ロバスト・デッドビート制御に関する研究

１９９１年１月

加藤久雄

目次

第１章　　序論

１．１　デッドビート制御

制御の対象となるもののなかには、ロボットアームの制御等のように被制御量を目標値に速く正確に追従させることが要求されるものが少なくない。こうした要求にこたえるものがデッドビート制御である。以下でこれを説明する。

制御理論は一般に Figure 1.1.1 に示したような系を対象にして考察される。ここで

Ｐ：制御対象　　　　Ｋ：補償器

ｕ：操作量　　　　　ｙ：被制御量

ｖ：目標値　　　　　ｗ：外乱

である。制御目的としては様々なもの、例えば

・系全体の安定化

・出力を目標値に近ずけること

・外乱の系に対する影響の抑制

・制御対象の特性変動に対応できること

等があげられる。また、これらの前段階として与えられた制御対象の特性を数学的に記述すること、すなわち、モデル化がある。

本研究が考察の中心にすえるデッドビート制御は上であげた出力応答の改善に

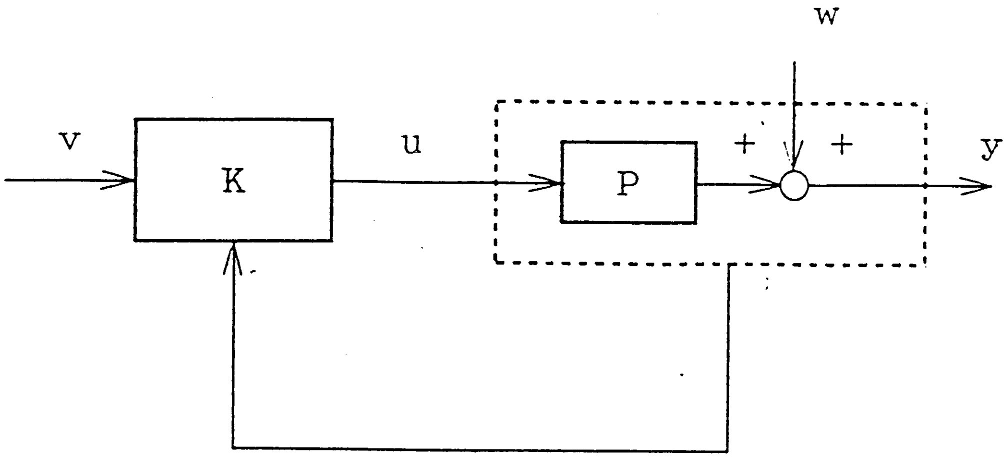

Figure 1.1.1　制御系の概念図

関するもので、出力の時間波形を望ましい値、つまり目標値にできるだけ速く近ずけようとするひとつの考え方である。制御理論は時間の面から大別すると、連続時間系と離散時間系に分けられるが、デッドビート制御は離散時間系固有の理論である。制御理論はまた、周波数領域で考察する伝達関数法と時間領域で考察する状態空間法にも分けられるが、本研究では伝達関数法のみが使われる。以下ではまず、デッドビート制御がどのようなものであるかを非常に簡単な数値例を用いて説明する。

伝達関数法は連続時間系の場合、時間 t の関数 f（t）をラプラス変換、つまり、

$$f(t) \mapsto F(s) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

によって s の関数に変換して扱う。例えば

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^n, & t \geqq 0 \end{cases} \qquad \text{ただし } n\text{：非負整数}$$

は

$$F(s) = 1/s^{n+1}$$

に、また

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ae^{-bt}, & t \geqq 0 \end{cases}$$

は、

$$F(s) = A/(s+b)$$

にといった形で変換される。そして、系に関しては、もし系が

$$y^{(n)}(t) = -a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_0$$

$$+ b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_0$$

$$\text{ここで } {}^{(n)} := d^n/dt^n$$

の形の定係数の微分方程式を満たすならば、この系の伝達関数は

$$P(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

となり、入力のラプラス変換U（s）と出力のラプラス変換Y（s）に対して

$$Y(s) = P(s)U(s)$$

の関係が満たされる。また、系が安定であることは有界入力にたいしては出力も有界であることと定義され、これは伝達関数の分母多項式の根が複素平面の閉右半平面に存在しないことと等価だということが知られている。

さて、ある系の伝達関数が

$$P(s) = \frac{3}{s+1}$$

であるとする。このとき、この系の出力を目標値

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geqq 0 \end{cases}$$

ラプラス変換すれば

$$V(s) = 1/s$$

にできるだけ近ずけたいとする。この場合他の制御目的を無視すれば（P（s）がすでに安定なので安定化のための議論はしなくてもよい）入力を

$$U(s) = \frac{s+1}{3s(s+r)}$$

とすれば出力は

$$Y(s) = \frac{r}{s(s+r)} \qquad \text{（ただし } r > 0 \text{）}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+r}$$

時間波形に変換すれば

$$y(t) = 1 - e^{-rt}, \quad t \geqq 0$$

となり、ｒを大きくする程ｙ（ｔ）の１への収束は速くなる。

けれども、ｒをいかに大きくしてもｙ（ｔ）は１に漸近的に近ずくのみで完全に一致することは有り得ない。入力を

$$U(s) = \frac{s+1}{3s}$$

とすれば確かにＹ（ｓ）＝１／ｓとなり目標値と完全に一致するわけだが、入力を時間波形を見ると

$$u(t) = \{\delta(t) + 1\}/3$$

となり実現不可能なデルタ関数を含んでしまう。

この例に限らず連続時間系では一般に完全な出力と目標値の一致は不可能なわけだが、実際の制御の現場では、目標値の近く、例えば、±１％以内とか±０.

５％以内とかに収束したらそれをもって一致したとすれば十分の場合も多いかもしれない。これに対し離散時間系においては、ある時刻以後は出力を目標値に完全に一致させることができる。これを次に示す。

離散時間系に対する伝達関数法においては、時間波形は時刻として整数値をとるもの、つまり、数列を扱いそれをＺ変換

$$f(k) \mapsto F(z) := \sum_{i=0}^{\infty} f(i)\, z^{-i}$$

によってｚの関数に変換して議論する。そして、系が

$$y(t) = -a_{n-1}y(t-1) - \cdots - a_0 y(t-n) + b_{n-1}u(t-1) + \cdots + b_0 u(t-n)$$

という差分方程式で記述されるとき、

$$P(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0}$$

がその系の（パルス）伝達関数として定義され、入力、出力に対し

$$Y(z) = P(z)\, U(z)$$

が満たされる。

連続時間系の場合と同様に非常に簡単な例で考える。ある系の伝達関数が

$$P(z) = \frac{3z^{-1}}{2 - z^{-1}}$$

とし、目標値を

$$v(k) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

あるいはｚ変換した形で示せば

$$V(z) = 1/(1 - z^{-1})$$

とする。入力を

$$U(z)=\frac{(2-z^{-1})(1-r)}{3(1-rz^{-1})(1-z^{-1})} \quad （ただし |r|<1）$$

とすれば

$$Y(z)=\frac{(1-r)z^{-1}}{(1-rz^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-rz^{-1}}$$

$$y(k)=1-r^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

となり、$r\neq 0$ならば連続時間の場合と同じように漸近的な収束となるが、$r=0$とすると

$$y(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ 1, & k=1,2,\cdots\end{cases}$$

となり時刻$k\geqq 1$では$y(k)$は$v(k)$に完全に一致することとなる。こうしたことは連続時間系では達成できないことであり、当然、速応性の観点からみれば非常に望ましいものと言えよう。

こうした制御、すなわち、有限時間で出力と目標値を完全に一致させる制御は有限時間整定制御あるいはデッドビート制御と呼ばれ、数々の研究成果が発表されてきている。本研究も、このデッドビート制御に関するものである。

1．2　従来の研究

この節では、従来の研究のうち主なものを要約する。

・デッドビート制御に関するもの

デッドビート制御の研究は、その初期においては伝達関数法の枠内で Jury[1], Tou[2], Raggazini and Franklin[3] 等によって行われた。けれども、それらは系の安定性に対する考慮が不十分であったため、単純な形のモデル・マッチングで議論を進めており、それゆえ今日では避けるべきこととして認識されている不安定な極・零消去をひきおこす可能性をもっていた。従って、これらの理論は実用には適さない。

その後、状態空間法が登場したためそれによるデッドビート研究が盛んになった。そこでは状態フィードバックにより制御対象の状態を任意の初期状態から有限時間で零へもってゆく、いわゆる、デッドビート・レギュレーション問題が主要な関心を集めた。状態空間法の利点は一入力一出力系も多入力多出力系もさほどかわりなく扱うことのできる点で、これにより多入力多出力系も含めた形の一般のデッドビート問題が解かれている（今井[7] 等）。

・二自由度安定化補償器

先にのべた通り、本研究では伝達関数法を用いる。その主要な理由は Desoer et al.[14] 等において Fractional representation approach、Vidyasagar [70] において Factorization approach と呼ばれる方法論の存在である。これは制御対象の伝達関数（必ずしも安定とは限らない）を安定でプロパな伝達関数の比の形であらわして考えるというものであり、これにより今日 Youla parametrizationと呼ばれているすべての安定化補償器のパラメータ表現が得られた。このパラメータ表現は Figure 1.2.1 に示した系（いわゆる一自由度系）のフィードバック補償器に対するものである。Vidyasagar[70] はこれを Figure 1.2.2 のいわゆる二自由度系に拡張してすべての安定化補償器のパラメータ表現を導出し

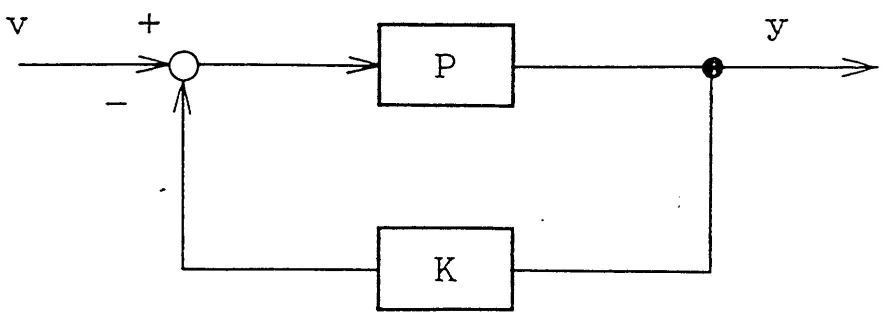

Figure 1.2.1　1自由度制御系

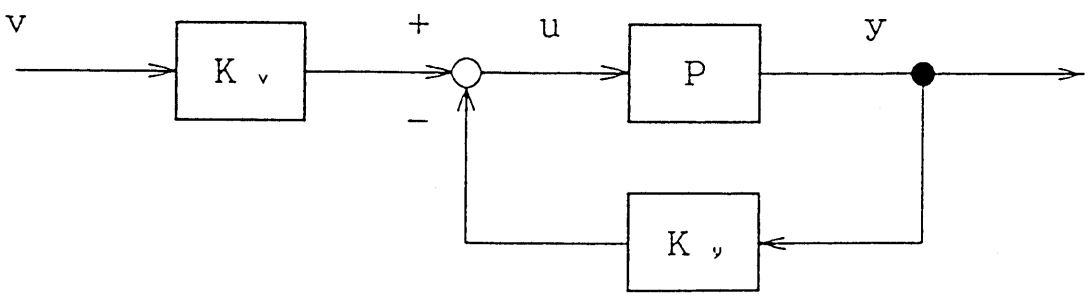

Figure 1.2.2　2自由度制御系

た。

この表現を出発点に本研究はなされる。Vidyasagar[70] によれば三自由度系はなく、それゆえこの表現が最も一般的なものである。

二自由度系の、一自由度系にはない利点は入出力特性と感度特性それぞれに対して一つずつの自由度が対応されることである。これによって本研究の提案する設計法も簡潔な形となっている。

・H_∞制御理論

制御理論は制御対象の数学的モデルが得られているという前提で話が始まるわけであるが、このモデルが制御対象そのものを忠実に表現しているとは限らない。線形近似して得たモデルは動作状況が変化すれば誤差が大きくなるだろうし、そもそも制御対象自体が変動することもあるだろう。したがって、それらに対して「強い（ロバストな）」制御系を設計することは実用可能な理論をたてるうえでおおきな要請となる。

このロバスト性改善へむけての研究者たちの関心はH_∞制御理論に集まり、これが１９８０年代の制御理論の中心的な課題となった。H_∞制御理論はそれまでのＬＱＧ理論にたいする批判として Zames[64] によって提唱されたものである。その主旨はＬＱＧ理論ではある特定の周波数において感度が悪くなることを防ぐことができないので、H_∞ノルムを評価関数とすることにより感度の周波数領域での最悪値を最小化しよう（いわゆる Mini-max)というものであった。

この問題はその後 Ball and Helton[66], Glover[67], Chu, Doyle, and Lee [68], Chang and Pearson[69] 等によって Nehari problem に帰着される場合には最適解が、そうでない場合には準最適解の存在条件が求められている。

また近年、Doyle 等が standard problem と呼ぶものにおいて扱われる拡大化

された制御対象の状態空間表現から考える方向に議論はむかっており（Zhou and Khargonekar[75], Glover and Doyle[76]）、さらにＬＱＧとの比較もなされている（Doyle, Glover, Khargonekar, and Francis[77]）。今後、状態空間法と伝達関数法の双方からこの問題へのアプローチが成されてゆくものとおもわれる。

本研究では、これらの結果が引用される。

・ロバスト・トラッキング

上で述べたロバスト性の考え方を本研究で考察の対象となる入出力関係でかんがえれば、モデル化誤差の影響が定常偏差（オフセット）として現れることがあげられる。モデル通りの制御対象に対してはデッドビートしていたものが僅かなモデル変動でデッドビートしないだけではなく、いつになっても目標値とはなれているというのは当然望ましくない。

こうした点にはロバスト・トラッキング（あるいはロバスト・サーボ）補償器の設計で対応できる。これはいいかえれば内部モデル原理を満たす補償器であり、この補償器のパラメータ表現が Sugie and Yoshikawa[61], Vidyasagar[70] 等によって導かれている。本研究では Vidyasagar[70] の表現が使われる。

・デッドビート制御（近年のもの）

本研究は伝達関数法の枠内でトラッキング問題を扱うのでこれに関連したものをあげる。

Kučera[21] はある与えられたクラスに属するすべての目標値に対してデッドビート制御を達成する二自由度補償器の設計法を提案している。目標値のクラスは分母多項式を共有するものの集合である。この設計法は多項式代数によるアプロ

ーチを採用しており、とても簡単である。

しかし、デッドビート制御に対しては、大きな二つの問題点

1）入出力の過渡応答が過大なものとなる。

2）系のロバスト性が低い。

が以前から指摘されているが、これらにたいする考慮が Kucera[21] にはなされていない。

吉田[47] は入力の急激な応答を緩和するためあるフィルタを前置する方法を提案している。ただし制御対象はステップ応答が単調増加のものに限定している。

また、瓜倉、長田[51] はステップ状の目標値に対し入力、出力共にデッドビートさせた上で偏差の２乗和を最小にする補償器の設計を考えている。

本研究に対して影響を与えたのは Zhao and Kimura[54] である。この文献では Youla parametrization を用いることによってデッドビートを達成する一自由度補償器のクラスを導出している。そして、その範囲内で感度の L_2 ノルムを最小化するという意味でロバスト性を最適にする設計法を提案した。しかし、一自由度系で考察したため、デッドビート段数の最短化とロバスト性の最適化が競合していた。

Zhao and Kimura[56] では、この点を二自由度系をつかうことによって解決している。そして Zhao and Kimura [55],[57] で一自由度、二自由度それぞれの多入力多出力系への拡張をかんがえている。

堀口等[53] は Zhao and Kimura[56] および本研究の方法論を用いて入出力過渡応答の改善を提案している。

１．３　本研究の概要と構成

まず次章では一入力一出力系に対して、前半では安定化補償器を用いた、後半ではロバスト・トラッキング補償器を用いたデッドビート制御法が考察される。

第3章では同じく一入力一出力系に対して、ロバスト・トラッキング補償器を用いた設計がかんがえられる。第2章と異なる点は、第2章ではRH_∞上で考えたのに対し、ここでは$R[z^{-1}]$上で考えたことである。それによって、得られた結果の表現が簡潔なものとなった。

第4章では一入力一出力系に対して、ロバスト・トラッキング補償器を用いることにより、出力のみならず入力もデッドビートさせる補償器の設計法を導く。ただし、目標値はステップ状のものに限定する。

第5章では第3章の考え方を多入力多出力系に拡張する。

最後に本論文で用いられる記号を以下で説明する。

$C :=$ すべての複素数の集合

$D := \{z \in C : |z| < 1\}$

$D^c := \{z \in C : |z| \geq 1\} \cup \{\infty\}$

$RH_\infty :=$ D^cに極をもたないすべての実係数有理式の集合

$RH_\infty(m\times n) :=$ 全要素がRH_∞に属するすべての$m\times n$行列の集合

$R[z^{-1}] :=$ z^{-1}に関するすべての実係数多項式の集合

任意の$a[z^{-1}] = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots \in R[z^{-1}] - \{0\}$に対し

$\deg(a[z^{-1}]) := \max\{i : a_i \neq 0\}$

(また $\deg(a[z^{-1}]) < 0 \Leftrightarrow a[z^{-1}] = 0$ とする)

任意の環Rとその要素a, bに対し

$a \mid b$ over R $:=$ a divides b over R

任意の$A \in R[z^{-1}] - \{0\}$に対し

$A = A^{+} A^{-}$,

where $A^{+}[z^{-1}] \neq 0$, for any $z \in D$

$A^{-}[z^{-1}] \neq 0$, for any $z \in D^{c}$.

任意の集合Xに対し

$aX + b := \{ax + b : x \in X\}$

任意の集合$A \subseteq R[z^{-1}]$に対し

g.c.d. $A :=$ a greatest common deviser of all elements of A over $R[z^{-1}]$

l.c.m. $A :=$ a least common multiple of all elements of A over $R[z^{-1}]$

$\mathbf{O} :=$ the region of zero elements in matrices

第２章　一入力一出力系の場合（ＲＨ$_\infty$アプローチ）[78]

２．１　はじめに

本章では，まず前半で Zhao and Kimura [54] で扱われたロバスト性を有する補償器の設計問題が２自由度制御系を用いて考察される．２自由度系の特性によりデッドビート制御とロバスト性最適化を完全に分離して議論することができ，ロバスト性最適化を行っても整定段数は最小のままでよいということが示される．

後半では，ロバスト・トラッキングの条件を付加した設計問題が考えられる．ロバスト・トラッキング系とは，プラントが変動したとしても系が内部安定である限り定常偏差が零になる系のことである．この問題は Zhao and Kimura [55] においては安定化補償器のパラメータ表現を用いて，ロバスト・トラッキングを拘束条件とした形で解かれている．それに対し本研究では Vidyasagar [70] が導出したロバスト・トラッキング補償器のパラメータ表現を用いることにより拘束条件なしの問題として扱い，簡潔に解く．そしてロバスト・トラッキング条件が課されない場合と同様，デッドビートとロバスト性最適化が分離して扱えることが示される．

本章の構成はつぎのとおりである．２．２節では，２自由度補償器によってデッドビート制御を達成するための条件を求める．２．３節では，感度のＬ$_2$ノルムを最小にするという意味において系のロバスト性が最適化される．２．４節では，

ロバスト・トラッキング補償器を用いて2．2、2．3節と同様の問題が考えられる．2．5節では，シミュレーションによって、この理論の有効性を立証する．

2．2 デッドビート制御

Fig. 2.2.1 に示された離散時間制御系を考える．$P(z)$は一入力一出力の制御対象，$K_v(z)$，$K_y(z)$は2自由度補償器，$v(z)$, $u(z)$, $y(z)$は目標値，制御対象の入力，出力を示す．

制御対象および補償器をRH_∞上で既約分解する．

$$P(z) = N(z)/M(z) \tag{2.2.1}$$

$$[K_v(z),\ K_y(z)] = [N_{Kv}(z), N_{Ky}(z)]/M_K(z) \tag{2.2.2}$$

このとき，$M(z)$と$N(z)$がRH_∞上で既約なので次式を満たす$X(z), Y(z) \in RH_\infty$が存在する．

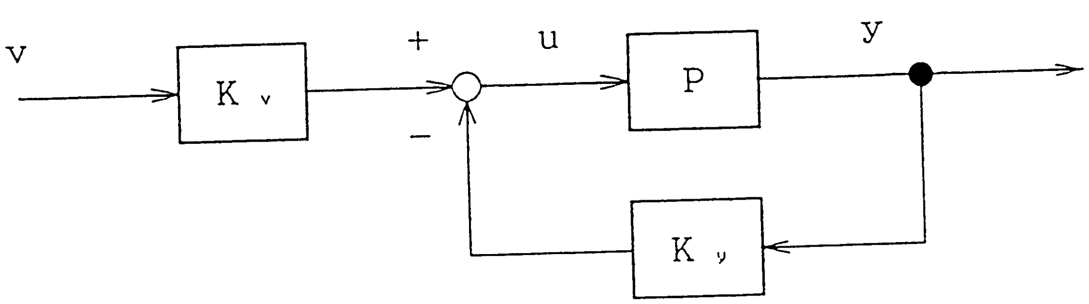

Figure 2.2.1 系の構成

$$M(z)X(z)+N(z)Y(z)=1 \tag{2.2.3}$$

Youla et al.[13] は、この$M(z)$, $N(z)$, $X(z)$, $Y(z)$を用いることによって系を安定化するフィードバック補償器のパラメータ表現を導出したが、Vidyasagar [70]はそこからさらに理論展開して Figure 2.2.1 の系を内部安定化する二自由度補償器のパラメータ表現をつぎのように求めた。

Theorem 2.2.1: $[K_v(z),\ K_y(z)]$ が Figure 2.2.1 の系を内部安定化するための必要十分条件は

$$\begin{aligned} M_K(z) &= X(z)-N(z)R(z) \\ N_{Ky}(z) &= Y(z)+M(z)R(z) \qquad \text{for some } Q,\ R\in RH_\infty \\ N_{Kv}(z) &= Q(z) \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

□

以下では，この補償器を用いてデッドビート制御を達成するための条件を求める。理論展開の手法は Zhao and Kimura [54]に沿っている.

この補償器を用いると$v(z)$から$y(z)$への伝達関数は次式で与えられる.

$$y(z)=N(z)Q(z)v(z)$$

よって$v(z)$のRH_∞上での既約分解を

$$v(z)=N_v(z)/M_v(z)$$

とすると，制御偏差$e(z):=v(z)-y(z)$は

$$e(z)=\frac{\{1-N(z)Q(z)\}N_v(z)}{M_v(z)} \tag{2.2.5}$$

となる．これを$Q(z)$について解けば次式を得る.

$$Q(z)=\frac{N_v(z)-M_v(z)e(z)}{N(z)N_v(z)} \tag{2.2.6}$$

さて、デッドビート制御を達成することは，ある時刻kに対して

$$\tilde{e}(i)=0, \qquad \text{for any } i>k$$

すなわち

$$e(z)=\tilde{e}(0)+\tilde{e}(1)z^{-1}+\cdots+\tilde{e}(k)z^{-k}\in R[z^{-1}] \qquad (2.2.7)$$

が満たされることである。ここで$\tilde{e}(i)$は時刻 i における偏差を示している。結局、内部安定の範囲でデッドビートが達成されるための必要十分条件は式(2.2.6)において$e(z)\in R[z^{-1}]$と$Q(z)\in RH_\infty$が満たされることと等価であることがわかった。

以下では，$Q(z)$がRH_∞に属するために$e(z)\in R[z^{-1}]$が満たすべき条件を求める．その条件を満たす$e(z)$を求めれば，それを式（2.2.6)に代入することにより補償器のパラメータの１つ$Q(z)$が決定される．また，その$Q(z)$を補償器に用いれば，$e(z)$が実現されるわけである。

まず，この問題を解くのに必要な lemma から示す.

Lemma 2.2.1:　$f(z)$, $g(z)$がRH_∞の元であるとし、$g(z)$が重複度m_iの有限な零点を$z_i$$(i=1,\cdots,n)$に，重複度$m_0$の零点を∞にもつとする。このとき、

$$Q(z)=f(z)/g(z)$$

がRH_∞に属するための必要十分条件は,

$$\frac{d^j f}{dz^j}(z_i)=0, \qquad j=0,\cdots,m_i-1;\ i=1,\cdots,n \qquad (2.2.8)$$

かつ

$$\frac{d^j f'}{dz^j}(0)=0, \qquad j=0,\cdots,m_0-1 \qquad (2.2.9)$$

ここで$f'(z):=f(1/z)$

が成り立つことである．式（2.2.8)は$Q(z)$の安定性，式(2.2.9)はプロパー性の条件である.

(Proof) $Q(z)$がプロパーになるためには$f(z)$の相対次数が$Q(z)$の相対次数以上でなければならない．相対次数がm_0だということは∞に重複度m_0の零点を持つことと等価である．これより式（2.2.9)がプロパー性の条件として導かれる.

つぎに$Q(z)$が安定になるための条件を求める．$Q(z)$の極になるのは$g(z)$の零点と$f(z)$の極であるが，$f(z)\in RH_\infty$より$f(z)$は不安定極をもたない．したがって$g(z)$の不安定零点を少なくともその重複度分は$f(z)$が零点としてもてば，その零点は消去され$Q(z)\in RH_\infty$となる．このことを示したのが式(2.2.8)である． □

この lemma を式（2.2.6)に適用して$e(z)$の満たすべき条件を求める．以下では簡単化のため，∞以外の零点はすべて重複度1と仮定する．この仮定を満たさない場合は，上の lemma を用いて修正すればよい．

Theorem 2.2.2:　制御対象のむだ時間がℓで，時刻$k=0$での目標値$\tilde{v}(0)$が非零であるとする．$N(z)N_v(z)$の有限な不安定零点の数をnとし，それを$z_1,\cdots,z_n$で表す．このとき，式（2.2.6)の$Q(z)$がRH_∞に属するための必要十分条件は式(2.2.7)の$e(z)$が以下の条件を満たすことである．

1）$\tilde{e}(i)=\tilde{v}(i),\qquad i=0,\cdots,\ \ell-1$ (2.2.10)

2）
$$\begin{bmatrix} 1 & z_1^{-1} & z_1^{-2}\cdots z_1^{-(k-\ell)} \\ 1 & z_2^{-1} & z_2^{-2}\cdots z_2^{-(k-\ell)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots \\ 1 & z_n^{-1} & z_n^{-2}\cdots z_n^{-(k-\ell)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{e}(\ell) \\ \tilde{e}(\ell+1) \\ \vdots \\ \tilde{e}(k) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \tag{2.2.11}$$

$$\alpha_i=\begin{cases} -\{\tilde{v}(0)z_i^{\ell}+\cdots+\tilde{v}(\ell-1)z_i\} \\ \qquad \text{for } z_i:\ N_v(z)\text{の零点} \\ v(z_i)\,z_i-\{\tilde{v}(0)z_i^{\ell}+\cdots+\tilde{v}(\ell-1)z_i\} \\ \qquad \text{for } z_i:\ N(z)\text{の零点} \end{cases}$$

ただし，$\tilde{v}(i)$は時刻iにおける目標値である．

（Proof）式(2.2.6)を

$$Q(z)=\frac{v(z)-e(z)}{N(z)v(z)}$$

と変形する．仮定より$n(z)v(z)$の相対次数はℓであるので，$Q(z)$がプロパーになる条件は分子をz^{-1}のべき乗に展開したとき定数項から$z^{1-\ell}$の係数までが零になることとなる．これより式(2.2.10)が導かれる．この結果は式(2.2.6)に式(2.2.9)を適用しても求められる．

つぎに$N(z)N_v(z)$の有限な不安定零点に注目する．Lemma 2.2.1 より，上で定義したすべてのz_iに対して

$$(N_v - M_v e)(z_i) = 0$$

が成り立てば$Q(z) \in RH_\infty$となる．上式は

$$e(z_i) = 0 \qquad \text{for } z_i:\ N_v(z)\text{の零点}$$

$$e(z_i) = v(z_i) \qquad \text{for } z_i:\ N(z)\text{の零点} \qquad (2.2.12)$$

と書き換えられる．この２式に式（2.2.7)を代入し，既に求められた$\hat{e}(0),\cdots,\hat{e}(\ell-1)$を代入し右辺へ移せば式（2.2.11）が得られる． □

Remark: 式(2.2.11)の左辺の行列は Vandermonde 行列であるので，仮定より常に full rank である．したがって，$k \geq n+\ell-1$ならば、常に$\hat{e}(\ell),\cdots,\hat{e}(k)$が存在する。これは最短デッドビート段数は$n+\ell$以下であることを示している。 □

式(2.2.12)からデッドビート補償器の存在条件が導出される．

Theorem 2.2.3: 目標値が$v(z) = N_v(z)/M_v(z)$のとき，制御対象$P(z) = N(z)/M(z)$に対してデッドビート補償器が存在するための必要十分条件は

$$(M_v(z),\ N(z)) : \text{coprime over } RH_\infty \qquad (2.2.13)$$

が満たされることである．これはまた，z_iを$v(z)$の不安定極とすると，すべてのz_iに対して

$$P(z_i) \neq 0$$

を満たすこととも等価である．

(Proof) z_iを$N(z)$の不安定零点とする．このとき，もし$M_v(z_i) = 0$ならば，

$N_v(z)$と$M_v(z)$の既約性より，$N_v(z_i)\neq 0$なので式(2.2.12)より

$$e(z_i)=v(z_i)=\infty$$

となる．これは$e(z)\in RH_\infty$に反する．したがって，

$$M_v(z_i)\neq 0$$

でなければならない．このことは$M_v(z)$と$N(z)$の既約性を表している．また，$M_v(z)$の不安定零点と$v(z)$の不安定極，$N(z)$の不安定零点と$P(z)$の不安定零点は同じものであることから，第2の等価な条件が得られる． □

つぎに，目標値が単位ステップである場合に，これまでの一般的な結果がどのように簡略化されるかを示す（証明略）．

Corollary 2.2.1: 目標値が単位ステップであるとする．制御対象のむだ時間をℓ，その有限な不安定零点の数をmとし，それを$z_1,\cdots,z_m$で表す．このとき，式（2.2.6)の$Q(z)$がRH_∞に属するための必要十分条件は$\{\tilde{e}(0),\cdots,\tilde{e}(k)\}$が以下の条件を満たすことである．

1) $\tilde{e}(0)=\tilde{e}(1)=\cdots=\tilde{e}(\ell-1)=1$

2) $\{\tilde{e}(\ell),\cdots,\tilde{e}(k)\}$は式(2.2.11)でnをmに置きかえた式を満たす．

　　ただし$b_i=z_i/(z_i-1)$ □

Corollary 2.2.2: 目標値が単位ステップであるとする．このとき，制御対象$P(z)$に対するデッドビート補償器が存在するための必要十分条件は次式が満たされることである．

$$P(1)\neq 0$$ □

上の二つのcorollaryを，1自由度系で設計された Zhao and Kimura [54] の結果と比較すると，2自由度系では最短デッドビート段数を制御対象の不安定極の数だけ小さくできることがわかる．しかし，Corollary 2.2.1 の条件式は1自由度系の場合と同一表現であり，Corollary 2.2.2 の存在条件も同じである．

以上，安定化補償器のパラメータ表現を用いて2自由度系を構成し，それがデ

ッドビート制御を達成するための条件を導いた．注目すべきことは，安定化補償器には２つの自由パラメータQ(z)，R(z)が含まれているが，これまでの議論の中ではQ(z)が使われたのみでR(z)は使われていないということである．

2．3　ロバスト性最適化

P(z)で制御対象のノミナルなモデルを，P′(z)で実際の制御対象を表すこととする．これは制御対象P(z)がP′(z)に変動したと考えてもよい．そして，制御対象がP(z)であるときの閉ループ伝達関数をT(z)，P′(z)であるときのそれをT′(z)で表す．このとき，

$$T(z) = \frac{P(z)\,K_v(z)}{1 + P(z)K_y(z)} \tag{2.3.1}$$

であり，T′(z)は上式でP(z)をP′(z)に置き換えたものである．このとき、感度関数は

$$\eta(z) := \frac{T'(z)-T(z)}{T'(z)} \Big/ \frac{P'(z)-P(z)}{P'(z)} \tag{2.3.2}$$

となる．このη(z)を「小さく」することにより，制御対象の変動，もしくはモデル化誤差による影響が小さくなるのでロバスト性が高められることになる．η(z)は簡単な計算により

$$\eta(z) = \frac{1}{1 + P(z)K_y(z)} \tag{2.3.3}$$

$$= M(z)\,\{X(z)-N(z)R(z)\} \tag{2.3.4}$$

となる．

本章では，η(z)の「大きさ」の評価を Zhao and Kimura[54] と同じく次式に示す周波数領域における二乗積分とする．

$$J := \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | \eta(e^{j\theta}) |^2 d\theta \right]^{1/2} \tag{2.3.6}$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | M(X-NR)(e^{j\theta}) |^2 d\theta \right]^{1/2} \tag{2.3.7}$$

これはL_2ノルムと呼ばれているものであり

$$J = \| M(X-NR) \|_2 \tag{2.3.8}$$

と表記する.

これによりロバスト性最適化問題は上式の評価関数Jを最小にする$R(z) \in RH_\infty$を求める問題に帰着されたわけである. この問題の解はVidyasagar[70]で既に与えられている. それを引用する.

Theorem 2.3.1: 式(2.3.8)の$J(R)$の最小値は

$$J^* = \| [M_0 X / N_i]_+ \|_2 \tag{2.3.9}$$

である. これを達成する$R(z)$は

1) $M(z)N(z)$が単位円上に零点をもたない場合は

$$R(z) = [M_0(z)X(z)/N_i(z)]_- / M_0(z)N_0(z) \tag{2.3.10}$$

となる.

2) $M(z)N(z)$が単位円上に零点をもつ場合にはJ^*を達成する$R(z) \in RH_\infty$は存在しないが, つぎのような最小化系列$\{R_\varepsilon(z)\}$が存在する.

$$R_\varepsilon(z) = [M_0(z)X(z)/N_i(z)]_- / \beta_\varepsilon(z) \tag{2.3.11}$$

ただし

$1/\beta_\varepsilon(z) \in RH_\infty$, for any $\varepsilon > 0$

$\beta_\varepsilon(z) \to M_0(z)N_0(z) \quad (\varepsilon \to 0^+)$

この$\{R_\varepsilon(z)\}$に対して

$J(R_\varepsilon) \to J^* \quad (\varepsilon \to 0^+)$

となる. □

上で、$N(z)=N_i(z)N_o(z)$, $M(z)=M_i(z)M_o(z)$はそれぞれN、Mのinner-outer factorization である。$[\cdot]_+$は部分分数展開したときの不安定部分、$[\cdot]_-$は安定部分を示している.

L_2ノルムに関してはつぎの関係が存在する。

$$\| \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i z^{-i} \|_2 = [\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^2]^{1/2}$$

本節では，前節で得たデッドビート制御系のロバスト性をL_2ノルムの意味で最適化する方法を示した．本節の議論の中では，前節とは逆に２つのパラメータのうちでR(z) のみが用いられ，Q(z) は用いられていない．これにより，デッドビート時間の最短化とロバスト性最適化が独立に行えることが示された.

2．4　ロバスト・トラッキング系

前節までの系は，プラントが変動したときに定常偏差が零になるという保証はない．たとえプラントが変動したとしても系が内部安定である限り，定常偏差が零になる系はロバスト・トラッキング系とよばれている.

Definition:　つぎの 1),2)を満たす系をロバスト・トラッキング系とよぶ.

1) 公称値制御対象に対して内部安定である.

2) 公称値制御対象及び，内部安定性が保たれる範囲で変動したすべての制御対象に対し定常偏差が零になる.　□

Vidyasagar[70]によれば、このように定義されたロバスト・トラッキング系を構成する２自由度補償器の存在条件，及び補償器のパラメータ表現はつぎの定理で与えられる.

Theorem 2.4.1:　公称値制御対象を$P(z)=N(z)/M(z)$，目標値を$v(z)=N_v(z)/M_v(z)$とする．このとき，２自由度ロバスト・トラッキング補償器が存

在するための必要十分条件は

$$(M_v(z),\ N(z)) : \text{coprime over } RH_\infty \tag{2.4.1}$$

が満たされることである．そして，これが満たされたとき $[K_v,\ K_y]$ が２自由度ロバスト・トラッキング補償器であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned}
M_K(z) &= X(z)-N(z)[V(z)X(z)+M_v(z)R'(z)] \\
N_{Ky}(z) &= Y(z)+M(z)[V(z)X(z)+M_v(z)R'(z)] \\
N_{Kv}(z) &= Y(z)+M(z)V(z)X(z)+M_v(z)Q'(z) \\
&\qquad \text{for some } Q'(z),\ R'(z)\in RH_\infty
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

である。上式で用いた変数はすべて RH_∞ に属し

$$M(z)X(z)+N(z)Y(z)=1 \tag{2.4.3}$$

$$M_v(z)U(z)+N(z)V(z)=1 \tag{2.4.4}$$

を満たすものである． □

この補償器を用いてデッドビート制御およびロバスト性最適化を行う．2.2，2.3節と同様の議論により行う．

まずデッドビートとなる条件を導く．式（2.2.6)に対応する式として

$$Q'(z)=\frac{M(z)N_v(z)U(z)X(z)-e(z)}{N(z)N_v(z)} \tag{2.4.5}$$

が得られる．これより Theorem 2.2.2 に対応する定理はつぎのとおりである．

Theorem 2.4.2: 制御対象のむだ時間が ℓ で，時刻 $k=0$ の目標値 $\tilde{v}(0)$は非零であるとする．また，$N(z)N_v(z)$の有限な不安定零点の数を n とし，それを $z_1,\cdots,z_n$ で表す．このとき，式（4.1)の $Q'(z)$が RH_∞ に属するための必要十分条件は，式（2.2.7)の $e(z)$が式(2.2.10),(2.2.11)を満たすことである．

（Proof）式（2.4.5)を

$$Q'(z)=\frac{[1-Y(z)N(z)][1-V(z)N(z)]v(z)-e(z)}{N(z)N_v(z)}$$

と変形することにより，Theorem 2.2.2 と同様に証明できる． □

デッドビート補償器の存在条件を求めれば Theorem 2.2.3 と同じものが得られるが，ここで注目すべきことは条件(2.2.14)と条件(2.4.1)が同じであることである．したがって，デッドビートが可能ならばロバスト・トラッキングも可能である．しかも上のtheorem によりロバスト・トラッキングの条件の下でもデッドビート時間も誤差系列も同じである．

つぎにロバスト性最適化を行う．式（2.3.3)の$\eta(z)$に式(2.4.2)を代入すると

$$\eta(z)=M(z)[X(z)-N(z)\{V(z)X(z)+M_v(z)R'(z)\}]$$

となる．したがって前節と同様，式（2.3.7)の評価関数を採用するとつぎの結果を得る．

Theorem 2.4.3:

$$J(R')=\|M\{X-N(VX+M_vR')\}\|_2$$
$$=\|MM_vUX-MM_vNR'\|_2 \qquad (2.4.6)$$

の最小値は

$$J^*=\|[M_oM_{vo}UX/N_i]_+\|_2 \qquad (2.4.7)$$

であり，これを達成する$R'(z)$は

1) $M(z)M_v(z)N(z)$が単位円上に零点を持たない場合には

$$R'(z)=[M_o(z)M_{vo}(z)U(z)X(z)/N_i(z)]_-/\{M_o(z)M_{vo}(z)N_o(z)\} \qquad (2.4.8)$$

となる．

2) $M(z)M_v(z)N(z)$が単位円上に零点を持つ場合にはJ^*を達成する$R'(z)\in RH_\infty$は存在しないが，つぎのような最小化系列$\{R'_\varepsilon(z)\}$が存在する．

$$R'_\varepsilon(z)=[M_o(z)M_{vo}(z)U(z)X(z)/N_i(z)]_-/\beta_\varepsilon(z) \qquad (4.9)$$

ただし　$1/\beta_\varepsilon(z)\in RH_\infty$, for any $\varepsilon>0$

$$\beta_\varepsilon(z)\rightarrow M_o(z)M_{vo}(z)N_o(z) \quad (\varepsilon\rightarrow 0^+)$$

この $\{R'_\varepsilon(z)\}$ に対して

$$J'(R'_\varepsilon) \to J'^{*} \qquad (\varepsilon \to 0^{+})$$

となる． □

式（2.3.8)と式（2.4.6)を比較すると，RはRH_∞の任意の元になり得るのに対し，$VX+M_vR'$はM_vが不安定零点を持つ場合にはRH_∞の部分集合の元にしかなることができない．したがって，一般に次式が成り立つ．

$$J'^{*} \geqq J^{*}$$

M_vが不安定零点をもたないときは等号が成立する．

また，前節までと同様，ロバスト・トラッキング系のクラスの中からコントローラを設計しても，デッドビートとロバスト性最適化を完全に分離して扱うことができた．

2．5 シミュレーション

1自由度補償法との比較を行うため，Zhao and Kimura[54] と同じ次式の制御対象と単位ステップの目標値を扱う．

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{b\ \exp(-\tau s)}{s-a}$$

ノミナルなパラメータ値は$T=0$，$a=2$，$b=1$，$\tau=0.2$ とする．この制御対象に0次ホールドを前置しサンプル周期$T_S=0.1$で離散化すると

$$P(z) = \frac{0.1107}{z^2(z-1.2214)}$$

となる．これのRH_∞上での既約分解を

$$N(z) = 0.1107z^{-3}$$

$$M(z) = 1-1.2214z^{-1}$$

とし，式（2.2.3)を満たす$X(z)$, $Y(z)$を

$$X(z) = 1+1.2214z^{-1}+1.4918z^{-2}$$

$$Y(z) = 16.4598$$

とする．このとき Corollary 2.2.1 より

$$e(z) = 1+z^{-1}+z^{-2} \tag{2.5.1}$$

$$Q(z) = 9.0334$$

が，Theorem 2.3.1 より

$$R(z) = \frac{13.4761z}{1-1.2214z}$$

$$J^{*} = 1.4472$$

が導出される．

ノミナルなモデルに対する入出力応答を示したのが Figure 2.5.1 である．これと Zhao and Kimura [54] を比較すると最短デッドビート段数に関しては本論文の方が1段小さいことがわかる．Figure 2.5.2, 2.5.3 は，制御対象の真のパラメータ値が Zhao and Kimura[54]と同様，$T=0.01$，$a=2.2$, $b=1.1$, $\tau=0.21$であるとした場合の応答であり，Figure 2.5.2 が式（4.6)ロバスト性最適の$R(z)$を用いたもの，Figure 2.5.3 がロバスト性非最適の$R(z)=8.14/(3.18+0.61z^{-1})$を用いたものである．これらとZhao and Kimura [54] を比較すると，Zhao and Kimura [54]では$k=4$のときに発散しているが，Figure 2.5.3 では約80段，Figure 2.5.2 では約17段で整定している．また，式(2.5.2)のJ^{*}の値は，本論文ではデッドビート段数3で達成されているが，Zhao and Kimura [54]では無限段数にしないと達成できない．

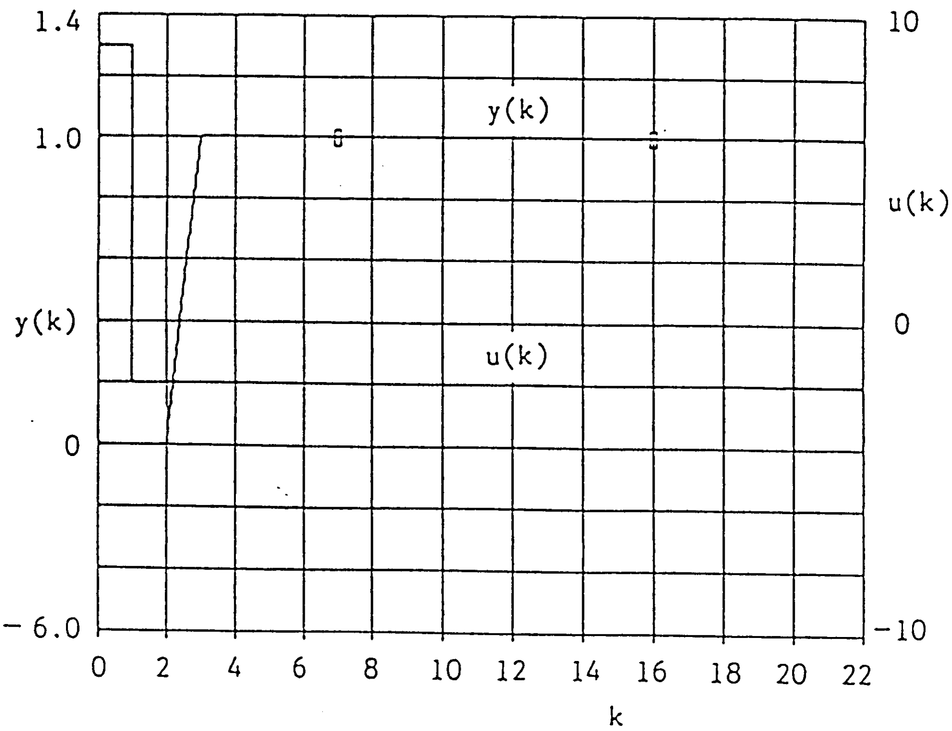

Figure 2.5.1 公称値制御対象に対する応答

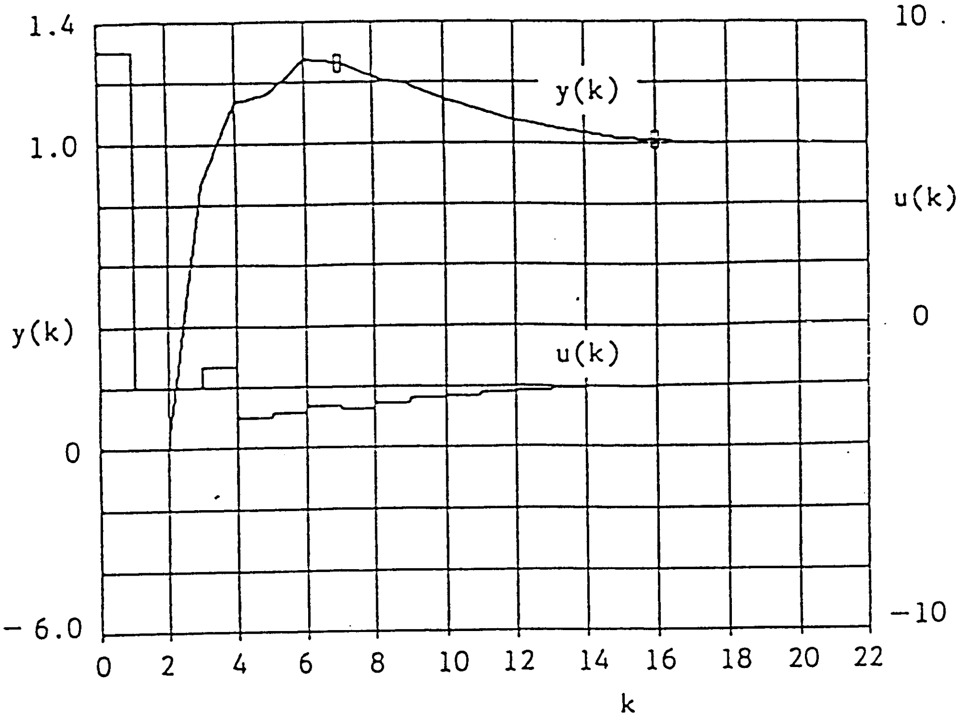

Figure 2.5.2　変動した制御対象に対する応答

（最適ロバスト性を有する補償器の場合）

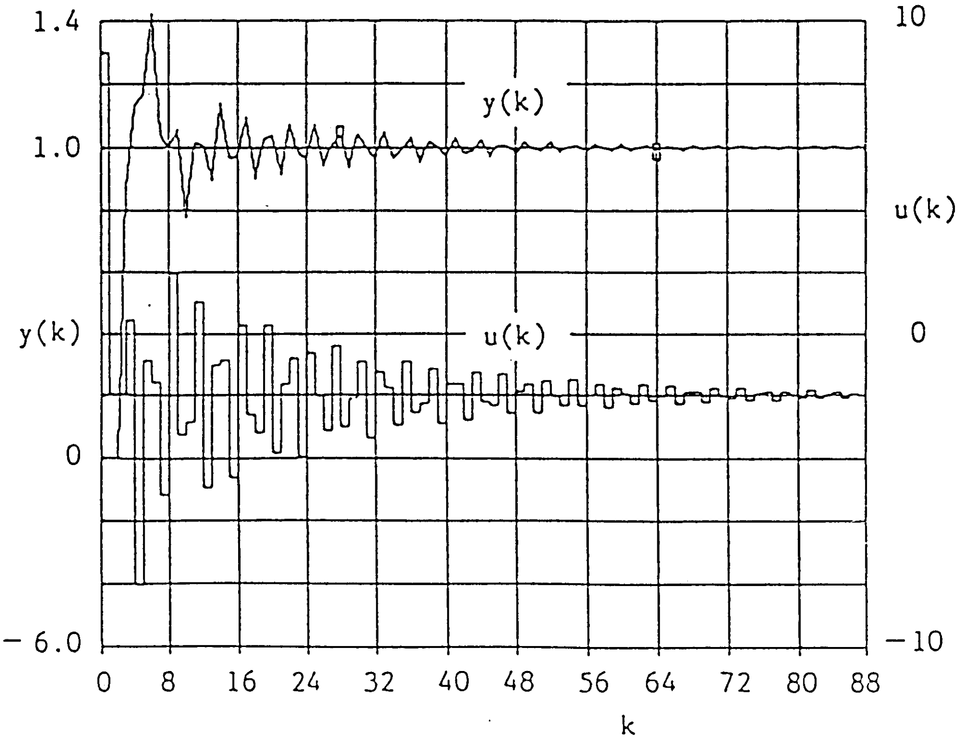

Figure 2.5.3　変動した制御対象に対する応答

（最適ロバスト性を有さない補償器の場合）

つぎに，同じプラントに対してロバスト・トラッキング補償器を設計する．まず，式（2.4.4)を満たすU(z)，V(z)を求めると

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$V(z) = 9.0334$$

となる．ロバスト・トラッキング補償器の場合もe(z)は式(2.5.1)で与えられるので，これらを式（2.4.5)に代入すると

$$Q'(z) = -16.4598\,(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

が導かれる．そしてTheorem 2.4.2 よりR′(z)，J′*を求めると，この場合$M_v(z)$が z＝1に零点を持つので最小化系列$R'_\varepsilon(z)$しか存在しない．

$$R'_\varepsilon(z) = \frac{24.5092z^3 + 4.4426z^2 + 5.4264z - 13.4760}{z(z-1+\varepsilon)(1-1.2214z)}$$

$$J^* = 1.4472$$

が結果である．

プラントの真のパラメータ値がT＝0.01，a＝2.1，b＝1.1，τ＝0.21であるとした場合の応答を示したのが Figure 2.5.4，2.5.5 である．Figure 2.5.4 が前と同じ補償器をもちいたもの，Figure 2.5.5 がロバスト・トラッキングを行ったものである．ただし，ε＝0.2 とした．これを見ると定常偏差がFig. 2.5.5 では零だが，Fig. 2.5.4 では零でないことがわかる．

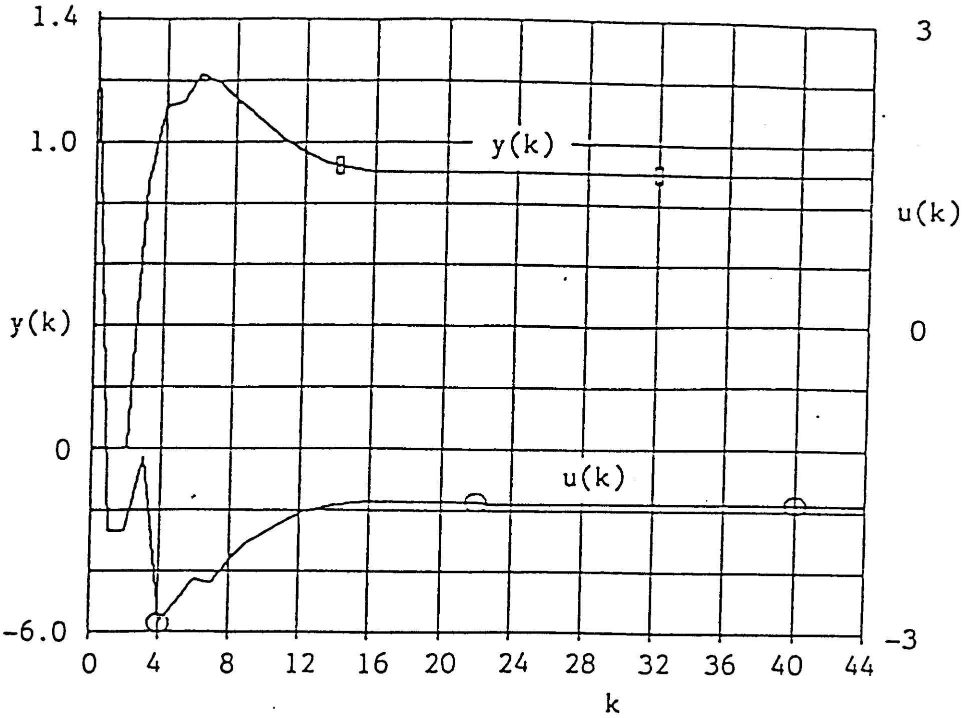

Figure 2.5.4　変動した制御対象に対する応答

（ロバスト・トラッキング補償器でない場合）

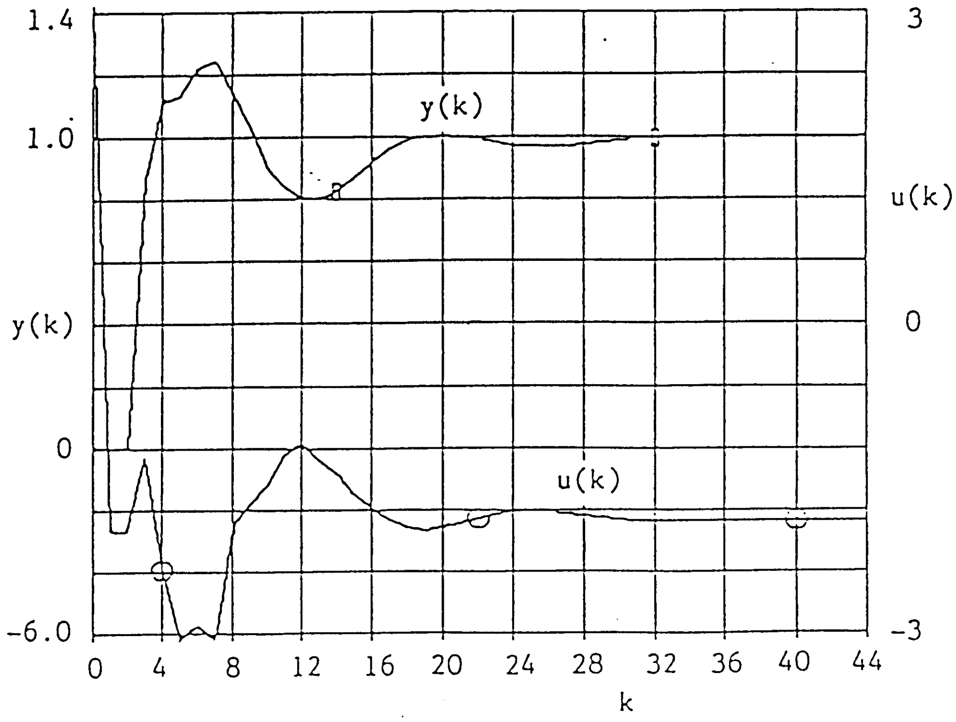

Figure 2.5.5　変動した制御対象に対する応答

（ロバスト・トラッキング補償器の場合）

2. 6 むすび

この章では Zhao and Kimura [54] で提案された1自由度補償法によるロバスト性を有するデッドビート補償器の設計法を，2自由度補償法へと拡張した．1自由度補償法と比較したときの本方法の利点は，デッドビート時間の最短化とロバスト性の最適化がまったく独立に実行することができる点である．したがって，1自由度系ではロバスト性を高めるために整定段数を犠牲にしなければならなかったのに対し，本研究では最短デッドビート段数で最適ロバスト性が実現できた．また，ロバスト・トラッキング条件を付加した場合の設計法も示した．

第3章　一入力一出力系の場合（R［z^{-1}］アプローチ）[80]

3．1　はじめに

本章では、一入力一出力のプラントに対するデッドビート理論をこれまでのものよりも簡明なかたちで展開させる。成果は次の三点である。

1．あるひとつの目標値に対してロバスト・トラッキングおよびデッドビートを達成するすべての補償器のパラメータ表現の導出

2．1．のクラスに属するすべての補償器がロバスト・トラッキングおよびデッドビートを達成する目標値のクラスの導出

3．複数の目標値に対してロバスト・トラッキングおよびデッドビートを達成する補償器のパラメータ表現の導出

これらの成果は多項式アプローチを用いたことにより得られた。1．については堀口等［53］も同様のかたちで議論しているが、本章では目標値の一般性とロバスト・トラッキング条件も考慮している。

上の三つは共に入出力特性に関するものであり、ひとつのパラメータにのみ依存するものである。したがって、二自由度補償器がもつもうひとつのパラメータは別の制御目的のために決定できるわけだが、本章では感度のH_∞ノルムを最小化するように決定した。

3．2　ロバスト・トラッキング

この節では、2．4節でも示した、本論文の基礎を成すロバスト・トラッキングについて、すでに得られている成果を述べる。

考察の対象とするのは、Figure 3.2.1 に示した一入力一出力離散時間系である。

前章と同様に$P(z)$，$v(z)$のRH_∞上での既約分解のひとつを、それぞれ

$$P(z)=N(z)/M(z) \tag{3.2.1}$$

$$v(z)=N_v(z)/M_v(z) \tag{3.2.2}$$

とする。$M(z)$と$N(z)$の既約性から、次式を満たす$X(z)$、$Y(z)\in RH_\infty$が存在する。

$$M(z)X(z)+N(z)Y(z)=1 \tag{3.2.3}$$

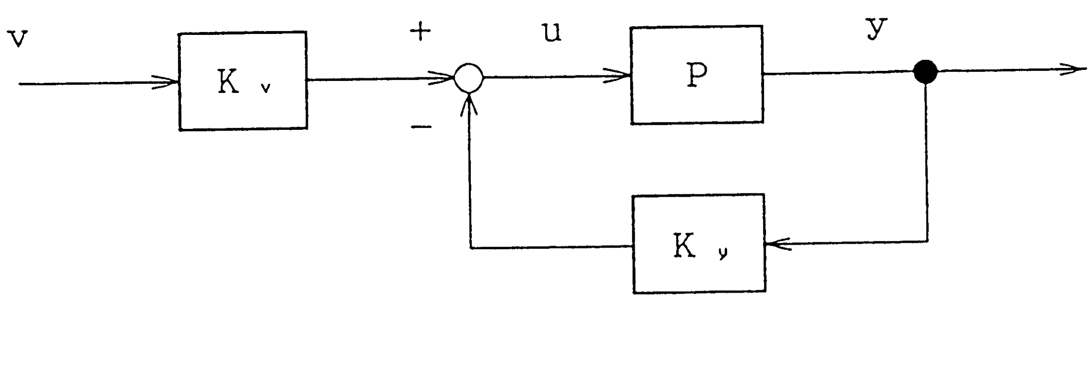

Figure 3.2.1 系の構成

また、［K_v, K_y］のＲＨ$_\infty$上での左既約分解を

$$[K_v,\ K_y] = M_K^{-1}[N_{Kv},\ N_{Ky}]$$

で示すこととする。

Vidyasagar [70] には、ロバスト・トラッキング補償器の存在条件とそのパラメータ表現があたえられている。これは本章の出発点となるものである。それを次に示す。

Theorem 3.2.1: （Ｐ，ｖ）に対するロバスト・トラッキング補償器が存在するための必要十分条件は

$$(M_v,\ N) : \text{coprime over } RH_\infty$$

であり、これが満たされたとき、次の３条件は同等である。

（i）［K_v, K_y］は（Ｐ，ｖ）に対するロバスト・トラッキング補償器である。

（ii）次の条件を満たす（M_K, N_{Kv}, N_{Ky}）$\in RH_\infty$ が存在する：

$$MM_K + NN_{Ky} = 1$$

$$M_v \mid M_K \quad \text{over } RH_\infty$$

$$M_v \mid (N_{Kv} - N_{Ky}) \quad \text{over } RH_\infty$$

（iii）次の条件を満たす（M_K, N_{Kv}, N_{Ky}）$\in RH_\infty$ が存在する：

$$M_K = X - N(VX + M_vR)$$

$$N_{Ky} = Y + M(VX + M_vR) \qquad \text{for some } Q,\ R \in RH_\infty$$

$$N_{Kv} = Y + MVX + M_vQ \tag{3.2.4}$$

ここでＵ（ｚ）はＲＨ$_\infty$に属しＶ（ｚ）$\in RH_\infty$とともに

$$M_vU + NV = 1 \tag{3.2.5}$$

を満たすものである。 □

本論文では、以降、M_vとＮはＲＨ$_\infty$上で既約であると仮定して、議論を進めることとする。

3．3　ロバスト・トラッキング・デッドビート

本章の第一の目標は、ロバスト・トラッキング条件を満たす補償器のなかでさらにデッドビートを達成するもののパラメータ表現を求めることである。本章では、このような補償器を特にロバスト・トラッキング・デッドビート補償器と呼ぶこととする。明確に定義すると次のようになる。

Definition:

(a) ロバスト・トラッキングを達成する。

(b) 公称値の制御対象P（z）にたいして、その出力を有限時間で目標値v（z）に一致させる。

を満たすものをロバスト・トラッキング・デッドビート（以後ＲＴＤと略す）補償器とよぶ。　□

さて、(3.2.4)式の補償器を用いると、出力と目標値の関係は

$$y = N N_{Kv} v$$

となる。よって、制御偏差は

$$\begin{aligned} e &:= v - y \\ &= (1 - N N_{Kv})\ v \qquad (3.3.1) \\ &= N_v U - N N_v (Q + U Y) \end{aligned}$$

となり、これをQについて解くと、

$$Q = \frac{N_v U - e}{N N_v} - U Y \qquad (3.3.2)$$

が得られる。この式は偏差と補償器のひとつのパラメータとの間の関係を示したものである。デッドビート制御とは

$$\tilde{e}(t) = 0 \quad , \text{ for any } t > k$$

もしくは

$$e(z)=\tilde{e}(0)+\tilde{e}(1)z^{-1}+\cdots\cdots+\tilde{e}(k)z^{-k}$$

を満たす非負整数kが存在することである。したがって、Zhao and Kimura[54]および前章では　式(3.2.7)において$Q\in RH_\infty$となるためにeが満たすべき条件を求めていた。

本論文では、$e\in R[z^{-1}]$、および$R[z^{-1}]\subseteq RH_\infty$を考慮して、議論全体を$RH_\infty$上から$R[z^{-1}]$上へ移すこととする。まず、制御対象、および目標値を$R[z^{-1}]$上で既約分解する。

$$P(z)=N[z^{-1}]/M[z^{-1}] \tag{3.3.3}$$

$$v(z)=N_v[z^{-1}]/M_v[z^{-1}] \tag{3.3.4}$$

このとき、(3.2.3)式の解X、Yも$R[z^{-1}]$の要素の中から求められる。さらに、Uも以下に示すとおり$R[z^{-1}]$の中から求められる。N, M_vがRH_∞上で既約、つまり、D^cに共通の零点をもたないことより、Nを

$$N[z^{-1}]=N^+[z^{-1}]N^-[z^{-1}]$$

$$N^+[z^{-1}]\neq 0 \quad , \text{ for any } z\in D$$

$$N^-[z^{-1}]\neq 0 \quad , \text{ for any } z\in D^c$$

と分解するとN^+, M_vは$R[z^{-1}]$上で既約となる。よって、

$$M_vU'+N^+V'=1$$

を満たすU', $V'\in R[z^{-1}]$が存在するので、

$$U=U'$$

$$V=V'/N^-$$

とすれば、これらは、(3.2.6)を満たす。したがって、$U\in R[z^{-1}]$とできる。

N_vもNと同様に

$$N_v[z^{-1}]=N_v^+[z^{-1}]N_v^-[z^{-1}]$$

$$N_v^+[z^{-1}]\neq 0 \quad , \text{ for any } z\in D$$

$$N_v^-[z^{-1}] \neq 0 \quad , \text{for any } z \in D^C$$

と分解すると、(3.3.2)式は

$$Q = \frac{1}{N^- N_v^-} \cdot \frac{N_v U - e}{N^+ N_v^+} - UY$$

となり、$1/(N^- N_v^-)$ が RH_∞ のユニットであることを考慮すれば、

$$Q \in RH_\infty \Leftrightarrow \frac{N_v U - e}{N^+ N_v^+} =: Q' \in R[z^{-1}]$$

という同等関係が導出される。この議論を進めると、次の定理が得られる。

Theorem 3.3.1: 二自由度補償器 $[K_v, K_y]$ が (P, v) に対するRTD補償器であるための必要十分条件は(3.3.1)式におけるQが

$$Q = \frac{Q'^* + \phi}{N^- N_v^-} - UY \quad , \text{for some } \phi \in R[z^{-1}] \tag{3.3.5}$$

を満たすことであり、この $[K_v, K_y]$ が達成するデッドビート偏差は

$$e = e^* - N^+ N_v^+ \phi \tag{3.3.6}$$

である。ここで e^* は $[K_v, K_y]$ が達成する最短デッドビート偏差を表しており

$$N^+ N_v^+ Q' + e = N_v U$$

の最小次数解であり、Q'^* とともに一意に求められる。最短デッドビート段数は

$$k_{min} = \deg(e^*) + 1 \leqq \deg(N^+ N_v^+)$$

を満たす。

(Proof) Diophantine 方程式の一般解表現および、解の最小次数の理論より自明。 □

Remark: (3.3.5), (3.3.6) 式のパラメータ表現は、その中に e^* を含む形のものであるが、当然、次の形のパラメータ表現も可能である。

$$e = N_v U - N^+ N_v^+ Q'$$

$$Q = \frac{Q'}{N^- N_v^-} - UY \quad \text{for some } Q' \in R[z^{-1}] \tag{3.3.7}$$

□

Kučera[21] ではあるクラスに属する目標値すべてに対してデッドビート特性を有する補償器の設計法が提案されている。本章の補償器は、あるひとつの目標値に対して設計されたわけであるが、果してこの補償器がＲＴＤ性を有する目標値のクラスはどうなるだろうか。それを示したのが次のtheoremである。

なお、以後の議論では制御対象はＰ（ｚ）に固定することとし、目標値ｖ（ｚ）に対するＲＴＤ補償器のクラスを$\mathcal{K}$（ｖ）で表すこととする。

Theorem 3.3.2: $\mathcal{K}$（ｖ）に属するすべてのＲＴＤ補償器がv_1（ｚ）に対してもＲＴＤ性を有するための必要十分条件は$v_1(z) \in \mathcal{W}(v)$、ただし

$$\mathcal{W}(v) := \left\{ \frac{N_v^-[z^{-1}]\, w[z^{-1}]}{M_v[z^{-1}]} : w[z^{-1}] \in R[z^{-1}] \right\}$$

である。

(Proof)　ｖ（ｚ）に対してデッドビート偏差ｅ（ｚ）を達成するように設計されたＲＴＤ補償器（M_K, N_{Ky}, N_{Kv}）がv_1（ｚ）に対してe_1（ｚ）を達成するとすれば、（６）式より

$$e = (1 - N N_{Kv})\, v$$

$$e_1 = (1 - N N_{Kv})\, v_1$$

となるので、

$$\frac{e_1}{e} = \frac{v_1}{v}$$

よって、

$$e_1 = \frac{M_v}{M_{v1}} \frac{N_{v1}}{N_v}\, e$$

が得られる。(3.3.7)式で与えられた達成可能なｅ（ｚ）のクラスを

$$E := \{ N_v U - N^+ N_v^+ Q' : Q' \in R[z^{-1}] \}$$

と置くと、

$$N_v^+ \mid e, \quad \text{for any } e \in E$$

となり、また、(3.2.5)式より

$$(N_v^- U,\ N^+)\ :\ \text{coprime over } R[z^{-1}]$$

よって任意の$M_{v1} \in R[z^{-1}]$に対して,

$$(N_v^- U - N^+ Q',\ M_{v1} N_v^-)\ :\ \text{coprime over } R[z^{-1}]$$

$Q' \in R[z^{-1}]$が存在する。したがって結局、

$$e_1 \in R[z^{-1}], \quad \text{for any } e \in E$$

のための必要十分条件は

$$M_{v1} N_v^- \mid M_v N_{v1} \quad \text{over } R[z^{-1}]$$

となる。よって、

$$w := \frac{M_v N_{v1}}{M_{v1} N_v^-}$$

と置けば、

$$v_1 = \frac{N_v^- w}{M_v}$$

が得られる。これで、$\mathcal{K}(v)$に属するすべてのRTD補償器がデッドビート性を有する目標値のクラスが$\mathcal{W}(v)$であることが示された。

この$\mathcal{W}(v)$に属する任意の$v_1 = N_{v1} / M_{v1}$に対して

$$M_{v1} \mid M_v \qquad \text{over } RH_\infty$$

が成立することは明らかである。Theorem 3.2.1 より$v = N_v / M_v$に対して設計された任意のRTD補償器$(M_K,\ N_{Ky},\ N_{Kv})$は

$$M_v \mid M_K$$

$$M_v \mid (N_{Kv} - N_{Ky}) \qquad \text{ともに over } RH_\infty$$

を満たすので、結局、

$$M_{v1} \mid M_K$$

$$M_{v1} \mid (N_{Kv} - N_{Ky}) \qquad \text{ともに over } RH_\infty$$

が得られる。このことは、$\mathcal{V}$（v）に属する目標値に対してはロバスト・トラッキング性も保証されることを示している。 □

Remark: Kučera[21] で示された目標値のクラスは上のtheoremで示されたそれよりも大きいが、これはロバスト・トラッキング条件を考慮にいれていないことからきている。 □

Kučera[21]とおなじクラスを得るのは次のような場合である。

Corollary 3.3.1: $v = N_v / M_v$をDに零点をもたない目標値とする。このとき、このvに対して設計されたすべてのRTD補償器がv_1に対してもRTD性を有するための必要十分条件は

$$v_1 \in \left\{ \frac{w}{M_v} : w \in R[z^{-1}] \right\}$$

である。

（Proof） $N_v^- \in R$ よりTheorem 3.3.2から自明。 □

次の theorem と Theorem 3.3.2 から、$\mathcal{K}$（v）と$\mathcal{V}$（v）はある意味において双対であることがわかる。

Theorem 3.3.3: 補償器［K_v, K_y］が$\mathcal{V}$（v）に属するすべての目標値に対してRTD性を有するための必要十分条件は［K_v, K_y］$\in \mathcal{K}$（v）である。

（Proof） Theorem 3.3.2 の十分性の部分より［K_v, K_y］$\in \mathcal{K}$（v）ならば、すべての$v_1 \in \mathcal{V}$（v）にたいして［K_v, K_y］はRTD性を有する。

また、［K_v, K_y］$\notin \mathcal{K}$（v）ならば、vに対してRTD性を有さない。 □

3．4 複数目標値ロバスト・トラッキング・デッドビート

現実の制御状況において、複数個の目標値関数に対応することは有り得ること

だと考えられる。その際、あらかじめ目標値のクラスが決っているのであれば、目標値関数が変わるごとに補償器も替えるのではなく、ひとつの補償器で対応する方が得策である場合も多いだろう。本節では、この考え方のもとに、複数個の目標値関数に対してＲＴＤ性を有する補償器の設計を考えることとする。

目標値のクラス$\mathcal{W}_i$, ｉ＝１，２，……，ただし、包含関係

$$\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}_{i+1}, \quad \text{for any } i$$

を満たすものに対し、$\mathcal{W}_i$に属するすべての目標値に対してロバスト・デッドビート特性を有する補償器のクラスを$\mathcal{K}_i$とおく。このとき、$\mathcal{K}_{i+1}$に属する補償器ならば、$\mathcal{W}_{i+1}$の部分集合である$\mathcal{W}_i$に属する目標値すべてに対してＲＴＤ性を有さなければならないので

$$\mathcal{K}_i \supseteq \mathcal{K}_{i+1}, \quad \text{for any } i$$

の関係が満たされることになる。

この議論を前節における議論と組み合わせることにより、複数の目標値に対するＲＴＤ問題を解くことができるが、その前に、後で必要となる次の lemmaを与える。

Lemma 3.4.1:（A_i，B_i）を、既約な多項式の対とする。このとき

$$A_0 := \text{l.c.m.} \ \{A_1, \cdots, A_n\}$$

$$B_0 := \text{g.c.d.} \ \{B_1, \cdots, B_n\}$$

とすれば、

$$\frac{B_0}{A_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A_i} w_i \qquad (3.4.1)$$

を満たす多項式w_i（$i=1, \cdots, n$）が存在する。

（Proof） 次のような２ｎ個の多項式を定義する。

$$\overline{A}_i := \frac{A_0}{A_i}, \quad i=1, \cdots, n$$

$$\overline{B}_i := \frac{B_i}{B_0}, \quad i = 1, \cdots, n$$

このとき、

$$(\overline{A}_1, \cdots, \overline{A}_n) : \text{coprime} \tag{3.4.2}$$

$$(\overline{B}_1, \cdots, \overline{B}_n) : \text{coprime} \tag{3.4.3}$$

が成り立つのは明らかである。

さて、この lemma の証明には

$$(\overline{A}_1 \overline{B}_1, \cdots, \overline{A}_n \overline{B}_n) : \text{coprime}$$

が満たされることを示せば十分である。なぜならば、これが成立すれば

$$\overline{A}_1 \overline{B}_1 w_1 + \cdots + \overline{A}_n \overline{B}_n w_n = 1 \tag{3.4.5}$$

を満たす多項式 $w_1, \cdots, w_n$ が存在するので、この式の両辺に B_0 / A_0 をかけることにより(3.4.1)式が得られるからである。

(3.4.5)の証明は背理法を用いる、つまり、

$$L \mid \overline{A}_i \overline{B}_i, \quad i \tag{3.4.6}$$

を満たすような次数１の多項式Ｌが存在すると仮定して矛盾を導く。

$$I_A := \{ i : L \mid \overline{A}_i \}$$

$$I_B := \{ i : L \mid \overline{B}_i \}$$

と置くと、(3.4.6)より

$$I_A \cup I_B = I := \{1, \cdots, n\} \tag{3.4.7}$$

が、また、(3.4.2),(3.4.3)より

$$I - I_A \neq \phi \tag{3.4.8}$$

$$I - I_B \neq \phi$$

が満たされる。したがって(3.4.8)と、Ｌが A_0 に含まれる因子であることより

$$L \mid A_i, \quad \text{for any } i \in I - I_A \tag{3.4.9}$$

となり、また、$B_i = B_0 \bar{B}_i$, $I=1, \cdots, n$ より

$$L \mid B_i, \quad \text{for any } i \in I_B$$

(3.4.10)

となる。(3.4.7),(3.4.8)から

$$i \in I_B, \quad \text{for any } i \in I - I_A \qquad (3.4.11)$$

なので、(3.4.9),(3.4.10),(3.4.11)より結局

$$L \mid A_i, \ L \mid B_i, \quad \text{for any } i \in I - I_A$$

が得られる。これは

$$(A_i, B_i) : \text{coprime}, \quad \text{for any } i$$

に反する。 □

複数の目標値に対するＲＴＤ問題の解は次の theorem で与えられる。

Theorem 3.4.1: n 個の目標値 $v_1(z), \cdots, v_n(z)$ の $R[z^{-1}]$ 上での既約分解を

$$v_i = N_{vi} / M_{vi}, \quad i = 1, \cdots, n$$

とする。このとき、すべての v_i に対しＲＴＤ性を有する補償器のクラスは

$$v_0 = \frac{N_{v0}}{M_{v0}}$$

where

$$N_{v0} := \text{g.c.d.} \{N_{vi} : i = 1, \cdots, n\} \text{ over } R[z^{-1}]$$

$$M_{v0} := \text{l.c.m.} \{M_{vi} : i = 1, \cdots, n\} \text{ over } R[z^{-1}]$$

に対するＲＴＤ補償器のクラスに等しい。

(Proof) 次のような目標値の四つのクラスを定義する。

$$\mathcal{W}_1 := \{v_0\}$$

$$\mathcal{W}_2 := \{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$$

$$\mathcal{W}_3 := \{v_1, \cdots, v_n\}$$

$$\mathcal{W}_4 := \mathcal{W}(v_0) = \left\{ \frac{N_{v0}w}{M_{v0}} : w \in R[z^{-1}] \right\}$$

このとき、

$$\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_4$$

が満たされるのは自明である。したがって、$\mathcal{W}_i$に属するすべての目標値に対してＲＴＤ性を有する補償器のクラスを$\mathcal{K}_i$とすると

$$\mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{K}_2 \supseteq \mathcal{K}_4$$

となる。ここで、Theorem 3.3.3 より

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_4 = \mathcal{K}(v_0)$$

なので、結局

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}(v_0)$$

が得られる。よって、

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_3$$

が示されれば証明は終わるわけだが、これは、$v_1, \cdots, v_n$に対してＲＴＤ特性を有するための必要十分条件が、$v_0, \cdots, v_n$に対してそれを有することであることを示すことによってなされる。十分性は明らかなので必要性のみを示す。

$v_0(z)$の定義より、Lemma 3.4.1 を適用することによって次式を満たす$w_i \in R[z^{-1}]$が存在することがわかる。

$$v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n = v_0$$

一方、(3.3.1) 式より目標値$v_i(z)$に対する偏差を$e_i(z)$とすると、

$$e_i = (1 - NN_{Kv})v_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

である。よって仮定より

$$e_i \in R[z^{-1}], \quad i = 1, \cdots, n$$

なので

$$e_0 = (1 - NN_{Kv})\, v_0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (1 - NN_{Kv})\, v_i w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_i w_i$$

$$\in R\,[z^{-1}] \qquad \square$$

3．5　ロバスト性最適化

本論文では二自由度補償器を用いたことから、前節までで述べたデッドビート特性を得るために使われたパラメータの他に、もうひとつのパラメータが存在する。本節では、それをデッドビート制御の実用上の欠点とされていたロバスト性の低さを改善するよう設計する。ここで使われる方法論はハンケルノルム最小化問題として確立されているものである。

制御対象の公称値伝達関数をＰ（ｚ）とし、これがＰ′（ｚ）へと変動するとする。Figure 3.2.1 の系において制御対象がＰ（ｚ）のときのｖからｙへの伝達関数をＴ（ｚ）、Ｐ′（ｚ）のときのそれをＴ′（ｚ）とする。このとき、感度関数Ｓ（ｚ）は

$$S := \frac{T' - T}{T'} \Big/ \frac{P' - P}{P'}$$

$$= \frac{1}{1 + P K_y}$$

$$= M\,\{X - N\,(VX + M_v R)\}$$

となる。本論文ではロバスト性の指標としてこの感度関数のH_∞ノルム、つまり

$$J := \| S \|_\infty = \sup_{|z|=1} |S(z)|$$

を採用する。Francis [71] によるとこのノルムの下限値

$$J^{*} = \inf_{R \in RH_\infty} \| T_1 - T_2 R \|_\infty$$

ただし　$T_1 := MM_v UX$

$T_2 := MM_v N$

および、それを達成する $R\ (=: R^{*})$ は

$$T_2(z) \neq 0 \quad , \text{ for any } z : |z| = 1 \tag{3.5.1}$$

が満たされるとき、以下の手順によって求められる。

1）$z = (s+1)/(s-1)$ とする。

2）T_2 を inner-outer分解する。

$T_2 = T_{2i} T_{2o}$

3）$F := T_1 / T_{2i}$ を RH_∞ の要素と、それ以外に分解する。

$F(s) = F_1(s) + F_2(s)$

ただし、$F_1(-s)$, $F_2(s) \in RH_\infty$

4）F_1 の最小実現をもとめる。

$F_1 =: [A, B, C, 0]$

5）次の Lyapunov 方程式を解く。

$A L_c + L_c A^T = B B^T$

$A^T L_0 + L_0 A = C^T C$

6）$L_c L_0$ の最大固有値 λ^2（$\lambda \geqq 0$）とそれに対応する固有ベクトル ξ をもとめる。

7）$w_1 := [A, \xi, C, 0]$

$w_2 := [-A^T, L_0 \xi / \lambda, B^T, 0]$

8）$R^{*} := (F - \lambda w_1 / w_2) / T_{2o}$

9）$s = (z+1)/(z-1)$ とする。

このとき

$$J^* = \lambda$$

となる。(3.5.1)が満たされないときはT_{20}を

$$T_{20\varepsilon} : \text{a unit of } RH_\infty, \quad \text{for any } \varepsilon > 0$$

$$T_{20\varepsilon} \to T_{20} \quad (\varepsilon \to 0^+)$$

に置き換えることにより

$$J^*_\varepsilon \to J^* \quad (\varepsilon \to 0^+)$$

となる。

3.6 シミュレーション

本節では、前節までで述べた制御理論のシミュレーションをおこなう。制御対象は

$$P(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

で、各パラメータの公称値は

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0$$

とし、目標値は単位ステップとする。

$$v(z) = 1/(1 - z^{-1})$$

公称値の制御対象に対する結果は Figure 3.6.1 に示した。補償器は最短デッドビートを達成するように設計されており、1段でデッドビートしている。

制御対象の各パラメータが

$$a_1 = 2.6, \quad a_2 = 1.07,$$

$$b_1 = 2.0, \quad b_2 = 1.07, \quad b_3 = -0.05$$

にそれぞれ変動したときの結果が Figure 3.6.2 で示されている。

なお、この例の場合、3．5節で定義したT_2が

$$T_2 = \frac{(z+3)(z-1)(2z+1)}{z^4}$$

となり、(3.5.1)式を満たさないため

$$T_2 = \frac{(z+3)(z-(1-\varepsilon))(2z+1)}{z^4}$$

で、$\varepsilon = 0.05$として設計した。

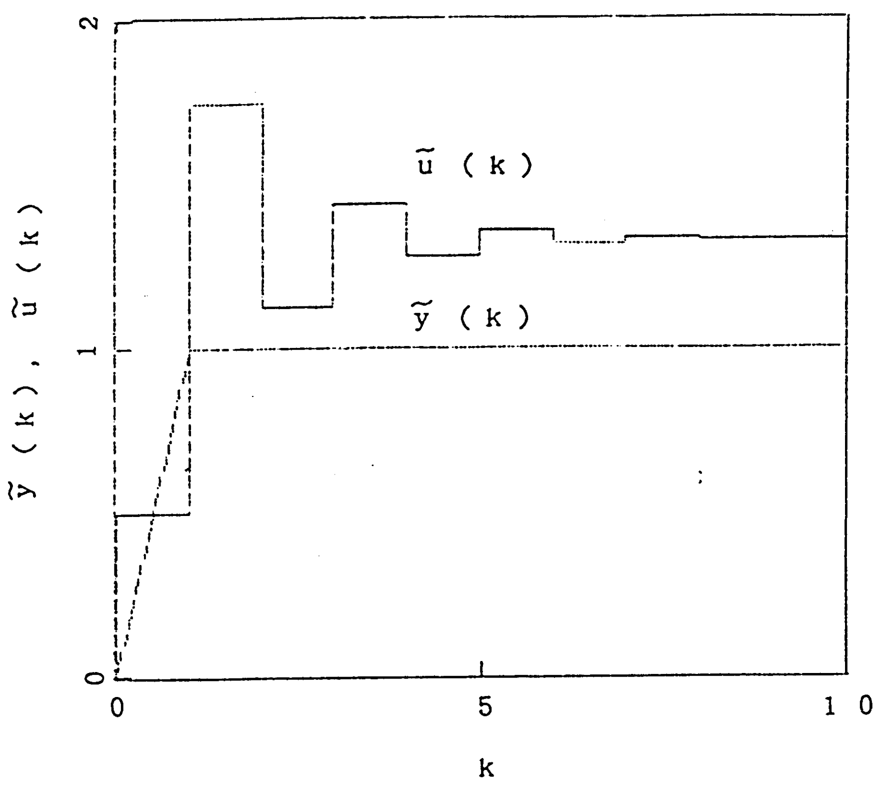

Figure 3.6.1　公称値制御対象に対する応答

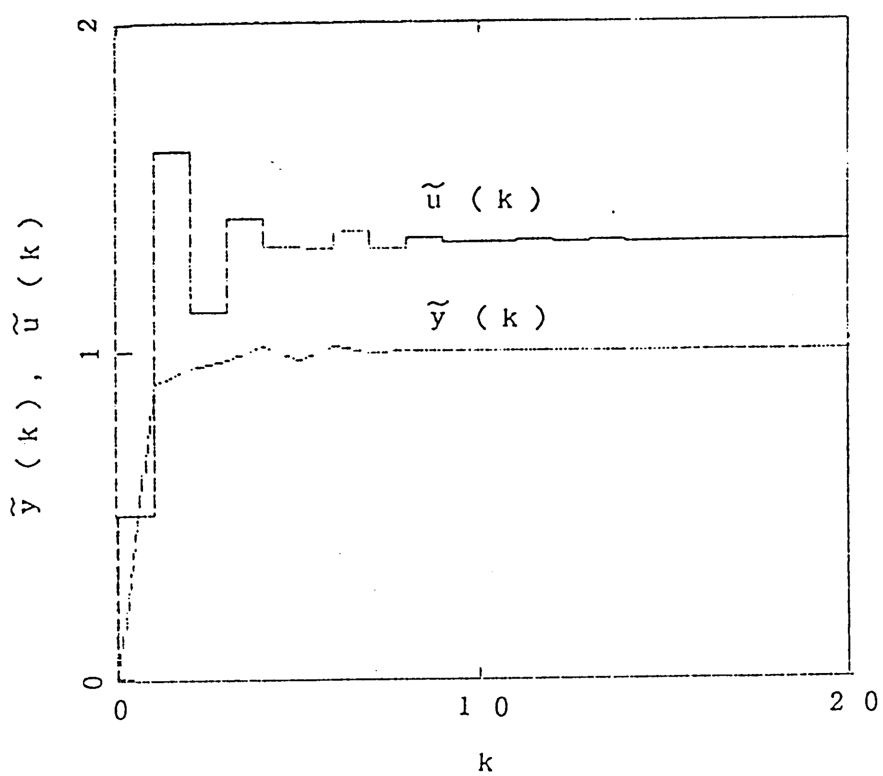

Figure 3.6.2　変動した制御対象に対する応答

3．7　むすび

本章では、ロバスト・トラッキング・デッドビート（ＲＴＤ）補償器のパラメータ表現を導出した。これは、多項式の Diophantine 方程式を解けばよいだけであり、Zhao and Kimura [56] および前章の設計法よりも簡潔になっている。さらに、このクラスに属する補償器がＲＴＤ性を有する目標値のクラスをもとめたが、それはロバスト・トラッキング条件を考慮していない Kučera [21] で示されたクラスとは異なっていた。

第４章　入出力デッドビート［81］

４．１　はじめに

デッドビート制御は有限時間で被制御量（制御対象の出力）を目標値に完全に一致させるもので、離散時間系における一分野としてこれまで多くの成果が発表されてきている。しかし、出力だけでなく操作量（制御対象の入力）もデッドビートさせるという実際の制御現場では要求され得ると考えられる制御法の研究はあまり多くはなく、デッドビート理論といえば出力のみのデッドビートであることが多いようである。確かに議論をレギュレータ問題に限れば、状態空間法の枠内での考察において状態を零にデッドビートさせることを目指すので状態の静的なフィードバックである入力も零にデッドビートするわけであるけれども、トラッキング（サーボ）問題においては入力のデッドビートはあまり主要な考察の対象にはなってきていないようである。Isermann［4］はステップ状目標値に対して入出力ともデッドビートする制御法を提案しているが、これは極－零点消去を引き起こすものなので制御対象を安定かつ最小位相のものに限定しなくてはならない。Kučera［21］は一般の目標値に対して制御偏差（＝目標値－出力）と入力（実際には内部モデル原理を達成するための前置補償器に対する入力）を零にデッドビートさせる簡単な補償器の設計法を提案しているが、この理論では過渡応答や感度特性の改善等実用上の問題が考慮されていない。また、瓜倉、長田[51]は

ステップの目標値に対して入出力のデッドビートと過渡応答の最適化を議論しているが、制御対象の変動あるいはモデル化誤差への対応を考えていない。

本章では、目標値はステップ状に限定したうえで、一入力一出力の制御対象にたいする入出力デッドビートについて考察していく。議論の進め方は Zhao and Kimura [54]およびその影響のもとに理論展開した堀口等[53]と同様で、伝達関数法の枠内でYoula et al. [13] の導出した安定化補償器のパラメータ表現を用いて行う。本論文では特にVidyasagar [70] がそこからさらに理論展開して得たロバスト・トラッキング補償器のパラメータ表現を用いることによって、わずかなプロセス変動による定常偏差の発生を防ぐことにする。また、二自由度系で考えることで入出力特性と感度特性をそれぞれ独立に設計することが可能となる。

本章では以下のことを求める。

- 出力デッドビートが入力デッドビートをも意味するための条件
- 入出力デッドビートとロバスト・トラッキングを達成するすべての補償器のパラメータ表現の導出
- それらの達成が維持されるすべての目標値のパラメータ表現

さらに本章では瓜倉、長田[51]と同様に入出力の偏差の二乗和を最小化することを考える。これらによって、デッドビート制御理論の実用上の問題点として常に指摘されてきた過大な入出力過渡応答が改善されることが期待される。

4．2　ロバスト・トラッキング

この節で述べることは3．2節で述べたことと同じであるが、理論の基礎となるものなので再録する。

ロバスト・トラッキング系とは

・公称値の制御対象にたいして系全体を内部安定にし、

・制御対象が変動したとしても、内部安定が保たれる範囲ならば、
　定常偏差が零になる。

を達成する系のことである。

考察の対象とするのは、Figure 4.2.1 に示した一入力一出力離散時間系である。制御対象 $P(z)$ に対し、二自由度補償器 $K_v(z)$, $K_y(z)$ を用いて制御する。$v(z)$、$u(z)$、$y(z)$ は、それぞれ目標値、制御対象の入力、出力である。

Youla et al. [13] の内部安定化補償器のパラメータ表現の文脈で議論するためにP(z), v(z) の RH_∞ 上での既約分解のひとつを、それぞれ

$$P(z) = N(z) / M(z) \tag{4.2.1}$$

$$v(z) = N_v(z) / M_v(z) \tag{4.2.2}$$

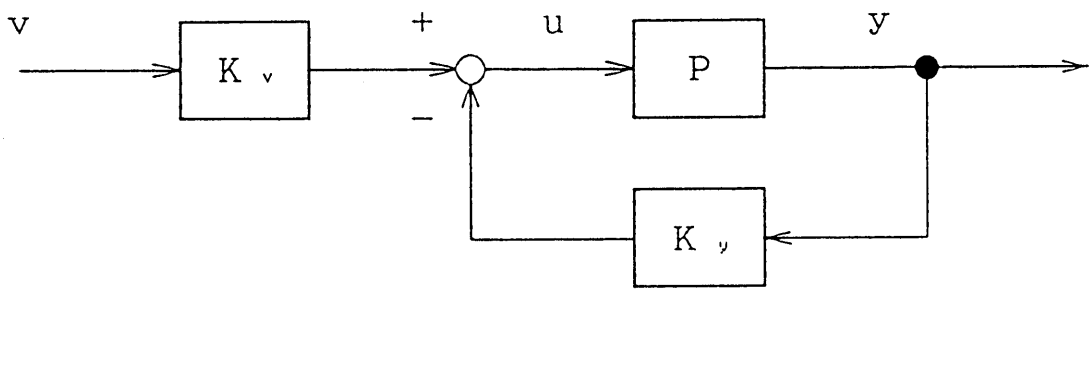

Figure 4.2.1 系の構成

とする。$M(z)$と$N(z)$の既約性から、次式を満たす$X(z)$、$Y(z)$ $\in RH_\infty$が存在する。

$$M(z)X(z)+N(z)Y(z)=1 \tag{4.2.3}$$

また、$[K_v,\ K_y]$のRH_∞上での左既約分解を

$$[K_v,\ K_y]=M_K^{-1}[N_{Kv},\ N_{Ky}]$$

で示すこととする。

Vidyasagar [70] には、ロバスト・トラッキング補償器の存在条件とそのパラメータ表現があたえられている。それを次に示す。

Theorem 4.2.1: $(P,\ v)$に対するロバスト・トラッキング補償器が存在するための必要十分条件は

$$(M_v,\ N):\text{coprime over } RH_\infty$$

であり、これが満たされたとき、次の3条件は等価である。

(i) $[K_v,\ K_y]$は$(P,\ v)$に対するロバスト・トラッキング補償器である。

(ii) 次の条件を満たす$(M_K,\ N_{Kv},\ N_{Ky})\in RH_\infty$が存在する：

$$MM_K+NN_{Ky}=1$$

$$M_v \mid M_K \quad \text{over } RH_\infty$$

$$M_v \mid (N_{Kv}-N_{Ky}) \quad \text{over } RH_\infty$$

(iii) 次の条件を満たす$(M_K,\ N_{Kv},\ N_{Ky})\in RH_\infty$が存在する：

$$\begin{aligned} M_K&=X-N(VX+M_vR)\\ N_{Ky}&=Y+M(VX+M_vR)\\ N_{Kv}&=Y+MVX+M_vQ \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

$$\text{for some } Q,\ R\in RH_\infty$$

ここで$U(z)$はRH_∞に属し$V(z)\in RH_\infty$とともに

$$M_vU+NV=1 \tag{4.2.5}$$

を満たすものである。 □

本章においても、以降、次のように仮定して、議論を進めることとする。

Assumption 1: (M_v, N) : coprime over RH_∞ □

4．3 入出力デッドビート

本章では、次の三つの制御目的を達成する補償器の設計について考察する。

（a）ロバスト・トラッキング

（b）出力のデッドビート

（c）入力のデッドビート

目標値は、ステップ状のものに限定する、つまり

$$v(z) \in \{\alpha/(1-z^{-1}) : \alpha \in R[z^{-1}]\}。 \quad (4.3.1)$$

また、簡単化のため次の仮定もなされる。

Assumption 2: 制御対象の初期状態は零であるとする。 □

この仮定により、次の仮定がなされるのは当然であろう。

Assumption 3:

$v(z) \neq 0$

$P(z) \neq 0$ □

したがって、(4.3.1) において条件$\alpha \neq 0$が加えられることになる。

さて、前章と同様に制御対象と目標値を$R[z^{-1}]$上で既約分解する。

$$P(z) = N[z^{-1}]/M[z^{-1}] \quad (4.3.2)$$

$$v(z) = N_v[z^{-1}]/M_v[z^{-1}] \quad (4.3.3)$$

このとき、(4.2.3) 式の解X，Yも$R[z^{-1}]$の要素の中から求められる。また、(4.3.1)より

$M_v = 1 - z^{-1}$

となり、したがってAssumption 1 より

$$N(1) \neq 0 \qquad (4.3.4)$$

となる。よって

(M_v, N) : coprime over $R[z^{-1}]$

となり、(4.2.5)式の解U, VもR $[z^{-1}]$ の中から求められる。

さて、(4.2.4)式の補償器を用いると、出力と目標値の関係は

$$y = N N_{Kv} v$$

となる。よって、制御偏差は

$$\begin{aligned} e &:= v - y \\ &= (1 - N N_{Kv})\ v \qquad (4.3.5) \\ &= M N_v U X - N N_v Q \end{aligned}$$

となり、これをQについて解くと、

$$\begin{aligned} Q &= \frac{M N_v U X - e}{N N_v} \\ &= \frac{N_v U - e}{N N_v} - U Y \qquad (4.3.6) \end{aligned}$$

となる。

次に入力に対するデッドビート偏差を

$$e_u(z) := \frac{u_0}{1 - z^{-1}} - u(z)$$

$$\text{where} \quad u_0 := \lim_{t \to \infty} u(t) = N_v[1] / P(1) \qquad (4.3.7)$$

で定義する。(4.3.4)式よりP (1) ≠ 0なので u_0は well-defined である。(4.2.4)式の補償器を用いると、目標値と入力の関係は

$$u = M N_{Kv} v$$

となり、したがって

$$e_u = \frac{u_0}{1-z^{-1}} - MN_{Kv}\frac{N_v}{1-z^{-1}} \qquad (4.3.8)$$

$$= \frac{u_0}{1-z^{-1}} - M\{Y+MVX+(1-z^{-1})Q\}\frac{N_v}{1-z^{-1}}$$

がえられる。これをQについて解けば次式が得られる。

$$Q = \frac{u_0 - MN_v(Y+MVX)-(1-z^{-1})e_u}{(1-z^{-1})MN_v} \qquad (4.3.9)$$

結局、入出力デッドビートを達成するための必要十分条件は、$Q\in RH_\infty$、e, $e_u\in R[z^{-1}]$ の範囲で式(4.3.6)と式(4.3.9)が同時に成立することだとわかった。この問題に対する解を考える前に出力デッドビートが入力デッドビートをも意味するための条件を求める。それは次の theorem で与えられる。

なお、以下では制御対象をP(z)に固定して議論することとし、、目標値 v(z)に対して制御目的(a),(b)を達成する二自由度補償器のクラスを $\mathcal{K}_0$[v(z)]で、制御目的(a),(b),(c)を達成するそれを $\mathcal{K}_{I0}$[v(z)]で表すことにする。

Theorem 4.3.1: $\mathcal{K}_0$[v(z)]に属する全ての二自由度補償器が制御目的(c)をも達成する、言い替えれば

$$\mathcal{K}_0[v(z)] = \mathcal{K}_{I0}[v(z)]$$

であるための必要十分条件は、制御対象がDに零点をもたないことである。

(Proof) 一般に、次の関係があるのは明かである。

$$\mathcal{K}_0[v(z)] \supseteq \mathcal{K}_{I0}[v(z)]$$

したがって、$\mathcal{K}_0$[v(z)]に属する全ての二自由度補償器が制御目的(c)をも達成すること、つまり

$$\mathcal{K}_0[v(z)] \subseteq \mathcal{K}_{I0}[v(z)]$$

は

$$\mathcal{K}_0[v(z)]=\mathcal{K}_{I0}[v(z)]$$

と等価である。

さて、(4.3.6),(4.3.9) から

$$\frac{MN_vUX-e}{NN_v}=\frac{u_0-MN_v(Y+MVX)-(1-z^{-1})e_u}{(1-z^{-1})MN_v}$$

(4.3.10)

が得られる。上式は変形することによって

$$\begin{aligned}(1-z^{-1})(Me-Ne_u)&=M^2N_vX\{(1-z^{-1})U+NV\}\\&\quad+MNN_vY-u_0N\\&=MN_v(MX+NY)-u_0N\\&=MN_v-u_0N\end{aligned}$$

よって

$$e_u=\frac{M\{(1-z^{-1})e-N_v\}+u_0N}{(1-z^{-1})N} \tag{4.3.11}$$

となる。前章の式(3.3.7)より実現可能な出力デッドビート偏差のクラスは

$$E:=\{N_vU-N^+N_v^+J:\quad J\in R[z^{-1}]\} \tag{4.3.12}$$

であり、これを用いると$\mathcal{K}_0[v(z)]$に属する全ての二自由度補償器が制御目的(c)をも達成することは

$$e_u\in R[z^{-1}],\quad \text{for any}\ e\in E$$

と表現できる。(4.3.7) より

$$M[1]N_v[1]-u_0N[1]=0 \tag{4.3.13}$$

よって

$$(1-z^{-1})\mid M\{(1-z^{-1})e-N_v\}+u_0N,\quad \text{for any}\ e\in R[z^{-1}]$$

となり、また

$(1-z^{-1},\ N)$: coprime over $R[z^{-1}]$

$(M,\ N)$: coprime over $R[z^{-1}]$

であるので $e_u \in R[z^{-1}]$ は

$$N \mid \{(1-z^{-1})e-N_v\}$$

と等価であることがわかる。(4.3.12) を代入すると

$$(1-z^{-1})e-N_v=N_v^+\{(1-z^{-1})(N_v^-U-N^+J)-N_v^-\}$$

$$=N^+N_v^+\{N^-N_v^-V-(1-z^{-1})J\}$$

となり、また

$(N^-N_v^-V,\ 1-z^{-1})$: coprime over $R[z^{-1}]$

より、

$$\text{g.c.d.}[(1-z^{-1})E-N_v]=N^+N_v^+$$

が得られるので結局

$$N \mid \{(1-z^{-1})e-N_v\}, \quad \text{for any } e\in E$$

であるための必要十分条件は

$$N^-[z^{-1}]\in R$$

となる。これは制御対象がDに零点をもたないことと等価である。 □

入出力デッドビートに関する主要な結果は次の theorem であたえられる。

Theorem 4.3.2: 補償器 $[K_v,\ K_y]$ が $\mathcal{K}_{10}[v(z)]$ に属するための必要十分条件は、(4.2.4)式において

$$Q=\frac{MN_vUX-e^*-NN_v^+J}{NN_v}, \qquad \text{for some } J\in R[z^{-1}] \tag{4.3.14}$$

が満たされることであり、この $[K_v,\ K_y]$ が達成する出力、入力のデッドビート偏差はそれぞれ

$$e=e^*+NN_v^+J \tag{4.3.15}$$

$$e_u = e_u^* + MN_v^+ J \tag{4.3.16}$$

となる。そして

$$e^* := e_0 + NF_0$$

$$e_u^* := e_{u0} + MF_0$$

はそれぞれ出力、入力の最短デッドビート偏差であり、出力、入力の最短デッドビート段数はそれぞれ

$$k_{min} := \deg(e^*) + 1 \leqq \deg(NN_v^+)$$

$$k_{umin} := \deg(e_u^*) + 1 \leqq \deg(MN_v^+)$$

を満たす。

ここで、e_0, e_{u0}, $F_0 \in R[z^{-1}]$ は以下で求められるものである。

(e_0, e_{u0}) : the minimal-degree solution pair for

$$Me_0 - Ne_{u0} = L \tag{4.3.17}$$

$$\text{where } L := \frac{MN_v - u_0 N}{1 - z^{-1}} \in R[z^{-1}]$$

(F_0, G_0) : the solution pair for

$$F_0 + N_v^+ G_0 = H \tag{4.3.18}$$

$$\text{where } H := \frac{N_v U - e_0}{N} \in R[z^{-1}]$$

such that $\deg(F_0)$ is minimal.

(Proof) まず、(4.3.6),(4.3.9) から得られる

$$\frac{MN_v UX - e}{NN_v} = \frac{u_0 - MN_v(Y + MVX) - (1 - z^{-1})e_u}{(1 - z^{-1})MN_v} \tag{4.3.19}$$

を満たすすべての e, $e_u \in R[z^{-1}]$ を求める。上式は変形することによって

$$(1 - z^{-1})(Me - Ne_u) = M^2 N_v X\{(1 - z^{-1})U + NV\}$$
$$+ MNN_v Y - u_0 N$$

$$= MN_v(MX+NY) - u_0 N$$

$$= MN_v - u_0 N$$

よって

$$Me - Ne_u = L \tag{4.3.20}$$

と簡単化される。式(4.3.13)より、$L \in R[z^{-1}]$となる。式(4.3.20)のDiophantine 方程式はMとNが$R[z^{-1}]$上で既約であることより、常に解e, $e_u \in R[z^{-1}]$が存在し、e, $e_u \in R[z^{-1}]$が解であるための必要十分条件は

$$e = e_0 + NF \tag{4.3.21}$$

$$e_u = e_{u0} + MF \tag{4.3.22}$$

を満たす$F \in R[z^{-1}]$が存在することである。

次に、式(4.3.21)であたえられるすべてのeのなかで

$$Q = \frac{MN_vUX - e}{NN_v} \in RH_\infty \tag{4.3.23}$$

を満たすものを求める。

$$\frac{MN_vUX - e}{NN_v} = \frac{1}{N^- N_v^-} \cdot \frac{N_vU - e}{N^+ N_v^+} - UY$$

より、(4.3.23)は

$$\frac{N_vU - e}{N^+ N_v^+} =: G \in R[z^{-1}]$$

と等価である。この式は(4.3.21)を代入し変形すると

$$NF + N^+ N_v^+ G = N_vU - e_0 \tag{4.3.24}$$

となる。

さて、

$$((1 - z^{-1})M,\ N) : \text{coprime over } R[z^{-1}]$$

より

$N \mid MN_v UX - e$,　for any e: solution for (4.3.19)

となるのは明かである。これは

$MN_v UX = N_v U - NN_v YX$

より

$N \mid N_v U - e$,　for any e: solution for (4.3.19)

と等価である。従って、

$$N \mid N_v U - e_0 \qquad (4.3.25)$$

が満たされる。よって、$G \in R[z^{-1}]$ が(4.3.24)の解ならばそれは

$$G = N^- G', \quad \text{for some } G' \in R[z^{-1}] \qquad (4.3.26)$$

となる。これを代入すると次式が得られる。

$F + N_v^+ G' = H$

ここで(4.3.25) より $H \in R[z^{-1}]$ となる。F, G′がこれの解であるための必要十分条件は

$$F = F_0 + N_v^+ J \qquad (4.3.27)$$

$$G' = G_0' - J \quad \text{for some } J \in R[z^{-1}]$$

である。(4.3.27)を(4.3.21),(4.3.22)に代入すれば(4.3.15),(4.3.16)が得られる。

最短デッドビート段数に関しては Diophantine 方程式の最小次数解の理論から得られる以下の一連の不等式

$\deg(F_0) \leq \deg(N_v^+) - 1$

$\deg(e_0) \leq \deg(N) - 1$

$\deg(e_{u0}) \leq \deg(M) - 1$

より

$\deg(e^*) = \deg(NF_0)$

$\qquad\qquad \leq \deg(NN_v^+) - 1$

$$\deg(e_u^*) = \deg(MF_0)$$
$$\leqq \deg(MN_v^+) - 1$$

となる。 □

Remark: 式(4.3.26)のＦの一般解の表現には、当然

$$F = H + N_v^+ J \qquad (4.3.28)$$

$$G' = J \qquad \text{for some } J \in R[z^{-1}] \qquad (4.3.29)$$

もあり、このとき、(4.3.15), (4.3.16)は

$$e = e_0 + NH + NN_v^+ J$$

$$e_u = e_{u0} + MH + MN_v^+ J$$

となる。 □

この theorem から次の corollary が得られる。

Corollary 4.3.1: 目標値 $v(z)$ が D^c に零点をもたないとする。このとき、補償器 $[K_v, K_y]$ が $\mathcal{K}_{10}[v(z)]$ に属するための必要十分条件は、式(4.2.4)において

$$Q = \frac{MN_vUX - e^* - NJ}{NN_v}, \quad \text{for some } J \in R[z^{-1}]$$

が満たされることであり、この $[K_v, K_y]$ が達成する出力入力のデッドビート偏差はそれぞれ

$$e = e^* + NJ$$

$$e_u = e_u^* + MJ$$

となる。ここで、e^*, e_u^* はそれぞれ出力、入力の最短デッドビート偏差であり、

$$Me^* - Ne_u^* = L$$

$$\text{where } L := \frac{MN_v - u_0 N}{1 - z^{-1}} \in R[z^{-1}]$$

から求められ、出力、入力の最短デッドビート段数はそれぞれ

$$k_{min} = \deg(e^*) + 1 \leq \deg(N)$$

$$k_{umin} = \deg(e_u^*) + 1 \leq \deg(M)$$

を満たす。

(Proof)　$N_v^+ \in R$と、それにより$F_\theta = 0$であることより Theorem 4.3.2 から自明。 □

前章と同様に上で求めた補償器がどの範囲の目標値に対して有効かを考えた結果が次の theorem である。

Theorem 4.3.3: $\mathcal{K}_{10}[v(z)] \subseteq \mathcal{K}_{10}[v_1(z)]$、つまり、 $\mathcal{K}_{10}[v(z)]$に属するすべての補償器が$v_1(z)$に対しても(a), (b), (c)を達成するための必要十分条件は

$$v_1 \in \mathcal{W}[v(z)] \qquad (4.3.30)$$

$$\text{where } \mathcal{W}[v(z)] := \{N_v^-[z^{-1}]\,w/(1-z^{-1}) : w \in R[z^{-1}]\}$$

である。

(Proof)　目標値$v(z)$に対して出力デッドビート偏差$e(z)$を達成するように設計された補償器$[K_v, K_y]$が

$$v_1(z) = N_{v1}/(1-z^{-1}), \quad N_{v1} \in RH_\infty$$

(v_1が不安定だとuのデッドビートが定義できないので$N_{v1} \in RH_\infty$)に対して出力デッドビート偏差$e_1(z)$を達成するとすれば、式(4.3.5)より

$$e = (1 - NN_{Kv})\,v$$

$$e_1 = (1 - NN_{Kv})\,v_1$$

となる。ここで、$[K_v, K_y]$の左既約分解を

$$[K_v, K_y] = M_K^{-1}[N_{Kv}, N_{Ky}]$$

とした。したがって、

$$\frac{e_1}{e}=\frac{v_1}{v}=\frac{N_{v1}}{N_v}$$

よって、

$$e_1=\frac{N_{v1}}{N_v}\ e \qquad (4.3.31)$$

が得られる。

次に、目標値 $v(z)$ に対して入力デッドビート偏差 $e_u(z)$ を達成するように設計された補償器 $[K_v,\ K_y]$ が $v_1(z)$ に対して入力デッドビート偏差 $e_{u1}(z)$ を達成するとすれば、式(4.3.8)より

$$e_u=\frac{u_0}{1-z^{-1}}\ -MN_{Kv}\ \frac{N_v}{1-z^{-1}}$$

$$e_{u1}=\frac{u_{01}}{1-z^{-1}}\ -MN_{Kv}\ \frac{N_{v1}}{1-z^{-1}}$$

$$\text{where}\ u_{01}:=N_{v1}[1]/P(1) \qquad (4.3.32)$$

となる。この二式より、

$$\frac{e_u-\dfrac{u_0}{1-z^{-1}}}{e_{u1}-\dfrac{u_{01}}{1-z^{-1}}}=\frac{N_v}{N_{v1}}$$

よって、

$$e_{u1}=\frac{u_{01}N_v+\{(1-z^{-1})\ e_u-u_0\}\ N_{v1}}{(1-z^{-1})\ N_v} \qquad (4.3.33)$$

が得られる。

さて、式(4.3.28),(4.3.29)で与えられた達成可能な $e(z)$, $e_u(z)$ のクラスを E, E_uと置くこととする。、つまり、

$$E:=\{e_0+NF:\ F\ \text{is a solution for (4.3.24)}\}$$

$$E_u:=\{e_{u0}+MF:\ F\ \text{is a solution for (4.3.24)}\}\text{。}$$

このとき、$\mathcal{K}[v(z)]$に属するすべての補償器$[K_v, K_y]$が$v_1(z)$に対しても入出力デッドビートを達成することは

$$e_1 \in R[z^{-1}], \quad \text{for any } e \in E \tag{4.3.34}$$

$$e_{u1} \in R[z^{-1}], \quad \text{for any } e_u \in E_u \tag{4.3.35}$$

と等価である。以下ではこれが満たされるための必要十分条件が(4.3.30)であることを示す。

まず、(4.3.34)から考える。式(4.3.24),(4.3.26),(4.3.29)より

$$e_0 + NF = N_v^+ (N_v^- U - NJ) \tag{4.3.36}$$

となる。

$$(U, N): \text{coprime over } R[z^{-1}]$$

であることより

$$\alpha := \text{g.c.d.} \{N, N_v^-\}$$

と置けば

$$\text{g.c.d. } E = N_v^+ \alpha$$

となる。

次に(4.3.35)を考える。(4.3.32)より

$$(u_{01} N_v - u_0 N_{v1})[1] = 0$$

である。よって

$$(1 - z^{-1}) \mid [u_{01} N_v + \{(1 - z^{-1}) e_u - u_0\} N_{v1}]$$

となる。したがって、$M_v = 1 - z^{-1}$より

$$(1 - z^{-1}, N_v): \text{coprime over } R[z^{-1}]$$

より

$$N_v \mid [u_{01} N_v + \{(1 - z^{-1}) e_u - u_0\} N_{v1}]$$

つまり

$$N_v \mid \{(1 - z^{-1}) e_u - u_0\} N_{v1}$$

が満たされることと$e_{u1} \in R[z^{-1}]$は等価である。

さて、(4.3.36)の両辺に$(1-z^{-1})M$をかけると

$$(1-z^{-1})M(e_0+NF)$$

$$=(1-z^{-1})M(N_vU-NN_v^+J)$$

$$=MN_v(1-NV)-(1-z^{-1})MNN_v^+J \tag{4.3.38}$$

よって

$$M\{(1-z^{-1})(e_0+NF)-N_v\}$$

$$=-MNN_v^+\{N_v^-V+(1-z^{-1})J\}$$

となる。一方、(4.3.17)を変形すると

$$M\{(1-z^{-1})e_0-N_v\}=N\{(1-z^{-1})e_{u0}-u_0\}$$

したがって

$$M\{(1-z^{-1})(e_0+NF)-N_v\}$$

$$=N\{(1-z^{-1})(e_{u0}+MF)-u_0\}$$

が得られる。これを(4.3.38)に代入すると

$$(1-z^{-1})(e_{u0}+MF)-u_0=-MN_v^+\{N_v^-V+(1-z^{-1})J\}$$

となる。

$(N_v^-V,\ 1-z^{-1})$: coprime over $R[z^{-1}]$

より

$$\text{g.c.d.}[(1-z^{-1})E_u-u_0]=MN_v^+ \tag{4.3.39}$$

となる。

さて、αの定義とM, Nの既約性より

$(M,\ \alpha)$: coprime over $R[z^{-1}]$

である。したがって、結局、(4.3.31),(4.3.33),(4.3.37),(4.3.39)より、(4.3.34),(4.3.35)が満たされるための必要十分条件は

$$\frac{N_{v1}}{N_v^-} =: w \in R\,[z^{-1}]$$

となる。これは(4.3.30)と等価である。

補償器 $(M_K,\ N_{Ky},\ N_{Kv})$ は $v(z) = N_v[z^{-1}]/(1-z^{-1})$ に対してロバスト・トラッキング性を保証するのであるから、Theorem 4.2.1 (ii)より、この $\mathcal{W}[v(z)]$ に属する任意の目標値に対してロバスト・トラッキング性が保証されることは自明である。 □

次の theorem と Theorem 4.3.3 から、$\mathcal{K}_{10}[v(z)]$ と $\mathcal{W}[v(z)]$ はある意味において双対であることがわかる。

Theorem 4.3.4: 補償器 $[K_v,\ K_y]$ が $\mathcal{W}[v(z)]$ に属するすべての目標値に対して (a), (b), (c) を達成するための必要十分条件は $[K_v,\ K_y] \in \mathcal{K}_{10}[v(z)]$ である。

(Proof) Theorem 4.3.3 の十分性の部分より $[K_v,\ K_y] \in \mathcal{K}_{10}[v(z)]$ ならば、すべての $v_1 \in \mathcal{W}[v(z)]$ に対して $[K_v,\ K_y]$ は (a), (b), (c) を達成する。

また、$[K_v,\ K_y] \notin \mathcal{K}_{10}[v(z)]$ ならば、$v(z)$ に対して (a), (b), (c) を達成しない。 □

4.4 過渡応答の改善

本節では、デッドビート制御の実用上の問題である過大な過渡応答を改善することを考察する。前節での議論より最短デッドビートは入力出力ともに同じ補償器によって達成され、このときの過渡応答は一意に決定されることになるわけであるが、非最短デッドビートを達成するように設計する際にはパラメータ $J[z^{-1}]$ のもつ自由度を利用することによって過渡応答を改善することができる。

ここでは、過渡応答に対する評価として、デッドビート段数をまずk以下と設定した上で

$$\Phi := \sum_{i=0}^{k} \{\alpha_i \tilde{e}(i)^2 + \beta_i \tilde{e}_u(i)^2\}$$

を用いる。ここでα_i, β_i ($i=0, 1, \cdots, k$) は重み係数で

$$\alpha_i,\ \beta_i > 0, \quad \text{for any } i$$

とする。kは当然

$$k \geqq m := \max\{\deg(MN_v^+),\ \deg(NN_v^+)\}$$

を満たす範囲で決定しなければならないのは当然である。

この評価関数の最小化はきわめて簡単であり以下の様に求められる。

まず、

$$e[z^{-1}] = \tilde{e}(0) + \tilde{e}(1)z^{-1} + \cdots + \tilde{e}(k)z^{-k}$$

$$e_u[z^{-1}] = \tilde{e}_u(0) + \tilde{e}_u(1)z^{-1} + \cdots + \tilde{e}_u(k)z^{-k}$$

$$e^*[z^{-1}] = \tilde{e}^*(0) + \tilde{e}^*(1)z^{-1} + \cdots + \tilde{e}^*(m-1)z^{-(m-1)}$$

$$e_u^*[z^{-1}] = \tilde{e}_u^*(0) + \tilde{e}_u^*(1)z^{-1} + \cdots + \tilde{e}_u^*(m-1)z^{-(m-1)}$$

$$(NN_v^+)[z^{-1}] = f(0) + f(1)z^{-1} + \cdots + f(m)z^{-m}$$

$$(MN_v^+)[z^{-1}] = f_u(0) + f_u(1)z^{-1} + \cdots + f_u(m)z^{-m}$$

$$J[z^{-1}] = j(0) + j(1)z^{-1} + \cdots + j(k-m)z^{-(k-m)}$$

と置き、次に

$$\mathbf{e} = [\tilde{e}(0),\ \tilde{e}(1),\ \cdots,\ \tilde{e}(k)]^T : (k+1)\times 1$$

$$\mathbf{e}_u = [\tilde{e}_u(0),\ \tilde{e}_u(1),\ \cdots,\ \tilde{e}_u(k)]^T : (k+1)\times 1$$

$$\mathbf{e}^* = [\tilde{e}^*(0),\ \tilde{e}^*(1),\ \cdots,\ \tilde{e}^*(k),\ 0,\ \cdots,\ 0]^T : (k+1)\times 1$$

$$\mathbf{e}_u^* = [\tilde{e}_u^*(0),\ \tilde{e}_u^*(1),\ \cdots,\ \tilde{e}_u^*(k),\ 0,\ \cdots,\ 0]^T : (k+1)\times 1$$

$$
F=\begin{bmatrix}
f(0) & & \mathbf{O}\\
f(1) & \ddots & \\
\vdots & \ddots & f(0)\\
\vdots & \ddots & f(1)\\
f(k) & & \vdots\\
 & \ddots & \vdots\\
\mathbf{O} & & f(k)
\end{bmatrix} : (k+1)\mathrm{x}(k-m+1)
$$

$$
F_u=\begin{bmatrix}
f_u(0) & & \mathbf{O}\\
f_u(1) & \ddots & \\
\vdots & \ddots & f_u(0)\\
\vdots & \ddots & f_u(1)\\
f_u(k) & & \vdots\\
 & \ddots & \vdots\\
\mathbf{O} & & f_u(k)
\end{bmatrix} : (k+1)\mathrm{x}(k-m+1)
$$

$$\mathbf{j}=[\,j(0),\ j(1),\ \cdots,\ j(k-m)\,]^{T}: (k-m+1)\mathrm{x}1$$

と置く。このとき、評価関数Φは

$$\Phi=\mathbf{e}^{T}A\,\mathbf{e}+\mathbf{e}^{T}B\,\mathbf{e}$$

$$=\mathbf{j}^{T}G_1\,\mathbf{j}+2\,\mathbf{g}_2{}^{T}\,\mathbf{j}+g_3$$

$$\text{where}\quad G_1:=F^{T}AF+F_u{}^{T}BF_u$$

$$\mathbf{g}_2:=F^{T}A\,\mathbf{e}^{*}+F_u{}^{T}B\,\mathbf{e}_u{}^{*}$$

$$g_3:=\mathbf{e}^{*T}A\,\mathbf{e}^{*}+\mathbf{e}_u{}^{*T}B\,\mathbf{e}_u{}^{*}$$

と表現される。ここで

$$G_1=[\,F^{T}\ \ F_u{}^{T}]\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F\\ F_u\end{bmatrix}$$

および

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_u \end{bmatrix} : \text{full column rank}$$

より

$$\mathbf{G}_1 > 0$$

よって

$$\det \mathbf{G}_1 \neq 0$$

となる。したがって、Φを最小化する$\mathbf{j}$（=：$\mathbf{j}^*$）は

$$\partial \Phi / \partial \mathbf{j} = 0$$

より

$$\mathbf{j}^* = -\mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{g}_2$$

となり、それに対応するΦ（=：Φ^*）は

$$\Phi^* = g_3 - \mathbf{g}_2^T \mathbf{G}_1 \mathbf{g}_2$$

と求められる。

4．5　シミュレーション

本節では、前節までで述べた制御理論のシミュレーションをおこなう。制御対象は

$$P(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

で、各パラメータの公称値は

$$a_1=3,\quad a_2=0,\quad b_1=2,\quad b_2=1,\quad b_3=0$$

とし、目標値は単位ステップとする。

$$v(z)=1/(1-z^{-1})$$

補償器のパラメータのひとつR（z）は3．6節と同じものを用いることとする。

公称値制御対象に対する結果は Figure 4.5.1 に示した。補償器は最短デッドビートを達成するように設計されており、出力は2段で、入力は1段でデッドビートしている。

制御対象の各パラメータが

$$a_1=2.6,\quad a_2=0.4,$$

$$b_1=2.0,\quad b_2=1.07,\quad b_3=-0.05$$

にそれぞれ変動したときの結果は Figure 4.5.2 で示されている。

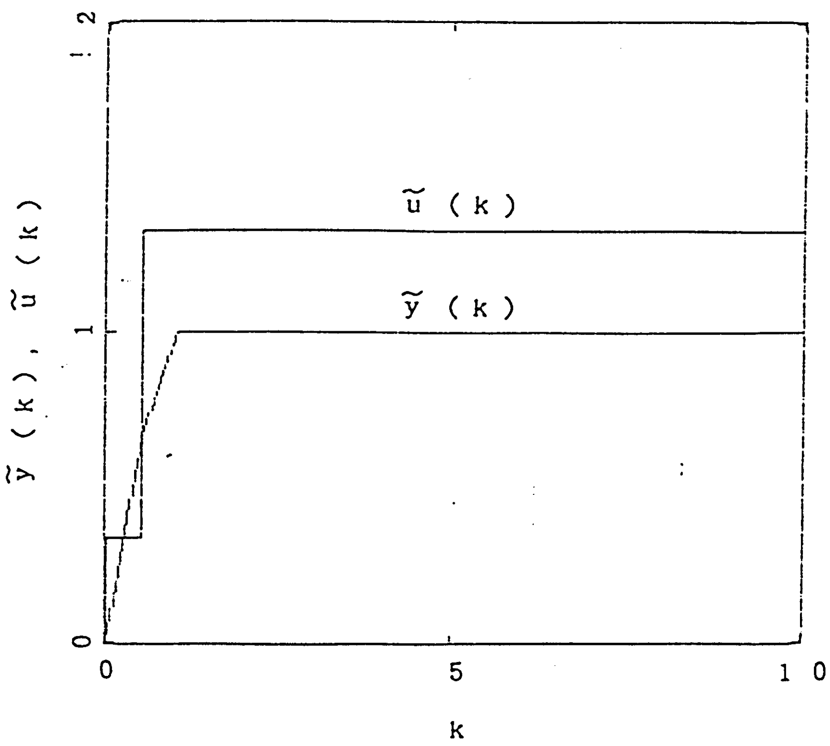

Figure 4.5.1　公称値制御対象に対する応答

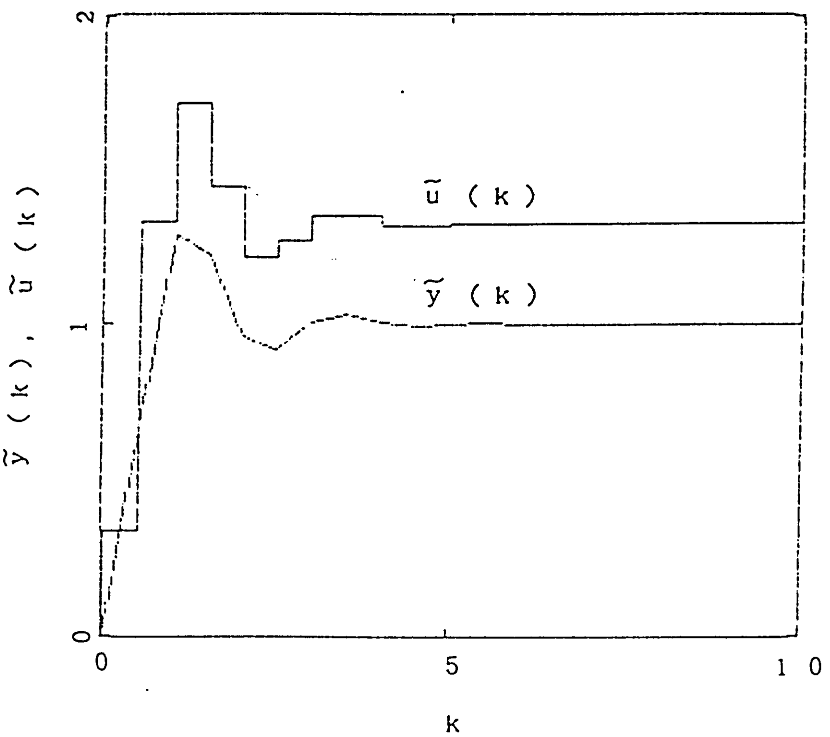

Figure 4.5.2　変動した制御対象に対する応答

4．6　むすび

本章では、入出力デッドビートを達成する補償器のパラメータ表現を導出した。これは、前章の出力のみのデッドビート補償器のそれとは違い、ふたつの多項式 Diophantine 方程式を解くことが必要となった。

さらに、入出力デッドビート性が保たれる目標値のパラメータ表現ももとめたが、これは前章のものと同じになった。

第５章　多入力多出力系の場合 [79]

５．１　はじめに

２、３、４章ではが制御対象はすべて一入力一出力系であった。本章では、多入力多出力系に対するデッドビート理論を考察する。補償器は前章までと同様にロバスト・トラッキングを達成する二自由度補償器のパラメータ表現のなかから求められる。二自由度補償器の特性からデッドビートに関する議論とロバスト性に関するそれとをそれぞれ独立に行うことができるのも一入力一出力系に対する場合とまったく同様である。

本章では３、４章で用いられた多項式代数によるアプローチではなく、２章と同様にRH_∞上で議論がおこなわれる。デッドビート制御を達成するための必要十分条件の表現は一入力一出力系に対する場合のそれ（第２章のTheorem 2.2.2)の拡張として得られた。この表現を得るために用いられた主要な方法論は Hermite form である。

本章と同じ問題、すなわち、多入力多出力系に対する出力デッドビートを扱った論文にZhao and Kimura[57] がある。これは制御対象の Smith-McMillan form を用いて理論展開されている結果、各出力のデッドビート段数および偏差が設計時に明確にはわからない等、実際に応用するにはかなり問題をもっていると思われる。それに対して本章で提案される設計法においては、各出力のデッドビート

偏差を決定することによって補償器が設計されるのであるから、実用上より都合がよいだろう。

本章の構成は以下の通りである。まず、5．2節においてすでに得られている多入力多出力系のロバスト・トラッキングにかんする結果が引用される。そして、ここで示されたロバスト・トラッキング補償器のパラメータ表現を用いて5．3節でデッドビートに関する考察が、5．4節でロバスト性の最適化がなされる。5．5節ではシミュレーションがおこなわれる。

5．2　ロバスト・トラッキング系

前章までと同様にFigure 5.2.1 に示す2自由度制御系で考察が進められる。ただし、本章では多入力多出力系である。$P(z)$ が制御対象（プロセス）、$K_v(z)$、$K_y(z)$が2自由度補償器、$\mathbf{v}(z)$, $\mathbf{u}(z)$, $\mathbf{y}(z)$が目標値、制御対象の入力、出力を示すのはこれまでと同じである。

まず、与えられたプロセスをRH_∞上で両既約分解、目標値を同じくRH_∞上で左既約分解する。

$$P(z) = N(z)\,M(z)^{-1} = \tilde{M}(z)^{-1}\,\tilde{N}(z)$$

$$\mathbf{v}(z) = \tilde{M}_v(z)^{-1}\,\tilde{\mathbf{n}}_v(z)$$

このとき次式を満たす$X(z)$、$Y(z)$、$\tilde{X}(z)$、$\tilde{Y}(z)\in RH_\infty$が存在する。

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -Y \\ N & X \end{bmatrix} = I \qquad (5.2.1)$$

これらを用いて、ロバスト・トラッキング系の設計を考える。Vidyasagar[70]によれば多入力多出力系に対してロバスト・トラッキングキングを達成する2自由度補償器の存在条件はつぎのとおりである。

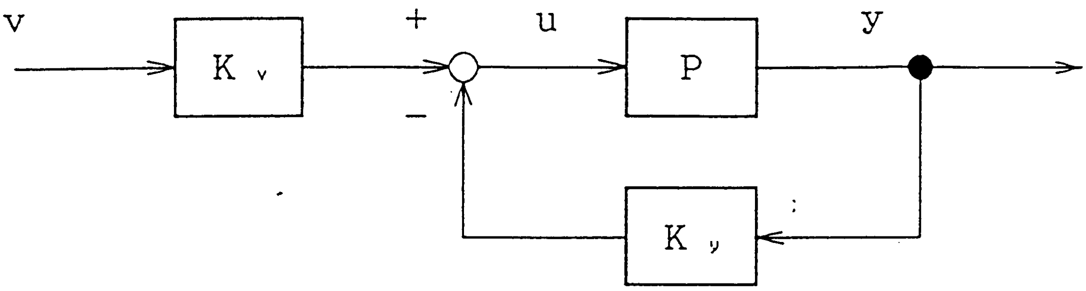

Figure 5.2.1 系の構成

Theorem 5.2.1: $\tilde{M}_v(z)$の largest invariant factor を$\alpha_v(z)$で示す。このとき、ロバスト・トラッキング系を構成する2自由度補償器が存在するための必要十分条件は

$$(N(z),\ \alpha_v(z)I):\ \text{left coprime}$$

である。この条件は

$\alpha_v(z)$の不安定零点において$N(z)$が full row rank を有する

とも等価である。 □

上の条件が満たされたとき

$$\alpha_v U + NV = I \tag{5.2.2}$$

を満たすU、$V \in RH_\infty$が存在する。

また、この theorem により、ロバスト・トラッキングが可能なプラントは横長か正方に限られることがわかる。本研究では、ロバスト・トラッキング補償器のパラメータ表現が得られていることよりプラントをさらに正方に限定する。

Vidyasagar[70] において導出されているロバスト・トラッキング補償器のパラメータ表現をつぎのTheorem で示す。

Theorem 5.2.2: プラントがm入力m出力で Theorem 5.2.1の条件を満たすものとする。このとき、2自由度補償器 $[K_v, K_y]$ がロバスト・トラッキングを達成するための必要十分条件は

$$[K_v, K_y] = \tilde{M}_K^{-1} [\tilde{N}_{Kv}, \tilde{N}_{Ky}]$$

where

$$\tilde{M}_K = \tilde{X} - (VX + \alpha_v R)\tilde{N}$$

$$\tilde{N}_{Ky} = \tilde{Y} + (VX + \alpha_v R)\tilde{M} \qquad (5.2.3)$$

$$\tilde{N}_{Kv} = \tilde{Y} + VX\tilde{M} + Q\tilde{M}_v$$

$$\text{for some } Q, R \in RH_\infty \qquad \square$$

上のパラメータ表現は当然、前章までで用いられたロバスト・トラッキング補償器の多入力多出力系への拡張である。

5. 3 デッドビート制御

式(5.2.3) の補償器を用いることにより、目標値と出力の関係は

$$\mathbf{y} = N\tilde{N}_{Ky}\mathbf{v}$$

$$= N\{\tilde{Y} + VX\tilde{M} + Q\tilde{M}_v\}\mathbf{v}$$

となる。したがって制御偏差は

$$\mathbf{e} := \mathbf{v} - \mathbf{y}$$

$$= [I - N\{\tilde{Y} + VX\tilde{M} + Q\tilde{M}_v\}]\mathbf{v}$$

と得られる。これは、式(5.2.1),(5.2.2) を用い、さらに

$$L := \alpha_v \tilde{M}_v^{-1} \in RH_\infty(m\times m)$$

を導入することにより

$$\mathbf{e} = (UX\tilde{M}L - NQ)\tilde{\mathbf{n}}_v \qquad (5.3.1)$$

となる。

この式は$\mathbf{e}$とQの関係を表した式である。ここでQはTheorem 5.2.2 よりRH$_\infty$の元でなければならない。また本節の目的はデッドビート制御、すなわち、ある有限な時刻以降は制御偏差を零にすることであるので、$\mathbf{e}(z)$の各要素はある有限な$k_i(i=1,\cdots,m)$に対して

$$\mathbf{e}(z) = [e_i(z)]$$

$$e_i(z) = e_i^0 + e_i^1 z^{-1} + \cdots + e_i^{ki} z^{-ki} \qquad (5.3.2)$$

の形にならなければならない。上式でe_i^jは時刻 j における i 番目の制御偏差の値である。よって、以下ではこの条件を満たす$\mathbf{e}(z)$、すなわちR $[z^{-1}]$ (mx1)に属する$\mathbf{e}(z)$がさらにどんな条件を満たせば式(5.3.1)のQがRH$_\infty$に属するかを考える。

まず、N、$\tilde{\mathbf{n}}_v$をつぎのように分解する。

Theorem 5.3.1: $N(z)$, $\tilde{\mathbf{n}}_v(z)$はつぎのように分解することが可能である。

$$N(z) = \bar{N}(z)W(z) \qquad (5.3.3)$$

ただし、 $\bar{N}$: a lower triangular $\in RH_\infty$ (mxm)

W: a unimodular of RH_∞ (mxm)

$$\tilde{\mathbf{n}}_v(z) = \bar{\mathbf{n}}_v(z)\mathbf{w}(z) \qquad (5.3.4)$$

ただし、 $\bar{\mathbf{n}}_v$: z^{-1}に関する多項式

$\mathbf{w} \in RH_\infty$

$\mathbf{w}(z) \neq 0$, for any $z \in D^c$

(Proof) $\tilde{\mathbf{n}}_v(z)$の分解は$\tilde{\mathbf{n}}_v(z)$の全要素に共通の不安定零点をくくりだすことで達成される。

つぎに$N(z)$の分解方法を示す。以下では$N(z)$の j 行目を$\mathbf{n}_j(z)$とし、$|N(z)|=0$となる単位円外および円上の点をz_iとする。とりあえずz_iはす

べて実数とし、後で複素数の場合を示す。Theorem 5.2.1 より z_i は重複度も含めて有限個である。

正方行列が非正則になることは、ある行が零ベクトルとなるか、複数の行の間に線形従属の関係が成り立つことと等価である。したがって、ある j と α_1, …, α_{j-1} に対して

$$\mathbf{n}_j(z_i)=\sum_{m=1}^{j-1}\alpha_m\ \mathbf{n}_m(z_i) \tag{5.3.5}$$

となる。この表現は $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{j-1}=0$ となる場合、すなわち

$$\mathbf{n}_j(z_i)=0$$

となる場合も含む表現である。このとき N(z) はつぎのように分解できる。

$$N(z)=N^{(1)}(z)\ N^{(2)}(z) \tag{5.3.6}$$

ただし、

$$N^{(1)}(z)=\begin{cases}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{j-1} & (1-z_i z^{-1})^{\ell} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \\ & |\,z_i\,|<\infty \text{のとき} \end{cases}$$

$$
\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \mathbf{0} \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
\alpha_1 & \cdots & \alpha_{j-1} & z^{-\ell} & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
\mathbf{0} & & & & & & 1
\end{array}\right]
$$

$z_i=\infty$のとき

ℓ：適当な正の整数

$N^{(2)}\in RH_\infty(m\times m)$

このように分解できる理由を示す。式(5.3.5)より次式が得られる。

$(\mathbf{n}_j-\alpha_1\mathbf{n}_1-\cdots-\alpha_{j-1}\mathbf{n}_{j-1})(z_i)=0$

この式は左辺のベクトルの全要素がz_iに共通の零点を持つことを意味している。

したがってz_iが有限値の場合

$\mathbf{n}_j^{(2)}(z)=(1-z_iz^{-1})^{-\ell}\ (\mathbf{n}_j-\alpha_1\mathbf{n}_1-\cdots-\alpha_{j-1}\mathbf{n}_{j-1})(z)$

とすれば

$\mathbf{n}_j^{(2)}(z_i)\neq 0$かつ$<\infty$

を満たす正の整数ℓが必ず存在する。そのℓに対して

$\mathbf{n}_j^{(2)}(z)\in RH_\infty(m\times 1)$

である。この$\mathbf{n}_j^{(2)}(z)$を$N^{(2)}(z)$のj行目とし、他の行は

$\mathbf{n}_k^{(2)}(z)=\mathbf{n}^{(2)}(z),\quad k\neq j$

とすれば式(5.3.6)の分解は達成される。

$\mathbf{n}_1^{(2)}(z_i),\ \cdots,\ \mathbf{n}_m^{(2)}(z_i)$が線形独立でなければ、$N^{(2)}(z)$を新たに$N(z)$として同様の分解を続ける。これをすべての$z_i$について行う。

このとき、

$$|N(z)| = |N^{(1)}(z)|\,|N^{(2)}(z)|$$

$$|N^{(1)}(z)| = (1 - z_i z^{-1})^{\ell}$$

であるので、分解を１回行うごとに｜N｜の不安定零点が｜$N^{(1)}$｜へと移る。よって｜N｜の不安定零点が重複度も数えてｐ個ならば、多くてもｐ回の分解により｜$N^{(2)}$｜の不安定零点はなくなる。すなわち$N^{(2)}$はＲH_∞のunimodular行列となる。

この$N^{(2)}(z)$がW(z)であり、$N^{(1)}(z)$を分解した順にかけあわせたものが$\mathbb{N}(z)$である。

最後に、上の議論でz_iと$\alpha_1, \cdots$、α_{j-1}が実数ではない場合にも実係数の範囲で分解ができることを示す。このときは式(5.3.5)に加えて

$$\mathbf{n}_j(\overline{z_i}) = \sum_{m=1}^{j-1} \overline{\alpha_m}\,\mathbf{n}_m(\overline{z_i}) \tag{5.3.7}$$

もまた成立する。よって、最初にz_iを、次に$\overline{z_i}$をくくり出すと式(5.3.6)で

$N^{(1)}$にあたるものとしてつぎの形の行列が得られる。

$$\mathbb{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{j-1} & 1-z_i z^{-1} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \beta_1 & \cdots & \beta_{j-1} & 1-z_i z^{-1} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \alpha_1+\beta_1(1-z_i z^{-1}), & \cdots, & \alpha_{j-1}+\beta_{j-1}(1-z_i z^{-1}), & (1-z_i z^{-1})(1-z_i z^{-1}) & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

上式において式(5.3.5),(5.3.7)より

$$\alpha_k+\beta_k(1-\overline{z_i}z_i^{-1})=\overline{\alpha_k},\qquad k=1,\ \cdots,\ j-1 \tag{5.3.8}$$

を満たすβ_1, …, β_{j-1}が存在する。これを変形すると

$$\beta_k z_i = z_i\overline{z_i}\ \frac{\alpha_k-\overline{\alpha_k}}{z_i-\overline{z_i}}$$

さらに

$$\alpha_k+\beta_k=\frac{z_i\alpha_k-\overline{z_i}\,\overline{\alpha_k}}{z_i-\overline{z_i}}$$

が得られる。よって

$$\alpha_k+\beta_k(1-z_i z^{-1})=\alpha_k+\beta_k-\beta_k z_i z^{-1}\in R\ [z^{-1}]$$

となる。また

$$(1-z_i z^{-1})(1-\overline{z_i}z^{-1})=1-(z_i+\overline{z_i})z^{-1}+z_i\overline{z_i}z^{-2}\in R\ [z^{-1}]$$

より結局

$$\overline{\mathbb{N}}_1\in R\ [z^{-1}]$$ □

Remark: N(z)の分解はRH_∞上の Hermite form である。 □

さて、この分解により式(5.3.1)は

$$WQ\mathbf{w}=\mathbf{q} \tag{5.3.9}$$

$$\overline{\mathbb{n}}_v\overline{\mathbb{N}}\,\mathbf{q}=UX\widetilde{\mathbb{M}}L\,\widetilde{\mathbb{n}}_v-\mathbf{e} \tag{5.3.10}$$

の2式に分けることができた。以下ではまず式(5.3.9)で$Q\in RH_\infty$(mxm)となるための$\mathbf{q}$の条件を求める。

Theorem 5.3.2: W(z), $\mathbf{w}$(z)は Theorem 5.3.1 で定義したものとする。このとき

$$W(z)\ Q(z)\ \mathbf{w}(z)=\mathbf{q}(z) \tag{5.3.11}$$

を満たす$Q(z)\in RH_\infty$(mxm)が存在する必要十分条件は、$\mathbf{q}(z)\in RH_\infty$(mx1)である。

(Proof) 必要性は明らかである。十分性を示す。

$\mathbf{q}(z) \in RH_\infty$ (mx1)であるとする。このときWが unimodular であることより

$$\mathbf{q}'(z) := W(z)^{-1}\mathbf{q}(z) \in RH_\infty \text{(mx1)}$$

が成り立つ。この$\mathbf{q}'(z)$を用いれば式(5.3.11)は

$$Q(z)\ \mathbf{w}(z) = \mathbf{q}'(z)$$

となる。この式のｉ行目は

$$\mathbf{q}'(z) = [q_i'(z)]$$

$$Q(z) = [q_{ij}(z)],$$

$$\mathbf{w}(z) = [w_i(z)]$$

とおくと

$$q_{i1}w_1 + q_{i2}w_2 + \cdots + q_{im}w_m = q_i' \tag{5.3.12}$$

と得られる。ここで

$$\mathbf{w}(z) \neq 0, \quad \text{for any } z \in D^c$$

は

$$(w_1, \cdots, w_m) : \text{coprime over } RH_\infty$$

と等価であり、したがって、$q_i' \in RH_\infty$ より式 (5.3.12) を満たす$q_{i1}, \cdots,$ $q_{im} \in RH_\infty$は必ず存在する。 □

このTheorem から結局、式(5.3.10)で$\mathbf{q}(z) \in RH_\infty$ (mx1)となるための$\mathbf{e}$の条件を求めればよいこととなった。それを次の theorem で示す。ただし、以下では、Nの対角要素の有限な不安定零点はすべて重複度１と仮定する。

Theorem 5.3.3: $\overline{\mathrm{N}}$, $\overline{\mathrm{n}}_v$は Theorem 5.3.1 で定義したものとする。このとき

$$\overline{\mathrm{n}}_v(z)\overline{\mathrm{N}}(z)\mathbf{q}(z)$$
$$= U(z)\ X(z)\ \widetilde{M}(z)\ L(z)\ \widetilde{\mathrm{n}}_v(z) - \mathbf{e}(z)$$

を満たす$\mathbf{q}(z) \in RH_\infty$ (mx1)が存在するための必要十分条件は、$\mathbf{e}(z) = [e_i(z)]$ が

$$e_i(z)=\pi_v(z)\,[h_i^0+h_i^1z^{-1}+\cdots+h_i^{k_i}z^{-k_i}]$$

であり、かつ$h_i^0,\cdots,\ h_i^{k_i}$がつぎの条件を満たすことである。

1) $h_1^j=[p_1(z)]_j,\quad j=0,\cdots,\ell_1-1$

$$h_i^j=[p_i(z)-\pi_{i1}(z)q_1(z)-\cdots-\pi_{i\,i-1}(z)q_{i-1}(z)]_j$$

$$j=0,\cdots,\ell_{i-1}\ ;\ i=2,\cdots,n \quad (5.3.13)$$

2)
$$\begin{bmatrix} 1 & (z_i^1)^{-1} & (z_i^1)^{-2} & \cdots & (z_i^1)^{-(k_i-\ell_i)} \\ 1 & (z_i^2)^{-1} & (z_i^2)^{-2} & \cdots & (z_i^2)^{-(k_i-\ell_i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (z_i^{m_i})^{-1} & (z_i^{m_i})^{-2} & \cdots & (z_i^{m_i})^{-(k_i-\ell_i)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_i^{\ell_i} \\ h_i^{\ell_i+1} \\ \vdots \\ h_i^{k_i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_i^1 \\ \alpha_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_i^{m_i} \end{bmatrix}$$

(5.3.14)

ただし、

$$\alpha_1^j=p_1(z_1^j)(z_1^j)^{\ell_1}-[h_1^0(z_1^j)^{\ell_1}+\cdots+h_1^{\ell_1-1}z_1^j]$$

$$\alpha_i^j=[(p_i-\pi_{i1}q_1-\cdots-\pi_{i\,i-1}q_{i-1})(z_i^j)](z_i^j)^{\ell_i}$$

$$-[h_i^0(z_i^j)^{\ell_i}+\cdots+h_1^{\ell_i-1}z_i^j],\quad i=2,\cdots,n$$

ただし、π_{ij}はNの(i,j)要素であり、ℓ_iはπ_{ii}の相対次数、m_iはπ_{ii}の有限な不安定零点の個数で、それぞれは相異なり、それを$z_i^1,\cdots,\ z_i^{m_i}$としている。また$[\cdot]\ j$はz^{-j}の係数を示し、

$$\mathbf{p}:=[p_i]:=UX\tilde{M}L\mathbf{w} \quad (5.3.15)$$

である。

(Proof) $\mathbf{p}$を用いると式(5.3.10)は

$$\mathbb{N}\,\mathbf{q}=\mathbf{p}-\frac{1}{\pi_v}\,\mathbf{e} \quad (5.3.16)$$

となる。これを満たす$\mathbf{q}(z)\in RH_\infty$(mx1)が存在するためには、右辺が$RH_\infty$に属していなければならない。よって、$\pi_v$の零点はすべて不安定なので$\mathbf{e}$が$\pi_v$を因子にもたなければならない。したがって、

$$e_i(z)=\Pi_v(z)[h_i^0+h_i^1z^{-1}+\cdots+h_i^{m_i}z^{-m_i}]$$

とする。このように置けば、$\Pi_v(z)$は z^{-1}の多項式なのでe_iはz^{-1}の多項式となりデッドビートの目的を達成することとなる。

これを代入すると式(5.3.16)は

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & & 0 \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_1-(h_1^0+\cdots+h_1^{k1}z^{-1}) \\ p_2-(h_2^0+\cdots+h_2^{k2}z^{-k2}) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

となる。まず、q_1がRH_∞に属する、すなわち因果的かつ安定になるための必要十分条件を求める。上式よりq_1 を求めると

$$q_1=\frac{p_1-(h_1^0+\cdots+h_1^{k1}z^{-k1})}{\Pi_{11}} \qquad (5.3.17)$$

である。仮定よりΠ_{11}の相対次数はℓ_1なので、このq_1が因果的になるための必要十分条件は分子部をz^{-1}で展開したときに定数項から$z^{-(\ell1-1)}$の係数までが零になることである。これより$i=1$のときの式(5.3.13)が得られる。

q_1 が安定になるための必要十分条件はΠ_{11}の不安定零点を分子部でキャンセルすることである。仮定よりその不安定零点はz_j($j=1, \cdots, m_1$)なので、その条件は

$$h_1^0+h_1^1(z_1^j)^{-1}+\cdots+h_1^{k1}(z_1^j)=p_1(z_1^j), \qquad j=1, \cdots, m_1$$

と表される。これより、$i=1$のときの式(3.14)が得られる。

以上により$e_1(z)$の満たすべき条件が求められた。これを満たす$e_1(z)$を求め、それを式(5.3.17)に代入すれば$q_1(z)$が決定される。

つぎに$q_2(z)$を求めると

$$q_2=\frac{p_2-\Pi_{21}q_1-(h_2^0+\cdots+h_2^{k2}z^{-k2})}{\Pi_{22}} \qquad (5.3.18)$$

となる。右辺のq_1は上で求めたものである。q_1と同じ考え方により$e_2(z)$の満たすべき条件が求められる。それは式(5.3.13),(5.3.14)で$i=2$としたものである。以下、この議論を続けることにより式(5.3.13),(5.3.14)が$q(z)\in RH_\infty$(mx1)のための必要十分条件であることが示される。 □

上の theorem から各出力の最短デッドビート段数に関してつぎのRemarkが得られる。

Remark: 式(5.3.14)の左辺の行列はVandermonde行列であり、full rank である。したがって、

$$k_i \geqq \ell_i + m_i - 1$$

ならば、必ず $h_i^{\ell_i}$, …, $h_i^{k_i}$が存在する。このことは、第i出力の最短デッドビート段数をk_{imin}と置けば、

$$k_{imin} \leqq \deg(\bar{\Pi}_v) + \ell_i + m_i - 1$$

を意味する。 □

以上、本節では前節で示した2自由度ロバスト・トラッキング補償器がデッドビート制御を達成するための条件を求めた。

なお、本章と本質的に同じ問題を扱った論文にZhao and Kimura[57] がある。これと本研究を比較すると、Zhao and Kimura[57] においては Hermite form ではなく Smith -McMillan from を用いたことにより、m出力のプロセスに対しm^{2}個の方程式を解かねばならず、かつ各出力のデッドビート段数が明確に示されていない。それに対し本研究では出力数と同数の方程式を解けばよく、各出力のデッドビート時間の上限も設計時に明確になっている。

5. 4 ロバスト性最適化

P(z) でプロセスの公称値を、P'(z)でプロセスのの真の動特性を表すことと

する。プロセスが$P(z)$であるときの目標値から出力への伝達関数行列は

$$T(z) = [I + P(z)K_y(z)]^{-1}P(z)K_v(z) \tag{5.4.1}$$

であり、上式の$P(z)$を$P'(z)$で置き換えたものを$T'(z)$とすれば、それはプロセスが$P'(z)$のときの伝達関数行列となる。

このとき感度は

$$\Phi(z) := \{T'(z) - T(z)\}T'(z)^{-1}[\{P'(z) - P(z)\}P'(z)^{-1}]^{-1} \tag{5.4.2}$$

$$= [I + P(z)K_y(z)]^{-1} \tag{5.4.3}$$

と得られる。この式をさらに変形するために、K_yの右既約分解を求めと、それは

$$K_y = N_{Ky}M_K^{-1}$$

ただし、

$$M_K = X - N(VX + \alpha_v R)$$

$$N_{Ky} = Y + M(VX + \alpha_v R)$$

となる。用いられた記号は5．2節で定義されたものであり、このM_K、N_{Ky}は

$$\tilde{M}M_K + \tilde{N}N_{Ky} = I$$

を満たす。これらを代入すると式（5.4.3)は

$$\Phi = M_K\tilde{M}$$

$$= \{X - N(VX + \alpha_v R)\}\tilde{M} \tag{5.4.4}$$

となる。

ここでは、Zhao and Kimura[57] と同じ次式の評価関数を用いてΦを評価することとする。

$$J := \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma\{\Phi(e^{j\theta})\}^2 d\theta\right]^{1/2} \tag{5.4.5}$$

ここで$\sigma(\cdot)$は最大特異値を示している。

これはL_2ノルムと呼ばれているものであり、

$$J = \| \Phi \|_2$$

と表記する。

$$F := (X - NVX)\tilde{M} = \alpha_v UX\tilde{M}$$

$$G := \alpha_v N$$

$$H := \tilde{M}$$

と定義すれば

$$J = \| F - GRH \|_2 \qquad (5.4.6)$$

となり、このJを最小にする$R \in RH_\infty$(mxm)を求める問題の解はVidyasagar [70] に与えられている。それを示せばつぎのようになる。

Theorem 5.4.1: 与えられたF, G, $H \in RH_\infty$(mxm)に対し

$$J(R) = \| F - GRH \|_2$$

の最小値は

$$J^* = \| [G_i^* F H_i^*]_+ \|_2$$

であり、これを達成するR (=: R^*) は

1) |G|, |H|が単位円上に零点を持たない場合は

$$R^* := G_o^{-1} [G_i^* F H_i^*]_- H_o^{-1}$$

2) |G|、|H|が単位円上に零点を持つ場合には、J^*を達成する$R^* \in RH_\infty$(mxm)は存在しないが、つぎのような最小化系列{R_ε}が存在する。

$$R_\varepsilon = G_{o\varepsilon}^{-1} [G_i^* F H_i^*]_- H_{o\varepsilon}^{-1}$$

ただし、

$$G_{o\varepsilon}^{-1}、H_{o\varepsilon}^{-1} \in RH_\infty (mxm), \quad \text{for any } \varepsilon > 0$$

$$G_{o\varepsilon} \to G_o,\ H_{o\varepsilon} \to H_o \quad (\varepsilon \to 0^+)$$

この{R_ε}に対して

$$J(R_\varepsilon) \to J^* \quad (\varepsilon \to 0^+)$$

となる。 □

上で用いた記号を説明する。$G=G_iG_o$はGの inner outer 分解であり、$H=H_oH_i$はHの co-inner co-outer 分解である。また、$[\cdot]_-$は部分分数展開した時のRH_∞に属する部分すべて、$[\cdot]_+$はそれ以外の部分を示している。

以上、本節では5．2節の一般的な2自由度ロバスト・トラッキング補償器のロバスト性を式（5.4.5)の意味で最適化する方法を示した。

5．5 シミュレーション

次式で示される2入力2出力のプロセスと目標値に対してシミュレーションを行う。

$$P(z)=\begin{bmatrix} \dfrac{a_1}{z-b_1} & \dfrac{a_2}{z-b_1} \\[2ex] \dfrac{a_3}{z-b_1} & \dfrac{a_4}{z-b_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(z)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{z}{z-1}$$

ただし、上式のプロセスのパラメータの公称値は

$a_1=0.1$、$a_2=0.3$、$a_3=0.2$、$a_4=0.8$,

$b_1=0.9$、$b_2=0.8$

である。これに基づいて補償器を設計し、公称値プロセスに対して実行した結果が Figure 5.5.1 である。ただし、この際に補償器中のRは、

$$R_\varepsilon=G_{o\varepsilon}^{-1}[G_i^{*}FH_i^{*}]_-H_{o\varepsilon}^{-1}$$

ただし

$$G_{o\varepsilon}=\alpha_{v\varepsilon}N_o$$

$$\alpha_{v\varepsilon} = \frac{z-(1-\varepsilon)}{z}$$

であり（N_oはNのouter 部分）、このシミュレーションでは$\varepsilon = 0.01$を用いた。そして、同じ補償器によって、変動したプロセスに対して行った結果が Figure 5.5.2 である。ただし、変動したプロセスのパラメータ値は

$a_1 = 0.105$, $a_2 = 0.303$, $a_3 = 0.202$, $a_4 = 0.808$,

$b_1 = 0.905$, $b_2 = 0.805$

とした。

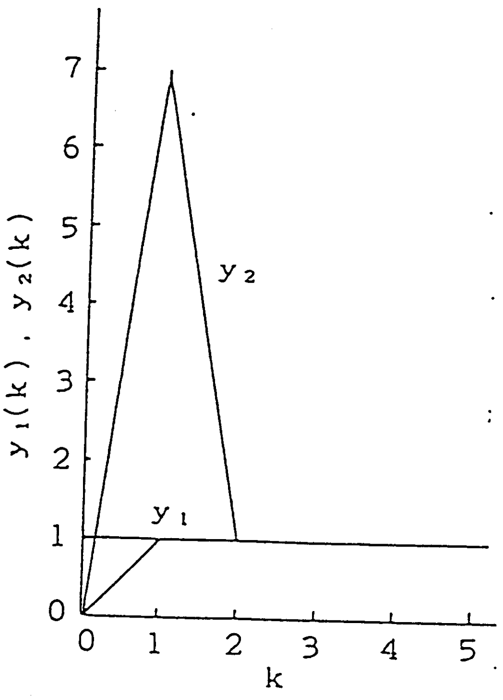

Figure 5.5.1　公称値制御対象に対する応答

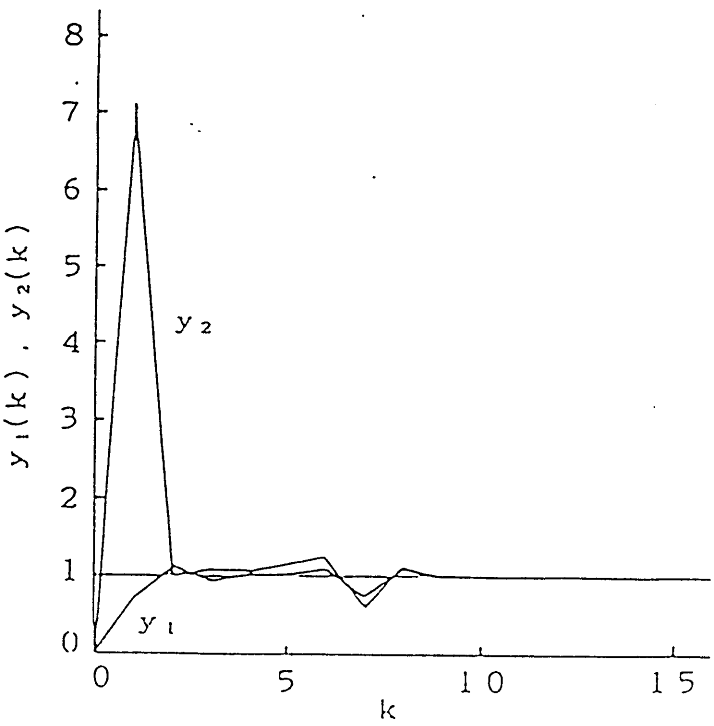

Figure 5.5.2　変動した制御対象に対する応答

5. 6 むすび

本章では、ロバスト・トラッキング補償器によるデッドビート制御と最適ロバスト性の達成を多入力多出力のプロセスに対して行った。得られた結果は、1入力1出力系の場合と比べて、かなり複雑なものとなった。

Zhao and Kimura [57] では Smith-McMillan form を用いて理論展開した結果各出力のデッドビート段数が設計時にわからない等の問題点があったが、本研究では各出力のデッドビート段数を決定することがそのまま補償器の設計となっている。

二自由度補償器を用いたことによりデッドビートの議論とロバスト性の議論を分離できたことは前章までと、すなわち一入力一出力系の場合と同様である。

第6章　結論

本章では、これまでのまとめと今後に残された課題を述べる。

・まとめ

本研究ではデッドビート制御を達成し高いロバスト性を有した補償器の設計法が研究された。また、入出力デッドビート制御の章では過渡応答の最適化も考察した。これは、これまでデッドビート制御に対しその実用性の面で二つの問題点、すなわち過大な入出力過渡応答と低いロバスト性が指摘されていたことにこたえるためのものである。

本研究に影響を与えた論文は Zhao and Kimura [54],[55],[56],[57] である。本研究はこれから理論を発展させたものであり具体的な成果は以下のものである。

1)デッドビート補償器のパラメータ表現

2)それが適用できる目標値のパラメータ表現

3)入出力デッドビートと出力デッドビートの関係

4)入出力デッドビート補償器のパラメータ表現

・今後の課題

今後に残された課題としては、多項式アプローチを多入力多出力系に対して用いることが、まず考えられる。これにより複雑な表現となっていた第5章の結果がより簡潔な表現に置き替えられることが期待される。

また、入出力デッドビート制御の際におかれていた条件、すなわち目標値をステップ状に限定することをとりのぞくことにより、より一般的な入出力デッドビート問題を考えることも興味ぶかい。

デッドビート制御の過大な過渡応答がきらわれる理由として現実の制御器では入力値がある範囲に限定されていることがある。こうした入力飽和に対する対策も今後に残された課題であろう。

謝辞

本研究は、著者が名古屋工業大学工学研究科博士課程在学中に同大学機械工学科教授　舟橋康行博士のご指導のもとにおこなったものである。

本研究に対し、終始、細部に渡る適切なご助言をいただいた舟橋教授に厚く御礼申し上げます。また、名古屋大学工学部教授　藤井省三博士、同助教授　早川義一博士には著者が名古屋大学工学研究科修士課程在学中にご指導いただきました。ここに感謝いたします。名古屋工業大学工学部教授　岩住哲朗博士、小和田正博士には本論文作成にあたり数々の御教示をいただきました。厚く御礼申し上げます。

さらに、名古屋工業大学工学部助教授　水野直樹博士、同大学技官　荒川和己氏をはじめ様々な面でご協力いただいた名古屋工業大学舟橋研究室の皆様に感謝いたします。

参考文献

[1] E. Jury: Sampled-Data Control Systems, Wiley (1958)

[2] J. Tou: Digital and Sampled-Data Control Systems, McGrow-Hill (1959)

[3] J. R. Ragazzini and G. F. Franklin: Sampled Data Control Systems, McGrow -Hill (1958)

[4] R. Isermann: Digital Control Systems, Springer-Verlag (1981)

[5] K. Nakamura: A Study on Quick Response Sampled-data Control Systems, Proc. of 1st IFAC, 410/418, Butterworth (1960)

[6] R. E. Kalman and J. E. Bertram: General Synthesis Procedure for Computer Control of Single and Multiloop Linear Systems, AIEE Trans. Part II, 602 (1959)

[7] 今井弘之：デッドビート制御，計測と制御，22-7，606/613 (1983)

[8] 舟橋，細江：行列分解表現による線形制御系のシンセンスーその１，計測と制御，22-2，219/228 (1983)

[9] 細江，舟橋：行列分解表現による線形制御系のシンセンスーその３，計測と制御，22-4，370/379 (1983)

[10] 舟橋：モデル・マッチング，数理科学，255，16/22 (1984)

[11] 舟橋：有限整定時間サーボ系の設計法，電気製鋼，57-2，79/84 (1986)

[12] D. C. Youla, J. J. Bonjiorno, and H. A. Jabr: Modern Wiener-Hoph Design of Optimal Controller; Part I, IEEE Trans. Auto. Control, AC-21, 3/14 (1976)

[13] D. C. Youla, H. A. Jabr, and J. J. Bonjiorno: Modern Wiener-Hoph Design of Optimal Controller; Part II, IEEE Trans. Auto. Control, AC-21,

319/338 (1976)

[14] C.A.Desoer, R.W.Liu, J.Murray, and R.Seaks: Feedback system design: the fractional representation approach to analysis and synthesis, IEEE Trans. Auto. Control, AC-25, 399/412 (1980)

[15] 伊藤正美：自動制御，丸善 (1981)

[16] 木村英紀：ディジタル信号処理と制御，昭晃堂 (1982)

[17] W.A.Wolovich: Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag (1974)

[18] T.Kailath: Linear Systems, Prentice-Hall (1980)

[19] V.Kučera: The Structure and Properties of Time-Optimal Discrete Linear Control, IEEE Trans. Auto. Control, AC-16, 375/377 (1971)

[20] V.Kučera: Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach, Wiley (1979)

[21] V.Kučera: A dead-beat servo problem, Int. J. Control, 32, 107/113 (1980)

[22] V.Kučera and M.Sebek: On Deadbeat Controllers, IEEE Trans. Auto. Control, 29, 719/722 (1984)

[23] B.Porter and A.Bradshaw: Design of dead-beat controllers and full-order observers for linear multivariable discrete-time plants, Int. J. Control, 22, 149/155 (1975)

[24] A.Bradshaw and B.Porter: Nilpotency properties of linear multivariable discrete-time tracking systems, Int. J. Control, 24, 573/583 (1976)

[25] H.Kimura and Y.Tanaka: Minimum-time minimum-order deadbeat regulator with internal stability, IEEE Trans. Auto. Control, 26, 1276/1282 (1981)

[26] T. Kaczorek: Deadbeat control in multivariable linear systems, Int. J. Control, 35, 653/663 (1982)

[27] D.Makto and R.Schumann: Self-tuning deadbeat controllers, Int. J. Control, 40, 393/402 (1984)

[28] B.S.Chen, C.C.Chiang, and F.H.Hsiao: Deadbeat controllers synthesis: multivariable case, Int. J. Control, 40, 1207/1213 (1984)

[29] 市川邦彦： Exact Model Matching の考え方と方法, 計測と制御, 26, 977/984 (1987)

[30] K.Ichikawa: Deadbeat characteristic of one-step-ahead control, Int. J. Control, 49, 25/31 (1989)

[31] A.Emami-Naeini and G.F.Franklin: Deadbeat control and tracking of discrete-time systems, IEEE Trans. Auto. Control, 27, 176/181 (1982)

[32] G.F.Franklin and A.Emami-Naeini: Design of Ripple-Free Multivariable Robust Servomechanisms, IEEE Trans. Auto. Control, AC-31, 661/664 (1986)

[33] H.R.Siriseria: Ripple-Free Deadbeat Control of SISO Discrete Systems, IEEE Trans. Auto. Control, AC-30, 168/170 (1985)

[34] C.T.Mullis: On the Controllability of Discrete Linear Systems with Output Feedback, IEEE Trans. Auto. Control, AC-18, 608/615 (1973)

[35] B.Leden: Multivariable Dead-beat Control, Automatica, 13, 185/188 (1977)

[36] B.Leden: Output Deadbeat Control - A Geometric Approach, Int. J. Control, 26, 493/507 (1977)

[37] S.P.Battacharyya: Output Regulation with Bounded Energy, IEEE

Trans. Auto. Control, AC-18, 381/383 (1973)

[38] H. Akashi and M. Adachi: Minimum Time Output Regulation Problem of Linear Discrete-Time Systems, IEEE Trans. Auto. Control, AC-22, 939/942 (1977)

[39] H. Akashi and H. Imai: Output Deadbeat Controllers with Stability for Discrete-Time Multivariable Linear Systems, IEEE trans. Auto. Control, AC-23, 1036/1043 (1978)

[40] D. Jordan and J. Korn: Deadbeat Algorithms for Multivariable Process Control, IEEE Trans. Auto. Control, AC-25, 486/491 (1980)

[41] S. S. Wang and B. S. Chen: Simultaneous deadbeat tracking controller synthesis, Int. J. Control, 44, 1579/1586 (1986)

[42] L. Jetto: Ripple-free tracking problem, Int. J. Control, 50, 349/359 (1989)

[43] O. A. Sebakhy and T. M. Abdel-Moneim: State Regulation in Linear Discrete-Time Systems in Minimum Time, IEEE Trans. Auto. Control, AC-24, 84/88 (1979)

[44] W. A. Wolovich: Deadbeat error control of discrete multivariable systems, Int. J. Control, 37, 567/582 (1983)

[45] 富塚誠義：マイクロコンピュータによる現代制御理論の実用化とそのアルゴリズム，計測と制御，18, 640/649 (1979)

[46] 村田広志，相良節夫：インパルス応答を用いた最適有限整定応答制御装置の設計，計測自動制御学会論文集，20, 1073/1080 (1984)

[47] 吉田宏：緩和フィルタを用いた有限時間整定制御の応答改善，計測自動制御学会論文集，23, 35/40 (1987)

[48] 西村卓也，瓜倉茂，長田朗：線形離散システムの最短時間出力整定問題，計

測自動制御学会論文集, 11, 688/694 (1975)

[49] 瓜倉茂, 西村卓也, 長田朗: 線形離散時間システムの最短時間定値制御, 計測自動制御学会論文集, 19, 439/444 (1983)

[50] 瓜倉茂, 長田朗: 線形離散時間システムの最短時間レギュレータ問題, 計測自動制御学会論文集, 20, 671/676 (1984)

[51] 瓜倉茂, 長田朗: 過渡応答を考慮した離散時間システムに対するデッドビート制御, 計測自動制御学会論文集, 23, 353/357 (1987)

[52] S. Urikura and A. Nagata: Ripple-Free Deadbeat Control for Sampled-Data Systems, IEEE Trans. Auto. Control, 32, 474/482 (1987)

[53] 堀口和己, 西村卓也, 長田朗, 富田英幸: 過渡応答を考慮した2自由度デッドビート制御, 計測自動制御学会論文集, 25, 1046/1053 (1989)

[54] Y. Zhao and H. Kimura: Dead-beat control with robustness, Int. J. Control, 43, 1423/1440 (1986)

[55] Y. Zhao and H. Kimura: Multivariable dead-beat control with robustness, Int. J. Control, 47, 229/255 (1988)

[56] Y. Zhao and H. Kimura: Two-degree-of-freedom dead-beat control system with robustness, Int. J. Control, 48, 303/315 (1988)

[57] Y. Zhao and H. Kimura: Two-degree-of-freedom dead-beat control system with robustness: multivariable case, Int. J. Control, 49, 667/679 (1989)

[58] M. M. Hassan and M. H. Amin: Time-optimal output deadbeat regulators with intenal stability for invertible systems, Int. J. Control, 49, 73/95 (1989)

[59] C. A. Desoer and C. L. Gustafson: Algebraic theory of linear multivariable feedback systems, IEEE Trans. Auto. Control, 29, 909/917

(1984)

[60] S. Hara: Parametrization of stabilizing controllers for multivariable servo systems with two degrees of freedom, Int. J. Control, 45, 779/790 (1987)

[61] T. Sugie and T. Yoshikawa: General Solution of Robust Tracking Problem in Two-Degree-of-Freedom Control Systems, IEEE Trans. Auto. Control, AC-31, 552/554 (1986)

[62] S. Hara and T. Sugie: Independent Parametrization of Two-Degree-of-Freedom Compensators in General Robust Tracking Systems, IEEE Trans. Auto. Control, AC-33, 59/67 (1988)

[63] C. C. Chiang and B. S. Chen: Imperfect model reference adaptive control : deadbeat output error approach, Int. J. Control, 46, 2011/2025 (1987)

[64] G. Zames: Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses, IEEE Trans. Auto. Control, AC-26, 301/320 (1981)

[65] B. A. Francis and G. Zames : On H_∞ -Optimal Sensitivity Theory for SISO Feedback Systems, IEEE Trans. Auto. Control, 29, 9/16 (1984)

[66] J. A. Ball and J. W. Helton: A Beurling-Lax theorem for the Lie group U(m, n) which contains most classical interpolation theory, J. Oper. Theory, 9, 107/142 (1983)

[67] K. Glover: All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds, Int. J. Control, 39, 1115/1193 (1984)

[68] C. C. Chu, J. C. Doyle, and E. B. Lee: The general distance problem in H_∞

optimal control theory, Int. J. Control, 44, 565/596 (1986)
[69] B.C.Chang and J.B.Pearson: Optimal disturbance rejection in linear multivariable systems, IEEE Trans. Auto. Control, AC-29, 880/887 1984)
[70] M.Vidyasagar: Control System synthesis: A Factorization Approach, MIT Press (1985)
[71] B.A.Francis: A Course in H_∞ Control Theory, Springer-Verlag (1987)
[72] A.Feintuch and B.A.Francis: Uniformly optimal control of linear systems, Automatica, 21, 563/574 (1986)
[73] B.A.Francis and J.C.Doyle: Linear control theory with an H_∞ optimality criterion, SIAM J. Control Opt., 25, 815/844 (1986)
[74] H.Kimura: Conjugation, interpolation, and model-matching in H_∞, Int. J. Control, 49, 269/307 (1989)
[75] K.Zhou and P.Khargonekar: An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ optimization, Syst. Control Lett., 11, 85/91 (1988)
[76] K.Glover and J.C.Doyle: State-Space Formulae for all Stabilizing Controllers that Satisfy an H_∞ Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, Syst. Control Lett., 11, 167/172 (1988)
[77] J.C.Doyle, K.Glover, P.P.Khargonekar, and B.A.Francis: State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, IEEE Trans. Auto. Control, 34, 831/847 (1989)
[78] 舟橋康行、加藤久雄：２自由度補償法による最適ロバスト性を有する最短デッドビート制御、計測自動制御学会論文集, 24-5, 483/489 (1988)
[79] 舟橋康行、加藤久雄：多入力多出力系に対するロバスト・デッドビート制御, 計測自動制御学会論文集（投稿中）

[80] Y. Funahashi and H. Katoh: Robust-tracking deadbeat control, Int. J. Control (投稿中)

[81] Y. Funahashi and H. Katoh: Input/output deadbeat control, Int. J. Control (投稿予定)