン・フィルターの初期値にベイズ理論の事前分布の平均値と共分散を用いることができる。すなわち、正規確率過程で与えられる確率特性値の平均値および共分散を、カルマン・フィルターの推定値と推定誤差共

の初期値と仮定する。具体的には、最初に地盤物性値を単一の未知数として適当な地盤物性値の初期値と分散を与え、観測値を用いてトレンド成分と見なせる平均値 \bar{x}_0 を推定し、推定値の初期値とする。この状態では未知数より観測値の数が多いので、初期値が少しぐらいうずれても一意的に決まる。次に、地盤物性値の自己共分散関数をもとに、要素の分散や要素間の共分散は要素の大きさを考慮して得られる共分散マトリックスであり、これを推定誤差共分散マトリックスの初期値 Σ_0 とする。このように、従来では経験的に定めていたカルマン・フィルターの推定誤差共分散マトリックスの初期値を、確率過程で表現される場の共分散として経験によらず計算から求め、地盤物性値の空間分布を推定するところが本手法の1つの特徴である。本手法のフローを図-5.3に示す。

また、土質調査・試験が行われている地盤においても、クリッキングと呼ばれる空間分布推定法と本手法を組み合わせることにより、推定誤差の少ない、すなわち不確定性の少ない地盤物性値の推定が行えるようになる。この場合、有限要素法と組み合わせるためにはブロック・クリッキングを用いればよく、カルマン・フィルターの初期値にはクリッキングによる推定値と推定誤差を用いることになる。土質調査・試験が行われて地盤物性値が判明している位置では、クリッキングによる推定誤差が0であるので、その近傍の要素の状態量はカルマン・フィルターのアルゴリズムの中では更新されにくい。しかし、土質調査が行われている位置から離れるに従って、クリッキングによる推定誤差が大きくなることから、これらの要素の状態量がカルマン・フィルターにより、更新されることになる。

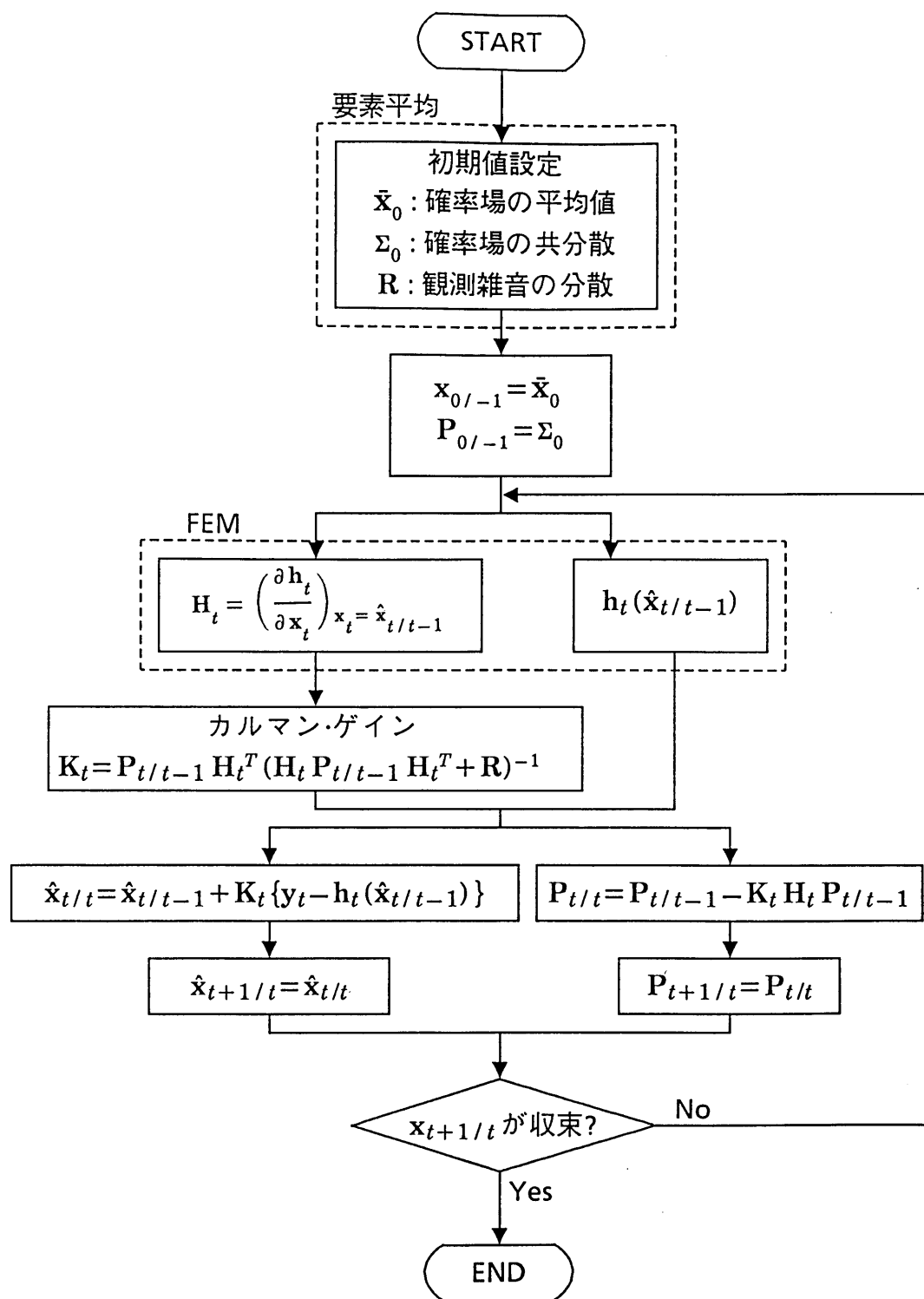


図-5.3 本手法による逆解析フロー

5.4 解析精度の検証と手法の適用性

本説では、簡単なモデルを用いて、提案した逆解析手法の解析精度の検証と適用性を検討する。ここでは、2次元平面ひずみの三角形要素より構成されて正方形モデルに対して、要素数を4個として観測点の影響検討と解析手法の精度を検証し、要素数を100個で手法の適用性を検討する。

(1) 観測点の影響と解析精度の検証

図-5.4に示す簡単なモデルを用いて、観測点の影響検討と解析手法の精度を検証する(鈴木・石井, 1989 a)。解析モデルは、5×5の正方形であり、4個の2次元平面ひずみの三角形要素より構成されている。外力として、このモデルの上端左右の節点3, 4に、それぞれ鉛直方向に2.5の荷重を与える。ここで、長さや荷重の大きさは無次元量と考えている。材料物性値は次のように設定した。ポアソン比も不確定性による影響をみる上で重要なパラメータであるが、ここでは問題を簡単にするために確定値として0.3とする。弾性係数は平均値1000、変動係数0.5の正規確率過程として、空間的な相関特性を次に示す自己相関関数より与えている。変動係数を0.5と大きめの値をとったのは、要素での弾性係数の差を明確にみるためである。

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{2.0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2.0} \right)^2 \right\} \right] \quad (5.40)$$

ここで、 ρ は相関係数を表し、 $\Delta x, \Delta y$ は、それぞれ x 軸、 y 軸方向の2地点間の距離である。

この例題では、変位量を既知として、要素における弾性係数を推定しようとする問題であることから、まず、上述の確率特性を有する弾性係数の場をシミュレーション法により、1つ発生させ、通常有限要素法を用いて変位量を求めた。次に、この変位量を用いて、弾性係数は未知として、各要素の弾性係数を本手法により推定する。このとき、解の収束判定は、すべての変位の誤差が 10^{-5} 以下として計算を打ち切っている。変位の許容誤差 10^{-5} は、最大観測変位量 4.7×10^{-3} の約0.2%になっており、それより小さい値は、一般的にも観測精度か

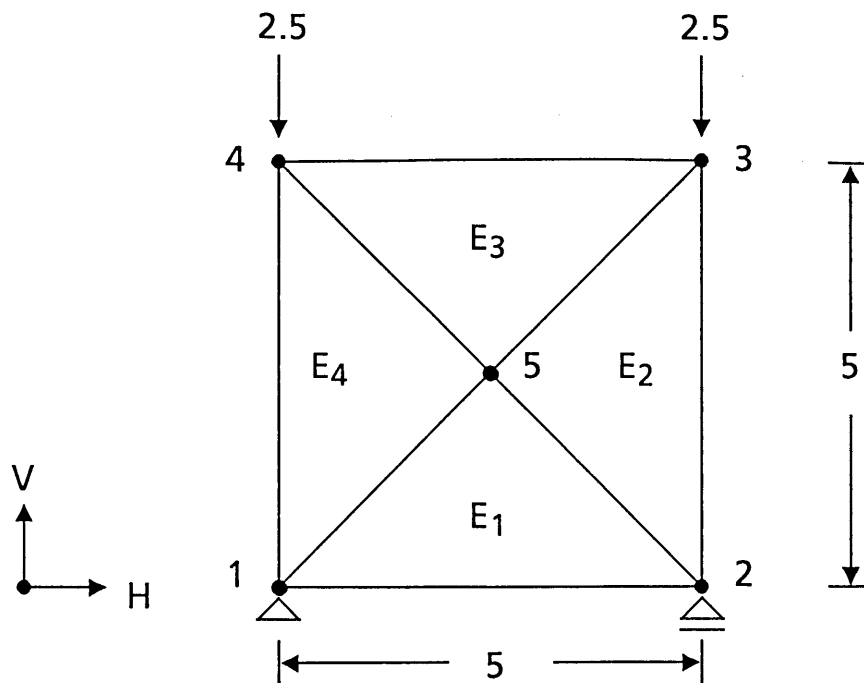


図-5.4 解析モデル

ら無理と考えたものである。解析にあたり、初期値としては状態量の推定値は1000、推定誤差共分散は最初に与えた変動係数と自己相関関数より求めたものを用いた。

解析は、観測点の数や位置(方向)を変化させた7ケース行った。結果を表-5.1に示す。このモデルでは、4つの要素の弾性係数が未知数となり、理論的には4つの観測値があれば正解が求まるわけであるが、実際には観測値に入る雑音や本手法の数値誤差、計算の打ち切りなどにより若干の誤差がでる。そこで、観測値を多くすると安定した解を得ることができるはずである。Case-1~3の結果を見ると、推定値では観測値4つのCase-3の方が正解に近いが、推定誤差は観測値が多くなるにしたがって、小さくなることがわかる。また、観測値が4つ以上あれば、いずれの場合にも4つの未知数は真値に収束する傾向があるといえる。次に、観測値を3つとしたCase-4,5を検討する。Case-5の結果は、Case-3の結果とほぼ一致している。一方、Case-4の結果では E_1 と E_3 の収束が悪くなっている。Case-3,4の収束の差から、観測点の取り方により推定値が変わっているのがわかる。

この差は、要素の弾性係数 E_1 と E_2 への節点変位量の影響度の違いによるもので

表-5.1 推定値と推定誤差

Case	Measurement points V : Vertical displacement H : Horizontal displacement	Modulus of elasticity			
		E ₁	E ₂	E ₃	E ₄
1	V : 2, 3, 4, 5 H : 3, 4, 5	1158 (87)	979 (72)	874 (66)	1096 (78)
2	V : 2, 3, 4 H : 3, 4	1163 (93)	974 (75)	878 (69)	1090 (82)
3	V : 3, 4 H : 3, 4	1174 (99)	965 (79)	888 (73)	1080 (87)
4	V : 3, 4 H : 3	1023 (259)	961 (93)	1020 (254)	1073 (100)
5	V : 3, 4 H : 4	1174 (100)	964 (80)	888 (74)	1080 (88)
6	V : 3, 4	1020 (270)	960 (95)	1020 (270)	1073 (102)
7	V : 4 H : 4	1113 (141)	1090 (232)	1045 (305)	1073 (101)
	Values given by simulation	1182	965	888	1082

The upper row shows estimators

The lower row shows estimation errors

あり、観測値としてCase-4では節点3の水平方向を、Case-5では節点4の水平方向を用いているが、表-5.2に示すようにE₁とE₂へは節点4の水平方向の変位量の影響度が高いためである。また、観測値を2つとしたCase-6, 7では要素間の弾性係数の大小関係がほぼとらえられており、Case-6ではE₂とE₄、Case-7ではE₁とE₄の精度が、他の要素に比べてよいことがわかる。これは、Case-3, 4と同様に各観測値がそれぞれの要素の弾性係数に与える影響度が異なるためである。表-5.2に、各要素の弾性係数が観測値に与える影響度を示している。これより、E₂には節点3の鉛直方向、E₄には節点4の鉛直方向などの影響度が大きいことがわかり、観測点として影響度の大きい点を選ぶと、収束はよくなるといえる。

このように、本手法では推定値の他に推定誤差を評価しており、観測値が与え

られれば推定誤差を必ず小さくすることができることから、情報量を最大限に利用した有効な手法といえる。

表-5.2 観測値への影響度

Measurement point	Displacement	$\partial u / \partial x \quad (\times 10^{-6})$			
		E ₁	E ₂	E ₃	E ₄
H : 2	0.001597	-1.65	-0.49	0.67	-0.49
H : 3	0.002140	-0.49	-2.58	-0.49	1.60
V : 3	-0.004703	1.14	3.23	1.14	-0.95
H : 4	-0.000106	-1.16	2.09	1.16	2.09
V : 4	-0.004236	1.14	0.95	1.14	3.23
H : 5	0.000843	0.82	0.71	0.34	0.22
V : 5	-0.001943	1.61	0.57	-0.48	0.57

V : Vertical displacement, H : Horizontal displacement
x is assumed to be 1000

(2) 解析手法の適用性

図-5.5に示すモデルを用いて、本手法の適用性を検証する(鈴木・石井, 1989 c)。解析モデルは、10×10の正方形であり、100個の2次元平面ひずみの三角形要素より構成されている。外力として、このモデルの上端に、鉛直方向上向きに1.0の等分布荷重を与える。ここで、長さや荷重の大きさは無次元量と考えている。材料物性値は次のように設定した。ポアソン比はここでも確定値として0.3とする。弾性係数は平均値1.0、変動係数0.3の正規確率過程として、空間的な相関特性を次に示す自己相関関数より与えている。

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{2.0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2.0} \right)^2 \right\} \right] \quad (5.41)$$

ここで、 ρ は相関係数を表し、 $\Delta x, \Delta y$ は、それぞれ x 軸、 y 軸方向の2地点間の距離である。また、水平方向(H)を x 軸で、鉛直方向(V)を y 軸で表す。

この例題でも、変位量を既知として、要素における弾性係数を推定しようとする問題であることから、まず、上述の確率特性を有する弾性係数の場(空間分布)をシミュレーション法により、1つ発生させた。これを図-5.6に示す。この弾性係数から通常有限要素法を用いて変位量を求めた。次に、この変位量を用いて、弾性係数を未知として、各要素の弾性係数を本手法により推定する。このとき、解の収束判定は、すべての変位の誤差が0.01以下として計算を打ち切っている。変位の許容誤差0.01は、最大観測変位量12.8の約0.1%になっており、それより小さい値は、一般的にも観測精度から無理と考えたものである。解析にあたり、初期値としては状態量の推定値は1.0、推定誤差共分散は最初に与えた変動係数と自己相関関数より求めたものを用いた。ここで、初期に与える観測雑音の共分散マトリックス R は、対角項を0.1、非対角項を0.0している。解析は、観測点の数や位置(方向)を変化させた4ケース行った。結果を表-5.3に示す。このモデルでは、100個の要素の弾性係数が状態量となり、理論的には100個の観測値があれば正解が求まるわけであるが、実際には観測値に入る雑音や本手法の数値誤差、計算の打ち切りなどにより若干の誤差がでることが考えられる。

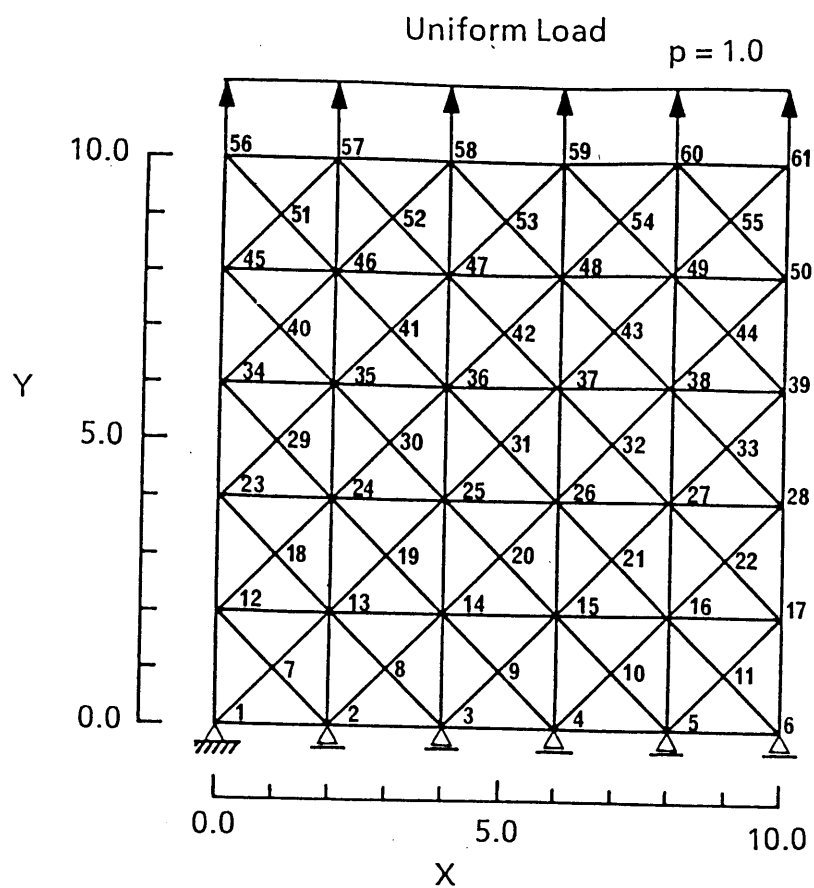


図-5.5 解析モデル

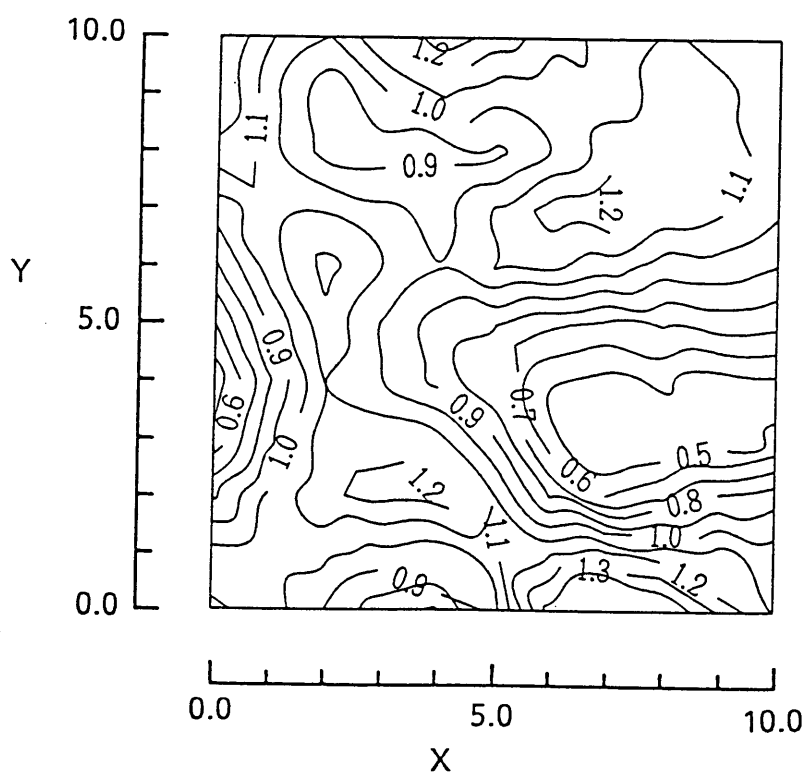


図-5.6 弾性係数の目標値

表-5.3 解析ケース

Case	Number of measurement values	Measurement points
		V : Vertical displacement H : Horizontal displacement
1	12	V : 56, 57, 58, 59, 60, 61 H : 56, 57, 58, 59, 60, 61
2	21	V : 17, 28, 39, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 61 H : 6, 17, 28, 39, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 61
3	33	V : 12, 17, 23, 28, 34, 39, 45, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 61 H : 2, 3, 4, 5, 6, 12, 17, 23, 28, 34, 39, 45, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 61
4	51	V : 9, 12, 17, 20, 23, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 42, 45, 50, 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61 H : 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 17, 20, 23, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 42, 45, 50, 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61

Case-1の推定値を図-5.7に示す。目標値と比較すると、右側の部分で上部はやや大きく下部は小さい傾向を示している。図-5.8に推定誤差を示すが、右側の値は0.1と小さくなった。Case-2では、Case-1に対して9個の観測値を追加した。推定値を図-5.9に示す。推定値はCase-1とほぼ同じ値となっている。また、図-5.10に示す推定誤差は、右端の観測値を加えたためか、右側の要素の推定誤差が小さくなっている。これは、節点1で水平方向の自由度を拘束しているため、左側の水平変位が右側に比べて小さくなっており、これが各要素の収束に影響していることによる。Case-3の推定値を図-5.11に示すが、ほぼ目標値を表している。推定誤差は図-5.12のようになり、周辺だけの情報では中心部の推定誤差が大きい。Case-4の推定値を図-5.13に示す。Case-3と同様に、ほぼ目標値を表している。推定誤差を図-5.14に示すが、入力0.3と比較して高いところでも0.1と小さくなっている。全体的にいくつかのコンター図で、周辺部に極端な値を示しているものがあるが、これは要素重心に値を与えて各節点に補間するときに、周辺部は外挿となっているためである。

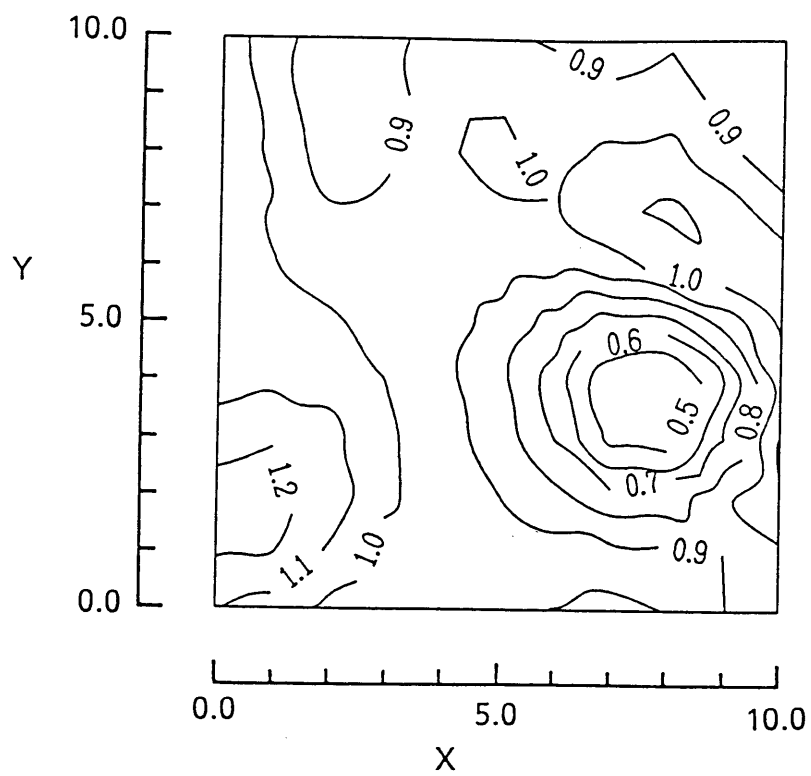


図-5.7 推定値(Case-1)

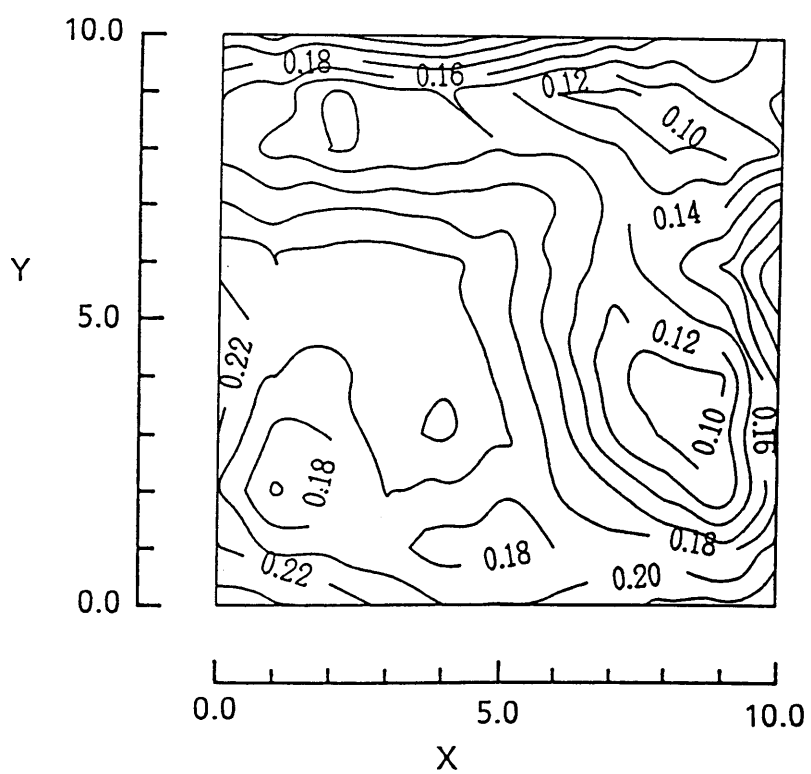


図-5.8 推定誤差(Case-1)

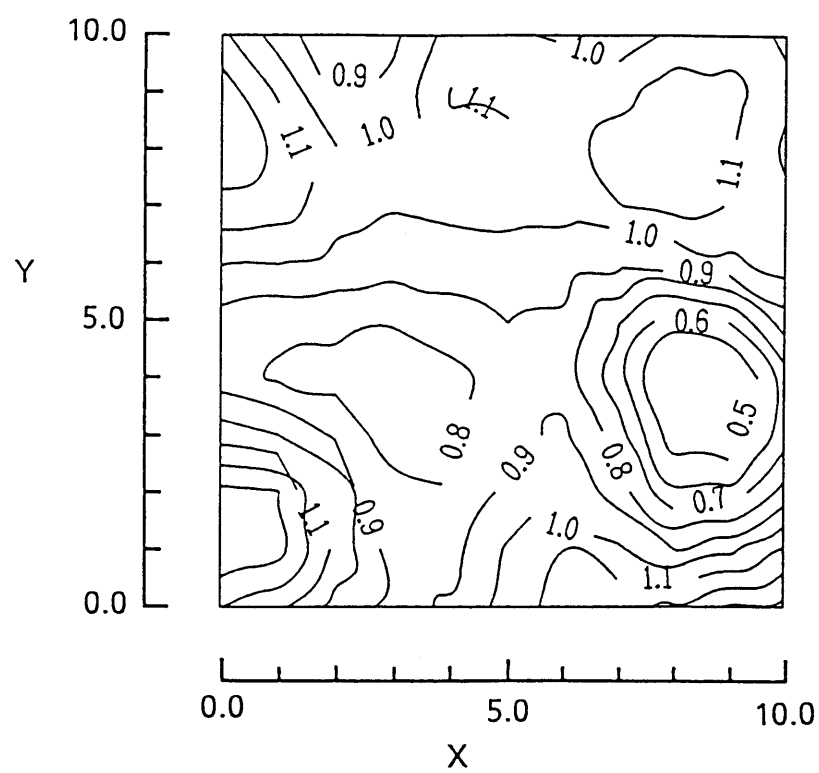


図-5.9 推定値(Case-2)

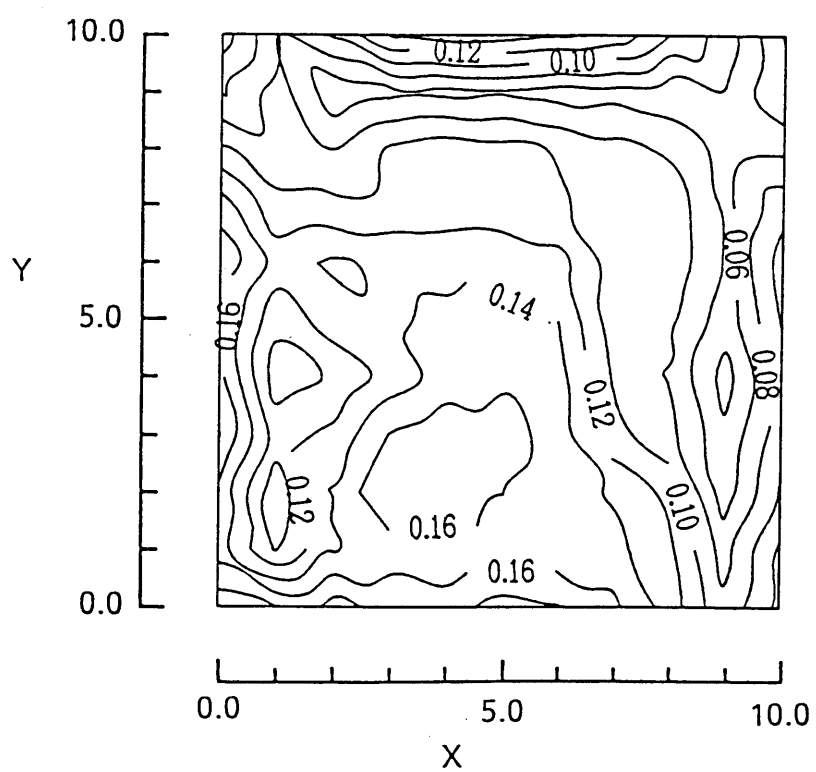


図-5.10 推定誤差(Case-2)

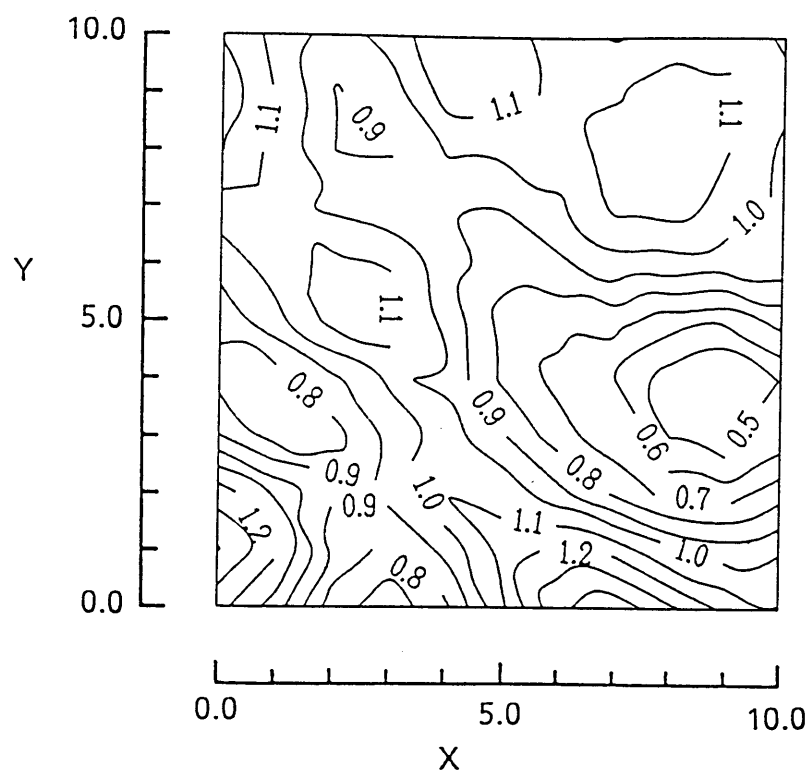


図-5.11 推定値(Case-3)

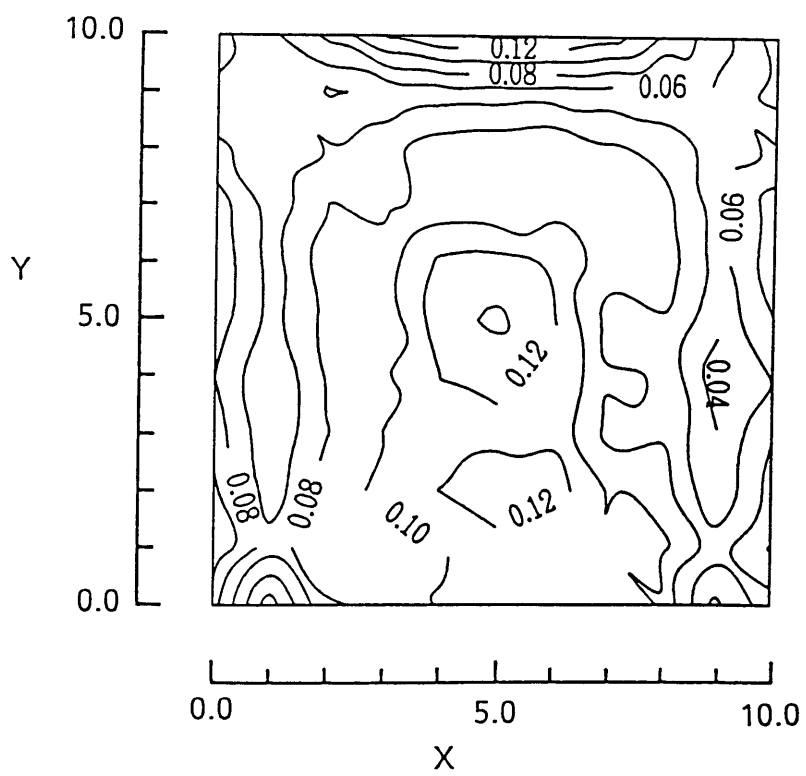


図-5.12 推定誤差(Case-3)

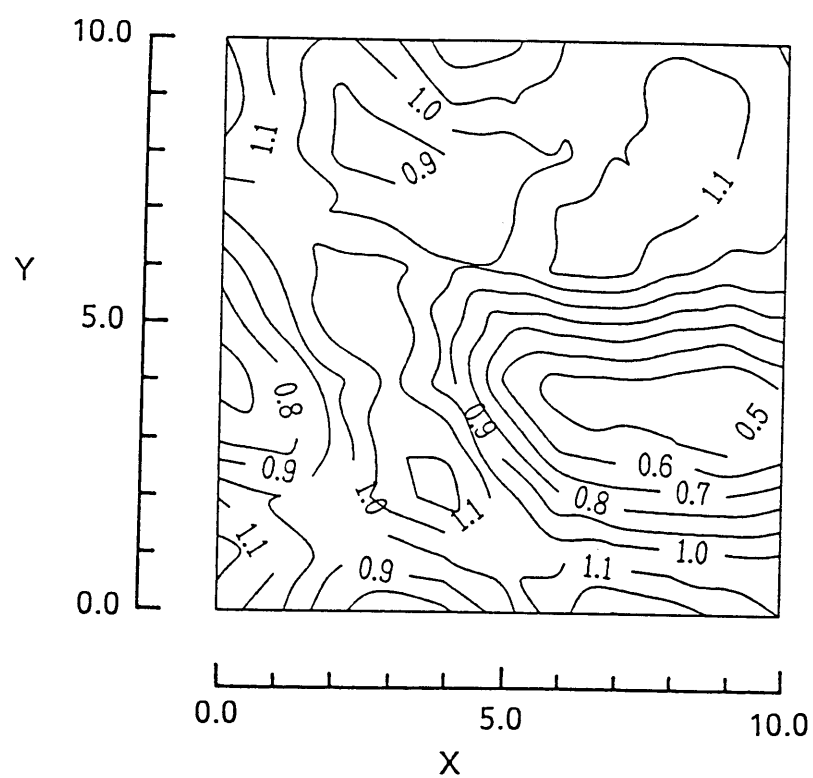


図-5.13 推定値(Case-4)

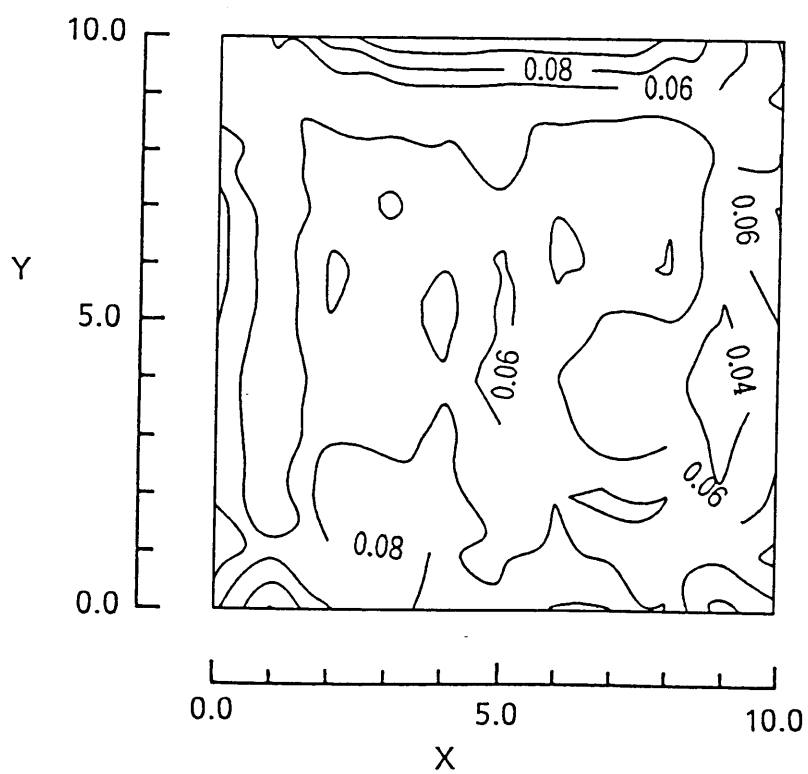


図-5.14 推定誤差(Case-4)

コンター図からだけでは収束の判定が難しいので、すべての要素の推定誤差分散を加えた値を指標とした。結果を表-5.4に示す。初期値としては9.0を与えていることになるので、それから比べると各ケースともかなり収束していることがわかる。Case-1とCase-2を比較すると、観測点を増やしても小さくならず、効果的な観測でないことがわかる。Case-4では、観測をすることによって推定誤差分散が10分の1以下となっている。

表-5.4 推定誤差分散の和

Case	Number of measurement values	Summation of estimation error variances
1	12	3.209
2	21	3.349
3	33	1.738
4	51	0.790

5.5 まとめ

本章で提案した解析手法は、拡張カルマン・フィルタに有限要素法を組み込んだ逆解析手法により、地盤物性値の空間分布を、観測値をもとに推定(同定)するものである。ここで、地盤物性値は確率場の中の1つの標本である標本場と考え、拡張カルマン・フィルタの初期条件として、確率場の確率特性である平均値と分散および自己相関関数を用いている。4個と100個の要素からなる簡単な正方形の2つのモデルを用いて、観測点(方向)を変化させて、弾性係数を推定して本手法の適用性を検討した。結果は次のようにまとめることができる。

- ① 本手法は、確率場の確率特性を導入することにより、観測数が推定する未知数より少なくても、観測値を有効に用いることができる逆解析手法である。4個の要素からなる正方形モデルの例では、未知数が4つに対して観測値は3つであっても、観測点の取り方ではほぼ妥当な推定値を得ることができた。
- ② 推定値は、観測点(方向)に依存するため、特に精度よく推定したい未知数に対しては、その影響度の高い点を観測点に選ぶ必要がある。影響度は節点変位量の偏微分係数を求めることにより、簡単に検討することができる。たとえば、上記の正方形モデルの例では、節点4の水平方向変位の方が節点3の水平方向変位より、すべての要素の弾性係数への影響度が大きいので、どちらか一方の情報を用いるならば節点4を用いる方が有効であった。
- ③ 初期値設定をベイズ理論に基づいて行っているため、推定値のほかに推定誤差を評価することができる。この推定誤差が、材料物性値の不確定性を表している。また、観測値が得られたときには、確実に推定誤差すなわち材料物性値の不確定性を小さくできる。要素数100個正方形モデルの例では、観測値を51個で推定誤差を10分の1以下まで小さくできた。
- ④ ただし、通常の逆解析手法では、推定しようとする未知数についての情報はほとんど不要なのに対して、本手法では確率場を仮定しているため、正確な確率特性を求める必要がある。

第6章 盛土工における地盤物性値の空間分布推定と沈下量予測

6.1 概 説

有限要素法の解析結果の精度は、入力データである地盤物性値の信頼性に強く依存するが、実際の問題を解く場合には、必ずしも信頼性の高い地盤物性値が常に得られるとは限らない。そこで、有限要素法に地盤物性値に含まれる不確定性を考慮できるようにした確率有限要素法や、通常の有限要素法とは逆に、観測された沈下量や側方変位などから地盤物性値を精度よく求める逆解析手法により、確率論的に沈下量予測を行う信頼性解析手法が必要となる。

本章では、盛土工における設計・施工段階による情報量を考慮した地盤の沈下量予測のため、設計段階では土質調査・試験から地盤物性値の空間分布を推定して沈下量を予測し、施工段階では逆に沈下量を観測して地盤物性値の空間分布を推定する。解析手法としては、次のものが用いられる。まず、第2章で説明した地盤物性値のモデル化に対して標本場を用い、沈下量予測には第2章、第3章でまとめたクリッキングと確率有限要素法を用いる(鈴木・石井, 1988)。さらに、施工中の沈下量の観測値から地盤物性値の空間分布を推定する方法として、第5章で説明した拡張カルマンフィルターを用いた推定法を用いる(鈴木・石井, 1989 a)。この空間分布推定法は、推定値と推定誤差が評価できることから、この値を確率有限要素法に入力することにより、沈下量などの将来予測がより正確にできるようになる。この地盤の挙動解析には、盛土工による粘性土の圧密を考えたとき、時間の経過による影響を考慮できないが、最終沈下量を考えたときには妥当であることが、Asaoka and Misumi (1988)によって示されていることから弾性解析による有限要素法を用いる。また、確率有限要素法やカルマンフィルターを用いた有限要素法はまだ新しく、基礎的な検討をする段階であるため、ここでは特に弾性解析で行う。

6.2 解析モデルと解析条件

解析対象は深さ6mの一層地盤であり、地表面に図-6.1に示されるような単位体積重量 $\gamma=1.85\text{tf/m}^3$ の盛土が帯状に載荷されると想定した。地盤のポアソン比は0.3の確定値とし、弾性係数を確率場とした。統計的性質は、平均値は 500tf/m^2 、変動係数0.3とし、自己相関係数を水平方向は鉛直方向に比べて強い相関性を有するモデルとして、次に示す式に従うものとした。

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{5.0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{1.0} \right)^2 \right\} \right] \quad (6.1)$$

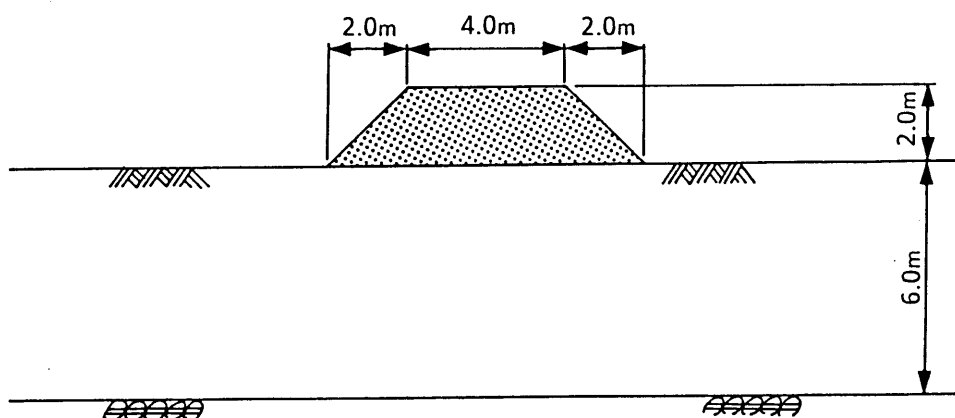


図-6.1 検討断面

また、図-6.1は架空のモデルであることから、確率場を1つ発生させ、それを実際の弾性係数の空間分布と仮定した。シミュレーションにより発生させた弾性係数の標本場を図-6.2に示す。

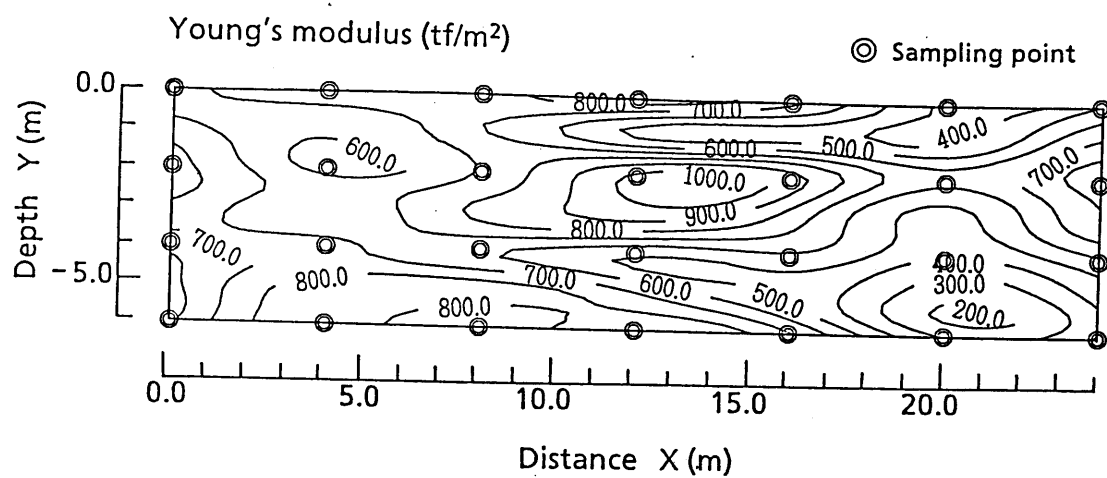


図-6.2 弾性係数の空間分布

6.3 土質調査からの地盤物性値の空間分布推定

本節では、図-6.1に示す1層地盤において、土質調査から地盤物性値として弾性係数の標本値が得られたとき、弾性係数の空間分布を標本場として扱い、クリッキングを適用して地盤物性値の空間分布を推定する。標本値は図-6.2の◎印の位置で得られているとした。

クリッキングによる推定値を図-6.3に、推定誤差を図-6.4に示す。ここで、 x 方向、 y 方向はそれぞれ水平および鉛直方向の距離を示している。また、地盤の弾性係数の自己相関係数も既知であると仮定して計算を行った。図-6.4によれば、◎印の標本点では推定誤差は0となり、標本点から離れるに従って推定誤差は大きくなることからわかる。しかし、水平方向の弾性係数は鉛直方向に比べて強い相関性を有しているため、推定誤差は水平方向ではほとんど変動していない。図-6.5には、条件付シミュレーションにより発生させた弾性係数の標本例を示した。図-6.3と図-6.5は、わずかではあるが異なった結果となっている。これは、条件付シミュレーションとクリッキングによる推定値とは、基本的に同じものではないからである。すなわち、クリッキングによる推定値は2.4節で述べたように、実現可能な標本の不偏推定量であり、標本そのものではない。一方、条件付シミュレーションの値は標本そのもので、真の地盤物性値の空間分布と同様の統計的性質を示す。むろん、標本点が多くなれば、条件付シミュレーションの値は、クリッキングによる推定値と一致することになる。

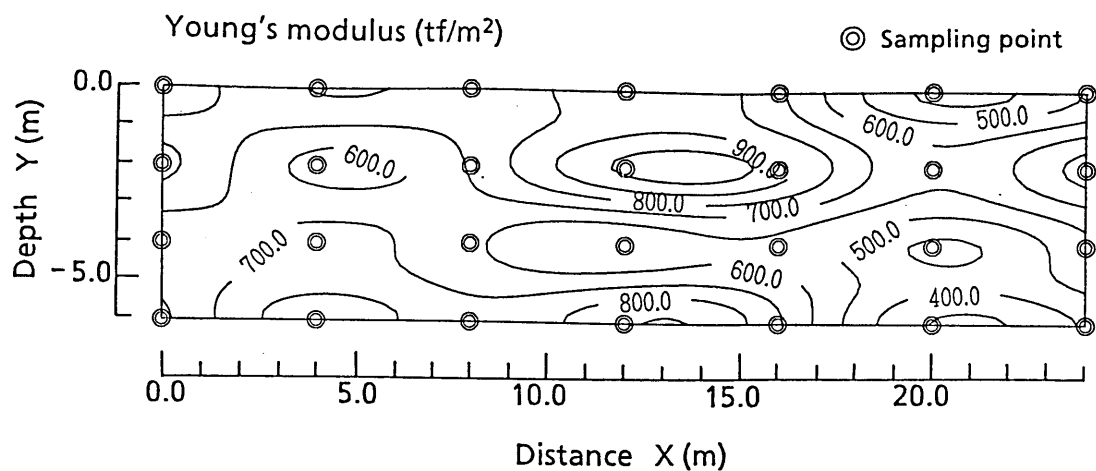


図-6.3 クリッキングによる推定値

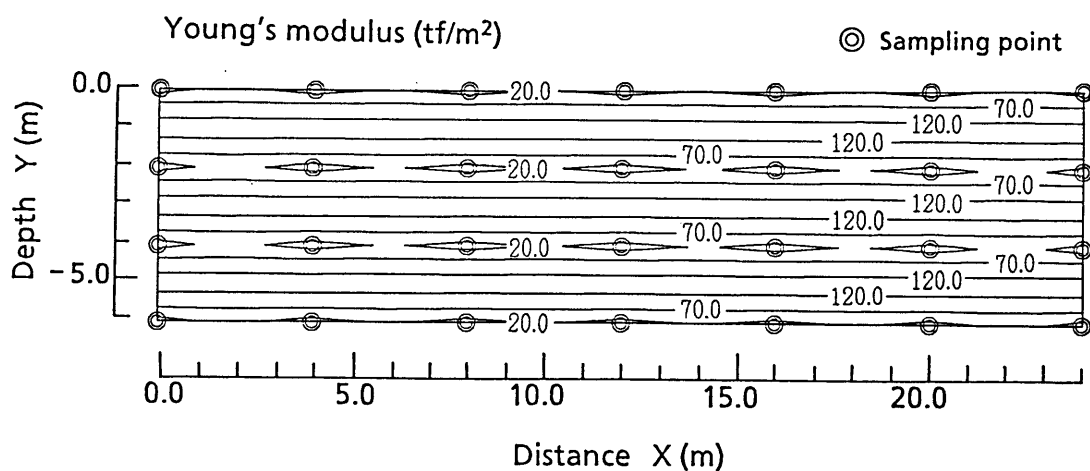


図-6.4 クリッキングによる推定誤差

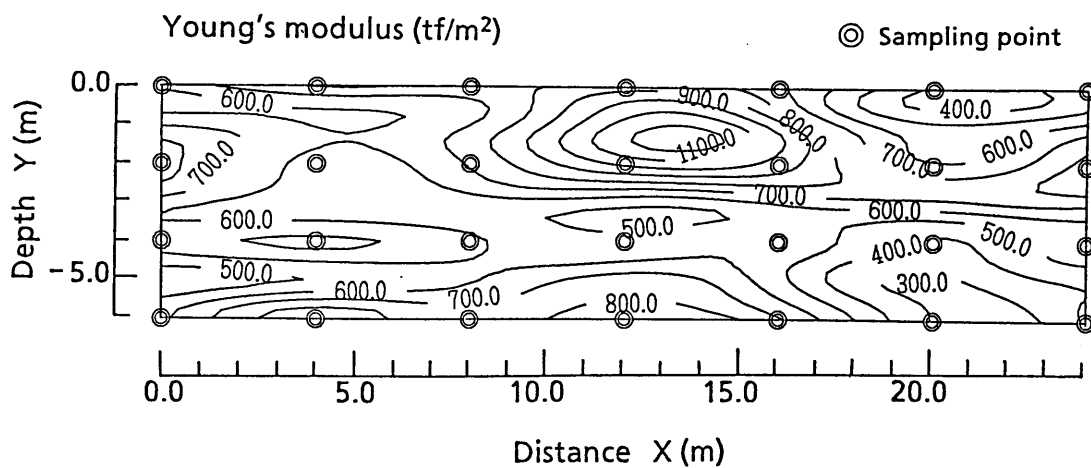


図-6.5 条件付シミュレーションによる標本場

6.4 設計段階における沈下量予測

本節では、地盤物性値のうち弾性係数の空間分布を標本場として、クリッキングを用いた確率有限要素法を用いて沈下量および不等沈下量の予測を行う。さらに、得られた結果と条件付シミュレーション法による確率有限要素法の結果とを比較することにより、提案した確率有限要素法の適用性と精度を検証した。以下、それぞれの解析手法の要点を記し、計算結果を示す。

ここで用いる確率有限要素法は、変位や応力などを求める非線形の式(性能関数)を設計点においてテーラー展開し線形近似を行う方法で、条件付シミュレーション法を用いた確率有限要素法に比べて、求めたい沈下量や不等沈下量を特定して扱えば計算時間が少ない効率のよい手法である。今回の問題への適用に際しては、以下の工夫を取り入れた。すなわち、各要素の弾性係数の平均値や共分散マトリックスには、2.4節で述べたブロック・クリッキングによる推定値およびその共分散を用いることにより、標本場の空間分布推定値を対象とした確率有限要素法に拡張した。また、各要素の弾性係数はそれぞれ相関性を有しているため、共分散マトリックスを線形変換して、互いに相関のない確率変数に変換している。また本解析では、破壊を定義する性能関数を設計点まわりにテーラー展開するため、直接に沈下量 U の累積分布を求めることはできない。そこで、式(3.80)と(3.81)と同様の定式化を行った。

条件付シミュレーション法では、第3章で説明した方法により計算された標本関数 $c(\mathbf{x})$ を確率有限要素法に入力して、沈下量や不等沈下量を予測する。条件付シミュレーション法においても、標本場と要素の値の間には変換が必要となる。以下の解析では、条件付シミュレーションにより、細かい格子状の点において標本関数の値を求め、次に、三角形要素の頂点、辺の中央および重心の7か所を用いて、標本場の平均値を求め、三角形要素の弾性係数とした。

解析モデルは、深さ6m, 幅24mの地盤を図-6.6に示すように168個の三角形要素に分割した。統計的性質は6.2節で示したものと同一であり、かつこの数字は標本値を示す。解析条件として、平面ひずみ条件を仮定して、荷重として図に示されるような単位体積重量 $\gamma=1.85\text{tf/m}^3$ の盛土を想定した。ブロック・クリッキング

グの適用して、地盤の弾性係数について推定値と推定誤差を求め、その結果を確率有限要素法に入力した。解析対象節点は、No.94, No.96, No.98, No.100, No.102の5節点として、各節点の沈下量とNo.100とNo.96の間の差から求められる不等沈下量(No.100-No.96)に対して、それぞれの累積分布関数を算定した。

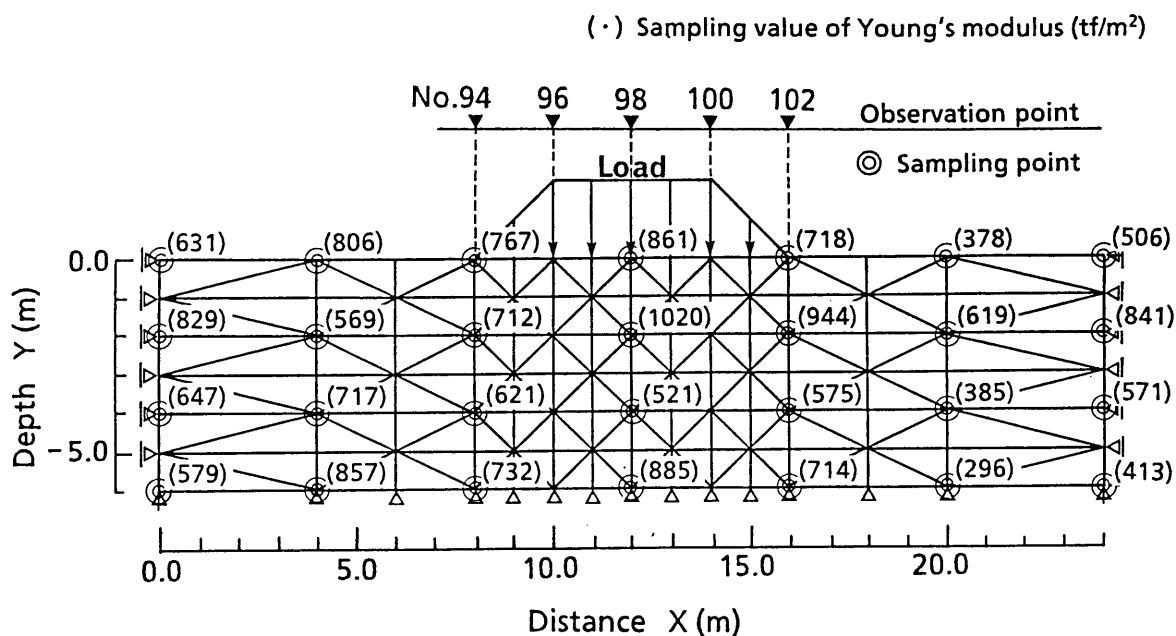


図-6.6 解析モデル

解析の結果として、5節点の沈下量の累積分布を図-6.7に示す。ここで、実線が条件付シミュレーション法による試行回数1000回の結果であり、破線が提案した解析手法による結果である。図-6.7に示すように条件付シミュレーション法と比較すると、累積確率を50%としたときに沈下量の誤差は2%以下になった。これは、地盤物性値の変動係数が大きくても、クリッキングによる推定誤差が図-6.4に示すように小さくなっているためである。また、No.100とNo.96は中心軸から左右対称の位置にあるが、両者の沈下量が異なっており、確率過程では考慮できない標本値の偏りを考慮できていることがわかる。

図-6.8には不等沈下量の累積分布を示す。実線および破線は図-6.7と同様である。この図においても、累積確率を50%としたときの誤差は約5%であった。

また、特定した節点の沈下量や不等沈下量を検討する場合に、FACOM-M380QのCPUでは、近似法は約90secとなり、条件付シミュレーション法は約500secとなった。これらより、提案した解析手法は、精度と計算時間を考慮すると有効な手法であることがわかった。

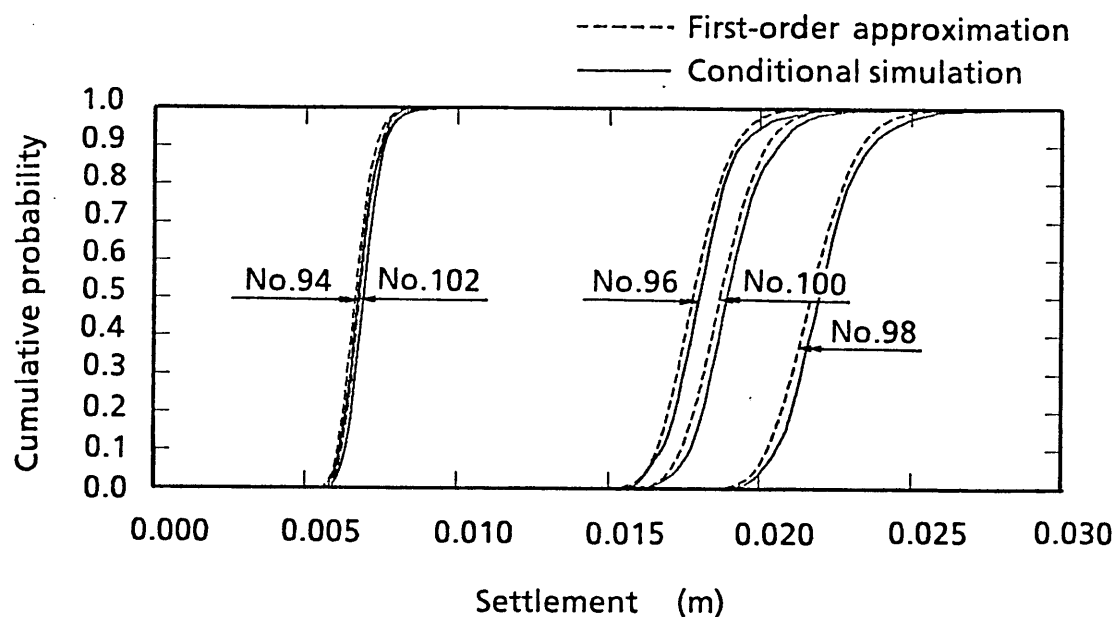


図-6.7 沈下量の累積分布

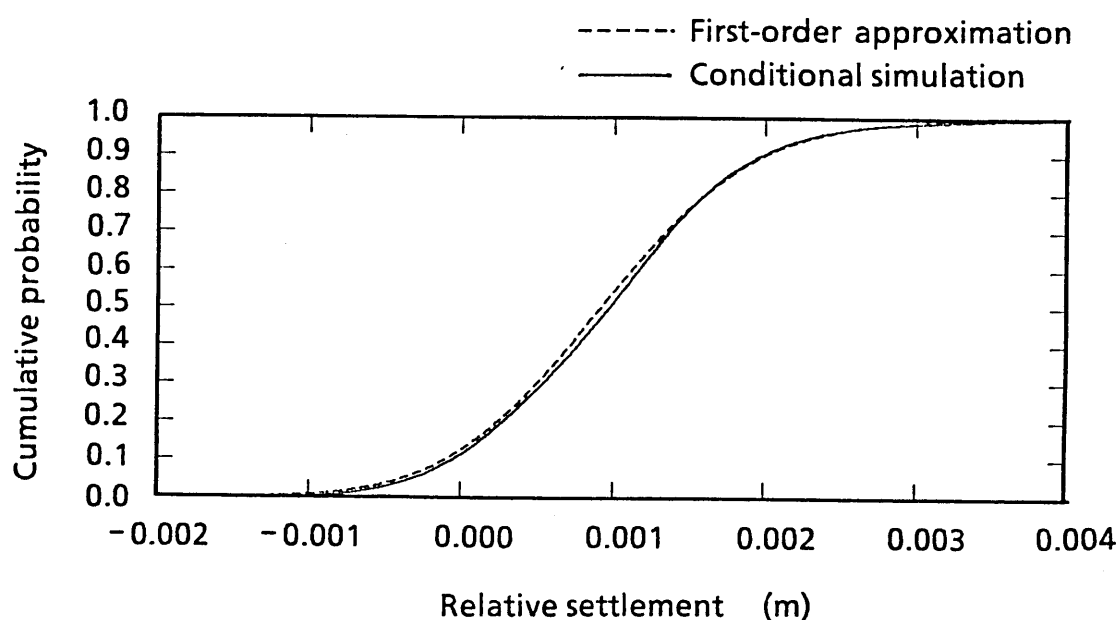


図-6.8 不等沈下量の累積分布

6.5 施工中の地盤物性値の空間分布推定

本節では、1層地盤の地表面に載荷荷重を作用し、地表面の沈下量や側方変位の観測量が与えられたときに、地盤の弾性係数の空間分布を推定する問題を対象として、その実用性を検討する。解析モデルは、図-6.9に示すように深さ6m、幅24mの一層地盤を168個の2次元平面ひずみの三角形要素に分割されている。図中の●印は沈下量を観測する点で、▲印は側方変位を観測する点である。シミュレーションにより図-6.2に示すような弾性係数の空間分布を1つ発生させ、要素ごとに局所平均をとったものを実際の地盤と仮定し、通常の有限要素法を用いて変位量を計算した。弾性係数のコンターを図-6.10に示す。このコンターは、要素重心に弾性係数を与えて描いたものである。図-6.10が、観測値により推定する弾性係数の空間分布であり、解析の目標となるものである。

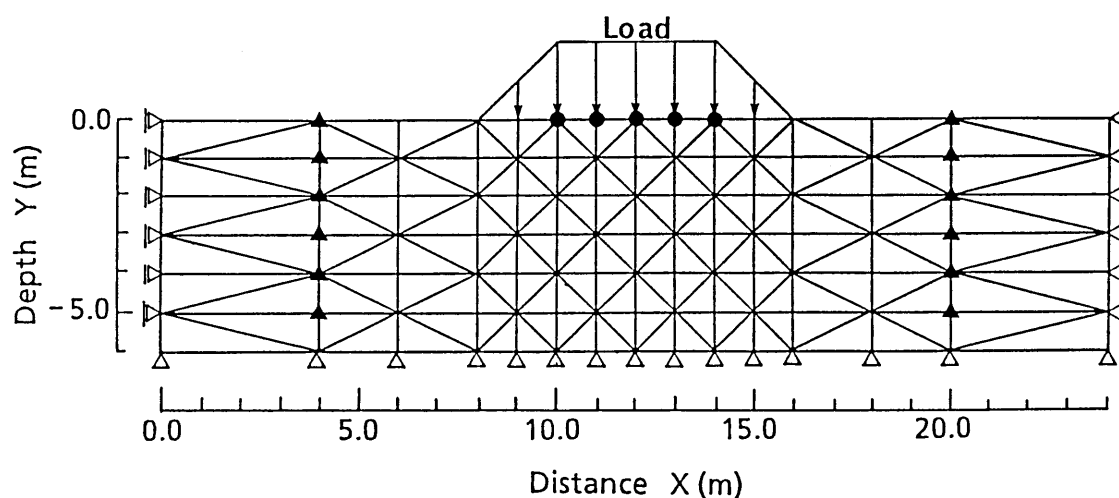


図-6.9 解析モデル

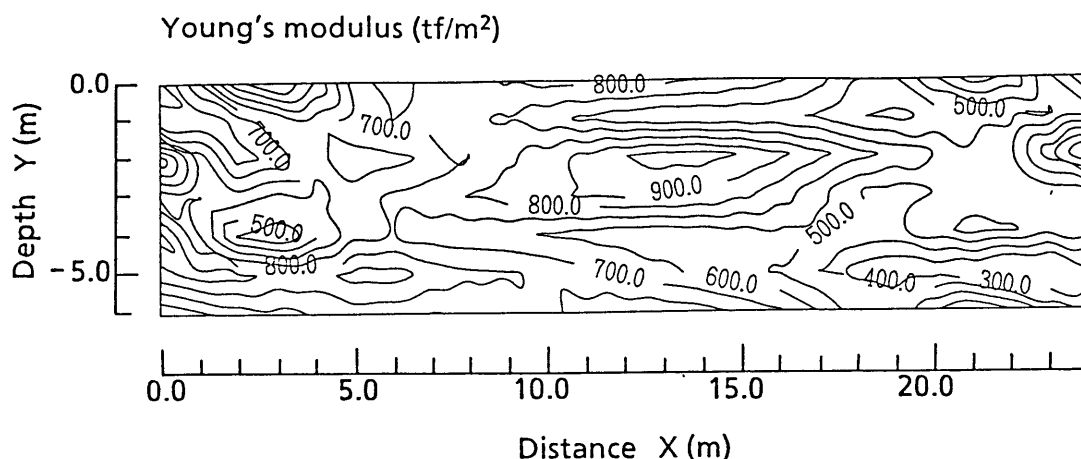


図-6.10 要素の弾性係数の空間分布

さて、解析では、有限要素の弾性係数をすべて未知数として、観測値から弾性定数を推定する。ここでは、観測値とともに載荷荷重条件および弾性係数の自己相関モデルが既知であるとして問題を解く。解析は、情報量と精度との関係調べるために、情報量として沈下量のみを用いたもの、側方変位のみを用いたもの、その両方とも用いた3つのケースについて行った。

最初に、沈下量を5点(図-6.9の●印)のみ用いて弾性係数を推定する。推定値の初期値を 692tf/m^2 とし、上記の確率場における要素の共分散を推定誤差共分散マトリックスの初期値とした。結果を図-6.11に示す。地盤上部にコンターが密になり、この部分の推定値が収束していることがわかる。このように、本手法は、観測点への感度の高い部分が収束に大きく寄与する。次に、同じモデルで側方変位を12点(図-6.9の▲印)のみを用いた結果を図-6.12に示す。この結果では、側方変位の観測点の地盤下部での推定値が大きく収束している。最後に、沈下量と側方変位の両方の17点(図-6.9の●印と▲印)を用いた結果を図-6.13に示す。この程度の情報量が得られると、弾性係数の空間分布(図-6.10)がもつ全体的な傾向は十分に再現できていることがわかる。また、図-6.11～図-6.13より、鉛直方向に比べ水平方向に強い相関性を表しており、初期条件として与えた推定誤差共分散の相関係数が、推定結果に効果的に作用していることがわかる。

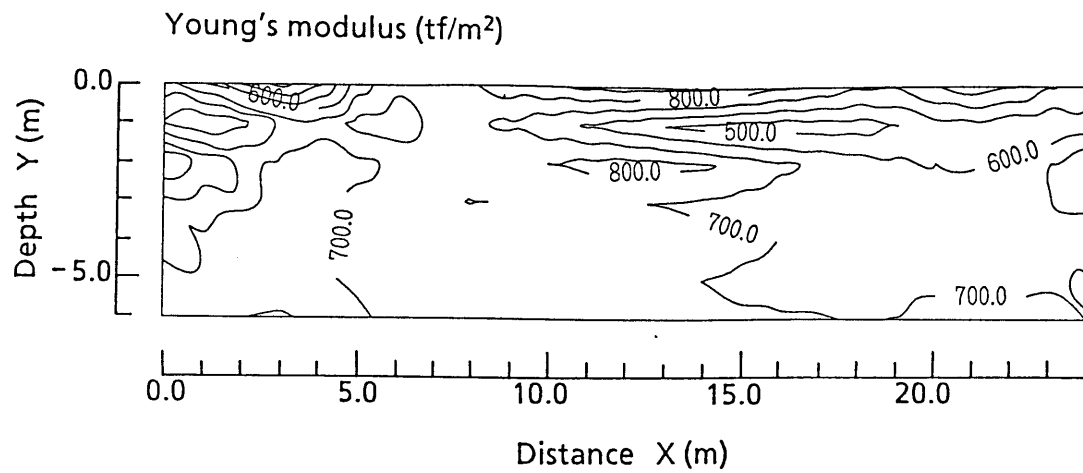


図-6.11 沈下量5点からの推定値

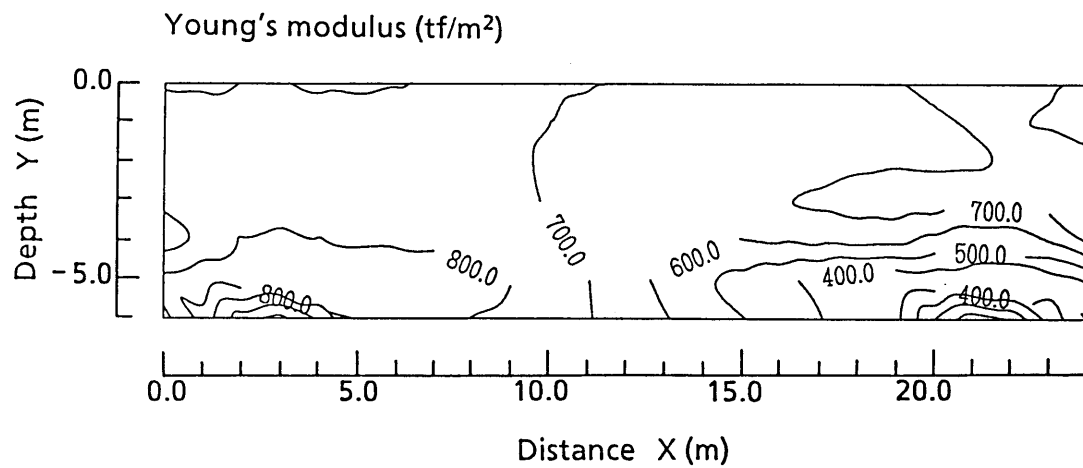


図-6.12 側方変位量12点からの推定値

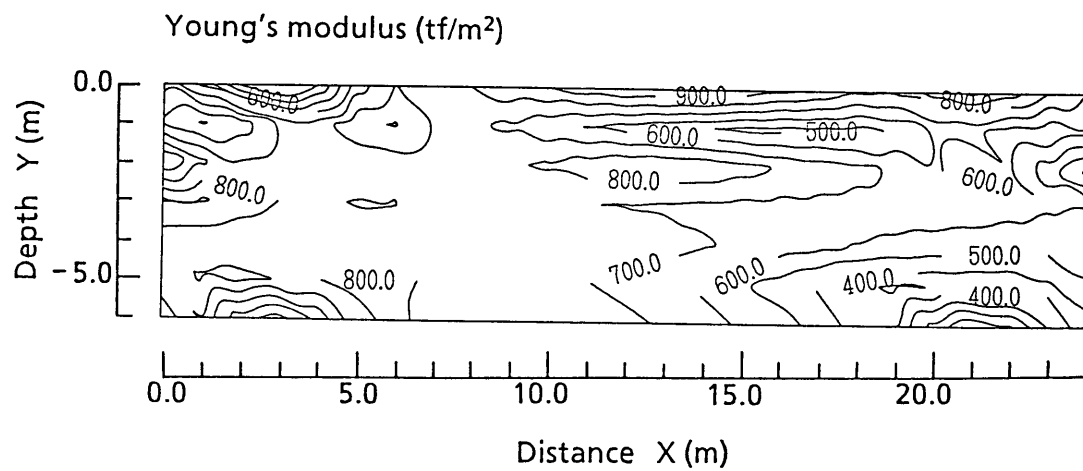


図-6.13 沈下量と側方変位量17点からの推定値

この推定法は、観測点の取り方により異なった結果となるわけであるが、現実的には注目する場所を中心に観測が行われることが多いわけであるから、その観測点に対して影響する地盤物性値の推定誤差は小さくできる。これらの推定誤差を図-6.14～図-6.16に示す。図-6.14では、盛土直下の値が 40tf/m^2 以下となり、初期値として与えた 150tf/m^2 よりかなり小さくなっている。これは、盛土直下の要素が沈下量の観測点に対して影響度が大きいいため、他の部分に比べ収束に大きく寄与していることになる。また、図-6.15では、側方変位の観測点の地盤下部の値が小さくなっており、この部分の要素が側方変位の観測点に対して影響度が大きいことがわかる。図-6.16では、図-6.14と図-6.15の両方の影響を受けていることがわかり、図-6.13の推定値と比較すると、収束により推定値の変化が大きい部分の推定誤差は小さくなっている。このように、観測点に対する影響度の大きい点から推定に寄与し、それに伴い推定誤差は小さくなる。

このような地盤物性値の空間分布推定を行った逆解析でも、それぞれの座標(この場合要素)の値を限られた情報量から求めることは不可能である。しかし、全体的な傾向を表す推定値を確率論的に表現して、その推定値の不確定性を確実に小さくすることはできる。このことから、盛土などのように、観測値が比較的容易に得られる場合には、本解析手法を用いてその情報量を解析モデルに組み込むことにより、地盤物性値の不確定性を減らすことができ、工事の進捗によって盛土高がさらに高くなったときの沈下量や側方変位の予測を、誤差少なくできる。

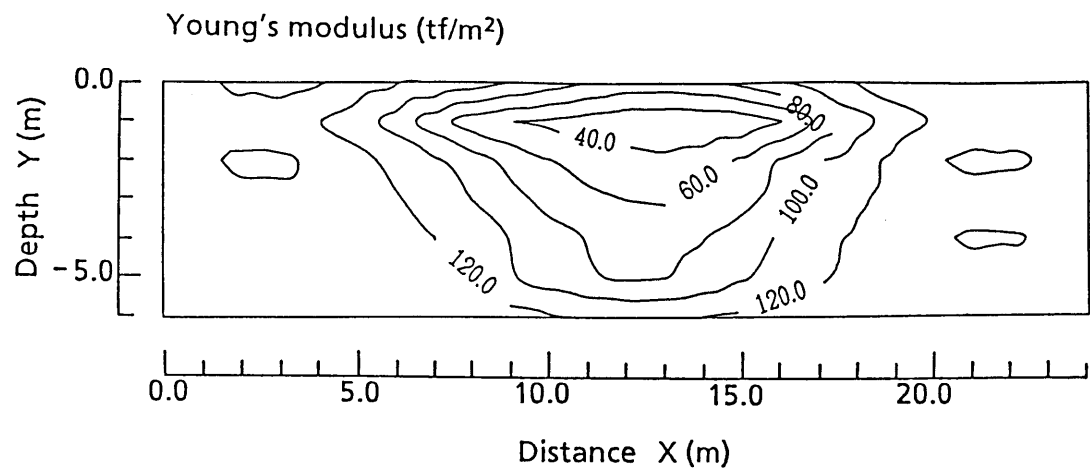


図-6.14 沈下量5点からの推定誤差

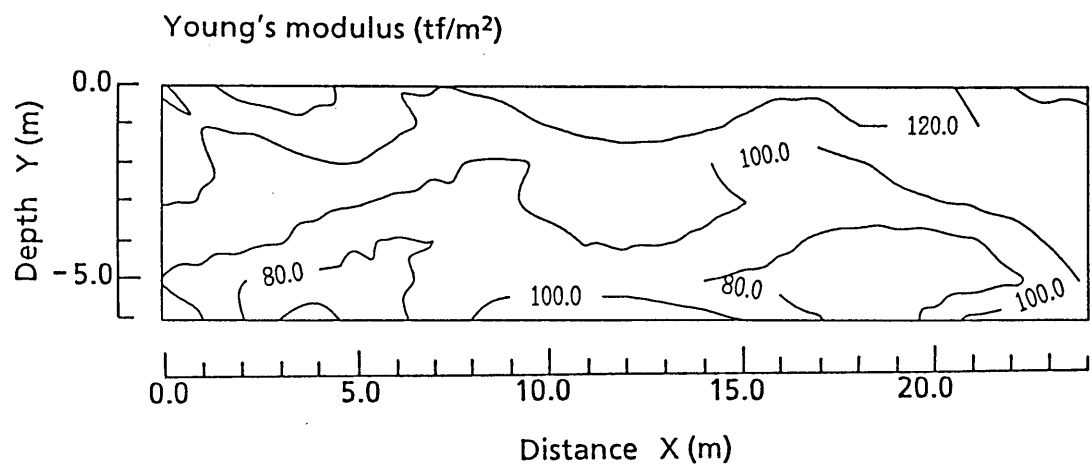


図-6.15 側方変位量12点からの推定誤差

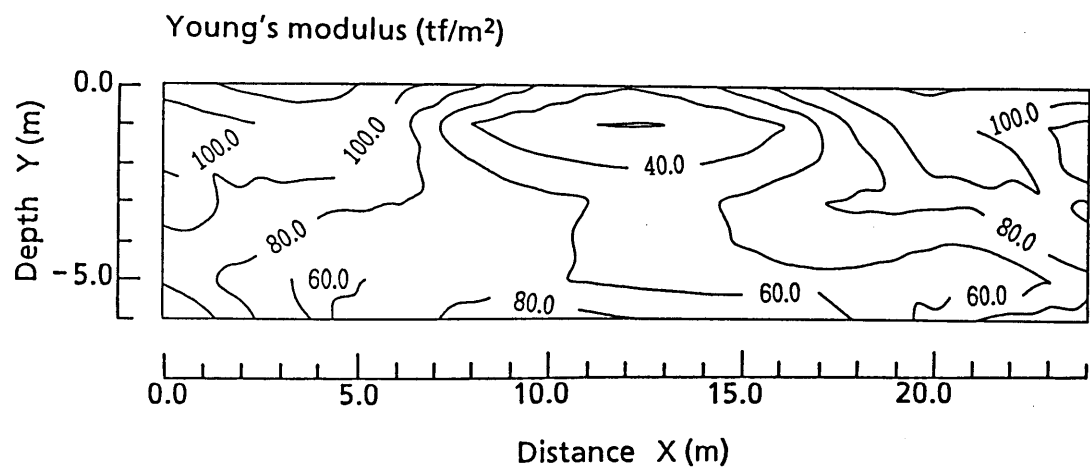


図-6.16 沈下量と側方変位量17点からの推定誤差

6.6 まとめ

本章は、地盤物性値の空間分布の扱いを、従来の確率場から確率場の中の1つの標本場であることに着目して、設計段階における沈下量予測や施工段階における地盤物性値の空間分布推定を行ったものである。沈下量予測はクリッキングを用いた確率有限要素法を適用した。解析モデルとして、帯状に載荷される地盤を2次元でモデル化し、5節点の沈下量と2節点間の不等沈下量に対して統計的性質を求めた。さらに、このモデルで拡張カルマン・フィルターに有限要素法を組み込んだ逆解析手法を適用し、地表面の5点の沈下量と12点の側方変位の観測値から弾性定数の空間分布を推定した。結果は次のようにまとめることができる。

- ① 地盤物性値を確率場として、弾性係数の変動係数が0.3と比較的大きな値のときには、提案した確率有限要素法による破壊確率の精度は性能関数の非線形性のためにあまりよくない。すなわち、地盤物性値の変動係数が大きい場合を考えると、適用性に限界があることが示された。しかし、今回のクリッキングを用いた確率有限要素法では、地盤物性値の不確定性を標本場の推定誤差と考えることにより、地盤物性値の弾性係数の変動係数が比較的大きな場合でも精度がよいことがわかった。
- ② 特定した沈下量や不等沈下量の超過確率を評価する場合に、提案した確率有限要素法はFACOM-M380QでCPUが約90sec、条件付シミュレーション法を用いた有限要素法は1000回の試行でCPUが約500secとなった。この結果より、提案した確率有限要素法は、条件付シミュレーション法を用いた有限要素法に比べて、計算時間が短く、地盤物性値の変動係数が0.3と大きくても誤差は5%以下になり、十分実用的な手法であることが確認された。
- ③ 初期値設定をベイズ理論に基づいて行っているため、確率場の確率特性を求める必要があるが、推定量のほかに推定誤差を同時に評価することができる。この推定誤差が、地盤物性値の不確定性を表している。また、観測値が得られたときには、確実に推定誤差すなわち地盤物性値の不確定性を小さくできる。今回のモデルでは、初期の地盤物性値の不確定性を 150tf/m^2 としたのに対して、部分的には推定誤差を 40tf/m^2 以下にすることができた。

第7章 斜面安定性評価への確率有限要素法の適用

7.1 概 説

斜面安定性評価に確率有限要素法を適用するにあたり、破壊モードであるすべり円弧を仮定しなければならず、その適用性の問題が指摘されることもある。また、地盤物性値のうち確率変数や確率場として扱う必要性のある地盤物性値の検討が必要である。本章では斜面安定解析への確率有限要素法の適用性を確認するとともに、上に述べた斜面安定解析の種々の問題について、数値解析により検討を行う。まず、本節では、斜面安定解析における既往の文献から有限要素法について位置づけと本章の目的をまとめる。

自然斜面や切土、盛土などの人工斜面の安定性を評価するための手法は、数多く提案されている。これらの安定解析手法は、極限平衡法(limit equilibrium method)と極限解析法(limit analysis method)に大別される。極限平衡法は、一般に用いられている手法で、すべり面におけるせん断応力とせん断抵抗の極限のつり合い状態を考えている。一方、極限解析法は、極限平衡法で扱っていない応力-ひずみ関係を取り入れた極限状態を定義し、安定性を評価する手法である。

極限平衡法は仮定するすべり面の形状によって、直線すべり、くさび形すべり、円弧すべり、対数らせんすべり、放物線すべり、一般形すべりに分類される。安定解析は、一般に斜面を鉛直方向に区切ったスライスについて行われるので分割法とよばれて、Fellenius法とBishop法を中心として発達してきている。現在提案されている安定解析手法には、図-7.1に示される手法がある。スライスに作用する力の取り方とすべり面におけるせん断応力と垂直応力を求めるための静的つり合い条件の取り方が、それぞれ解析手法により異なっている。

また、斜面安定解析では極限平衡法に加え、多くの解析手法が提案されてきた。これらの解析手法は、塑性論や有限要素法などの理論から成り立っており、地盤物性値の応力-ひずみ関係をモデル化して、極限平衡法よりさらに実際の斜面に近い状態を考えようとする方法である。斜面内の応力が不静定で厳密に定まらないことが安定解析の問題であり、計算における種々の仮定が大きな原因に

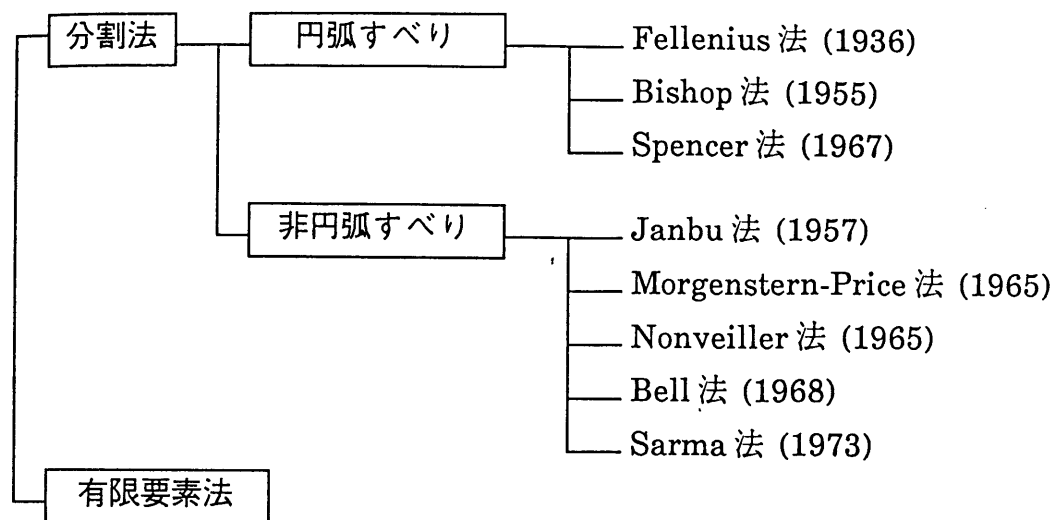


図-7.1 斜面安定解析手法

なってきた。もし、斜面内の応力状態を合理的に求めることができれば、すべり面上の各点で垂直応力やせん断応力が直接的に定めることができ、これによって不静定内力に関する各種の仮定は不要になり、すべり面を一つ仮定するごとに唯一の解が求まることになる。斜面内の応力は主として、有限要素法など用いた弾性解析や弾塑性解析により評価される。

有限要素法が用いられるようになってから、任意形状で多層にわたる断面を有する盛土が解析できるようになった。Clough and Woodward (1967)は、盛土の解析では施工過程を考慮して幾つかの層に分けて積み上げたときの解を示し、Brown and King (1966)は、有限要素法によって切土および盛土斜面の応力を求めた斜面安定解析を行った。現実の斜面内の応力、ひずみ状態を正確にとらえるには弾性解析は無理があり、厳密には土の非線形性をも考慮する必要がある。これには有限要素法が有力な手段となるが、一般に弾塑性解析は土の応力-ひずみ関係の表現法や解析手続きによる差が大きいから、どのような解析法を採用するかが重要な問題となる。現在、斜面内の応力やひずみの評価には斜面を幾つかの水平層に分けた盛土や切土によって形成されると考えて、弾性係数を応力レベルや地盤物性値の関数として段階ごとに非線形に変化させる解析手法をとること多い。たとえば盛土については、Clough and Woodward (1967)、Kulhawy et al.(1969)のフィルダムの解析例が代表的であり、Fott and Ladd (1977)は同種の解析手法を

粘土地盤上の堤防の安定解析に用いた。また、Lo and Lee (1973)は、塑性軟化応力-ひずみ関係を有する過圧密粘土の切取り斜面を解析し、進行性破壊を論じた。

応力解析を利用して斜面の全体的破壊を検討する場合、応力分布を用い仮定したすべり面上で安全率(正確には応力レベル S_L 値)を平均化する方法と、すべり面を幾つかの小区間 ΔL に分け、各区間ですべり面に沿うせん断応力 τ と垂直応力 σ を応力解析から定め、 $F_t = \Sigma (c + \sigma \tan \phi) \Delta L / \Sigma \tau \cdot \Delta L$ より安全率を計算する方法の2通りが考えられる。Kulhawy et al.(1969)は、すべり円弧について有限要素解析による F_t とFellenius法とBishop法による安全率の比較を行った。彼らにより計算されている結果を表-7.1に示すが、 F_t の値はポアソン比の影響をあまり受けず、しかもBishop法との差はポアソン比の値に応じて2~8%程度であることが分かる。

表-7.1 安全率の比較 (Kulhawy et al.,1969)

解析法	安全率
Fellenius 法	1.85
Bishop 法	1.93
有限要素法 (F_t)	
$\nu = 0.30$	1.97
$\nu = 0.40$	2.00
$\nu = 0.475$	2.08

そのほかWright et al.(1973)は、線形および非線形弾性体として有限要素法により斜面安定解析を行い、Dunlop and Duncan (1970)は、バイリニアの弾性体として有限要素法を用いて掘削斜面の安定解析を行った。また、Zienkiewicz et al.(1975)は、弾塑性有限要素解析により盛土と掘削斜面の安定解析を行った。最近では、Fan and Fredlund (1986)は有限要素解析から応力を求め、想定した円弧すべり面上の応力分布について検討した。

このように、斜面安定解析は分割法における円弧すべり法が中心であるが、任意形状で複雑な土層構成の斜面でも応力状態を評価できることから有限要素法も用いられるようになってきた。本研究では、有限要素法がすでに斜面安定解析においても有用な手法の1つであるとの認識に立ち、その拡張として確率有限要素

法を位置づけている。そのため、信頼性設計への具体的な適用例に対しては、他の手法による結果も合わせて総合的に判断を下すものとする。

さて、本章では、確率有限要素法を斜面安定解析に適用するため、次の3項目の検討を行う。7.2節では、斜面の局所破壊と単一すべり面(層理面)に沿った全体破壊を対象として、確率有限要素法の精度を検証する。これらの結果から求められる局所破壊確率は、斜面安定対策工に利用できることになる。また、斜面安定性評価に確率有限要素法を用いた円弧すべり解析を適用するとき、破壊モードであるすべり円弧を仮定しなければならず、その適用性の問題が指摘されることもある。そのため7.3節では、円弧すべり解析を行うときに問題となる破壊モードと安全率のばらつきおよび破壊確率の関係について、Fellenius法を用いて定量的に検討する。さらに有限要素法による円弧すべり解析から求められる安全率とFellenius法による安全率とを比較して、2つの解析結果の差異を明確にする。次に、地震力が作用する斜面において、有限要素法による円弧すべり解析から安定性評価に与える地盤物性値の影響を分析し、確率変数や確率場として扱う地盤物性値を7.4節で検討する。

7.2 確率有限要素法による斜面安定解析

(1) 概 要

確率論を導入した斜面安定解析は比較的古くから行われており、地盤物性値のモデル化や解析手法の研究が中心であった。確率有限要素法を用いた斜面安定解析も数少ないが、地盤の応力状態が解析できるため、局所破壊を検討するのに適している。本節では、斜面構造物に対する局所すべり破壊および単一面上の全体すべり破壊を対象として、確率有限要素法の適用性を検討する。確率有限要素法の定式化については3.2節で説明しており、ここでは解析フローを図-7.2に示す。このフローでは、収束の打ち切りなどの計算上の項目は省略している。また、局所破壊と全体破壊を対象としているため、その定式化と破壊確率の算定方法を示している(鈴木・石井, 1985; Ishii and Suzuki, 1987)。

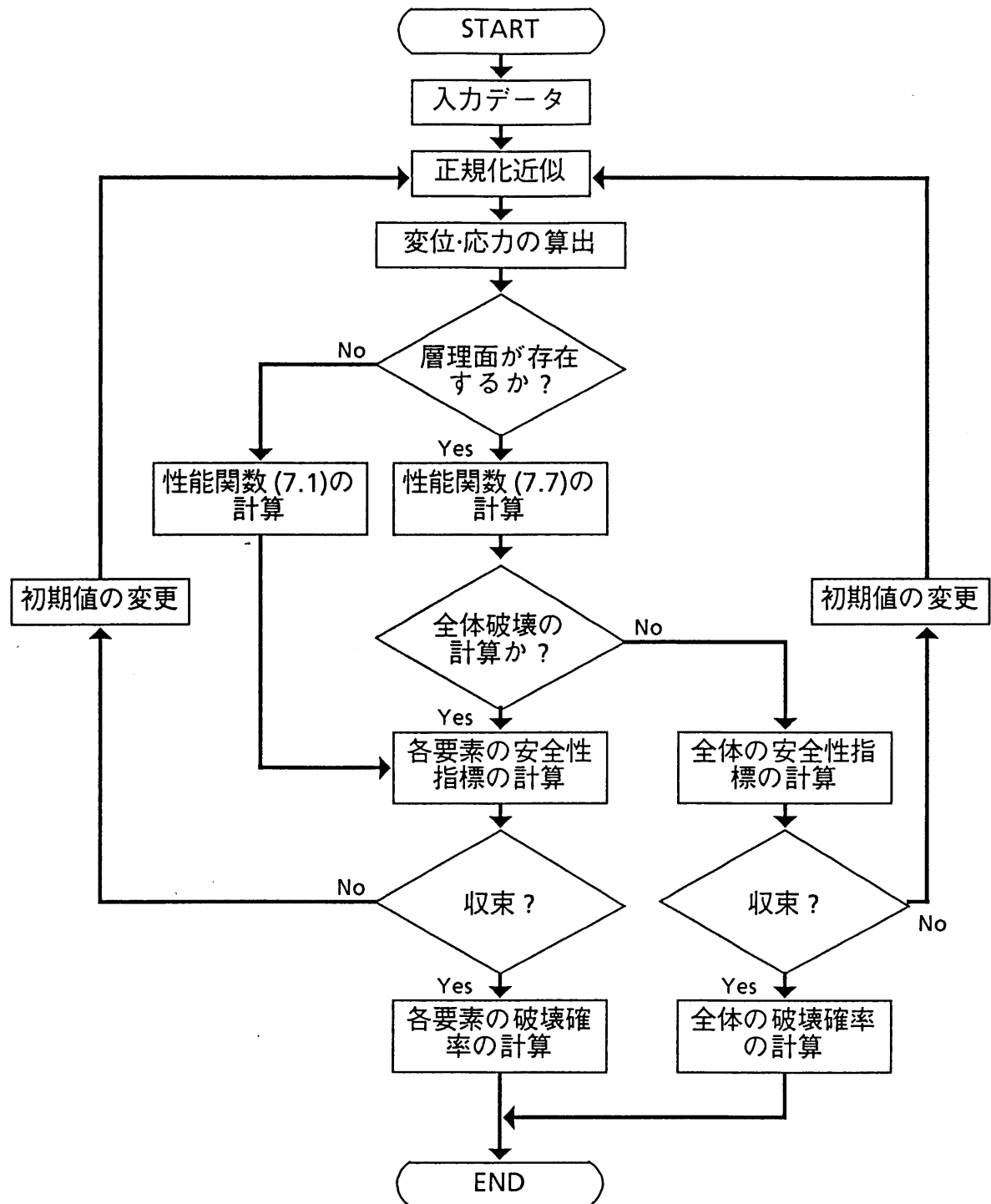


図-7.2 解析フロー

(2) 解析モデルと解析条件

解析に用いた斜面の確率有限要素モデルを図-7.3に示す。

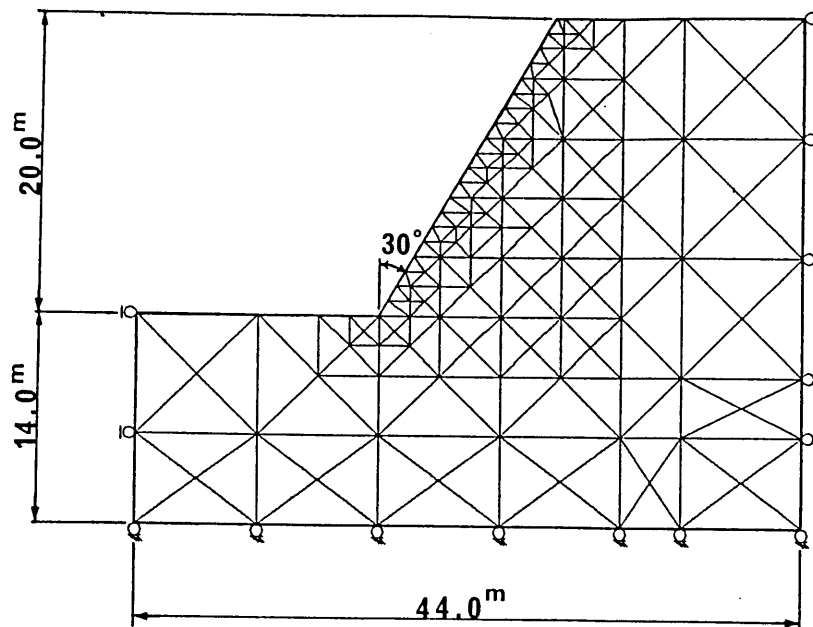


図-7.3 解析モデル (桜井・土居, 1983)

この斜面モデルは、桜井・土居(1983)の文献から引用した。要素数は216であり、確率変数には、弾性係数 E , ポアソン比 ν , 単位体積重量 γ , 粘着力 c , 内部摩擦角 ϕ の5つを考え、分布形や変動係数の値を変えた表-7.2に示される4ケースを検討した。ここで内部摩擦角 ϕ については、 $\tan \phi$ の変動係数が他の確率変数の変動係数と同等になるように ϕ の変動係数を決めている。また各要素の確率変数は今回は空間的にはばらつかず完全相関と仮定する。CASE-1とCASE-2は、ポアソン比と単位体積重量を確率変数とするか確定値とするかの差を比較している。また、CASE-2とCASE-3は、弾性係数 E , 粘着力 c , 内部摩擦角 ϕ を確率変数として、確率変数の分布形を正規分布と対数正規分布とした場合である。さらに、CASE-4はCASE-3の確率変数の変動係数を0.1から0.3へと変化させている。全ケースとも層理面の存在する場合と存在しない場合の2種類の局所破壊確率を計算し、層理面が存在する場合はさらに、全体破壊である単一すべり面に対する破壊

を計算する。また、層理面は水平面から 40° と仮定している。ここで、局所破壊確率は斜面安定に対する抑止工の設計資料として重要である。また、層理面を考慮して求められる全体破壊確率はその破壊確率が最も大きくなる面で評価される。しかし、その面の位置は確定できないのでパラメータとして計算を行う。

表-7.2 解析に用いる変数

材料特性	平均値	変動係数 (C.O.V.)			
		CASE-1	CASE-2	CASE-3	CASE-4
弾性係数 E	100 000 tf/m ²	0.1	0.1	0.1	0.3
ポアソン比 ν	0.3	0.1	(確定値)	(確定値)	(確定値)
単位体積重量 γ_t	2.3 tf/m ³	0.1	(確定値)	(確定値)	(確定値)
粘着力 c	1.0 tf/m ²	0.1	0.1	0.1	0.3
内部摩擦角 ϕ	35°	0.077	0.077	0.077	0.231
備 考		分布形は 正規分布		分布形は 対数正規分布	

(CASE-1 は桜井・土居の文献 から引用)

(3) 性能関数の定義とその定式化

ここでは、層理面等のすべり面が存在する場合と存在しない場合の各要素の局所破壊を2種類と、単一すべり面に対する全体破壊の性能関数を考える。定式化における応力 σ は、土質力学における表示法に従って、圧縮を正とする。また、応力や応力に関する偏微分係数は第3章に示したものである。

a) 層理面が存在しない場合の局所破壊

せん断破壊に関する要素 i の性能関数 g_i を次のように定義する。

$$g_i = \tau_{f,i} - \tau_{\max,i} = c_i \cos \phi_i + \frac{1}{2} (\sigma_{1,i} + \sigma_{2,i}) \sin \phi_i - \frac{1}{2} (\sigma_{1,i} - \sigma_{2,i}) \quad (7.1)$$

ここで記号は図-7.4を参照して、 $\tau_{f,i}$ ：モール円の中心から破壊規準までの距離、 c_i ：粘着力、 ϕ_i ：内部摩擦角

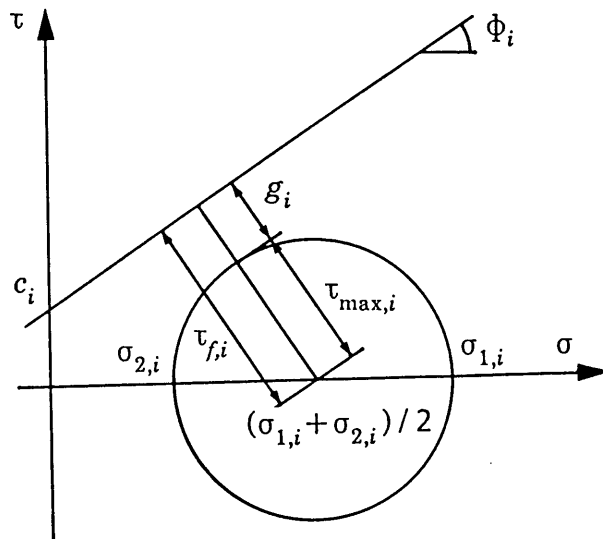


図-7.4 層理面が存在しない場合の性能関数

これより、式(7.1)を設計点まわりでテーラー展開し、2次以降の項を無視すると、性能関数 g_i の平均値は次のように表される。

$$\begin{aligned}
E[g_i] = & c_i^* \cos \phi_i^* + \frac{1}{2} (\sigma_{1,i}^* + \sigma_{2,i}^*) \sin \phi_i^* - \frac{1}{2} (\sigma_{1,i}^* - \sigma_{2,i}^*) \\
& + (\mu_{c_i} - c_i^*) \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* + (\mu_{\phi_i} - \phi_i^*) \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* + \sum_{k=1}^n (\mu_{X_{k,i}} - X_{k,i}^*) \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \quad (7.2)
\end{aligned}$$

また、性能関数の分散についても同様にして次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
Var[g_i] = & \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_*^2 Var[c_i] + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_*^2 Var[\phi_i] + 2 \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* Cov[c_i, \phi_i] \\
& + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* Cov[X_{k,i}, c_i] + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* Cov[X_{k,i}, \phi_i] \\
& + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{l,i}} \right)_* Cov[X_{k,i}, X_{l,i}] \quad (7.3)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* = \cos \phi_i^* \quad (7.4)$$

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* = -c_i^* \sin \phi_i^* + \frac{1}{2} (\sigma_{1,i}^* + \sigma_{2,i}^*) \cos \phi_i^* \quad (7.5)$$

また、 X_k が E, v, γ, P, u のとき、性能関数 g_i の $X_{k,i}$ に関する偏微分係数は次式で与えられる。

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* = \frac{1}{2} (\sin \phi_i^* - 1) \left(\frac{\partial \sigma_{1,i}}{\partial X_{k,i}} \right)_* + \frac{1}{2} (\sin \phi_i^* + 1) \left(\frac{\partial \sigma_{2,i}}{\partial X_{k,i}} \right)_* \quad (7.6)$$

b) 層理面が存在する場合の局所破壊

層理面が存在する場合のせん断破壊に関する性能関数は、慣用的に最もよく用いられている方法として、すべり面上の直応力 σ が変化しないと仮定する方法を用いる。すなわち、せん断破壊に関する要素 i の性能関数 g_i はすべり面方向を定めるために水平面からの角度を用いて次式で定義する。

$$g_i = \tau_{f,i} - \tau_i = c_i + \sigma_i \tan \phi_i - \tau_i \quad (7.7)$$

ここで記号は図-7.5を参照して、

$$\sigma_i = \frac{1}{2}(\sigma_{1,i} + \sigma_{2,i}) + \frac{1}{2}(\sigma_{1,i} - \sigma_{2,i})\cos 2\theta_i \quad (7.8)$$

$$\tau_i = \frac{1}{2}(\sigma_{1,i} - \sigma_{2,i})\sin 2\theta_i \quad (7.9)$$

$$\theta_i = \Theta_i - \Psi_i + \pi/2 \quad (7.10)$$

Θ_i : 水平面からすべり面への角度

Ψ_i : 水平面から最大主応力面への角度:

$$\Psi_i = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{\xi\zeta,i}}{\sigma_{\xi,i} - \sigma_{\zeta,i}} \right) \quad (7.11)$$

式(7.7)に式(7.8), (7.9)を代入すると、

$$g_i = c_i + \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_{1,i} + \sigma_{2,i}) + \frac{1}{2}(\sigma_{1,i} - \sigma_{2,i})\cos 2\theta_i \right\} \tan \phi_i - \frac{1}{2}(\sigma_{1,i} - \sigma_{2,i})\sin 2\theta_i \quad (7.12)$$

となる。

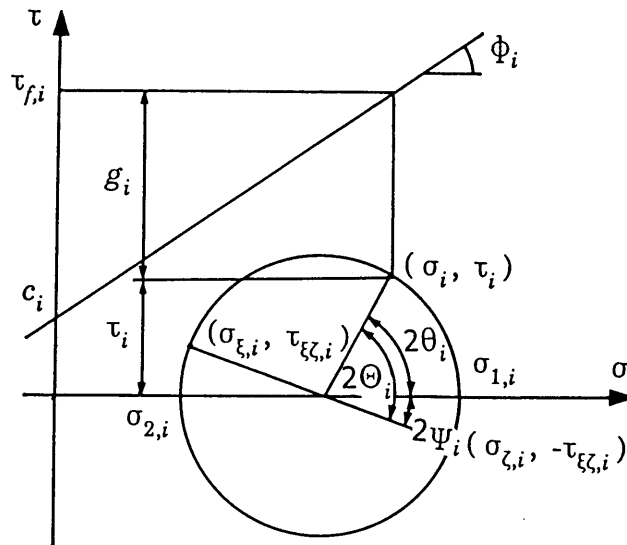


図-7.5 層理面が存在する場合の性能関数

層理面が存在する場合の性能関数 g_i の平均値 $E[g_i]$, 分散 $Var[g_i]$ および共分散 $Cov[g_i, g_j]$ は、式(7.12)を設計点まわりでテーラー展開し、2次以降の項を無視して、 g_i を線形化することによって次のように求められる。

$$E[g_i] = c_i^* + \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_{1,i}^* + \sigma_{2,i}^*) + \frac{1}{2} (\sigma_{1,i}^* - \sigma_{2,i}^*) \cos 2\theta_i^* \right\} \tan \phi_i^* - \frac{1}{2} (\sigma_{1,i}^* - \sigma_{2,i}^*) \sin 2\theta_i^* \\ + (\mu_{c_i} - c_i^*) \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* + (\mu_{\phi_i} - \phi_i^*) \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* + \sum_{k=1}^n (\mu_{X_{k,i}} - x_{k,i}^*) \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \quad (7.13)$$

$$\text{Var}[g_i] = \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_*^2 \text{Var}[c_i] + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_*^2 \text{Var}[\phi_i] + 2 \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* \text{Cov}[c_i, \phi_i] \\ + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* \text{Cov}[X_{k,i}, c_i] + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* \text{Cov}[X_{k,i}, \phi_i] \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{l,i}} \right)_* \text{Cov}[X_{k,i}, X_{l,i}] \quad (7.14)$$

$$\text{Cov}[g_i, g_j] = \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* \left(\frac{\partial g_j}{\partial c_j} \right)_* \text{Cov}[c_i, c_j] + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* \left(\frac{\partial g_j}{\partial \phi_j} \right)_* \text{Cov}[\phi_i, \phi_j] \\ + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \left(\frac{\partial g_j}{\partial c_j} \right)_* \text{Cov}[X_{k,i}, c_j] + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \left(\frac{\partial g_j}{\partial \phi_j} \right)_* \text{Cov}[X_{k,i}, \phi_j] \\ + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* \left(\frac{\partial g_j}{\partial X_{k,j}} \right)_* \text{Cov}[c_i, X_{k,j}] + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* \left(\frac{\partial g_j}{\partial X_{k,j}} \right)_* \text{Cov}[\phi_i, X_{k,j}] \\ + \left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* \left(\frac{\partial g_j}{\partial \phi_j} \right)_* \text{Cov}[c_i, \phi_j] + \left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* \left(\frac{\partial g_j}{\partial c_j} \right)_* \text{Cov}[\phi_i, c_j] \\ + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* \left(\frac{\partial g_j}{\partial X_{l,j}} \right)_* \text{Cov}[X_{k,i}, X_{l,j}] \quad (7.15)$$

ここで、

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial c_i} \right)_* = 1 \quad (7.16)$$

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial \phi_i} \right)_* = \frac{1}{\cos^2 \phi_i^*} \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_{1,i}^* + \sigma_{2,i}^*) + \frac{1}{2} (\sigma_{1,i}^* - \sigma_{2,i}^*) \cos 2\theta_i^* \right\} \quad (7.17)$$

であり、確率変数 X_k が E, v, γ_t, P, u のとき、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}}\right)^* &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_{1,i}}{\partial X_{k,i}}\right)^* + \left(\frac{\partial \sigma_{2,i}}{\partial X_{k,i}}\right)^* \right\} \tan \phi_i^* \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_{1,i}}{\partial X_{k,i}}\right)^* - \left(\frac{\partial \sigma_{2,i}}{\partial X_{k,i}}\right)^* \right\} (\cos 2\theta_i^* \tan \phi_i^* - \sin 2\theta_i^*) \\
&- (\sigma_{1,i}^* - \sigma_{2,i}^*) (\sin 2\theta_i^* \tan \phi_i^* - \cos 2\theta_i^*) \\
&\times \frac{(\sigma_{\xi,i}^* - \sigma_{\zeta,i}^*) \left(\frac{\partial \tau_{\xi\zeta,i}}{\partial X_{k,i}}\right)^* - \tau_{\xi\zeta,i}^* \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_{\xi,i}}{\partial X_{k,i}}\right)^* - \left(\frac{\partial \sigma_{\zeta,i}}{\partial X_{k,i}}\right)^* \right\}}{(\sigma_{\xi,i}^* - \sigma_{\zeta,i}^*)^2 + 4\tau_{\xi\zeta,i}^{*2}} \quad (7.18)
\end{aligned}$$

である。

c) 全体破壊

ある仮定した単一すべり面に対する全体破壊の性能関数は、すべり面(層理面)が存在する場合の各要素の性能関数 g_i (式(7.7)) をすべり面の長さとかけ合わせて、すべり面全体で加算することによって表す。すなわち、

$$g = \sum_{i=1}^N g_i \Delta l_i \quad (7.19)$$

ここで、 Δl_i は i 番目の要素のすべり面が切る長さであり、 N はすべり面が切る要素の総数である。

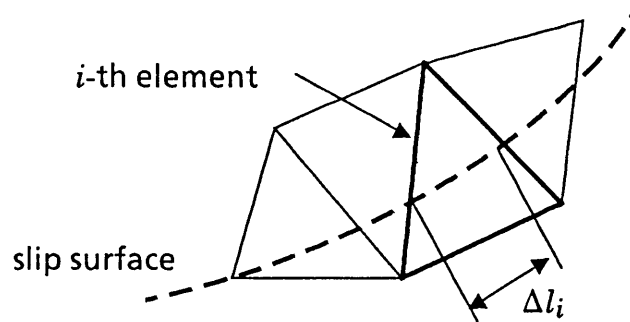


図-7.4 要素を横切るすべり面

これより、式(7.19)を設計点まわりでテーラー展開し、2次以降の項を無視すると、 g の平均値および分散は次のようになる。

$$E[g] = \sum_{i=1}^N E[g_i] \Delta l_i \quad (7.20)$$

$$Var[g] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Cov[g_i, g_j] \Delta l_i \Delta l_j \quad (7.21)$$

ここで $E[g_i]$ および $Cov[g_i, g_j]$ はそれぞれすべり面が存在する場合の g_i に対する平均値と g_i と g_j との共分散である(式(7.13), (7.15)参照)。

(4) 破壊確率の定式化

a) 各要素の局所破壊

局所破壊の安全性指標として、要素 i の安全性指標 β_i は、次式で表される。

$$\beta_i = \frac{E[g_i]}{(Var[g_i])^{1/2}} \quad (7.22)$$

ここで、 $E[g_i]$, $Var[g_i]$ は g_i に対する平均値と分散である。

各要素の安全性指標は設計点における確率変数の値に依存するので、設計点を確定するための収束計算が必要になる。設計点を求めるには Hasofer and Lind (1974) が提案している方法を用いるため、概略を以下に示す。まず確率変数 $X_{k,i}$ による性能関数 g_i の偏微分係数より以下の式で $\alpha_{k,i}^*$ を計算する。

$$\alpha_{k,i}^* = \frac{\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_* (Var[X_{k,i}])^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_i}{\partial X_{k,i}} \right)_*^2 Var[X_{k,i}] \right)^{1/2}} \quad (7.23)$$

次に要素 i の β_i を用いて、確率変数 X_k の設計点を次のように表す。

$$x_{k,i}^* = \mu_{X_{k,i}} - \alpha_{k,i}^* \beta_i (Var[X_{k,i}])^{1/2} \quad (7.24)$$

そして、この値を用いて、要素 i の β_i を計算する。また、この計算は全要素について行う。ここで、各要素の β_i の収束を判定し、すべての要素の安全性指標が収束するまで新しい $\beta_i, \alpha_{k,i}^*$ を与え、収束計算を繰り返す。 $\beta_i, \alpha_{k,i}^*$ の初期値には平均値まわりのテーラー展開の計算結果を用いる。

すべての確率変数が正規分布であれば、各要素の安全性指標 β_i から、破壊確率は次式により計算できる。すなわち、要素 i の破壊確率 $P_{f,i}$ は

$$P_{f,i} = \Phi(-\beta_i) \quad (7.25)$$

となる。ここで、 Φ は標準正規確率分布関数を表す。

b) 単一すべり面の全体破壊

式(7.20),(7.21) で求めた $E[g]$, $Var[g]$ を用いて以下の式によって、安全性指標を計算する。すなわち、安全性指標 β は、

$$\beta = \frac{E[g]}{(Var[g])^{1/2}} \quad (7.26)$$

で表される。全体破壊の安全性指標も設計点における確率変数の値に依存するので、収束計算を行う。

全体破壊である単一すべり面の破壊確率 P_f は、安全性指標 β から次式により計算される。

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (7.27)$$

ここで、 Φ は標準正規確率分布関数を表す。

(5) 解析結果

局所破壊すなわち、各要素の破壊確率に関する解析結果を図-7.7~7.10に示す。ここでCASE-1の平均値まわりの計算は桜井・土居(1983)の結果と同じである。この計算はプログラムの検証としても行った。CASE-1~3の結果はほとんど同じとなったので、ここではCASE-1の結果のみ示している(図-7.7, 7.8 参照)。これより、ポアソン比 ν と単位体積重量 γ_t の変動が各要素の破壊確率に与える影響は小さいことがわかった。また、CASE-3は対数正規分布の場合に平均値まわりのテーラー展開を用いている従来の確率有限要素法と設計点まわりのテーラー展開を用いている本手法との違いをみるためのものであるが、両者にもほとんど差はなかった。これは、確率変数の変動係数を0.1と小さめに設定したために、正規分布と対数正規分布の差が顕著でないことによる。このことからCASE-4では、変動係数を0.3と大きくした。結果として、従来の方法と本手法による結果の間には差があることがわかる(図-7.9, 7.10 参照)。

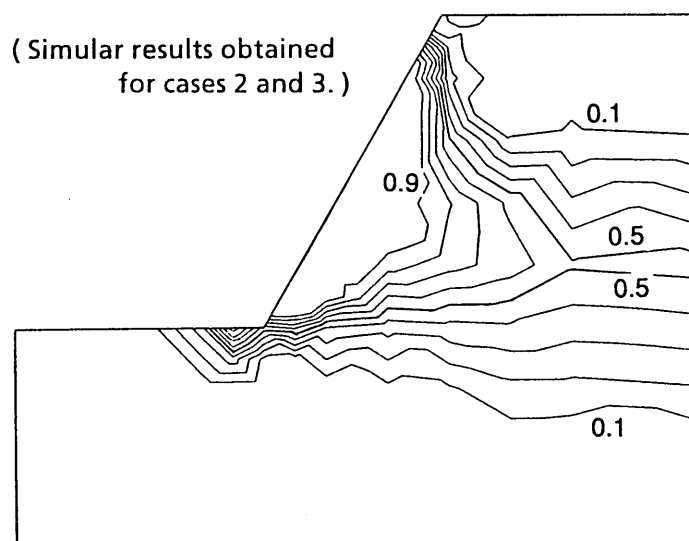


図-7.7 局所破壊確率(層理面なし)

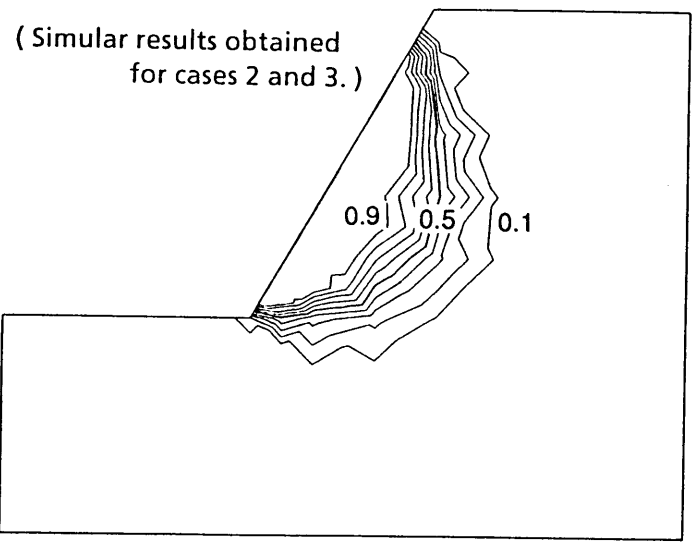


図-7.8 局所破壊確率 (層理面あり)

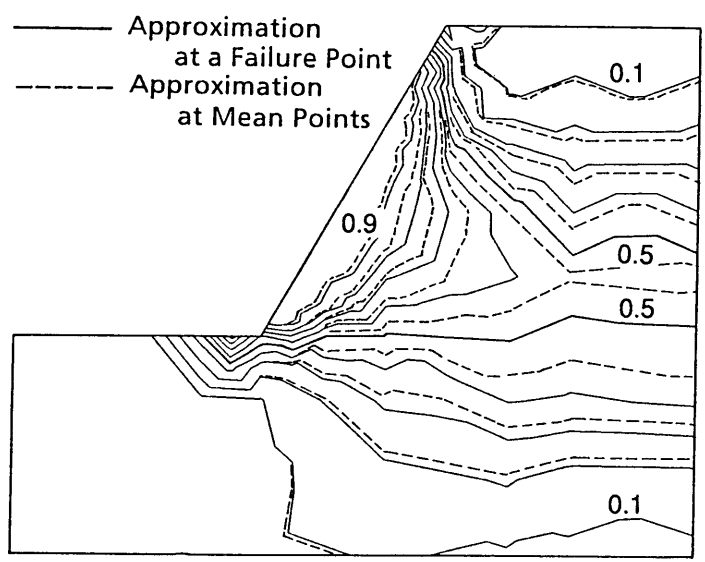


図-7.9 局所破壊確率 (層理面なし)

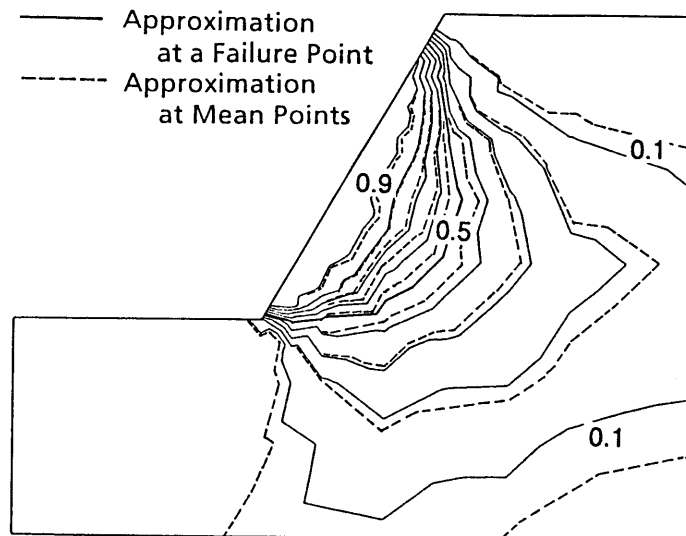


図-7.10 局所破壊確率(層理面あり)

単一すべり面を仮定して得られる全体破壊確率の解析結果を図-7.11~7.13に示す。破壊確率はすべり面の位置(法肩からの距離 S)をパラメータとして表わされている。図-7.11の結果はCASE-1に対するものである。また、同図には比較のために、極限平衡法によって得られる破壊確率と平均値まわりの破壊確率を合わせて示してある。

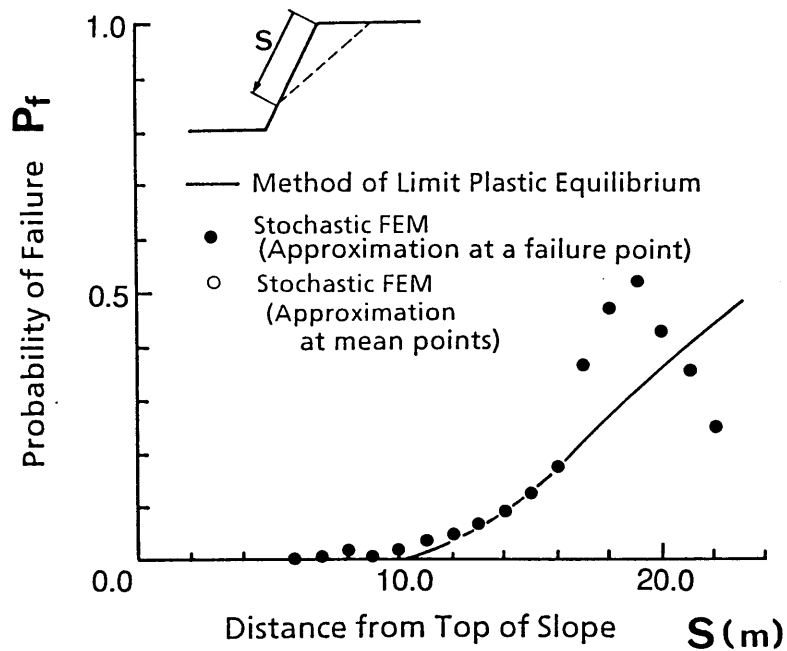


図-7.11 全体破壊確率(CASE-1)

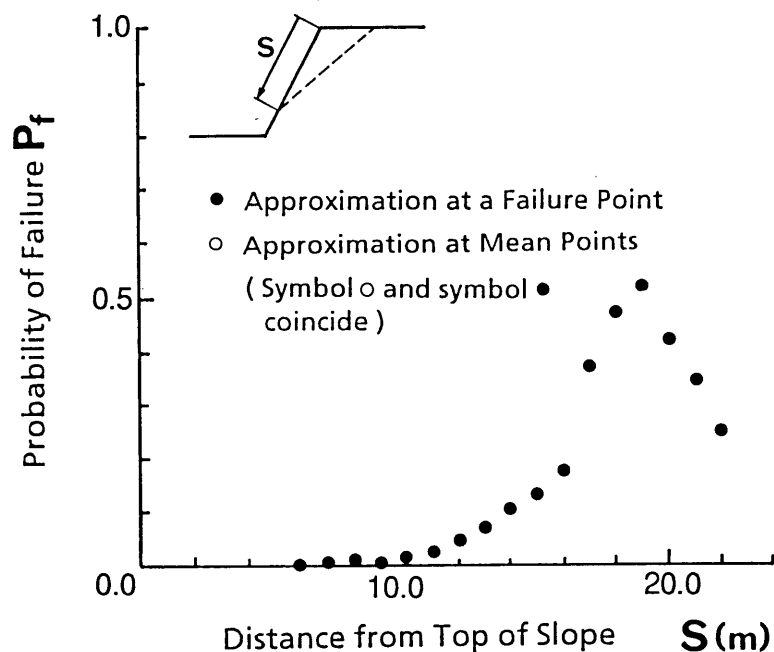


図-7.12 全体破壊確率 (CASE-2, 3)

CASE-1 のモデルでは、確率変数をすべて正規分布としているので、本手法と従来の確率有限要素法による解は一致する。また、 S が 16m までは、確率有限要素法による結果は極限平衡法による結果とも良く一致しているが、 S がそれ以上大きくなると両者には大きな差が表れる。これは法尻部分の要素が、ポアソン比による水平方向の応力による影響を受けるためである。

また、図-7.12 はCASE-2 とCASE-3 のモデルについて、層理面を仮定して得られる全体破壊確率を比較したものである。ここで、CASE-2 では弾性係数、粘着力および内部摩擦角を確率変数として、その確率分布を変動係数 0.1 なる正規分布としている。一方、CASE-3 では、CASE-2 のモデルにおいて確率分布のみを対数正規分布に変更したものである。図-7.12では、両者の結果はほとんど一致したものになっている。これは、確率分布のもつ変動係数が 0.1 と小さいため分布形の差が現れなかった(図-1.13参照)。

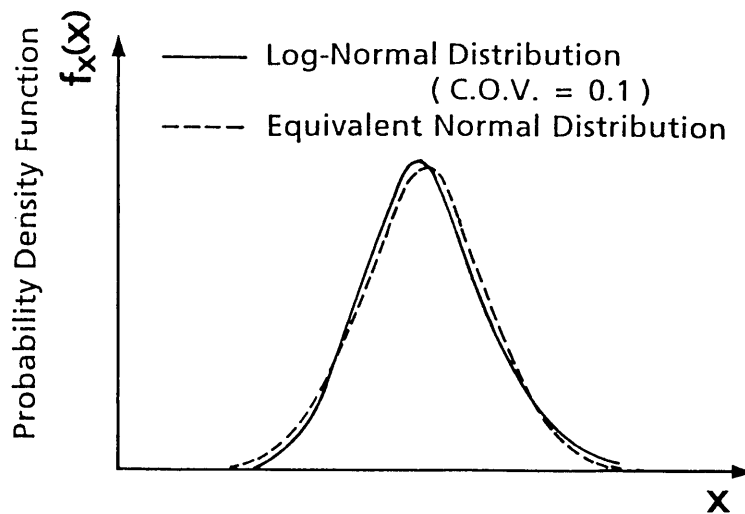


図-7.13 正規分布と対数正規分布

図-7.14 にはCASE-4 に対して、従来の手法と本手法による解析結果を比較したものを示す。これより、変動係数が0.1 から0.3 と大きくなると、従来の手法と本手法による結果の間には明らかに差があり、本手法によれば従来の手法による解と比べて精度は向上する。

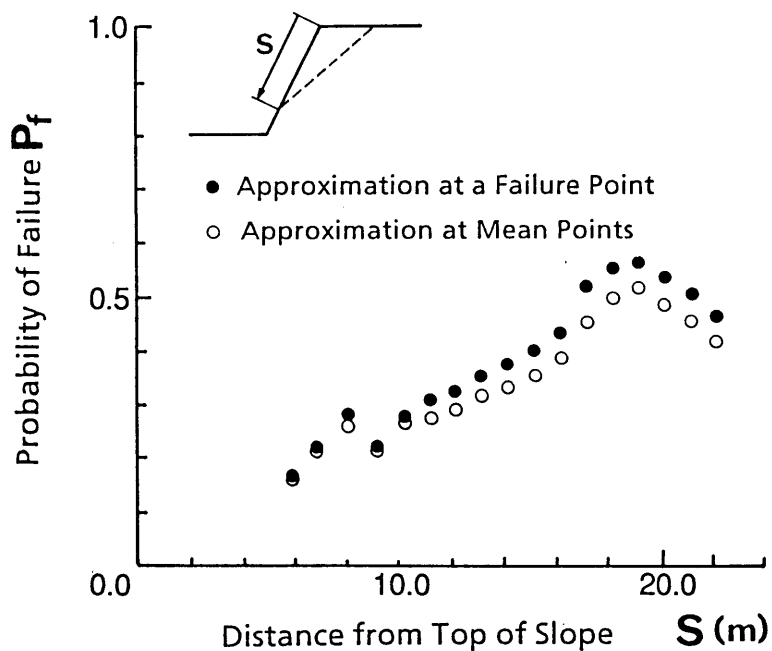


図-7.14 全体破壊確率 (CASE-4)

斜面安定解析に本手法を適用し、局所破壊確率と全体破壊確率を求めた。結果として、確率変数が正規分布に従う場合や変動係数の小さい対数正規分布に従う場合では、従来手法と本手法による結果には差がほとんどみられなかった。しかし、変動係数が0.3になると、両者には明らかな差が現れた。

以上の結果より、本手法も従来の確率有限要素法と同じようにすべり破壊確率を評価することができ、さらに確率変数が正規分布以外の分布形に従うときにも、本手法が適用できることがわかった。

7.3 円弧すべり法における斜面安定解析

(1) 概 要

斜面の安定性は極限平衡法である分割法で円弧すべりを対象に評価されることが多い。この中で、地盤物性値の空間的な分布特性を考慮する確率論的な評価も行われるようになってきた。分割法による円弧すべり解析では安全率が最小となるすべり円弧を破壊モードとしているが、確率論的な評価手法にすべり円弧の探索を含めると計算は多大なものとなってしまう。Asaoka and Matsuo (1983)は、空間的な分布特性を等価多層系地盤に置き換えて、Rosenbluethの2点推定法により近似的に安全率の変動を求めた。本節では、直接モンテカルロ法を用いて破壊モードと安全率の分布を検討し、その評価手法について新たな方向性を考察する(鈴木・石井, 1989 b)。

また、確率有限要素法を用いて円弧すべり解析を行う場合、破壊モードとしてのすべり円弧を固定しなければならない。これは、本来最小安全率をもって破壊モードとしている円弧すべり解析とは多少異なった意味をもつことを示しており、確率有限要素法を円弧すべり解析に適用するときにはこの点を注意する必要がある。

さらに、有限要素法と極限平衡法の差異についても問題であるので、円弧すべり解析を有限要素法で求めた応力からの安全率と簡便法で求めた安全率を比較し検討する。この種の研究は数は少ないが古くから行われており、一般的に有限要素法が大きな安全率となる傾向があるといわれている。しかし、有限要素法の位置付けは明確とはいいがたく、ここでは簡便法の無視している不静定力の効果が考慮できる極限平衡法と考えて、この差を検討する。

(2) 解析方法と解析条件

図-7.15 に示すように均質な地盤を87個の要素に分割し、モンテカルロ・シミュレーション法により地盤物性値の標本場を発生させ、それぞれの要素に割当てて。円弧すべり解析は簡便法であるFellenius法により、円弧を200分割して安全率を求める。設定した地盤物性値は、単位体積重量 γ_t を 1.7tf/m^3 の確定値、内部摩擦角 ϕ は無視して、粘着力 c を平均値 2.0tf/m^2 、変動係数0.3で以下に示す自己相関関数を有する確率場とする。

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x}{5.0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{1.0} \right)^2 \right\} \right] \quad (7.28)$$

ここで、 $\Delta x, \Delta y$ はそれぞれ水平・鉛直方向の距離を表しており、成層過程を考慮して鉛直方向に比べて水平方向が強い相関性を示すモデルとしている。確率場のシミュレーションには、3.3節で示したコレスキー分解による方法を用いる。これは要素間の共分散を求めるときに要素の中で平均化(局所平均)を考えると、確率場から確率ベクトルに変換されることになるためである。要素間の共分散は、第4章で説明したように各要素を相似な要素に分割して数値積分により共分散を求め、この値が収束するまで分割を多くして計算する。シミュレーションの試行回数は100回とし、すべり円弧を探索するものと固定した2ケースを行っている。

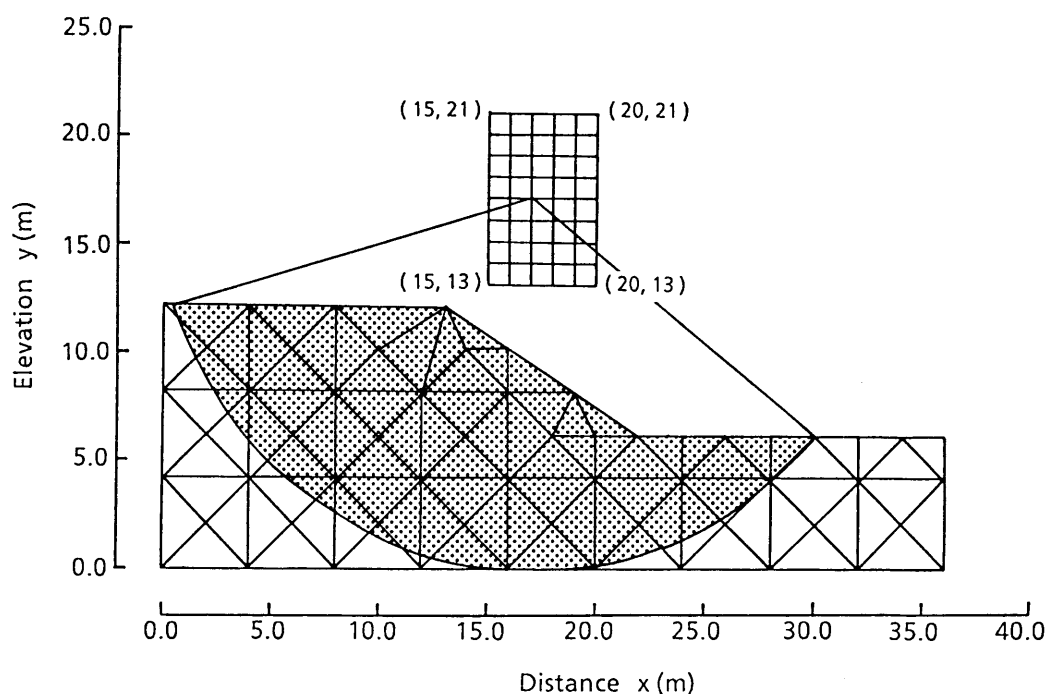


図-7.15 解析モデル

また、有限要素法を用いた円弧すべり解析では、すべての要素の地盤物性値には平均値を与えて、ポアソン比を0.0, 0.3, 0.45と変化させた安全率と簡便法の安全率を比較する。また、1層地盤の場合には弾性係数は応力度に影響しないが、ここでは500 tf/m²を用いる。

(3) 解析結果

解析の結果、最小安全率となるすべり円弧を探索したときのすべり円弧中心は、図-7.16に示すようにばらつくことが認められる。円弧中心は、 $x=17.0$, 18.0のところに多くあり、すべり円弧の半径にはばらつきが見られる。

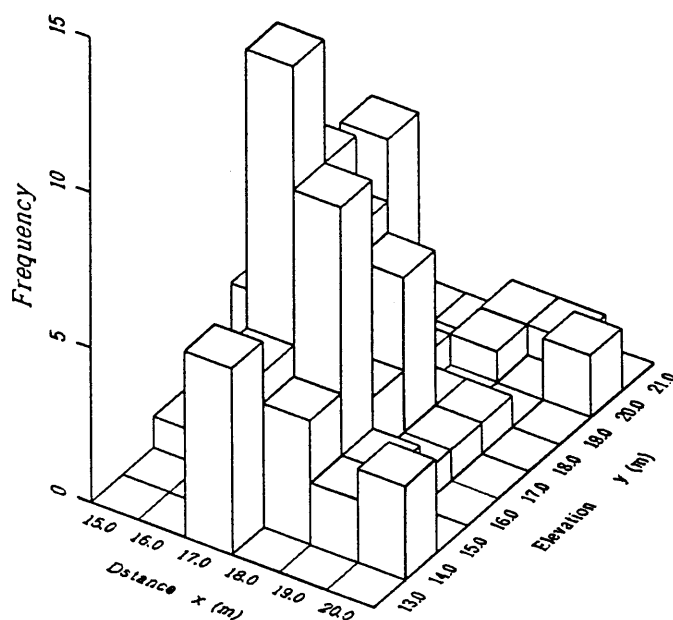


図-7.16 すべり円弧中心

このときの安全率の分布は図-7.17に示すようになり、安全率が1.0を下回る確率(破壊確率)は0.06となっている。また、粘着力の平均値で最小安全率を与えるすべり円弧に固定すると、安全率の分布は図-7.18のようになる。図-7.17と比較して、図-7.18では平均値も標準偏差も大きくなっており、すべり円弧を固定すると最小安全率となるすべり円弧を探索しない分だけ安全率が大きくなることがあることがわかる。すべり円弧である破壊モードの点からみると、地盤物性

値の平均値を用いて設定した解析モデルの下端である基盤に接するような底部破壊となるのは0.43であり、その他は種々の深さとなる底部破壊となった。今回に設定した粘着力の自己相関関数は水平方向の相関性が強く鉛直方向の相関性が弱くなるモデルであり、ある深さに粘着力の小さい層が発生すると、そこを通るすべり円弧が最小安全率となるためである。地盤物性値の空間的なばらつきを考慮して斜面安定解析を行う場合には、破壊モードであるすべり円弧のばらつきをも考慮する必要があることがわかる。

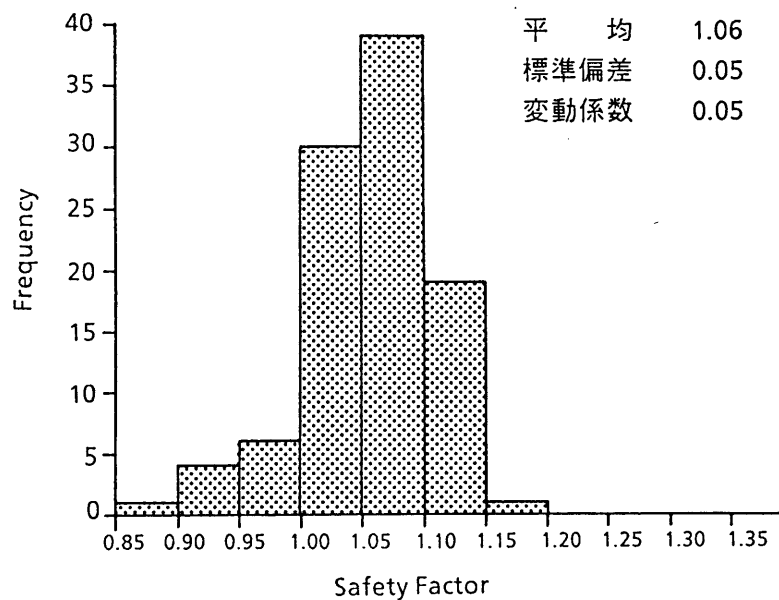


図-7.17 すべり円弧を探索したときの最小安全率

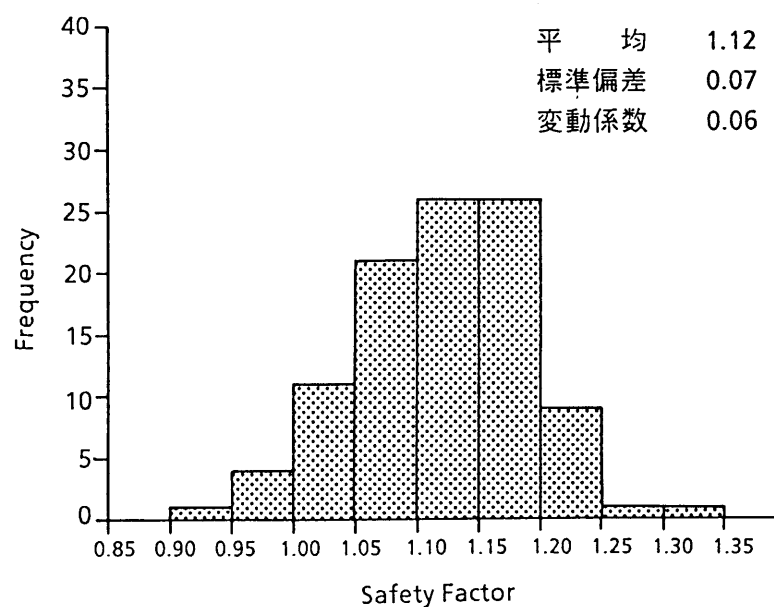


図-7.18 すべり円弧を固定したときの最小安全率

円弧すべり解析ではすべり円弧中心と半径の異なった無限個の破壊モードが想定され、システムの破壊確率を求めることが要求される。各々のすべり円弧における破壊確率は近似法等で簡単に求めることができるので、複数のすべり円弧における相互の相関性を求めることにより、全体の破壊確率を近似的に計算することができる。すべり円弧における相関性は解析的に求めるのは難しいため、要素間の相関性を求めた数値積分で求めることになる。たとえば、PNET法によれば、破壊確率の大きいものから順次相関マトリックスを求め、破壊確率の打ち切りを行い、システムとしての全体破壊確率が求められる。この手法を用いれば、比較的小さな破壊確率の斜面に対しても破壊確率を求めることができる。

次に有限要素法による円弧すべり解析と簡便法比較として、表-7.3にポアソン比を0.0, 0.3, 0.45と変化させた安全率と簡便法の安全率を示す。有限要素法でポアソン比を大きくすると安全率は大きくなる。これは地盤の水平応力を大きく評価することによってすべり抵抗が大きくなる。200分割の簡便法の安全率は1.13となりポアソン比を0.0の有限要素法の結果より小さくなった。これらの結果は、Kulhawy et al.(1969)と同じ結果を与えており、有限要素法は簡便法に比べて安全率が大きく計算される傾向にあることがわかった。

表-7.3 安全率の比較

解析法	安全率
Fellenius法	1.13
有限要素法 (F_v)	
$v = 0.0$	1.18
$v = 0.30$	1.21
$v = 0.45$	1.65

Fellenius法やBishop法などの円弧すべり法はバランスのよい設計法といわれているが、斜面内の応力のつり合いを考えることが容易な有限要素法も、適用範囲も広く、浸透流や地震などが作用する複雑な斜面の設計に適している。このときには、破壊モードであるすべり円弧を固定して計算することになるが、本節の検討結果を役立たせることができる。

7.4 地震時安定性評価の感度分析

(1) 概 要

地盤物性値のばらつきは、地震時の斜面安定性評価に直接影響することから、特にばらつきが大きいときには、解析に用いる設計値の設定と安定性の照査に用いる安全率の選択が重要な問題となる。本節ではこの問題に対する手掛かりを得るために、確率有限要素法を用いた感度分析を行うことにより、斜面安定性に大きく影響を与える地盤物性値の検討を行う(藍田ら, 1989)。

検討断面は図-7.20 に示すような3層からなる斜面を想定する。解析フローは図-7.21 に示すように、初期地盤応力のための自重解析、鉛直震度による静的解析と水平震度による静的解析の重ね合わせから、円弧すべり安全率を求める。各解析では解析モデルの境界条件を図-7.22に示すように2種類用いている。確率有限要素法は、地盤物性値を確率場として扱うと計算時間が比較的多くなることから、地盤物性値のばらつきが応答に与える影響が大きいと考えられる水平震度解析のみに用い、自重解析と鉛直震度解析では確定値とする。解析結果は、円弧すべり安全率の変動係数としてまとめる。

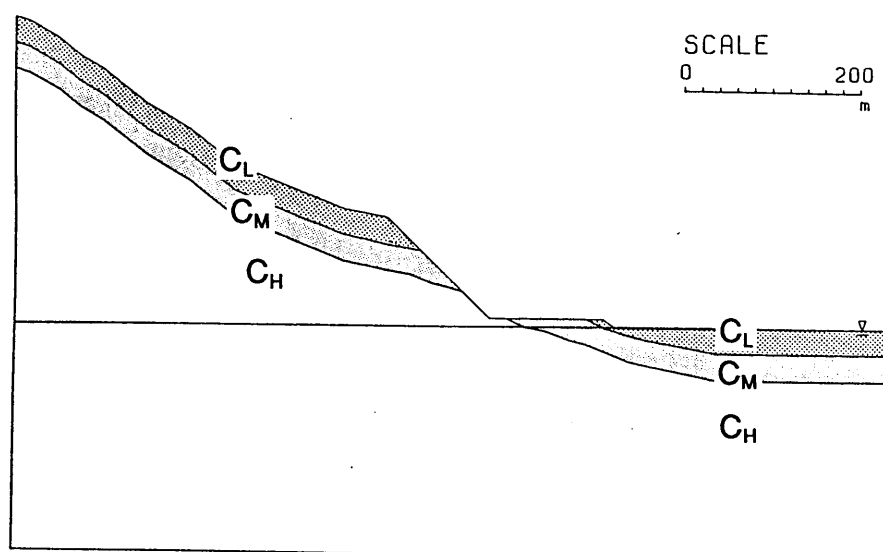


図-7.20 検討断面

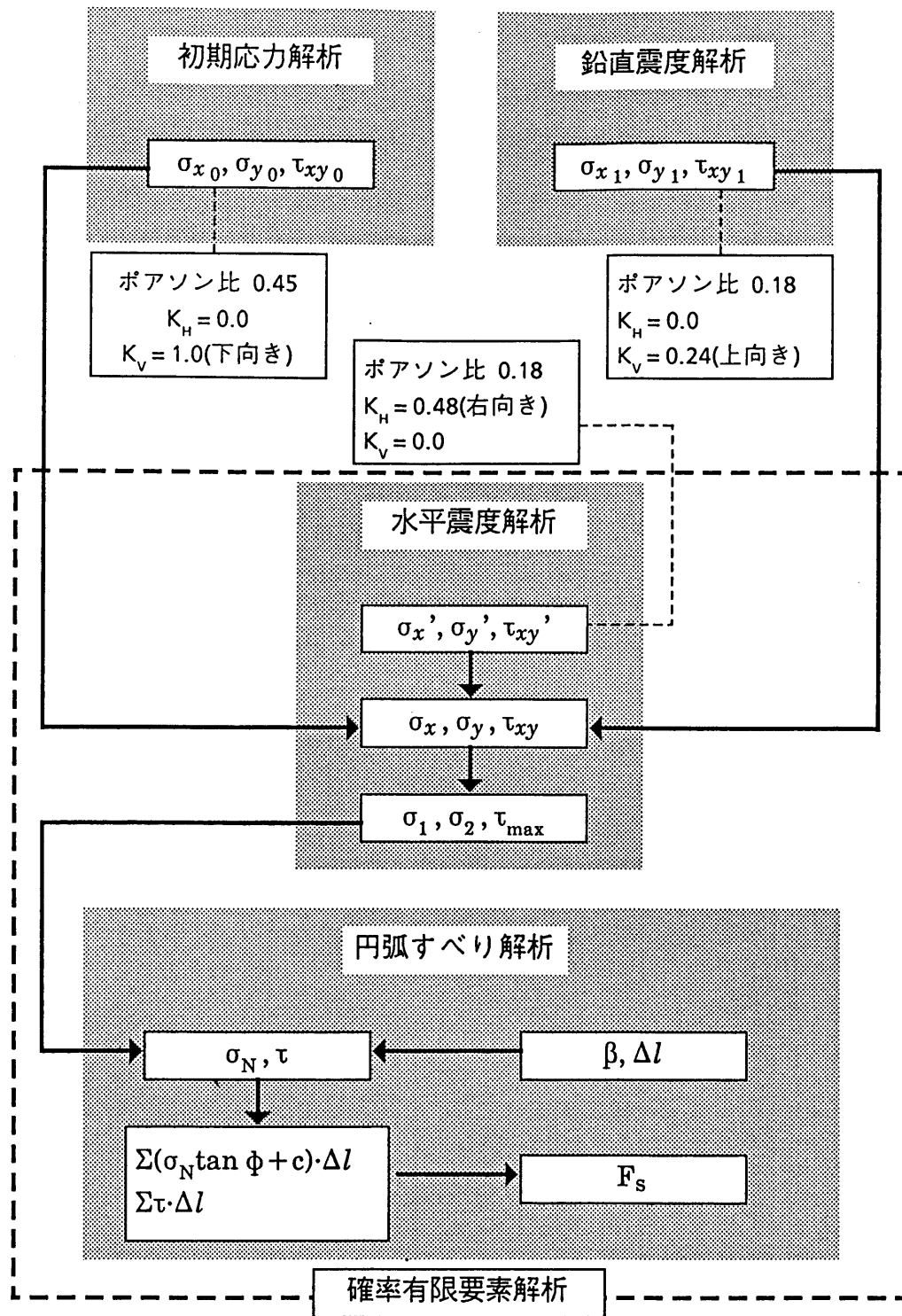


図-7.21 有限要素法を用いた円弧すべり解析フロー

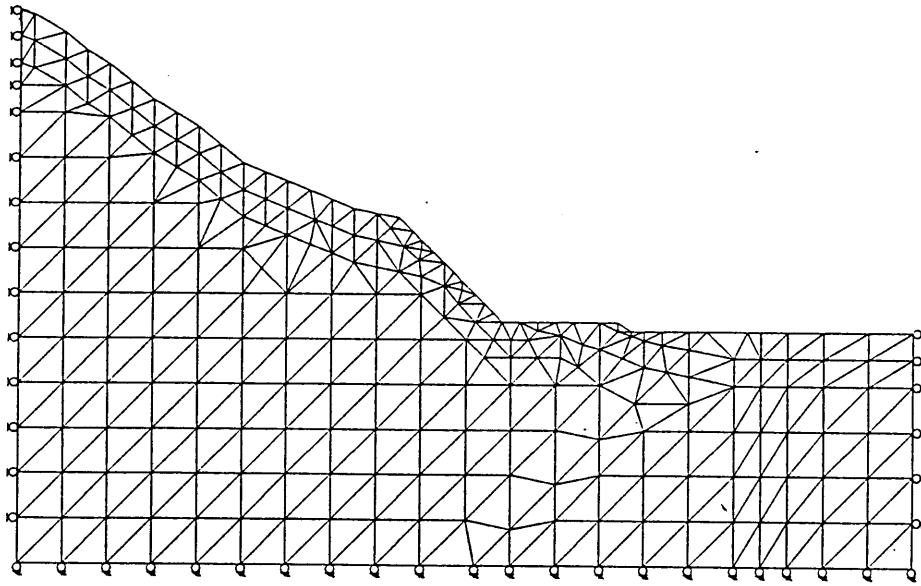


図-7.22 (a) 自重解析・鉛直震度解析における境界条件

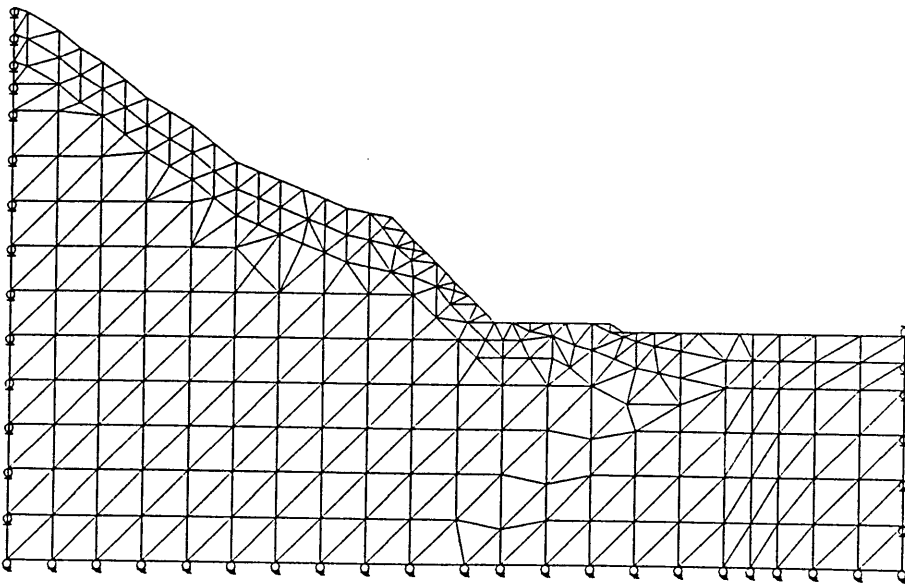


図-7.22 (b) 水平震度解析における境界条件

(2) 解析条件

図-7.23 に示すような3層からなる地盤モデルを対象として、確率有限要素法を用いて円弧すべり解析を行う。ここで用いる確率有限要素法は、2次モーメント法による数値解析手法に基づいており、地盤物性値の平均値や分散のほかに、物性値が有する空間的なばらつきを考慮することができる。すなわち、地盤モデルは確率場としてモデル化されており、離散化された相互に相関をもつ445個の三角形要素に分割されている。解析ケースとして、内部摩擦角が支配的な斜面(CASE-1)と粘着力が支配的な斜面(CASE-2)の2ケースを考える。地盤物性値は正規確率場として、平均値を表-7.4のように設定する。また、各土層間の相関性や地盤物性値間の相関性は考慮せずに独立とする。地盤物性値の変動係数は、一律の0.1~0.4と変化させる。また、自重解析におけるポアソン比は0.45と仮定する。

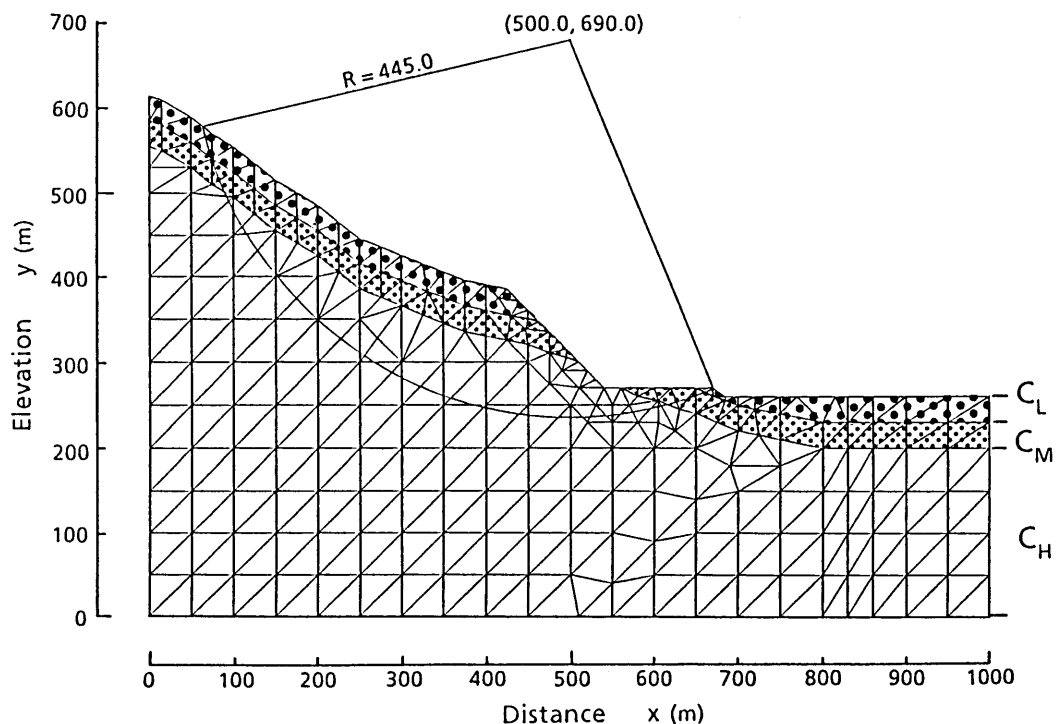


図-7.23 解析モデル

表-7.4 地盤物性値の平均値

	弾性係数 E (tf/m ²)	ポアソン比 ν	単位体積重量 γ_t (tf/m ³)	粘着力 c (tf/m ²)		内部摩擦角 ϕ (°)	
				CASE-1	CASE-2	CASE-1	CASE-2
C_L	1.3×10^5	0.18	2.4	10	70	37	27
C_M	4.1×10^5	0.18	2.5	10	100	40	30
C_H	1.3×10^6	0.18	2.6	20	150	43	33

さらに、地盤物性値の空間的なばらつきを表す自己相関関数は、成層過程や風化を考慮して次式を用いる。

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left[- \left\{ \left(\frac{\Delta x \cos \theta + \Delta y \sin \theta}{a} \right)^2 + \left(\frac{-\Delta x \sin \theta + \Delta y \cos \theta}{b} \right)^2 \right\} \right] \quad (7.29)$$

ここで、 $\Delta x, \Delta y$ はそれぞれ水平・鉛直方向の距離を示す。またパラメータ a, b は相関係数が $e^{-1}=0.368$ となる距離を表しており、 θ は基準座標 x, y からパラメータ a, b を用いる角度である(図-7.24)。解析にあたり、 $a=100.0$ m, $b=20.0$ m, $\theta=-20^\circ$ と仮定する。

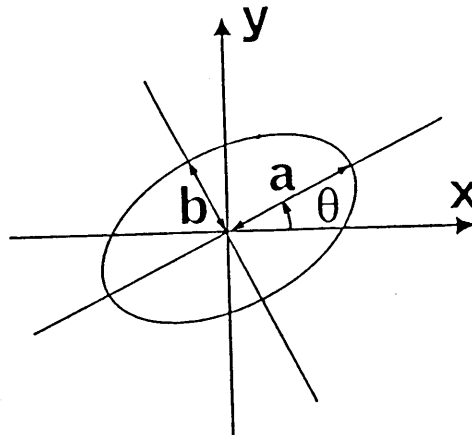


図-7.24 等値面 ($\rho=e^{-1}$)

(3) 解析結果

地盤物性値の平均値を用いて最小安全率となるすべり円弧は、表層すべりを除くと、CASE-1, 2とも図-7.23 に示す円弧となる。このすべり円弧を対象として、各物性値とすべての物性値のばらつきによる安全率の変動係数を求めたものを図-7.25, 7.26 に示す。図-7.25がCASE-1の結果、図-7.26がCASE-2の結果である。図中の実線は物性値の変動係数を一律0.4としたケースであり、変動係数をそれぞれ破線では0.3、1点鎖線では0.2、2点鎖線では0.1としたものである。安全率の変動係数は確率有限要素法から直接の求めることができないため、安全性指標の逆数から計算した。実際の解析では、感度のほかに地盤物性値の変動係数も影響するため、単位体積重量のような変動係数が小さい物性値の安定性評価への影響は小さい。地盤物性値の変動係数は、安全率の分散に直接影響するため、安全率の変動係数は平均値によって影響されることになる。図-7.25, 7.26 のすべての地盤物性値を変化させたときの値が、同じ変動係数の地盤物性値によっても異なるのは、安全率の平均値が異なるためである。内部摩擦角が支配的な斜面であるCASE-1 では内部摩擦角が、粘着力が支配的な斜面であるCASE-2 では粘着力が斜面の安定性に最も影響を与えるパラメータとなっている。すなわち、せん断強度のうちの支配的な地盤物性値のばらつきを斜面安定解析では特に考慮する必要があることがわかる。また、弾性係数による影響は比較的小さいが、変動係数によっては無視できないものである。ポアソン比は自重解析に影響するが、今回の検討では自重解析にばらつきを考慮していないため、安定性評価にあまり影響を与えない結果となった。しかし、初期地盤応力の評価にかなりの不確定性を含んでいることも考えられることから、この点も今後検討すべき課題の1つである。

通常 of 極限平衡法である円弧すべり解析では、最小安全率となるすべり円弧を破壊モードとしているため、確率論的なアプローチが複雑になる。しかし、斜面安定性評価に与える地盤物性値のばらつきを相対的に評価することは可能であり、結果として、本解析モデルにおいては、せん断強度の影響が最も大きいことがわかった。

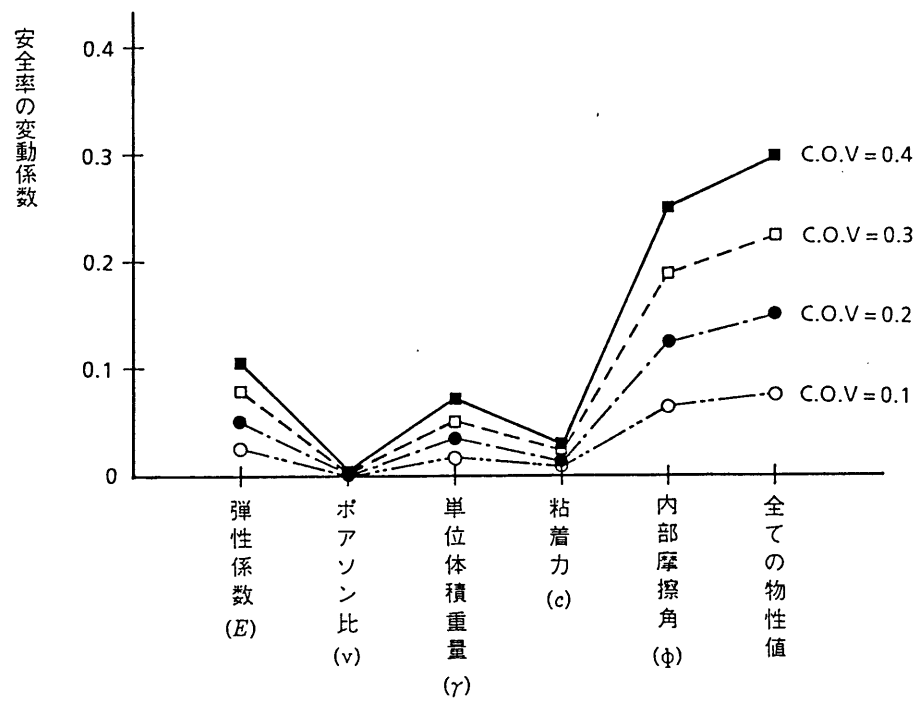


図-7.25 物性値のばらつきの影響評価 (CASE-1)

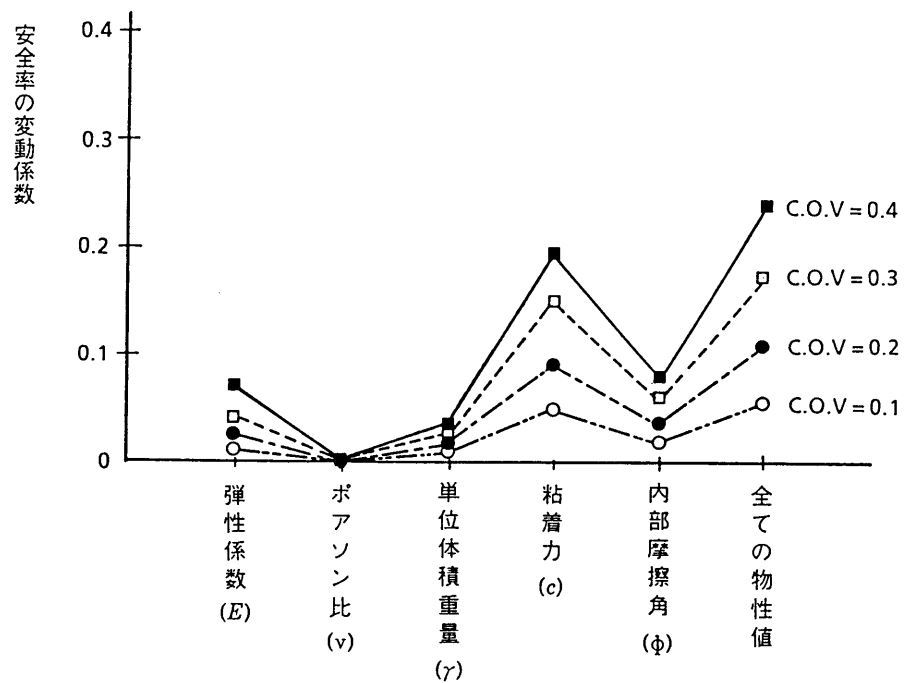


図-7.26 物性値のばらつきの影響評価 (CASE-2)

7.5 まとめ

本章は、斜面安定解析に確率有限要素法を適用するときの問題点を検討したものである。検討項目は、第3章で開発した有限要素法を用いて層理面が存在する場合と存在しない場合の局所破壊および全体破壊についての検討(7.2節)、円弧すべり法における破壊モードの探索と破壊確率との関係、また有限要素法を用いた円弧すべり解析の位置づけ(7.3節)、地震時安定性に関する地盤物性値の感度解析(7.4節)である。結果は次のようにまとめることができる。

- ① 斜面の局所破壊確率と全体破壊確率に対して、確率変数が正規分布に従う場合や変動係数の小さい対数正規分布に従う場合では、性能関数を確率変数の平均値まわりでテーラー展開する手法と本研究で提案している手法による結果には差がほとんどみられなかった。しかし、変動係数が0.3になると、両者には明らかな差が表れた。結果として、本手法は確率変数が正規分布以外の分布形に従うときにも精度よく破壊確率が求められることが確認された。
- ② 地盤物性値の空間的な分布特性を考慮して斜面安定解析を行う場合には、破壊を生じるすべり円弧のばらつきをも考慮する必要があることがわかった。確率有限要素法による円弧すべり解析は、すべり円弧を仮定しなければ破壊確率が求められない。そのため、斜面安定解析への適用の問題が指摘されていた。しかし、斜面内の応力のつり合いを考えることが容易な有限要素法は、適用範囲も広く、浸透流や地震などが作用する複雑な斜面の設計に適している。このことから、確率有限要素法は解析対象を限定すれば、斜面安定解析に適用可能と考えられる。
- ③ 地震時の斜面安定解析で注目すべき地盤物性値は、そのばらつきが安全性評価に大きく影響するものである。検討の結果、地盤物性値のばらつきの中ではせん断強度が安全性評価に支配的となった。また、弾性係数のばらつきによる安全性への影響は比較的小さいが、弾性係数の変動係数によっては無視できないものであることがわかった。ポアソン比は自重解析に影響するが、今回の検討では自重解析にばらつきを考慮していないため、安定性評価にあまり影響を与えない結果となっている。これより、斜面安定解析では、せん断強

度と弾性係数の変動係数が大きいときには弾性係数のばらつきを考慮する必要があるといえる。

第8章 斜面安定対策工としての水平排水管設置の最適設計案評価

－確率有限要素法の信頼性設計への適用－

8.1 概 説

第7章では、斜面安定解析への確率有限要素法の適用性を確認し、解析上の問題となる点について検討を加えた。本章では、信頼性設計への確率有限要素法の適用事例として、ドライドック設計に際して問題となった水平排水管の最適設計について述べる(鈴木・石井, 1986)。ここで、解析の対象とする構造物は、側面の1辺を止水ゲート、他の3辺を自然地盤を切り取ることにより作られた総延長は1kmの斜面より構成されているドライドックである。この形式のドックは、コンクリートあるいは鋼矢板の渠壁などに比べて、建設費用が安くなるという利点があるが、その構造から周辺斜面の安定性に関して、次に述べるような問題点がある。

ドックはその使用に先立ち、前面の止水ゲートをとざし、内部に満たされている水をポンプで排水して、内部を空にする。この排水に要する時間は、ポンプの性能によって異なるが、本解析では72時間とした。いま、ポンプによる水の汲み出しが始まると、内部の水位が低下し、これに伴って、止水壁の内側にある斜面内の地下水位も低下する。このとき、斜面には地下水流が発生するため、斜面内の一部の地盤においてせん断応力が増大し、ドックの満水状態、あるいは、排水後十分時間が経過した後の安定状態と比べて、斜面が一時的に著しく不安定になる期間が発生する。本構造物の場合には、先の条件によりドック内の水位低下に伴って、斜面の中央安全率が1.0よりも小さくなるので、何らかの対策工が必要になる。さらに、このような事例は、ドックのみに限らずフィルダム等においても、程度の差はあろうが発生する可能性がある。すなわち、フィルダムの貯水位が満水位から低水位まで急速に低下する場合である(駒田・金沢, 1975; 駒田, 1978)。この問題に対して、Bergado and Anderson (1985)は、フィルダムなどの

盛土の透水係数の空間的なバラツキが、間隙水圧や斜面の安定性にどのように影響するかをシミュレーションによって、確率論的に検討している。

さて、本章は地下水の浸透流を含めた斜面の安定解析問題であり、この安全度を確率論に基づいて、より定量的に評価し、安定対策工(代替案)を合理的に比較検討することをねらいとした。ここで、浸透流解析には、2次元平面モデルに対する有限要素法を、また、破壊確率の算定には2次元平面モデルによる確率有限要素法の適用を試みた。この場合、破壊確率は、仮定された円弧すべり面におけるモーメントのつり合い式に基づき算定され、浸透流による影響は、流体が各要素に作用する物体力として考慮することにする。これより、残留間隙水圧の増加時には、斜面が破壊する可能性が増大し、破壊に対する安全性が低下することが、破壊確率という定量的な尺度で表現できることになる。

次に、この斜面に対する安定対策工は当初、斜面の勾配を緩くしたり、水平排水管あるいは鉛直排水管(ポンプによる強制排水)などの設置が考えられていた。このような対策工については、すでにLau and Kenney (1984)が河川の斜面に水平排水管を設置し、計測と解析を行い、排水管の径や長さ、水平間隔が、安全率にどのように影響するかを確定論的な立場から検討している。また、Michell et al.(1984)も同様に確定論的な立場から、盛土に負圧管を設置により安全性が増加することを示している。以上いくつかの対策工のうち、ここでは水平排水管の設置案を採用することとし、対策工に対する代替案は水平排水管の間隔をパラメータとしたものとした。本節では、破壊確率と経済性(期待総費用)の面から検討を行う信頼性設計として、破壊確率と初期建設費、破壊時損失費を考慮して算定される期待総費用最小化の原則に基づき、代替案の中から最適案を選択する。

全体の検討フローを図-8.1に示す。まず、斜面の形状と地盤物性値が得られた時点で、いくつかの代替案を作成する。ここでは、水平排水管の設置間隔をパラメータとして代替案を設定している。次に、これらの代替案の破壊確率を計算する。計算は、非定常浸透流解析と確率有限要素法を併用して行う。また、その解析と並行して、代替案の建設費と斜面が破壊したときの損失費(今回は再建費のみ)を算定する。さらに、これら初期建設費および破壊時損失費と破壊確率をもとに

期待総費用を算定する。最後に代替案の中から算定された期待総費用と中央安全率（破壊確率）などを考慮して最適案を選定する。

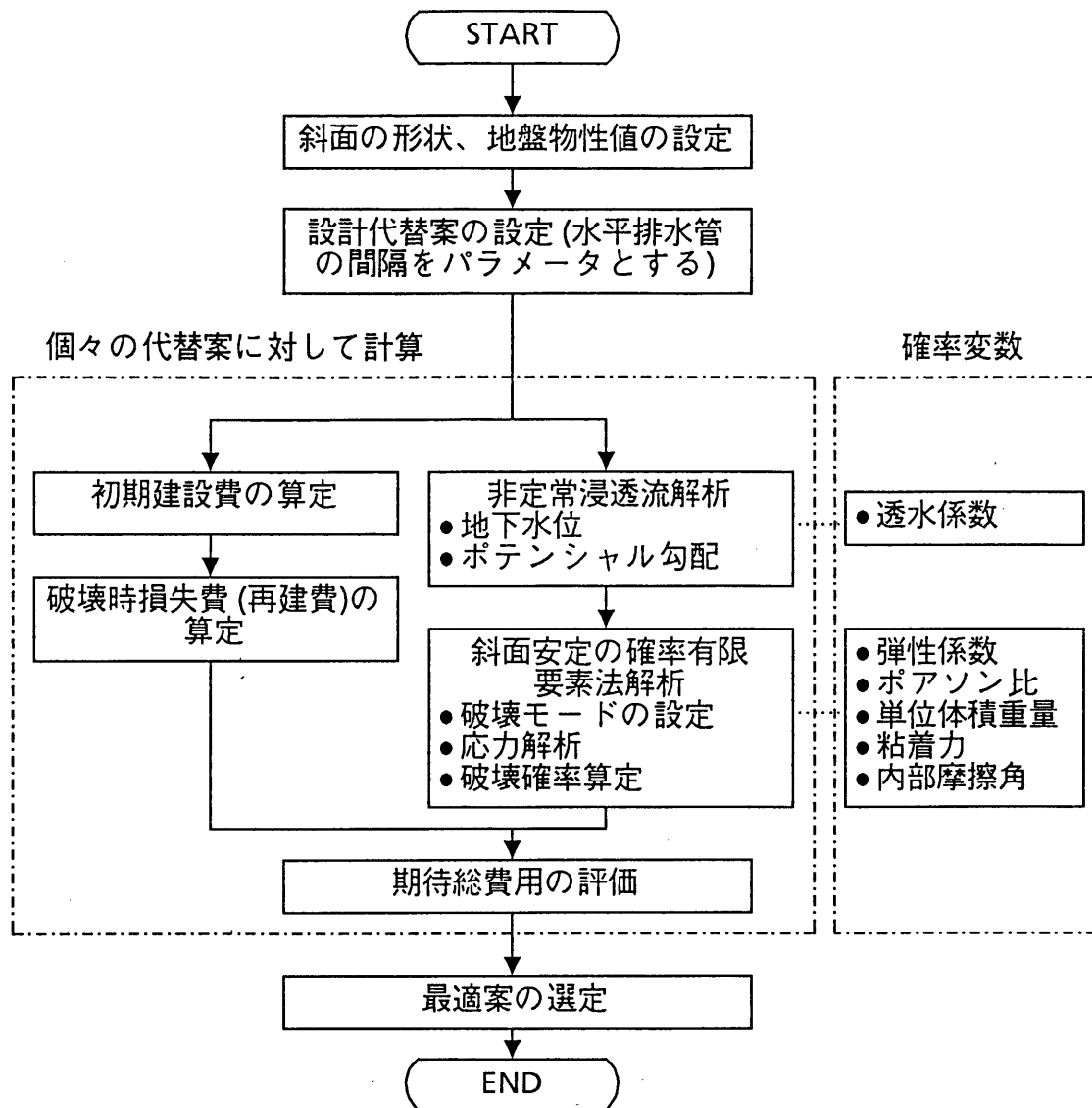


図-8.1 検討フロー

8.2 解析モデルと代替案の設定

(1) 解析モデル

解析の対象とした斜面の断面形状を図-8.2に示す。また、浸透流解析および破壊確率の計算に用いた地盤物性値を表-8.1に示す。この斜面は、沖積砂質土層で構成されており、その下部は洪積粘性土層、洪積砂質土層より構成されている。解析において、確率変数としたものは、透水係数 k 、弾性係数 E 、ポアソン比 ν 、単位体積重量 γ_t 、粘着力 c 、内部摩擦角 ϕ である。このうち、地盤の透水係数は、感度解析の結果として、本解析では、その値を中央値に固定し確定値としている。

さらに、ドックの内部水位は72時間でGL-4mからGL-16mまで低下させられるものとする。

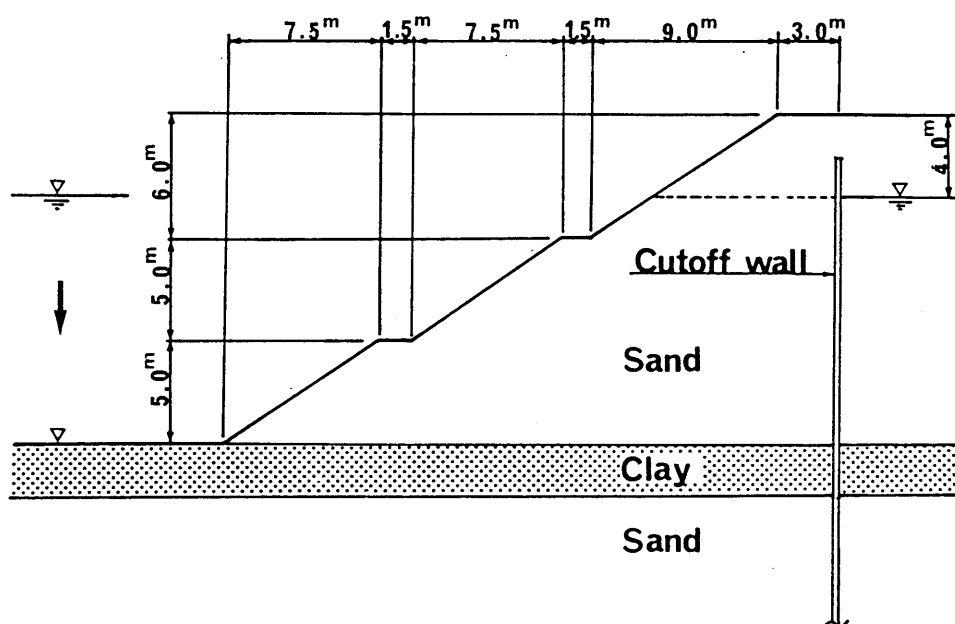


図-8.2 断面形状

表-8.1 地盤物性値

材料特性		沖積砂質土層	沖積粘性土層	洪積砂質土層
弾性係数 * E (tf/m ²)	平均値	500.0	500.0	応力解析では モデル化して いない
	変動係数	0.3	0.3	
ポアソン比 * ν	平均値	0.3	0.35	
	変動係数	0.3	0.3	
単位体積重量 * γ_t (tf/m ³)	平均値	1.8	1.7	
	変動係数	0.05	0.05	
粘着力 * c (tf/m ²)	平均値	0.0	6.0	
	変動係数	—	0.3	
内部摩擦角 * ϕ (°)	平均値	35.0	0.0	
	変動係数	0.2	—	
透水係数 ** k (cm/sec)	平均値	5.0×10^{-4}	2.0×10^{-5}	2.0×10^{-5}
	変動係数	1.5	1.5	1.5
間隙率 n	平均値	0.3	0.39	0.39
	変動係数	—	—	—

* 分布形は正規分布

** 分布形は対数正規分布

また、土質条件は、土層が水平に堆積していることを考慮して、水平方向には相関係数1.0(完全相関)として、鉛直方向には図-8.3に示す自己相関関数による。

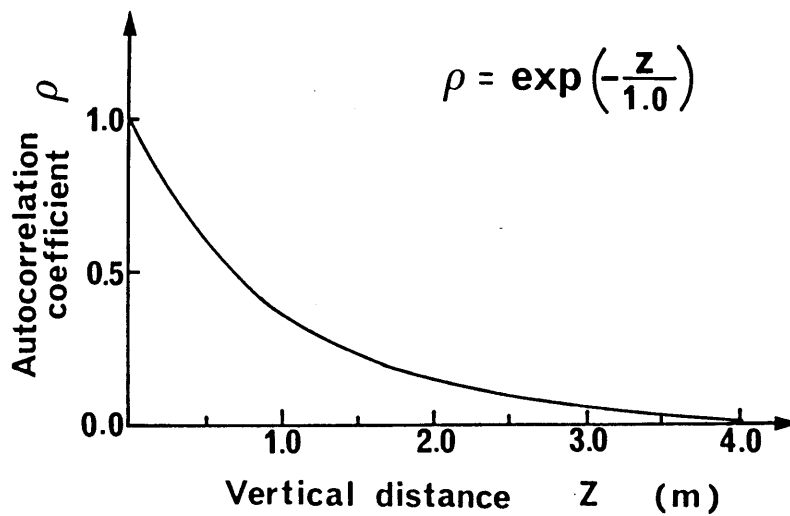


図-8.3 自己相関係数

(2) 代替案の設定

対策工としてはいろいろな代替案があるが、ここでは水平排水管を設置することとし、位置はできるだけ低い方が有効に作用するため、斜面の法尻より50 cm 上部とする。長さについては潜在すべり円弧を考え23 mと決定し、管の径は結果に与える影響が少ないため8 cmとする。また、設置する排水管の水平間隔は @ 10 m, @ 5 m, @ 4 m, @ 3 m, @ 2 m, @ 1 m とし、それぞれを代替案とする。

8.3 地下水の浸透流解析

ドックの内部水位の低下に伴い、地下水は斜面から浸出し、地下水流が生じる。また、このため斜面内では地下水位が低下し、土の有効応力が増加する部分と、残留間隙水圧が発生する部分が表れる。これらの影響を評価するために、非定常浸透流を考慮できる2次元有限要素解析法を用いる。

図-8.4 に、浸透流解析に用いた解析モデルを示す。ここで止水壁は不透水境界とし、下部は斜面内への影響が十分に小さくなる深さ(GL-34m)までをモデル化した。さらに、ドック内も斜面内への影響が十分に小さくなるまでモデル化し、最終的に周辺の境界はすべて不透水境界とした。

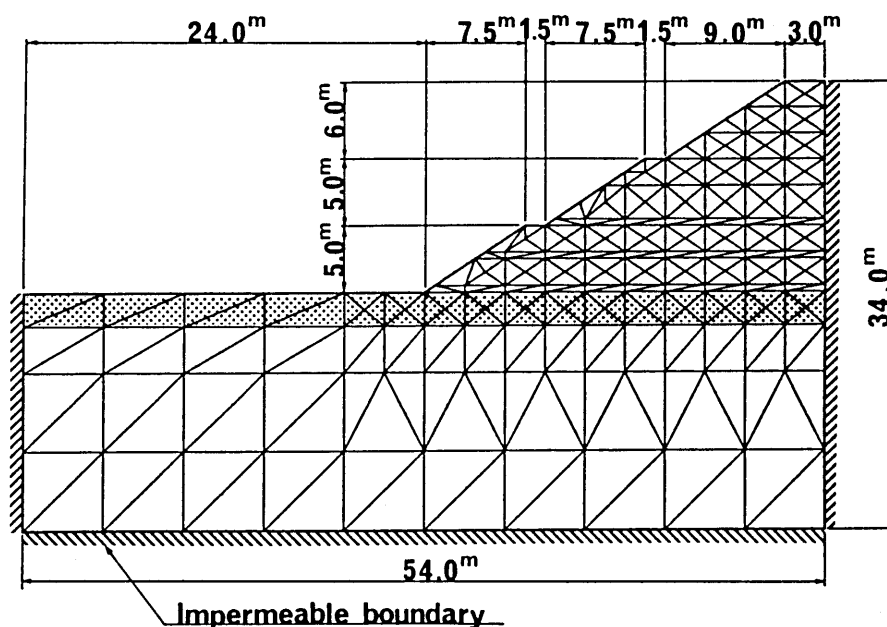


図-8.4 解析モデル

水平排水管設置の解析を行う場合、2次元解析では排水管による効果を評価することはできない。そこで、図-8.5 に示されているように排水管と流出量が等価となるスリットにより、その効果を考慮するものとした(Muskat, 1937)。

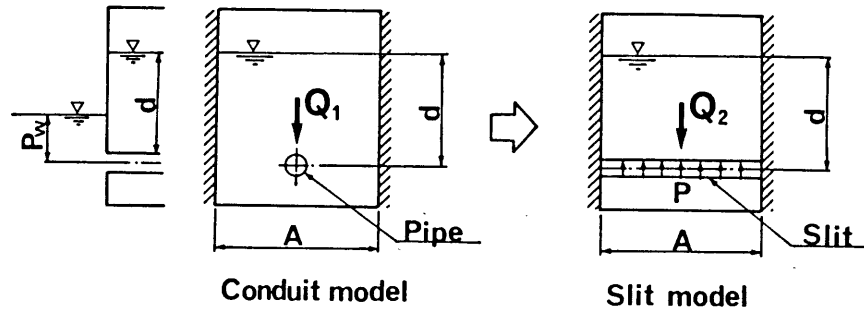


図-8.5 水平排水管のモデル化

等価となるスリットモデルは以下のように求めたものである。すなわち、半径 r の円孔モデルによる流出量 Q_1 とスリットモデルによる流出量 Q_2 は、地盤内の水頭を d としモデルの幅を A とすると、それぞれ次のように表せる。

$$Q_1 = \frac{2\pi k(d - P_w)}{\frac{2\pi d}{A} + \ln\left(\frac{A}{2\pi r}\right)} \quad (8.1)$$

$$Q_2 = k \frac{d - P_w}{d} A \quad (8.2)$$

上記の2式の流量を比較すると $Q_1 < Q_2$ である。これより、 $Q_1 = Q_2$ としてモデル化するためにスリット内に仮想の水頭 P を考えると、 Q_2 は

$$Q_2 = k \frac{d - (P_w + P)}{d} A \quad (8.3)$$

で表され、 $Q_1 = Q_2$ として仮想の水頭 P について解くことにより、 P は次のように表すことができる。

$$P = d - P_w - \frac{2\pi d(d - P_w)}{2\pi d + A \ln\left(\frac{A}{2\pi r}\right)} \quad (8.4)$$

すなわち、解析はスリット内にここで得られた仮想の水頭 P を作用させることにより、実際の排水管の場合と同様の水位低下が生じるようにできる。

上に述べたモデルを用いて、各層の透水係数のばらつきをパラメータとして浸透流解析を行う。ここでは、解析結果の一例として、排水管の設置間隔が 5 m

の場合を示す。この例では、透水係数は各層の中央値を用いている。また、図-8.6は、地下水面の経時変化を示したものであり、図-8.7は、排水開始後36時間経過した時点における流速の分布図である。図-8.6では、排水が進んで地下水面が降下するにしたがって、地下水面の降下速度が遅くなることがわかる。

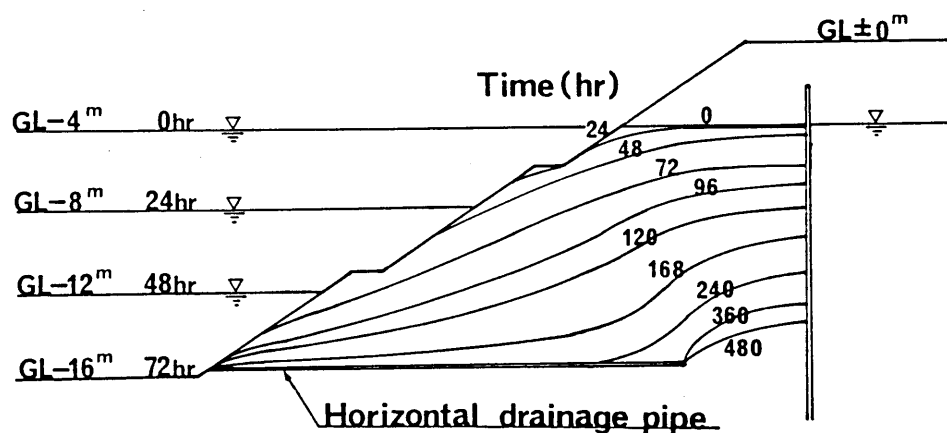


図-8.6 水位変動図

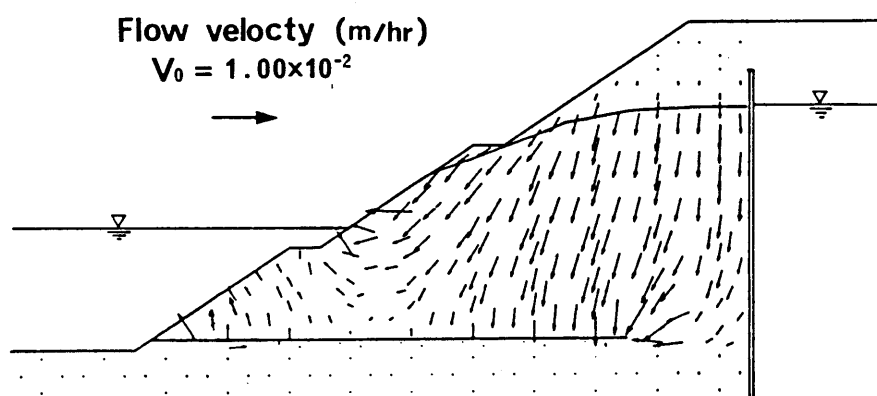


図-8.7 流速分布図(36時間経過後)

浸透流解析の結果は、確率有限要素法解析で次のように考慮する。すなわち、浸透流解析により計算されたポテンシャル勾配と水の単位体積重量を掛けた物体力を、各要素に作用させる。さらに、地下水位の低下に伴い水中重量から空中重量になるため、その差を物体力として各要素に加える。ただし、対象とする地盤が砂質土層であるため、地盤の応力変形が浸透流解析に及ぼす影響は小さいと判断して、この影響は無視した。

8.4 性能関数の定義と破壊確率の算定

図-8.8 に示される解析モデルに、確率有限要素法を適用することにより、各代替案の破壊確率を算定する。また、浸透流解析の結果は、上に述べたように各要素に作用する自重の増加、あるいは流れによる物体力として考慮する。

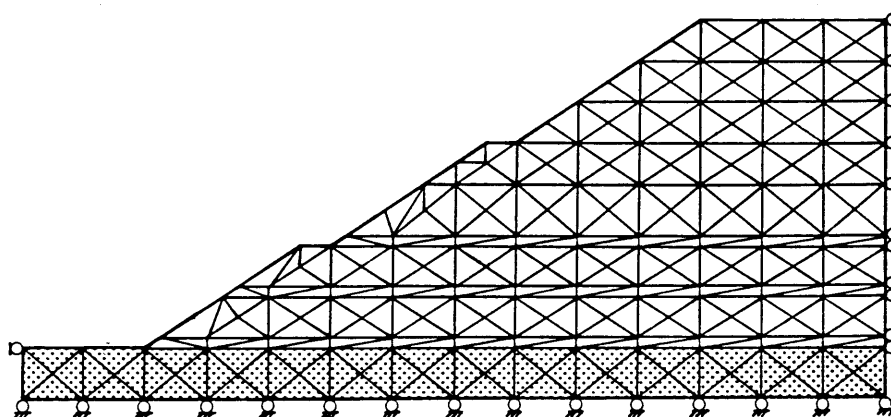


図-8.8 解析モデル

(1) 性能関数の定義

斜面の破壊は、円弧すべり面におけるモーメントのつり合いによって次のように定義される。すなわち、中心 (x_0, y_0) 、半径 r_0 の円弧すべり面上における、発生せん断応力による滑動力 S と抵抗力 R の差をもって、円弧すべり面全体の破壊を定義する性能関数 $g(x_0, y_0, r_0)$ とする。これを式で表せば、次のようになる。

$$\begin{aligned} g(x_0, y_0, r_0) &= R(x_0, y_0, r_0) - S(x_0, y_0, r_0) \\ &= r_0 \int_0^{\theta_0} Q_s d\theta \end{aligned} \quad (8.5)$$

ここで、 θ_0 はすべり円弧の中心角を示す。また、 g は円弧すべり面上における各要素に対する安全性の余裕を示す。いま、すべり面がモデルの N 個の要素を横切っているとすると、式(8.5)を離散化して、

$$g(x_0, y_0, r_0) = \sum_{i=1}^N g_i \Delta l_i \quad (8.6)$$

と表わす。ここで、 g_i は要素 i の性能関数の値(式(7.7)参照)、 Δl_i は要素 i をすべり面が切る長さである。

g_i は確率変数であるので、当然、 $g(x_0, y_0, r_0)$ も確率変数となり、その期待値および分散はそれぞれ次式より与えられる。

$$E[g(x_0, y_0, r_0)] = \sum_{i=1}^N E[g_i] \Delta l_i \quad (8.7)$$

$$\text{Var}[g(x_0, y_0, r_0)] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta l_i \Delta l_j \text{Cov}[g_i, g_j] \quad (8.8)$$

ここで、 $\text{Cov}[g_i, g_j]$ は要素 i と要素 j との性能関数の共分散である(式(7.15)参照)。この関数は、要素の位置と x_0, y_0, r_0 が定まれば、計算できる。

(2) すべり円弧の選定

破壊確率を算定するために、斜面のすべり円弧(中心位置、半径)を決定する必要があるが、ここでは、地盤物性値を平均値あるいは中央値に固定して、その中で破壊確率が最大となるすべり円弧を求め、その円弧を固定して破壊確率を計算する方法を用いた。また、今回のような非定常な問題の場合、時刻に応じてすべり円弧が変化することが考えられる。このことから、排水時の経時変化を考慮して、破壊確率を評価することにした。また、本章では、その目的から、経時変化を考慮して求められる破壊確率のうち、最大のものをもって、各代替案の破壊確率とする。

検討の結果として、水平排水管の設置間隔を1m～5mとした場合は、最大の破壊確率となるのは、排水開始後36時間経過した時点となった(対策工のない場合には54時間)。解析より求められたすべり円弧の一例を図-8.9に示す。図-8.10は、排水前の状態において求められた円弧である。通常、砂質土層の場合は

図-8.10 に示すように、破壊が最大となる円弧は法面の浅いところに存在する。これは、円弧が深くなるとすべり面の垂直応力が増加し、せん断耐力自体が増加するためである。しかし、図-8.9 のように外力として流れによる物体力が作用すると、その影響によりすべり円弧は法面の深いところで求められることになる。さらに、円弧が粘性土層を通らないのは、粘性土層の粘着力が十分に大きいためである。

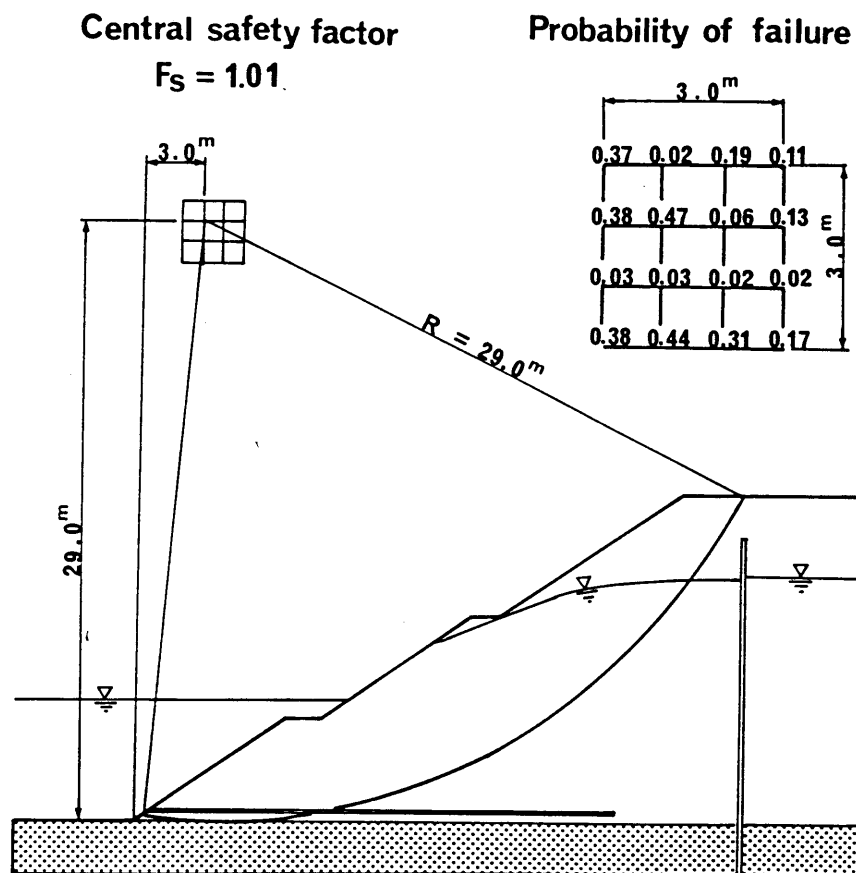


図-8.9 すべり円弧と破壊確率 (36 時間経過後)

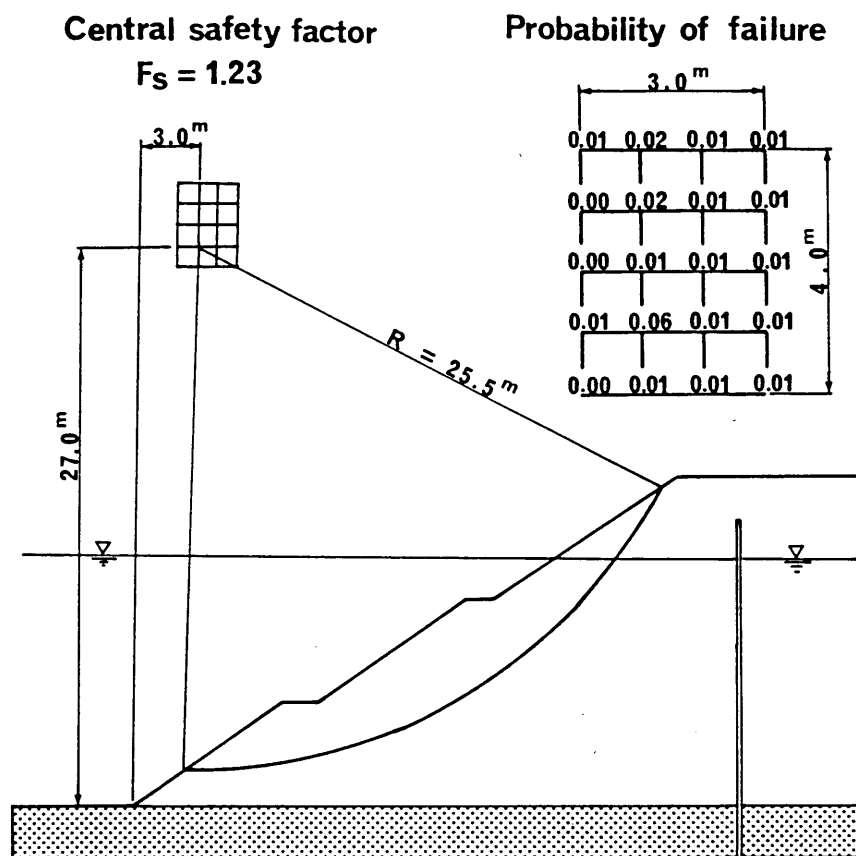


図-8.10 すべり円弧と破壊確率 (排水開始前)

(3) 破壊確率の算定結果

水平排水管を設置する代替案および対策なしの斜面に対して求められた破壊確率を表-8.2に示す。表-8.2には、破壊確率、中央安全率、それらが発生する時刻を示している。これらの値は、図-8.11に示されるように代替案の破壊確率の経時変化を求め、そのうち最大となる破壊確率をもって、その代替案の破壊確率としたものである。

表-8.2 破壊確率と中央安全率

代替案	破壊確率	中央安全率	時刻 (hr)
対策なし	0.899	0.87	54
@ 10 m	0.868	0.89	42
@ 5 m	0.466	1.01	36
@ 4 m	0.381	1.04	36
@ 3 m	0.304	1.06	36
@ 2 m	0.219	1.10	36
@ 1 m	0.171	1.12	36

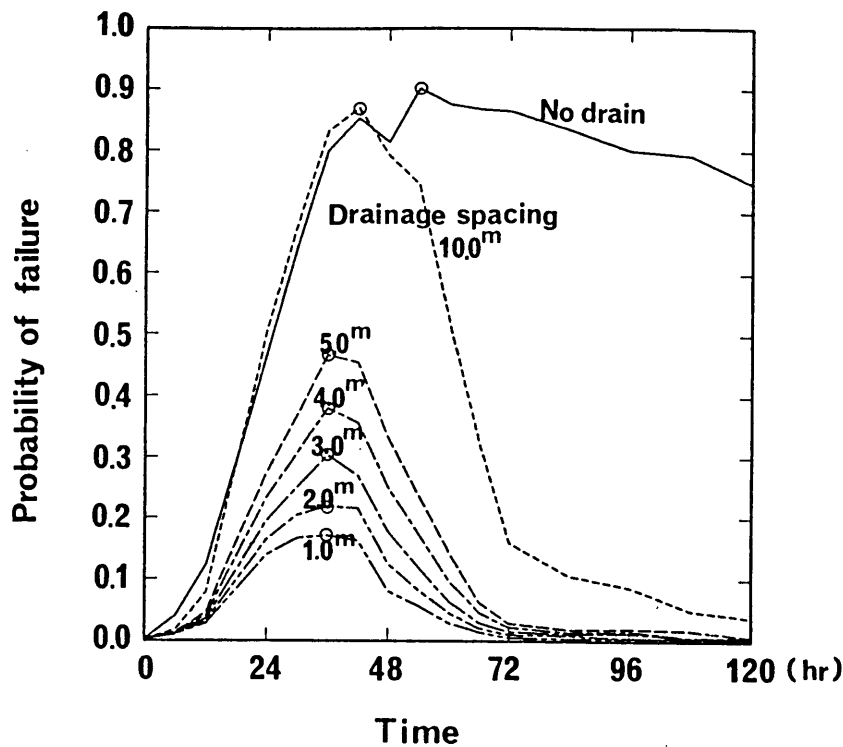


図-8.11 各代替案に対する破壊確率の経時変化

図-8.11 からは、水平排水管の設置間隔を小さくすると、排水期間中の破壊確率が全体に小さくなること、また、最大の破壊確率が発生する時刻が徐々に早くなることがわかる。

(4) 透水係数の影響

表-8.2 に示されるの破壊確率は、地盤の透水係数を中央値として計算したものである。ここで、透水係数自体も当然、他のパラメータと同様にばらつきをもつことから、この影響を検討しておく必要がある(Hachich and Vanmarke, 1983)。本章では、この影響を次のように検討した。すなわち、透水係数をその中央値 λ と標準偏差 ξ を用いて、 λ , $\lambda \pm \xi$, $\lambda \pm 2\xi$ の5つの点により対数正規分布を離散化して求められた破壊確率と、透水係数を中央値に確定値として固定して求められた破壊確率を比較することにより検討を行った。結果として、多くの場

合、両者の誤差は、5%以内に留まり、透水係数を確定値とすることは実用上、問題ないと判断し、その値を確定値(中央値)としたものである。

結果の一例として、標準的な斜面、すなわち、水平排水管を設置しない斜面について、この比較結果を示したものが図-8.12である。両者の誤差は十分に小さいことがわかる。

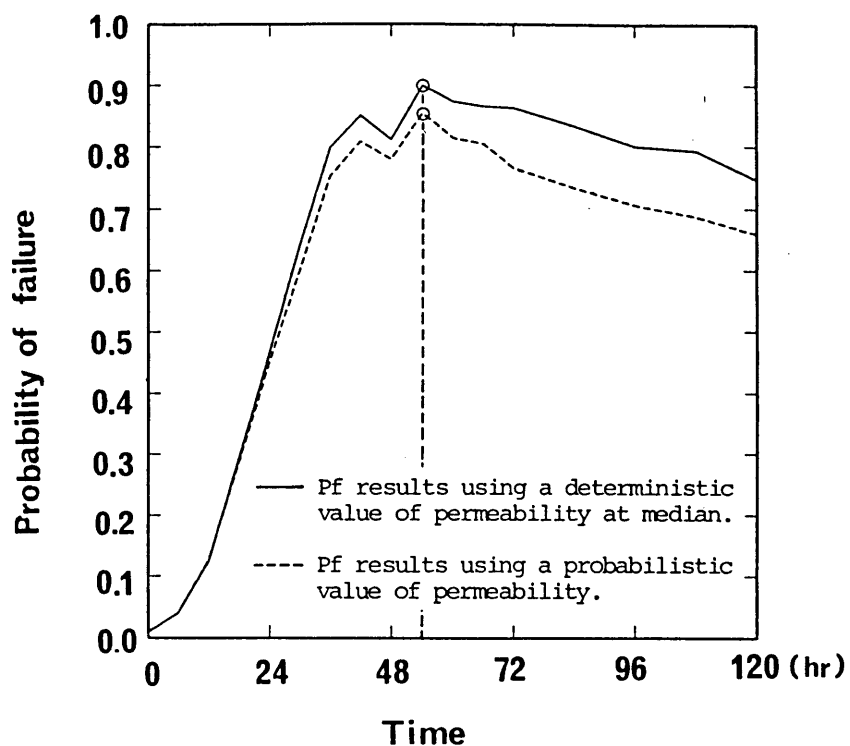


図-8.12 破壊確率の経時変化

8.5 期待総費用の評価と最適案の選定

最適案は、安全性と経済性の面から選択するため、基本的に代替案の破壊確率と初期建設費、破壊時損失費を考慮して算定される期待総費用を最小にするものから選択する評価基準を用いる。さらに、中央安全率が1.0を上回ることも評価基準とする(この基準の採用理由は後で述べる)。まず初期建設費と破壊時損失費を評価し、これらの結果と破壊確率を組み合わせる期待総費用を算出する。最後に、この期待総費用を最小なものとし、さらに中央安全率が1.0を上回る代替案をもって最適案とする。

(1) 初期建設費、破壊時損失費の算定

初期建設費および破壊時損失費は金額であるが、ここでは10m間隔の対策工の建設費を100として、各建設費および損失費を相対的な尺度で示している。したがって単位は無次元となるが、ここでは慣用的に初期建設費、破壊時損失費とよぶことにする。初期建設費の算定は、材料費、ボーリング費、運搬費、加工費および工事に伴う諸経費を考慮して表-8.3のように算定した。

表-8.3 初期建設費

代替案	初期建設費
対策なし	0
@ 10 m	100
@ 5 m	200
@ 4 m	250
@ 3 m	330
@ 2 m	500
@ 1 m	1,000

破壊時損失費の算定は、基本的に再建費を考えて以下の条件をもとに行った。

- ① 本構造物は、広大な敷地内にあり、破壊に対して他の構造物や敷地に影響を与えない。
- ② 排水時には、ドック内部に人間は入らないため、破壊により人身事故は発生しない。
- ③ 計算は2次元で行っているため、断面が破壊ということは法面がすべて破壊すると考えることになる。しかし、現実的には総延長1km すべてにわたって斜面が破壊するとは考えられないため、破壊する延長をパラメータとして検討する。具体的には、破壊延長を 50m, 100m, 200m, 300m, 500m, 1000m として算定する(この考え方については後述する)。
- ④ 復旧に当たっては、種々の工法が考えられるが、ここでは現状と同様の法面形状となるように良質の現地で発生する土砂で盛り直すものとする。さらに、再建された斜面が排水時に再度破壊することがないように、図-8.13 に示すように新たに排水フィルターを設置するものとする。

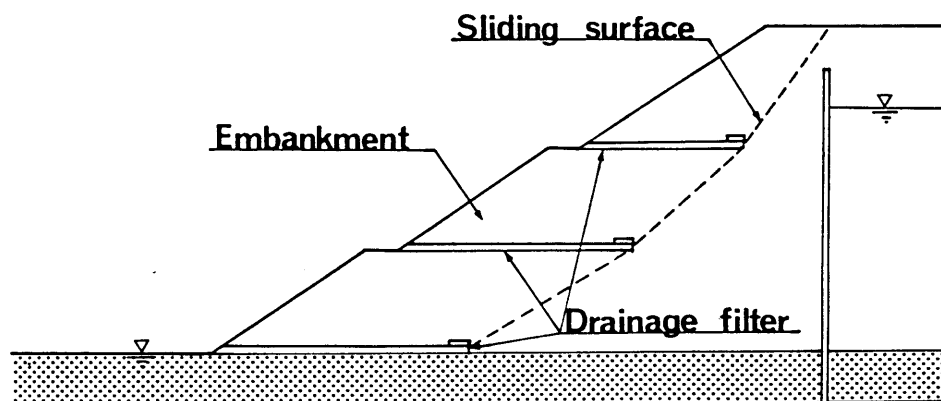


図-8.13 復旧後の断面形状

これより、材料費、撤去費および転圧費などとそれにかかる諸経費を考えて、破壊延長ごとに破壊時損失費を表-8.4に示されるように算定した。ここで、破壊延長が50mより短い場合の破壊時損失費は、施工性の関係から線形的には減少しない。

表-8.4 破壊時損失費

破壊延長 (m)	破壊時損失費
50	160
100	310
200	620
300	940
500	1,560
1000	3,120

(2) 期待総費用の算定

初期建設費と破壊時損失費および破壊確率を考えると、各代替案の期待総費用は次の式で表すことができる。

$$C_t = C_i + C_f \cdot P_f \quad (8.9)$$

ここで、 C_t ; 期待総費用, C_i ; 初期建設費, C_f ; 破壊時損失費, P_f ; 破壊確率を表す。

結果として求められた破壊確率と期待総費用の関係を図-8.14に示す。破壊確率と期待総費用は、代替案ごとに与えられるので、離散値となる。図-8.14では、これらの離散値を便宜的に直線で結び表示したものである。

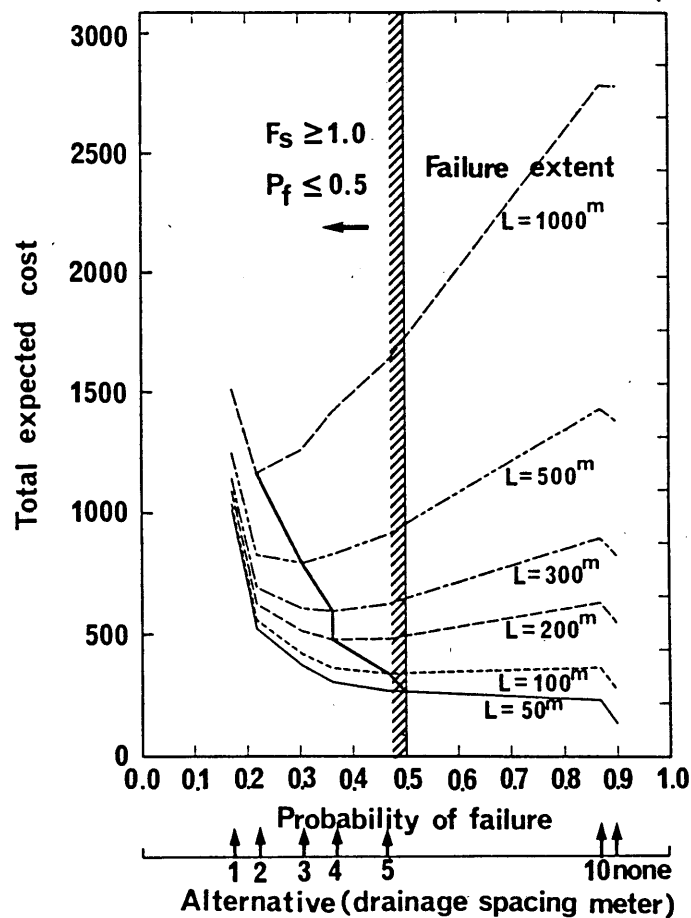


図-8.14 破壊確率と期待総費用

(3) 最適案の選定

図-8.14には、斜面の破壊延長をパラメータとした期待総費用と破壊確率との関係が示されている。ここで、破壊確率の値は、水平排水管の有無、また、その間隔によって決定される(図の横軸目盛りの下に排水管の間隔を記入している)。また、この図では、斜面の破壊延長をパラメータとして図中に記入しているが、その理由は次のとおりである。すなわち、本検討で用いた解析手法は、2次元平面モデルであることから、各代替案に対して、斜面はいずれの断面においても等しい破壊確率を有していることになる。したがって、解析上は斜面が破壊したとすると、1kmにわたる斜面すべてが同時に破壊することになる。しかしなが

ら、斜面の破壊を想定したときに、1kmの斜面が同時に破壊すると考えるのは大変に不自然なことである。また、斜面の一部が破壊すれば、その部分より水が排出され幾分なりとも隣接する斜面は危険な状態から離れることができるはずである。このことから、図-8.14では、斜面の破壊延長をパラメータとした。各破壊延長により、期待総費用が最小となる代替案が存在するが、これより破壊確率が小さくなると期待総費用が急に大きくなるが、逆に破壊確率が大きくなっても期待総費用は急激には大きくならないことがわかる。

さらに、本斜面の場合には、確定論的な計算から、中央安全率が1.0を下回るときがあるというので、その対策工を検討しているのであるから、中央安全率は1.0を最低でも上回る必要がある。また、中央安全率1.0は、破壊確率では0.50になることから、代替案は、少なくとも破壊確率0.50以下の範囲で選択される必要がある。

いま、この条件のもとで、斜面の破壊延長をパラメータとして期待総費用の最小値を結んだものが、図の太い実線である。この実線は、斜面の破壊延長が与えられると、期待総費用を最小にする破壊確率、すなわち、水平排水管の間隔を与えるものである。この実線より、破壊延長が1kmの場合には、水平排水管を2m間隔で設置するのが最適案となり、破壊延長が200m～500mであれば、3.0m～4.0m間隔が最適案となることを示している。さらに、破壊延長が100m以内であれば、水平排水管の間隔を5m程度とすれば最適な配置となることがわかる。しかしながら、この場合の破壊確率は0.5に近く、施工期間に十分に余裕があれば、何ら対策工をしない、あるいは、10m間隔で施工して、そのあとで排水試験を行い、破壊した部分のみを再建するという施工法をとっても、よいことがわかる。

上に述べた考察から、本対象のドックの設計では、大規模な斜面破壊は、できれば避けたいとの考えから、水平排水管を3m間隔で設置すればよいと判断された。また、この最適案による斜面の中央安全率は1.06(破壊確率は0.304)となり、通常の確定論的な設計による要求も満足している。

従来は設計者の判断により、中央安全率のみを用いて設計代替案の評価を行っていたが、これでは、特に設計示方書で中央安全率を規定される構造物以外は、

設計者の判断により代替案の評価が異なってしまうおそれがある。このことは、構造物のごく短期間における安定性の問題、たとえば、本章の主題とする斜面の安定問題や仮設構造物を検討するときに、特に重要になる。これに対して、破壊確率と経済性(期待総費用)の面から検討おこなう本方法は、このようなときに設計者の設計思想による影響が少なくなる手法であり、従来の方法より合理的な手法である。

8.6 まとめ

本章は、確率有限要素法を信頼性設計に適用した事例として、3辺が斜面からなるドックの斜面安定対策工について、最適設計を試みた。このドックは、排水時に斜面が不安定となるため、水平排水管の設置を考え、信頼性手法を用いて排水管の設置間隔の最適案の選定を試みた。

結果は以下のようにまとめることができる。

- ① 排水時に斜面が不安定となるのは、内部水位の低下に伴い、水位勾配が大きくなり、地下水流が発生するためである。この問題に対して、2次元浸透流解析と確率有限要素法を組み合わせることにより、斜面の安全性を破壊確率という定量的な尺度で表現することができた。たとえば、水平排水管を5m間隔で配置すれば、破壊確率は0.466となり、3m間隔で配置すれば0.304となる。
- ② 最適案の選定にあたっては、初期建設費および破壊時損失費と破壊確率を考慮した期待総費用最小化基準を用いたが、従来の設計法に従った確定論的な計算から、中央安全率が1.0を下回るときがあるというので、対策工を検討しているのであるから、設計から中央安全率が1.0を下回る代替案は採用外とした。結果として、本検討のドックでは水平排水管を3m間隔で設置するのが最適であり、このときの中央安全率は1.06(破壊確率0.304)となった。
- ③ 従来の確定的な方法と本方法を比較すると次のことがいえる。従来の設計法では、設計者の判断(設計思想)により、中央安全率を定めて、それに従って設計代替案の評価を行うことになる。したがって、設計者が代われれば、その人の設計思想によって、中央安全率は違った値となることもある。さらに、同じ中央安全率をもつ斜面でも、地盤物性値のばらつきの程度が異なれば、当然違った破壊確率をもつため、中央安全率自体は安全度を示す定量的な尺度にはなりえないとの指摘もある。したがって、破壊確率と経済性(期待総費用)の両面から検討を行う本方法は、従来の方法よりも、合理的な手法となりえる。また、適用性については本事例解析より確認することができた。

第9章 結論と今後の展望

地盤工学において地盤物性値を土質調査・試験から確定値として定めることは容易ではなく、そのため従来から地盤物性値の不確定性を考慮して設計がなされてきた。近年発達してきた信頼性設計法は、地盤物性値の不確定性を確率論で扱い安全性を定量的に評価できることから注目を集めている。本研究では、地盤物性値の空間的なばらつきに着目して、安全性を合理的に評価するための解析手法を開発するために、以下の3項目に関する研究を行い、得られた成果をまとめたものである。

- ① 地盤物性値の不確定性をモデル化
- ② 新たな解析手法の開発
- ③ 解析手法の適用性の検討

研究成果を章別に取りまとめると次のようになる。

第1章では、安全性評価における不確定性の定量的な取扱いの必要性を述べ、地盤工学における信頼性設計の背景についてまとめた。また、研究目的を明確にするとともに、この目的に沿って既往研究を調査し、本研究内容の位置づけおよび論点を明確にした。

第2章では、地盤物性値の不確定性に関するモデル化についてまとめた。精度の高い調査・試験方法により誤差は小さくなり、標本数を増やすことにより統計的推定による不確定性を小さくすることが可能であるが、地盤物性値が本来有する地質学的な地盤物性値の空間的な分布特性は無視できない。このことから、地盤物性値の空間的な分布特性を確率論により表現した。ここで、地盤物性値の空間分布を、適用対象に応じて次の2種類に分けて扱うことを提案している。1つは、盛土のように設計段階においてサイトでの土質データが存在していない場合であり、この場合には地盤物性値の空間分布を確率場として取り扱う。もう1つは、切土斜面のようにサイトでの土質データが得られている場合であり、この

ときには地盤物性値の空間分布を確率場(母集団)から得られたの1つの実現事象である標本場として取り扱うことである。さらに、標本場の推定法として、クリッキングの定式化をまとめ、その適用性がよいことを示した。

第3章では、地盤物性値の不確定性を考慮して、地盤の挙動を確率論的に取り扱うことができる確率有限要素法の定式化を行った。提案した確率有限要素法は、性能関数を確率変数の破壊点(設計点)でテーラー展開しているため、従来の確率変数の平均値でテーラー展開している従来の確率有限要素法に比べて、確率変数の変動係数が大きいときにも精度よく解を求めることができる。また、簡単な例題によれば、地盤物性値の空間分布を確率場としたときには、地盤物性値の変動係数を0.3と大きくすると解の精度が若干悪くなることがわかった。

第4章では、地盤物性値の空間分布を考慮して確率有限要素解析を行う場合に必要となるの要素分割についてのまとめた。ここでは、地盤物性値の確率場から要素の物性値を求めるときに、局所平均により離散化する手法を示した。また、モンテカルロ・シミュレーション法に基づく確率有限要素法によって、要素分割数が有限要素法の解析精度に与える影響を検討した。検討結果は、要素の変形や局所破壊の和の形で表現される変位や全体破壊などの応答値には、分割数の影響が小さいことがわかった。

第5章では、カルマン・フィルターを有限要素法に組み込んだ地盤物性値の空間分布推定法の開発を行った。本手法は、統計的手法であるベイズ理論と制御理論であるカルマン・フィルターの関係を結び付け、カルマン・フィルターの初期値にベイズ理論の事前分布をあてはめた定式化を行うことにより、地盤物性値の未知数より観測値の数が少なくても逆解析が可能となることを示した。特に、土質データが十分でない場合にも地盤物性値の空間分布を確率論的に推定できる。その後、推定された地盤物性値の空間分布から、再度、地盤の挙動を予測することができるため、施工中に設計変更などが可能となり、一貫した信頼性設計を行うことができる。また、簡単な例題による感度解析から、観測値の偏微分係数を求

めることにより、施工管理における観測点や観測位置を決定する資料を与えることができることを示し、提案した解析手法の適用性も確認した。

第6章では、盛土による沈下予測問題において、第2章で述べたクリッキングを適用して設計段階に得られた土質データから地盤物性値の空間分布を推定し、第3章で述べた確率有限要素法を用いて確率論的な沈下量予測を行った。さらに、施工段階での沈下量の観測データから第5章で述べた拡張カルマン・フィルターを用いた有限要素法により地盤物性値の空間分布の確率論的な推定を行い、これらの解析手法が設計・施工段階で一貫した沈下量予測に適用できることを示した。

第7章では、斜面に対して第3章で述べた確率有限要素法を用いて信頼性解析を行うときの問題点を検討した。最初に、局所すべり破壊と全体すべり破壊に対して、地盤物性値の変動係数が大きいときには、従来の手法より破壊確率の精度がよいことを示した。また、従来の円弧すべり法をもとに地盤物性値の空間分布を考慮した解析を行うと、破壊モードが生じるすべり円弧を固定することになるので破壊確率を小さめに評価することがわかった。このことから、破壊確率の算定には破壊モードの設定が重要になる。しかし、破壊モードを固定した有限要素法による円弧すべり解析も、対象構造物によっては有効である。最後に、岩盤斜面の地震時安定性に与える地盤物性値の影響について感度解析を行い、地震時における円弧すべり破壊に関してせん断強度が支配的であることを示した。

第8章では、信頼性設計への確率有限要素法の適用として、3辺が斜面からなるドライドックを対象として、斜面安定対策工としての水平排水管の最適設計を行った。従来の設計法に比べ、信頼性設計法は安全性と経済性の両面から検討を行うことができ、合理的な設計法となり得ることを示した。

本研究は、地盤物性値の空間分布特性を扱った確率論的解析手法の開発とその適用性の検討を行った。地盤の不確定性は考慮できる手法を開発したものの、地盤の挙動を解析するために弾性解析を行っていることから、地盤の挙動を正確に予

測する解析手法の研究が必要となる。さらに、多くの構造物に信頼性設計へ応用するために、実測データから統計的性質の把握が重要となり、統計学と意思決定への研究も残された。今後は、不均質な地盤物性値の区分を含めた確率モデル作成と、現状での設計や解析で必要となる浸透流解析や応力解析への幅広い適用をはかるつもりである。

参考文献

- Aboufirassi, M. and Mariño, M. A. (1984). "A geostatistically based approach to the identification of aquifer transmissivities in Yolo Basin, California," *Mathematical Geology*, Vol. 16, No. 2, pp.125~137.
- Alonso, E. E. and Krizek, R. J. (1975). "Stochastic formulation of soil properties," *The Proceedings of the 2nd International Conference on Application Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, Aachen, pp.9~33.
- Alonso, E. E. and Krizek, R. J. (1975). "Stochastic Formulation Soil Properties," *The Proceedings of the 2nd International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, Aachen, pp.9~32.
- Alonso, E. E. (1976). "Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays," *Géotechnique*, Vol. 26, No. 3, pp.453~472.
- Ang, A. H.-S. and Cornell, C. A. (1974). "Reliability bases of structural safety and design," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 100, No. 9, pp.1755~1769.
- Ang, A. H.-S. and Tang W. H. (1977). *Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Volume I Basic Principles*, John Wiley & Sons, New York, N.Y.
- Ang, A. H.-S. and Tang W. H. (1984). *Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Volume II Decision, Risk, and Reliability*, John Wiley & Sons, New York, N.Y.
- Arai, K., Ohta, H. and Yasui, T. (1983). "Simple optimization techniques for evaluating deformation moduli from field observations," *Soils and Foundations*, Vol. 23, No. 1, pp.107~113.
- Asaoka, A. (1978). "Observational procedure of settlement prediction," *Soils and Foundations*, Vol. 18, No. 4, pp.87~101.
- Asaoka, A. and Matsuo, M. (1979). "Bayesian approach to inverse problem in consolidation and its application to settlement prediction," *Proceeding of the 3rd Numerical Methods in Geomechanics*, pp.115~123.
- Asaoka, A. and Matsuo, M. (1980). "An inverse problem approach to settlement prediction," *Soils and Foundations*, Vol. 20, No. 4, pp.53~66.
- Asaoka, A. and Grivas, D. (1982). "Spatial Variability of Undrained Strength of clay," *Journal of the Geotechnical Division*, ASCE, Vol. 108, No. 5, pp.743~756.
- Asaoka, A. and Matsuo, M. (1983). "A simplified procedure for probability-based $\phi_u=0$ stability analysis," *Soils and Foundations*, Vol. 23, No. 1, pp.8~18.
- Asaoka, A. and Matsuo, M. (1984). "An inverse problem approach to the prediction of multi-dimensional consolidation behavior," *Soils and Foundations*, Vol. 24, No. 1, pp.49~62.

- Asaoka, A. and Misumi, K. (1988). "Analysis and prediction of consolidation settlement of normally consolidated clay foundation under embankment loading," *Soils and Foundations*, Vol. 28, No. 3, pp.35~50.
- 藍田正和・鈴木英也・石井清・鈴木誠 (1989). "地震時斜面安定性に関する材料物性値の感度分析," 土木学会第44回年次学術講演会, III-437, pp.948~949.
- 浅岡 顕・松尾 稔・藤川 和之・柳瀬 重靖 (1981). "沈下計算の信頼性と圧密試験の間隔についての一考察," 土質工学会, 昭和56年度サンプリングシンポジウム発表論文集, pp.47~54.
- Baecher, G. B. and Ingra, T. S. (1981). "Stochastic FEM in settlement predictions," *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 107, No. 4, pp.449~463.
- Baecher, G. B. (1983 a). "Applied geotechnical reliability analysis," *Reliability Theory and Its Application in Structural and Soil Mechanics*, (ed. P. Thoft-Christensen), Martinus Nijhoff Publishers, pp.237~256.
- Baecher, G. B. (1983 b). "Simplified Geotechnical Data Analysis," *Reliability Theory and Its Application in Structural and Soil Mechanics*, (ed. P. Thoft-Christensen), Martinus Nijhoff Publishers, pp.257~277.
- Baikie, L. D. (1985). "Total and partial factors of safety in geotechnical engineering," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 22, pp.477~482.
- Bell, J. M. (1968). "General slope stability and analysis," *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 94, No. 6, pp.1253.
- Bergado, T. , Anderson, L. R. (1985). "Stochastic analysis of pore pressure uncertainty for the probabilistic assessment of the safety of earth slopes," *Soil and Foundations*, Vol. 25, No. 2, pp.87~105.
- Bishop, A. W. (1955). "The use of the slip circle in the stability analysis of slopes," *Géotechnique*, Vol. 5, No. 1, pp.7~17.
- Brown, C. B. and King, I. P. (1966). "Automatic embankment analysis: Equilibrium and instability conditions," *Géotechnique*, Vol. 16, No. 3, pp.209~219.
- Bucher, C. G. (1988). "Adaptive sampling—An iterative fast Monte Carlo procedure," *Structural Safety*, Vol. 5, pp.119~126.
- Burgess, T. M. and Webster, R. (1980 a). "Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties, 1, The semi-variogram and punctual kriging," *Journal of Soil Science*, Vol. 31, pp.315~331.
- Burgess, T. M. and Webster, R. (1980 b). "Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties, 2, Block kriging," *Journal of Soil Science*, Vol. 31, pp.333~341.
- Burgess, T. M., Webster, R. and McBratney, A. B. (1980 c). "Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties, 4, Sampling strategy," *Journal of Soil Science*, Vol. 31, pp.643~659.
- Calle, E. O. F., van Heteren, J. and Quaak, M. P. (1987). "Experimental verification by field measurements of covariance models for a geotechnical property,"

Proceeding of the 5nd International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Vancouver, pp.885~892.

Cambou, B. (1975). "Application of First-order Uncertainty Analysis in the Finite Element Method in Linear Elasticity," *Proceeding of the 2nd International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, Aachen, pp.67~87.

Christakos, G. (1985). "Modern statistical analysis and optimal estimation of geotechnical data," *Engineering Geology*, Vol. 22, No. 2, pp.175~200.

Christakos, G. (1987). "A stochastic approach in modelling and estimating geotechnical data," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 11, pp.79~102.

Cividini, A., Maier, G. and Nappi, A. (1983). "Parameter estimation of a static geotechnical model using a Bayes' approach," *International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences and Geomechanics*, Vol. 20, No. 5, pp.215~226.

Clough, R. W. and Woodward, R. J. (1967). "Analysis of embankment stresses and deformations," *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 93, No. 4, pp.529~549.

Cornell, C. A. (1971). "First-order uncertainty analysis of soils deformation and stability," *Proceeding of the 1st International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, Hong Kong, pp.130~144.

Dagan, G. (1982). "Stochastic modeling of groundwater flow by unconditional and conditional probabilities, 1, Conditional simulation and the direct problem," *Water Resources Research*, Vol. 18, No. 4, pp.813~833.

Dunlop, P. and Duncan, J. M. (1970). "Development of failure around naturally excavated slopes," *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 96, No. 2, pp.471~493.

Der Kiureghian, A. and Ke, J. B. (1988). "The stochastic finite element method in structural reliability," *Probabilistic Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 3, No. 2, pp.83~91.

Der Kiureghian, A. (1983). "Numerical methods in structural reliability," *Proceeding of the 4th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, Universita di Firenze, pp.769~784.

Der Kiureghian, A. (1985). "Finite element methods in structural safety studies," *Proceeding of the Structural Safety Studies Symposium in conjunction with the ASCE Convention*, Denver, pp.40~52.

Fan, K., Fredlund, D. G. and Wilson, G. W. (1986). "An interslice force function for limit equilibrium slope stability analysis," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 23, pp.287~296.

Fellenius, W. (1936). "Calculation of the stability of earth dams," *The 2nd Congress on Large Dams*, Vol. 4, pp.445~462.

- Fott, R. and Ladd, C. C. (1977). "Behaviour of Atchafalaya levees during construction," *Géotechnique*, Vol. 27, No. 2, pp.137~160.
- Gersch, W., and Liu, R. S.-Z. (1976). "Time series methods for the synthesis of random vibration systems," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 98, pp.159~165.
- Gersch, W., and Yonemoto, J. (1977). "Synthesis of multivariate random vibration systems: A two-stage least square ARMA model approach," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 52, pp.553~565.
- Gioda, G. (1985). "Some remarks on back analysis and characterization problems in geomechanics," *Proceeding of 5th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Nogoya, pp.47~61.
- Hachich, W. and Vanmarcke, E. H. (1983). "Probabilistic updating of pore pressure fields," *Journal of Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 109, No.3, pp.373~387.
- Handa, K., and Andersson, K. (1981). "Application of finite element methods in the statistical analysis of structures," *Proceedings of the 3rd International Conference on Structural Safety and Reliability*, Sydney, pp. 409~417.
- Hasofer, A. M. and Lind, N. C. (1974). "Exact and invariant second moment code Format," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 100, No. 1, pp.111~121.
- Hisada, T., and Nakagiri, S. (1981). "Stochastic finite element method developed for structural safety and reliability," *Proceedings of the 3rd International Conference on Structural Safety and Reliability*, Sydney, pp. 395~408.
- Hisada, T., and Nakagiri, S. (1985). "Role of stochastic finite element method in structural safety and reliability," *Proceedings of the 4th International Conference on Structural Safety and Reliability*, Kobe, pp. 1 385-394.
- Hisatake, M. and Ito, T. (1985). "Back analysis for optimization method," *Proceeding of the 5th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Nogoya, pp.1301~1307.
- Halder, A. (1983). "Statistical and probabilistic methods in geomechanics," *Proceeding of the 4th Numerical Methods in Geomechanics*, pp.473~504.
- Hooper, J. A. and Butler F.G. (1966). "Some numerical results concerning the shear strength of London Clay," *Géotechnique*, Vol. 16, pp.282~304.
- Hoeksema, R. J. and Kitanidis, P. K. (1984). "An application of the geostatistical approach to the inverse problem in two-dimensional groundwater modelling," *Water Resouces Research*, Vol. 20, No. 7, pp.1003~1020.
- Hosiya, M. and Saito, E. (1984). "Structural identification by extended Kalman filter," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 110, No. 12, pp.1757~1770.
- 原田 守博・高木 不折 (1986). "降雨による不圧地下水状態の変動に関する統計的考察," 土木学会第41回年次学術講演会, Vol. II-81, pp.161~162.

- 星谷 勝・斎藤 悦郎(1983). “液状化を伴う地盤の等価線形化,” 土木学会論文報告集, No. 340, pp.59~65.
- 星谷 勝・斎藤 悦郎(1984 a). “線形多自由度系の動特性の推定,” 土木学会論文集, 第344号 / I -1, pp.289~298.
- 星谷 勝・斎藤 悦郎(1984 b). “常時微動記録を用いたEK-WGI法による建物の動特性の推定,” 土木学会論文集, 第350号 / I -2, pp.263~270.
- 堀内 孝英・川村 国夫(1977). “信頼性設計のための土質の統計的性質,” 土と基礎, Vol. 25, No. 11, pp.11~18.
- 本城 勇介・坂口 修司・森嶋 章(1987 a). “造成工事における残留不同沈下量の平面的予測,” 地盤工学におけるリスク評価手法に関するシンポジウム, I -4, pp.21~28.
- 本城 勇介・松永 正宏(1987 b). “土の締固め施工管理に関する一考察,” 地盤工学におけるリスク評価手法に関するシンポジウム, III-5, pp.109~116.
- 平野 文昭(1985). “広領域における透水量係数および非定常地下水頭の空間分布の推定に関する基礎的研究,” 九州大学学位論文.
- Ishii, K. and Suzuki, M. (1987). “Stochastic Finite Element Method for Slope Stability Analysis,” *Structural Safety*, Vol. 4, pp.111~129.
- Ishii, K. and Suzuki, M. (1989 b). “Stochastic Finite Element Analysis for Spatial Variations of Soil Properties Using Kriging Technique,” *The 5th International Conference of Structural Safety and Reliability (ICOSSAR)*.
- 石井清(1988). “構造信頼性設計法における最近の話題と問題点,” 機械の研究, Vol. 40, No. 1, pp.9~14.
- Janbu, N. (1957). “Earth pressures and bearing capacity calculations by generalized procedure of slices,” *Proceeding of the 4th International Soil Mechanics and Foundations Engineering*, Vol. 2, pp.207~212.
- Journel, A. G. (1974). “Geostatistics for conditional simulation of ore bodies,” *Economic Geology*, Vol.69, pp.673~687.
- Journel, A. G. and Huijbregts, Ch. J. (1978). *Mining Geostatistics*, Academic Press.
- Kalman, R. E. and Bucy, R. S. (1961). “New results in linear filtering and prediction theory,” *Transaction of the ASME, Journal of Basic Engineering*, Vol. 83, pp.95~108.
- Kavanagh, K. and Clough, R. W.(1971). “Finite element applications in the characterization of elastic solids,” *International Journal of Solids Structures*, Vol. 7, pp.11~23.
- Kulatilake, P. H.S.W. and Miller, K. M. (1987). “A scheme for estimating the spatial variation of soil properties in three dimensions,” *Proceeding of the 5th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, Vancouver, pp.669~677.
- Kulhawy, F. H., Duncan, J. M. and Seed, H. B. (1969). “Finite element analysis of stresses and movements in embankments during construction,” *Report No. TE-69-4, Department of Civil Engineering, University of California Berkeley*.

- 北浦 勝・池本 敏和 (1988). “土質定数と地震動強さのばらつきを考慮した盛土の信頼性解析,” 土木学会論文集, 第400号/III-10, pp.123~130.
- 小林 正樹・松本 一明・土田 孝・石井 一郎 (1982). “乱さない粘土試料の品質に及ぼす調査者の影響,” 土質工学における確率・統計の応用に関するシンポジウム発表論文集, pp.1~4.
- 駒田 広也・金沢 紀一 (1975). “フィルダムの貯水池水位急降下時の非定常浸透流解析および安定解析,” 土木学会論文報告集, No.240, pp. 51~62.
- 駒田 広也 (1978). “フィルダムの浸透流に対する安定解析,” 電力土木, No.154
- Lambe, T. W. (1973). “Predictions in soil engineering,” *Géotechnique*, Vol. 23, No. 2, pp.149~202.
- Lau, K. C. and Kenney, T. C. (1984). “Horizontal drains to stabilize clay slopes,” *Canadian Geotechnical Journal*, Vol.21, pp. 241~249.
- Lumb, P. (1966). “The variability of natural soils,” *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. III, No. 2, pp.74~97.
- Lin, Y. K. (1967). *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, McGraw-Hill, New York, N.Y.
- Lo, K. Y. and Lee, C. F. (1973). “Stress analysis and slope stability in strain-softening materials,” *Géotechnique*, Vol. 23, No. 1, pp.1~11.
- Matheron, G. (1963). “Principle of geostatistics,” *Economic Geology*, Vol. 58, pp.1246~1266.
- Matsuo, M. and Kuroda, K. (1974). “Probabilistic approach to design of embankments,” *Soils and Foundations*, Vol. 14, No. 2, pp.1~16.
- Matsuo, M. and Kuroda, K. (1975). “Economical evaluation of embankment design,” *Soils and Foundations*, Vol. 15, No. 2, pp.31~46.
- Matsuo, M. and Asaoka, A. (1977). “Probability models of undrained strength of marine clay layer,” *Soils and Foundations*, Vol. 17, No. 3, pp.53~68.
- Matsuo, M. and Kawamura, K. (1980). “A design method of deep excavation in cohesive soil based on the reliability theory,” *Soils and Foundations*, Vol. 20, No. 1, pp.61~75.
- Matsuo, M. and Suzuki, H. (1983 a). “Use of charts for reliability-based design of embankments on saturated clay layer,” *Soils and Foundations*, Vol. 23, No. 3, pp.13~26.
- Matsuo, M. and Suzuki, H. (1983 b). “Study on reliability-based design of improvement of clay layer by sand compaction piles,” *Soils and Foundations*, Vol. 23, No. 3, pp.112~122.
- Meyerhof, G. G. (1970). “Safety factors in soil mechanics,” *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 7, No. 4, pp.349~355.
- Meyerhof, G. G. (1984). “Safety factors and limit states analysis in geotechnical engineering,” *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 21, pp.1~7.

- Mitchell, R. J., Madsen, J. D. and Crawford, T. W. (1984). "Hydraulic stabilization of earth structure," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 21, pp. 116~124.
- Mignolet, M. P., and Spanos, P. D. (1987). "Recursive simulation of stationary multivariate random processes – Part I," *Transaction of the ASME*, Vol. 54, pp.674~680.
- Morgenstern, N. and Price, V. E. (1965). "The analysis of the stability of general slip surfaces," *Géotechnique*, Vol. 15, No. 1, pp.79~93.
- Murakami, A. and Hasegawa, T. (1988). "Prediction of dam leakage with Kalman filtering and a safety assessment for dams," *Proceeding of the 2nd International Symposium on Field Measurements in Geomechanics*, Rotterdam, pp.1121~1130.
- Muskat, M. (1937). *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*, pp.524~530, McGRAW-HILL,
- 松尾 稔・黒田 勝彦 (1971). "盛土建設のための土質調査と盛土の安定性に関する研究," 土木学会論文報告集, No. 196, pp.75~86.
- 松尾 稔・黒田 勝彦 (1972 a). "盛土の破壊確率を考慮した土質調査の規模決定法について," 土木学会論文報告集, No. 198, pp.69~81.
- 松尾 稔・黒田 勝彦 (1972 b). "不飽和土の土質諸係数と破壊確率に関する一考察," 土木学会論文報告集, No. 208, pp.67~75.
- 松尾 稔・浅岡 顕 (1974). "沈下予測に関する統計的考察," 土木学会論文報告集, No. 225, pp.63~74.
- 松尾 稔・浅岡 顕 (1975). "多段載荷による盛土の最適設計に関する研究," 土木学会論文報告集, No. 240, pp.35~49.
- 松尾 稔・上野 誠 (1978). "斜面崩壊防止のための信頼性設計に関する研究," 土木学会論文報告集, No. 276, pp.77~87.
- 松尾 稔・上野 誠 (1979 a). "破壊確率を用いた自然斜面の崩壊予知に関する研究," 土木学会論文報告集, No. 281, pp.65~74.
- 松尾 稔・上野 誠 (1979 b). "構造物の耐用期間内に生起する外力の不確実性を考慮した信頼性設計法," 土木学会論文報告集, No. 289, pp.89~98.
- 松尾 稔・正垣 孝晴 (1982). "土質調査実施者やその手順の差が試験結果に与える影響の統計的分析," 土質工学における確率・統計の応用に関するシンポジウム発表論文集, pp.5~12.
- 松尾 稔・正垣 孝晴 (1984). "qu値に影響する数種のかく乱要因の分析," 土質工学論文報告集, Vol. 24, No. 3, pp.139~150.
- 松尾 稔・正垣 孝晴 (1986). "各種要因のquへの影響度に関する実験的研究," 土質工学論文報告集, Vol. 26, No. 2, pp.121~132.
- 村上 章・長谷川 高士 (1987). "Kalmanフィルター有限要素法による逆解析と観測節点配置," 土木学会論文集, 第388号 / III-8, pp.227~235.

- Naganuma, T., Deodatis, G., and Shinozuka, M. (1987). "ARMA Model for Two-Dimensional Processes," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, No. 2, pp.234~251.
- Nonveiller, E. (1965). "The stability analysis of slopes with a slip surface of general shape," *The 6th International Soil Mechanics and Foundations Engineering*, Vol. 2, pp.522.
- 中桐滋・久田俊明 (1985). 確率有限要素法入門, 培風館.
- Paloheimo, E. and Hannus, H. (1974). "Structural design based on weighted fractiles," *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 100, No. 7, pp.1367~1378.
- Parkinson, D. B. (1978). "Solution for second moment reliability index," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 104, No. 5, pp.1267~1275.
- Rackwitz, R. and Fiessler, B. (1978). "Structural reliability under combined random load sequences," *Computer and Structures*, Pergamon press, Vol. 9, pp.489~494.
- Ripley, B. D. (1981). *Spatial Statistics*, John Wiley and Sons.
- Rosenblatt, M. (1952). "Remarks on a multivariate transformation," *Annals of Mathematic Statistics*, Vol. 23, No. 3, pp.470~472.
- Rubinstein, R. Y. (1981). *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley and Sons, New York, N.Y.
- Samaras, E., Shinozuka, M., and Tsurui, A. (1985). "ARMA representation of random processes," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 111, No. 3, pp.449~461.
- Sarma, S. K. (1973). "Stability analysis of embankments and slopes," *Géotechnique*, Vol. 23, No. 3, pp.423~433.
- Schueller, G. I. and Stix, R. (1987). "A critical appraisal of methods to determine failure probabilities," *Structural Safety*, Vol. 4, pp.293~309.
- Shinozuka, M., and Jan, C-M. (1972). "Digital simulation of random processes and its applications," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 25, No. 1, pp.111~128.
- Shinozuka, M. (1972). "Probabilistic modeling of concrete structures," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 98, No. 6, pp.1433~1451.
- Shinozuka, M. (1974). "Digital simulation of random processes in engineering mechanics with the aid of the FFT technique," *Stochastic Problems in Mechanics*, edited by S.T. Ariaratnam and H.H.E. Leipholz, University of Waterloo Press, pp.277~286.
- Shinozuka, M. (1977). "Time and space domain analysis in the structural reliability assesment," *Proceedings of the 2nd International Conference on Structural Safety and Reliability*, Munich, pp.9~28.
- Shinozuka, M. (1983). "Basic analysis of structural safety," *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 109, No. 3, pp.721~740.

- Shinozuka, M. (1987). "Stochastic fields and their digital simulation," *Stochastic Methods in Structural Dynamics*, edited by G. I. Schuëller and M. Shinozuka, M. Nijhoff Publishers, Netherlands, pp.93~133.
- Spanos, P. D. (1983). "ARMA algorithms for ocean spectral modeling," *Journal of Energy Resources Technology*, ASME, Vol. 105, pp.300~309.
- Spanos, P. D., and Mignolet, M. P. (1987). "Recursive simulation of stationary multivariate random processes – Part II," *Transaction of the ASME*, Vol. 54, pp.681~687.
- Spencer, E. (1967). "A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces," *Géotechnique*, Vol. 17, No. 1, pp.11~26.
- Schultze, E. (1979). "Slope stability and the bearing capacity of shallow foundations on slope," *Proceeding of the 3rd International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, Sydney, pp.130~144.
- 斎藤 悦郎・古賀 重利・鎌田 正孝(1988). "拡張カルマンフィルター支援による山留め工事の計測管理手法," 土木学会論文集, 第391号 / VI-8, pp.115~124.
- 桜井 春輔・土居 康成(1983). "有限要素法による斜面の信頼性解析," 土木学会論文報告集, No.330, pp. 87~97.
- 桜井 春輔・武内 邦文(1983). "トンネル掘削時における変位計測結果の逆解析法," 土木学会論文報告集, No. 337, pp.137~145.
- 酒井 邦登・星谷 勝(1987). "カルマン・フィルターを用いたシールド位置の予測と制御," 土木学会論文集, 第385号 / VI-7, pp.69~78.
- 正垣 孝晴・日下部 治(1987). "地盤データーのばらつきの原因と一次処理," 土と基礎, Vol. 35, No. 1, pp.73~81.
- 鈴木 誠・石井 清(1985). "確率有限要素法による斜面安定解析," 土木学会論文集, 第364号 / III-4, pp.199~208.
- 鈴木 誠・石井 清(1986). "斜面安定対策工としての水平排水管設置の最適設計," 土木学会論文集, 第370号 / III-5, pp.209~216.
- 鈴木 誠・石井 清(1987 a) "確率有限要素法と要素分割," 土木学会論文集, 第368号 / I-8, pp.237~245.
- 鈴木 誠・石井 清(1987 b). "地盤工学への確率有限要素法の適用," 第1回 構造物の安全性および信頼性に関する国内シンポジウム (JCOSSAR), pp.435~440.
- 鈴木 誠・石井 清(1988) "土質定数の空間分布推定法を用いた確率有限要素法," 土木学会論文集, 第394号 / III-9, pp.97~104.
- 鈴木 誠・石井 清(1989 a). "拡張カルマン・フィルターによる土質定数の空間分布推定," 土木学会論文集, 第406号 / III-11, pp.71~78.
- 鈴木 誠・石井 清(1989 b). "確率論的斜面安定解析における一考察," 第24回土質工学研究発表会, E-6, 578, pp.1579~1580.
- 鈴木 誠・石井 清(1989 b). "材料物性値の空間分布推定法," システム最適化に関するシンポジウム, pp.85~92.

- Tang, W. H., Yuceman, M. S. and Ang, A. H-S. (1976). "Probability-based short term design of soil slopes," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 13, pp.201~215.
- Tang, W. H. (1979). "Probabilistic evaluation of penetration resistances," *Journal of the Geotechnical Engineering Division ASCE*, Vol. 105, No. 10, pp.1173~1191.
- 高田 毅士 (1989). "局所積分の概念を用いた確率有限要素法," 日本建築学会構造系論文報告集, 第399号, pp.49~57.
- 辰巳 安良・田中 芳行・高田 博行・榑 信親 (1984). "確率有限要素法による防波堤の信頼性解析," 第19回土質工学研究発表会, pp. 897~900.
- 辰巳安良・鈴木善雄 (1986). "確率有限要素法による護岸の信頼性設計の試み," 土木学会論文集, No. 376/III-6, pp.49~58.
- 長 尚 (1986). " 相関がある場合の全確率分布安全性指標," 構造工学論文集, Vol. 32A, pp.485~494.
- 津田孝夫 (1977). モンテカルロ法とシミュレーション 改訂版, 培風館.
- 溜幸生・桜井春輔 (1988). "確率有限要素法における破壊確率計算法の提案," 土木学会論文集, No. 400 / III-10, pp.225~231.
- 土田 孝・小林 正樹・菊池 喜昭 (1986). "土質調査結果に及ぼす人為的要因の影響," 港湾技術資料, No.546.
- 土田 孝・小林 正樹・山川 匠・平良 聡 (1988 a). "一軸圧縮強度のばらつきとその要因について," 港湾技術研究所報告, Vol. 27, No.1, pp.93~123.
- 土田 孝・田中 洋行・小林 正樹 (1988 b). "土質調査結果に及ぼす人為的要因の影響," 土と基礎, Vol. 36, No. 9, pp.49~54.
- 上田 貴夫・本城 勇介・波多野 敬・坂口 修司 (1986). "造成工事における残留沈下量の平面的予測および誤差," 土と基礎, Vol. 34, No. 6, pp.51~58.
- Vanmarcke, E. H. and Fuleihan, N. F. (1975). "Probabilistic prediction of levee settlement," *Proceeding of the 2nd International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, Aachen, pp.175~190.
- Vanmarcke, E.H. (1977) "Probabilistic modeling of soil profiles," *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol.103, No. 11, pp.1227~1246.
- Vanmarcke, E. H. and Grigoriu, M. (1980). "Stochastic finite element method," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE., Vol. 109, No. EM 5, pp.1203~1214.
- Vanmarcke, E., Shinozuka, M., Nakagiri, S., Schuëller, G. I. and Grigoriu, M. (1986). "Random fields and stochastic finite elements," *Structural Safety*, Vol. 3, pp.143~166.
- Vieira, S. R., Nielsen, D. R. and Biggar, J. W. (1983) "Spatial variability of field-measured infiltration rate," *Soil Science Society of America Journal*, Vol. 45, pp.1040~1048.
- Webster, R. and Burgess, T. M. (1980). "Optimal interpolation and isarithmic mapping of soil properties, 3, Changing drift and universal kriging," *Journal of Soil Science*, Vol. 31, pp.505~524.

- Wong, F. S. (1984). "Uncertainties in Dynamic Soil-Structure Interaction," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 110, No. 2, pp.308~324.
- Wong, F. S. (1985). "Slope reliability and response surface method," *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 111, No. 1, pp.32~53.
- Wright, S. G., Kulhawy, F. H. and Duncan, J. M. (1973). "Accuracy of equilibrium slope stability analysis," *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 99, No. 10, pp.783~791.
- Wu, T. H. and Kraft, L. M. (1970). "Safety analysis of slopes," *Journal of Soil Mechanics and Foundations Division*, ASCE, Vol. 96, No. 2, pp.609~630.
- Wu, T. H. (1974). "Uncertainty, safety, and decision in soil engineering," *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 100, No. GT3, pp.329~348.
- Wu, T. H., Thayer, W. B. and Lin, S. S. (1975). "Stability of embankment on clay," *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 101, No. GT9, pp.913~932.
- Yeh, W. W-G., Yoon, Y. S. and Lee, K. S. (1983). "Aquifer parameter identification with kriging and optimum parameterization," *Water Resources Research*, Vol. 19, No. 1, pp.225~233.
- Yamazaki, F. and Shinozuka, M. (1987). "Safety evaluation of stochastic systems by Monte Carlo simulation," *Proceedings of the 9th Structural Mechanics in Reactor Technology*, Vol. M, pp.63~68.
- Yamazaki, F. and Shinozuka, M. (1988). "Digital generation of non - gaussian stochastic fields," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, No. 7, pp.1183~1197.
- Yamazaki, F., and Shinozuka, M., and Dasgupta, G. (1988). "Neumann expansion for stochastic finite element analysis," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, No. 8, pp.1335~1354.
- 安江 朝光 (1984). "信頼性理論による斜面崩壊抑止力の設計," 土質工学会論文報告集, Vol. 24, No. 3, pp.168~176.
- Zienkiewicz, O. C., Humpheson, C. and Lewis, R. W. (1975). "Associated and non-associated viscoplasticity and plasticity in soil mechanics," *Géotechnique*, Vol. 25, No. 4, pp.671~689.

謝 辞

本論文は、著者が清水建設株式会社土木本部および大崎研究室で行った6年間の研究成果をまとめたものである。その間には、多くの方々に御指導と御鞭撻をいただいた。

本論文をまとめるに当たっては、多くの先生方の御指導を賜った。特に、名古屋工業大学教授 吉田彌智先生には、論文作成開始時点から今日に至るまで、有益な御指導と御教示をいただいた。また、同大学教授 松岡元先生には、名古屋工業大学在学中から御指導を受け、本論文をまとめる上で懇切丁寧な御指導と終始変わらぬ御激励をいただいた。同大学教授 長尾正志先生、同大学教授 小野徹郎先生からは、本論文に対する適切な御指導と御批判を賜った。さらに、名古屋大学工学部教授 浅岡顕先生には、本論文をまとめるに当たり有益な御意見、御指導をいただいた。ここに、諸先生方に厚く御礼を申し上げる次第である。

本論文をまとめる上で、共同研究者として清水建設株式会社大崎研究室主任研究員 石井清博士には、著者が研究を始めるときから今日に至るまで御協力、御助言、御指導をいただいた。また、著者の前勤務部署において、同社土木本部副本部長 井畔瑞人博士、設計部副部長 林博一氏からは、研究を始める機会を与えていただいた。さらに、同社副社長 大崎順彦博士、同社大崎研究室室長 山原浩博士、同室主席研究員 伊藤哲次博士には、本論文を作成するに当たり、種々の御配慮と御激励を賜った。ここに記して、謝意を表する次第である。