シュレーディンガー作用素のポテンシャルの特異点に於けるマルチン理想境界の構造に関する研究

多田 俊政

目 次

第 1 章 序論

§1.1 本研究の背景と目的 1
§1.2 研究の歴史と本研究の地位 6
§1.3 本論文の構成 11

第 2 章 諸定義

§2.1 解の基本的性質 16
§2.2 P-Martin 境界と Picard 原理 21

第 3 章 回転不変密度に関する孤立境界点上の Martin 境界

§3.1 回転不変密度に関する Martin 境界 26
§3.2 P-単位判定法 31
§3.3 1 階 P-単位判定法 36
§3.4 Picard 原理の essential 集合 41

第 4 章 回転不変密度に近い密度に関する孤立境界点上の Martin 境界

§4.1 Picard 原理と境界 Harnack 原理 46
§4.2 回転不変密度に近い密度に関する Picard 原理 51
§4.3 回転不変密度に近い密度に関する Picard 次元 56
§4.4 回転不変密度に近い密度に関する Martin 境界 61

第 5 章 Picard 原理の非単調性

§5.1 極度の非単調性 66
§5.2 Picard 次元の非単調性 71
§5.3 回転不変密度支配下での非単調性 76

第 6 章 連続境界点上の P-Martin 境界

§6.1 回転不変密度に関する上半円板の Martin 境界 81
§6.2 角領域の P-Martin 境界 86
§6.3 角状領域の P-Martin 境界 91

第 7 章 未解決問題 96

参考文献 101

謝辞 106

研究業績 111

第1章 序 論

§1.1. 本研究の背景と目的

1.1.1. 近年、半導体の電気的性質の研究や分子設計等の物質の微視的な性質の研究と、誘導放射や超伝導等の量子現象の利用により、工学に於ける量子力学の重要度は増大している。 特に電子の波動性が著しい現象では Schrödinger の**波動方程式**

$$
\text{(1.1)}\quad
\begin{gathered}
i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi,\ \ \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V \\
\left(i=\sqrt{-1},\ \psi(X,t)=\psi(x,y,z,t),\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)
\end{gathered}
$$

が本質的な役割を果している。 記号$\hbar = h/2m$ は h と同じく Plank 定数と呼ばれ、ψ は非相対論的自由粒子の運動状態を記述する波動関数 ($|\psi|^2$ は粒子の存在確率密度)、$\hat{H}$ はポテンシャル V が作用しているときの粒子の Hamiltonian 、m は粒子の質量を表す。

Hamiltonian $\hat{H}$ が、即ちポテンシャル V が、時間依存性を持たないとき、物理学的に課せられた境界条件に関する $\hat{H}$ の固有方程式

$$
\text{(1.2)}\qquad \hat{H}u = Eu
$$

の固有値を $\{E_\nu\}$ とする。 その個数が高々可算個で、各 E_νに属する固有関数 u_ν の系 $\{u_\nu\}$ が上述の境界条件に関して完全正規直交系をなすとき、初期条件

$$
\psi(X,0) = \psi_0(X)
$$

を満たす (1.1) の解は

$$
\text{(1.3)}\qquad \psi(X,t) = \sum_\nu (\psi_0, u_\nu)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_\nu t\right)u_\nu(X)
$$

と表される。

固有値 $\{E_\nu\}$ は非相対論的な力学におけるエネルギーに対応し、方程式 (1.1) の特殊解

$$
\psi_\nu(X,t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_\nu t\right)u_\nu(X)
$$

が与える運動状態は**エネルギー固有状態** (eigen state) と呼ばれる。 一方、粒子の存在確率が時間に依存性を持たない状態を**定常状態** (stationary state) と呼ぶ。等式

$$
|\psi_\nu(X,t)|^2 = |u_\nu(X)|^2
$$

により、エネルギー固有状態なら定常状態である。逆に (1.3) により、定常状態ならエネルギー固有状態であることが導かれる。すなわちエネルギー固有状態と定常状態は全く同一である。

ポテンシャル V を設計に従って作ることにより、電子の波動関数やエネルギー固有状態を人為的に制御することが可能になり、箱型の量子井戸やトンネル障壁や超格子 (多重量子井戸) 等がレーザーや光変調器や負性抵抗デバイス等に応用されている。例えば通常の半導体レーザーの活性層内に量子井戸を組み込んだ量子井戸レーザーは、高出力の可能性、モード雑音の低減性等の利点を持っている。また、波動現象の典型例である量子井戸 Stark 効果を利用した光変調器は、きわめて小型で数十ピコ秒の高速動作が可能である。

このように、電子の波動性の利用の基礎として、方程式 (1.2) 、即ち

$$(-\Delta + P)u = 0 \quad \left(P = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E)\right) \tag{1.4}$$

、

の研究は重要である。方程式 (1.4) は元来 Schrödinger 方程式と呼ばれていたが、現在では方程式 (1.1) を Schrödinger 方程式と呼び、(1.4) は定常的 Schrödinger 方程式と呼ばれている。本論文では、しかし、(1.4) を単に **Schrödinger 方程式**と呼び、また P を**密度** (1.2.2 節参照) と呼ぶ。電子の波動性の利用のための基礎研究として、Schrödinger 方程式の解の挙動を数学的に調べることが本研究の目的である。

1.1.2. ポテンシャル V が

$$r = |X| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

のみの関数であるような、所謂**中心力の場**において、V が条件

$$V(r) = o\left(\frac{1}{r^{1+\delta}}\right) \quad (r \to \infty, \delta > 0), \quad V(r) = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (r \to 0)$$

を満たしているとき、V は**短距離力**のポテンシャルと呼ばれる。井戸型ポテンシャル V_1 や核力を表す湯川ポテンシャル V_2、

$$V_2(r) \propto \frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}、$$

はその典型例である。一方、距離が r の 2 粒子が持つ位置エネルギー、即ち Coulomb ポテンシャル

$$V_3(r) = \frac{ZZ'e^2}{r}、$$

は長距離力のポテンシャルの典型例を与える。 記号 Z、Z' は 2 粒子の電荷を、また e は電気素量を表す。

ポテンシャル V_2, V_3 は原点 $r = 0$ に特異点 (**孤立特異点**) を持つ関数であり、従って、対応する密度

$$P_2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - E), \quad P_3 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_3 - E)$$

も原点で孤立特異点を持つ、ただし μ は換算質量を表す。 また、V_3 において Z, Z' が同符号のとき、即ち 2 粒子が同種の粒子の時、原点の近傍では $P_3 > 0$ である。

系の粒子が 2 個以上の多粒子系の Hamiltonian の代表例として、水素分子の電子に対する Hamiltonian $\hat{H}$ は

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_4、$$

$$V_4 = -\frac{e^2}{|X-A|} - \frac{e^2}{|X-B|} - \frac{e^2}{|Y-A|} - \frac{e^2}{|Y-B|} + \frac{e^2}{|X-Y|} + \frac{e^2}{|A-B|}$$

$$\left(X = (x_1, x_2, x_3),\ Y = (y_1, y_2, y_3),\ \Delta = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right) \right)$$

で与えられる。 点 $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$ は静止している原子核の位置を表し、記号 $|X - A|, |X - B|, \cdots$ は距離

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - a_i)^2}, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - b_i)^2}, \quad \cdots$$

を表す。 この V_4、従って対応する密度

$$P_4 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_4 - E)\ 、$$

は配位空間の連続体集合 $\{X = Y\}$ 上に正値の特異点 (**連続特異点**) を持つ。

本論文では上述の P_3, P_4 の様に正値の孤立特異点や連続特異点を持つ密度を主要な研究対象とし、その特異点の近傍で Schrödinger 方程式の解の挙動を研究する。

1.1.3. 原子炉の臨界量 (炉の大きさ、燃料の量、定常的な中性子束の分布等) を決めるとき、簡単なモデルで計算した結果でもかなりの精度を得ることができる。 実際の原子炉は複雑な構造をしているが、できる限り簡単な近似的モデルから始めてより高度な近似的モデルへ議論を進めることは、理解の面からも、また

実際的応用の面からも、重要な意味を持つ。

最初の近似的モデルとしては所謂一群 (一組) 理論が採用されている。 即ち原子炉は裸の均質炉とし、中性子はすべてエネルギーが等しい熱中性子と仮定されたモデルであり、原子炉が定常状態のとき、中性子束ϕは**拡散方程式**

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + \Sigma_a k_\infty L_f \phi = 0 \tag{1.5}$$

を満たす。 記号Dは拡散係数、Σ_aは巨視的吸収断面積、k_∞は無限大原子炉の中性子増倍率、L_fは中性子の漏れない確率を表す。 **臨界条件**は工学的には実行中性子増倍率 k_{eff}が $k_{\mathrm{eff}} = 1$ となることであるが、数学的には原子炉を空間の領域Ωと考えたとき、Ω 上に方程式

$$\left(-\Delta + \frac{-\Sigma_a(k_\infty L_f - 1)}{D}\right) u(X) = 0$$

$$\left(X = (x, y, z),\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

の正解が存在してしかも Green 関数は存在しないことである。 従って原子炉の (近似的) な寸法はバックリング

$$B^2 = \frac{\Sigma_a(K_\infty L_f - 1)}{D}$$

により決まることになる。

次の近似的モデルとしては中性子を高速中性子と熱中性子に分けて扱う二群 (二組) 理論が一般的であり、この理論では (1.5) と同種の方程式を連立させて臨界条件を求めることになる。

一群理論に於ける k_∞は、高速中性子による核分裂効果ε、熱中性子による核分裂係数η、${}_{92}\mathrm{U}^{238}$の吸収を逃れる確率 p 、熱中性子の利用率 f、による**四因子公式**

$$k_\infty = \varepsilon p f \eta$$

で与えられる。 燃料の濃縮度、減速材の密度、温度等が原子炉内で一定でない場合はηや p が、従って k_∞が、場所 Xの関数 $k_\infty = k_\infty(X)$ と考えられる。 従って

$$P = \frac{-\Sigma_a(k_\infty L_f - 1)}{D}(= -B^2)$$

と置いて、中性子束ϕは場所 Xに依存する $P = P(X)$ を密度とする Schrödinger 方程式 (1.4)

$$(-\Delta + P)u = 0$$

の解となる。 裸の原子炉内ではで $P < 0$ あるが、実際の原子炉では炉心部を反射体が覆っていてその内部では

$$P = \frac{\Sigma_a}{D} = \frac{1}{L^2} > 0$$

となっている。 L^2は反射材により決まる量で熱中性子の拡散距離と呼ばれている。

反射材の局所的な変質や混在を想定したとき、その極限状態として、反射体内のある場所 X_0またはある部分Ω_0で $L^2 = 0$ と考える必要が生ずる。 この様な状態で中性子束の分布を調べるとき、Schrödinger 方程式の密度の正値特異点の近傍に於ける解の挙動の研究が応用される。

§1.2. 研究の歴史と本研究の地位

本節では Schrödinger 方程式の密度の特異点の近傍に於ける解の挙動の研究の歴史を、本研究で得られた諸結果を含めて、概観することにより、本研究の意義と地位を明らかにする。 尚、点 A に於いて密度が特異性を持たない場合でも、Schrödinger 方程式の定義域から A を除外して考える限り、A を密度の特異点と呼ぶ。

1.2.1. Schrödinger 方程式は通常 n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ 上、特に $\mathbf{R}^3$ 上、で考えるが、$\mathbf{R}^3$の z軸方向に定常的な密度や解を扱う場合は複素平面 $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ 上で考えることになる。 また、$\mathbf{C}$ 上での解析は $\mathbf{R}^n$上での解析に拡張されることが多いので、むしろ $\mathbf{C}$ 上で Schrödinger 方程式を考える方が本質的と思われる。

密度 Pの孤立特異点 A の近くでの Schrödinger 方程式の解の研究では、A を原点 $O = (0, \cdots, 0)$ に平行移動して、その近傍

$$\Omega = \{0 < |X| < 1\}$$

上で解 u を考えることになる。 また、原点の近くでの u の挙動を問題にするので、本小節では常に境界

$$\Gamma = \{|X| = 1\}$$

上で u は連続と仮定する。 更にΓの近傍上で u は解であることを仮定しても構わない。 従って、Ω上 u が有界なら u はΓ上の境界値で一意的に決定されるので、条件

$$\lim_{X \to O} u(X) = +\infty \tag{1.6}$$

を満たす u の挙動が、より一般的には集合

$$PP(\Omega;\Gamma)=\{u:\ \Omega\text{上}\ u\geq 0\ \text{かつ}\ (-\Delta+P)u=0,\ \Gamma\text{上}\ u=0\} \tag{1.7}$$

の構造が、研究の対象となる。歴史的には Pが原点で特異性を持たない場合、特に $P\equiv 0$ の場合 (即ち Schrödinger 方程式は Laplace 方程式$\Delta u=0$ であり解は調和関数である場合)、に研究が開始された。

1923 年 Picard [87] は (1.6) を満たすΩ ($\subset$ **C**) 上の調和関数 u は

$$u(X)=c\log\frac{1}{|X|}+h(X) \tag{1.8}$$

と表されることを示した。同年 Picard [88] は、また、(1.6) を満たすΩ ($\subset \mathbf{R}^n$ $(n\geq 3)$) 上の調和関数 u は

$$u(X)=c\frac{1}{|X|^{n-2}}+h(X)$$

と表されることを示した。ただし、c は正の定数、h は $\{|X|<1\}$ 上の調和関数を表す。調和関数のこのような性質は 1926 年 Bouligand [14] により **Picard** 原理と命名された。尚、1925 年 Stożek [95] は条件 (1.6) は条件

$$\Omega\text{上}\ u(X)>0$$

で置き換えてもよいことを示している。

Picard 原理は、実は、1903 年 Bôcher [11] により原点でも解析的な係数 b_i, P を持つ方程式

$$\left(\Delta+\sum_{i=1}^{n}b_i(X)\frac{\partial}{\partial x_i}-P(X)\right)u(X)=0\quad (X=(x_1,\cdots,x_n)) \tag{1.9}$$

の解に関して成立することが示されていた: (1.6) を満たす (1.9) の解 u はΩ 上で

$$u(X)=cf(X)\log\frac{1}{|X|}+g(X) \tag{1.10}$$

または

$$u(X)=cf(X)\frac{1}{|X|^{n-2}}+g(X) \tag{1.11}$$

と表される。ただし、c は正の定数、fは原点でも連続な関数、gは $\{|X|<1\}$ 上の解を表す。しかしながら、大多数の研究者はこの原理を、Bouligand に倣って、Picard 原理と呼んでいるので、本論文でも Picard 原理と呼ぶことにする。

密度 Pが原点で不連続な場合の Picard 原理は、まず PがΩ上で有界な場合に研究された。 1926 年、1940 年 Gevrey [29] 、[30] はΩ上非負で有界な Pを係数とする楕円型方程式

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(X)\frac{\partial}{\partial x_i} - P(X)\right) u(X) = 0 \tag{1.12}$$

の解に関して Picard 原理 (1.10) または (1.11) が成立することを示した。 ただし、gはΩ上の有界な解を表す。 また、1954 年 Hartman-Wintner [33] は Gevrey の結果がΩ上 Pを非負と仮定しなくても成立することを$\Omega \subset \mathbf{C}$ の場合に示し、1955 年 [34] に於いて$\Omega \subset \mathbf{R}^3$の場合を研究した。 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$の場合でも Pの非負性の仮定が不要であることは 1954-1956 年 Gilberg-Serrin [31] により示された。

Ω上有界とは限らない密度 Pに関する Picard 原理の研究は Brelot により開始されたが、以後のほとんどの研究は C 内のΩ上で非負の Pを密度とする Schrödinger 方程式を対象に行われているので、今後本小節では特に断らない限り、$\Omega \subset \mathbf{C}$ とし、Ωの点は $z = x + iy$ $(i = \sqrt{-1})$ と表し、方程式は Schrödinger 方程式 (1.4) 、即ち

$$(-\Delta + P(z))u(z) = 0\ 、$$

を考え、密度 PはΩ上非負とする。 1931 年 Brelot [16] は条件

$$P(z) = O(|z|^{\alpha}) \quad (z \to 0; \alpha > -2) \tag{1.13}$$

を満たすに Pに関して Picard 原理 (1.10) ($\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ の場合は (1.11)) が成立することを示した。 また、**回転不変密度** P、即ち $P(z) = P(|z|)$ を満たす密度 P、に対しては (1.13) を

$$\iint_{\Omega} P(z) \log \frac{1}{|z|} dxdy < \infty \tag{1.14}$$

で置き換えてもよいことを 1948 年 [18] で示した。 この条件 (1.14) は 1974 年 Nakai [68] により、回転不変とは限らない、**一般密度** Pに関する条件

$$\iint_{\Omega - E} P(z) \log \frac{1}{|z|} dxdy < \infty \tag{1.15}$$

に一般化された。 ただし、Eは原点で thin である集合を表し、Pに依存しても構わない。 更に、1980 年 Nakai [74] は (1.10) の意味での Picard 原理を**強 Picard 原理**と命名し、(1.15) は強 Picard 原理が成立するための必要十分条件であることを示した。 実は強 Picard 原理が成立しない場合でも、$\log|X|^{-1}$をより大きな増大度をもつ解で置き換えて (1.8) を成立させる密度、即ち

$$PP(\Omega; \Gamma) = \{cu : c \geq 0\} \tag{1.16}$$

を満たす密度 P、の存在が [68] 以前に 1974 年 Nakai [66] により知られていた。本論文では今後、$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ の場合も含めて、Pが (1.16) を満たすとき、[66] にしたがって、Pに関する **Picard 原理**が (原点に於いて) 成立するという。

Picard 原理はまず回転不変密度に関して研究された。1974 年 Nakai [66] は回転不変密度 Pの原点に於ける**特異性指数** (3.1.3 節参照) により Picard 原理が決定されることを示し、密度 $|z|^{\alpha}$に関する Picard 原理に応用した:

$$|z|^{\alpha}\text{に関する Picard 原理の成立} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \geq -2\text{。} \tag{1.17}$$

これらの結果は 1987 年 Imai-Tada [43] 、Boukricha-Hueber [13] 、1986 年 Murata [59] により$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ の場合に拡張されている。1975 年 Nakai [69] は (1.17) を更に精密化して、原点の十分近くで

$$P(z) = |z|^{-2}\left(\log_1 |z|^{-1}\right)^2 \cdots \left(\log_k |z|^{-1}\right)^2 \left(\log_{k+1} |z|^{-1}\right)^{\alpha}$$

を満たす密度 Pに関する Picard 原理は

$$\text{成立} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \leq 2$$

であることを示した。ただし、$\log_1 = \log, \cdots, \log_{k+1} = \log(\log_k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とする。[69] では回転不変密度に関する Picard 原理の**単調性**、即ち

$$\left\{\begin{array}{l}P \leq Q \text{ のとき } Q \text{ に関する Picard 原理が成立す} \\ \text{れば、} P \text{に関する Picard 原理も成立すること、}\end{array}\right. \tag{1.18}$$

も示されている。1976 年 Kawamura-Nakai [50] は [69] での研究を継続し、特異性指数による判定法に比べてより具体的な、**P-単位判定法** (3.2.1 節参照) を開発した。その応用として、回転不変密度 Pが

$$\int_0^1 \frac{dr}{r\sqrt{r^2 P(r) + 1}} < \infty$$

を満たすとき Pに関する Picard 原理が成立しないことを示した。また、回転不変密度に関する Picard 原理の**斉次性**、即ち

$$\left\{\begin{array}{l}P \text{に関する Picard 原理が成立すれば、} cP \; (c \\ > 0) \text{ に関する Picard 原理が成立すること、}\end{array}\right. \tag{1.19}$$

も示した。P-単位判定法は [50] 以前の 1974 年に、Nakai [67] により Picard 原理の**非加法性**の証明に、応用されていた。即ち P_1, P_2に関する Picard 原理は成立するが、$P_1 + P_2$に関する Picard 原理は成立しないような回転不変密度 P_1, P_2 が構成された。尚、P-単位判定法は 1978 年 Godefroid [32] 、1980 年 Tada [98] 、に於いても研究されている (**本論文§3.3 の定理 3.10**) 。

一般密度に関する Picard 原理を研究する際、双対定理、即ち随伴方程式

$$(\Delta + 2\nabla \log e_P(z) \cdot \nabla)\, v(z) = 0 \quad \left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) \tag{1.20}$$

のΩ上の有界解 vに関する **Riemann の定理** (即ち、$\lim_{z \to 0} v(z)$ の存在) と密度 P に関する Picard 原理の同値性、は貴重な手がかりの一つになっている。 ただし e_Pは P-**単位** (3.1.1 節参照) を表す。 双対定理は 1952 年 Heins [37] により、Ωが Riemann 面の end で $P \equiv 0$ の場合に示され、その後 $P \geq 0$ の場合でも成立することが 1961 年 Hayashi [35] 、1978 年 Nakai [72] によって示された。 尚、1975 年 Nakai [70,71] はΩが多様体の end のとき非負とは限らない Pを係数に持つ方程式 (1.12) の解に関しても成立することを示している。 一方、1981 年 Segawa [91] は双対定理を、Picard 原理が成立しない場合も含む形に、拡張した。 双対定理を経由して、1975 年 Nakai [70,71] は条件

$$\iint_\Omega P(z)dxdy < \infty \tag{1.21}$$

が、1979 年 Kawamura [48] は (1.21) とは独立した条件

$$P(z) = O\left(|z|^{-2}\right) \quad (z \to 0) \tag{1.22}$$

が、各々一般密度 Pに関する Picard 原理が成立する為の十分条件であることを示したが、いずれも条件 (1.13) の一般化となっている。 [72] では (1.21) を満たす P は**有限密度**と呼ばれ、有限密度は **D-型密度**、即ち随伴方程式 (1.20) のΩ上の有界解 vの Dirichlet 積分

$$\iint_\Omega |\nabla v(z)|^2 dxdy$$

が常に有限であるような密度、であることが示され、D-型密度に対しては随伴方程式に関する Riemann の定理が成立することが示されている。 逆に、Riemann の定理が成立しても D-型密度とは限らないこと、D-型密度は有限密度とは限らないこと、が 1982 年 Nakai-Tada [77] により示されている。 一方、1977 年 Kawamura [47] は条件 (1.21) を、Ωが Riemann 面の end である場合に、一般化している。 条件 (1.22) に関する研究は Imai 、Tada により継続された。 1985 年 Imai [42] は $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ 内のΩ上で非負とは限らない Pを係数とする方程式 (1.9) に関する Picard 原理は、Pが (1.22) を満たすとき成立することを示している。 1982-1988 年 Tada [99,102,103] は条件 (1.22) は回転不変密度 Q に依存した条件

$$P(z) - Q(z) = O\left(|z|^{-2}\right) \quad (z \to 0) \tag{1.23}$$

の特別な場合、即ち $Q \equiv 0$ の場合、と考え、$Q \not\equiv 0$ の場合でも Pに関する Picard 原理は Q に関する Picard 原理と同等であることを示した (**本論文§4.2 の定理 4.4 、§4.3 の定理 4.5 、§4.4 の定理 4.9**) 。 尚、[99] では原点に於ける境界 Harnack 原

理と Picard 原理の同値性が示されている (**本論文§4.1 の定理 4.2**) 。

一般密度に関する Picard 原理についての定性的な研究は、加法性や単調性に関して進展し、意外で興味深い結果が得られている。 Picard 原理の加法性は、回転不変密度に限っても成立しないことが既に [67] で知られていたが、1980 年 Kawamura [49] は極端な非加法性、即ち任意の一般密度 Pは Picard 原理が成立するような密度 P_1, P_2により $P = P_1 + P_2$の形に常に分解できること、を示した。 単調性 (1.18) に関しては、それが回転不変密度の場合に成立する事実や Picard 原理の十分条件 (1.21) 、(1.22) 等から、その成立が自然に予想されていた。 しかし、1985 年 Nakai-Tada [80] により一般密度の場合の単調性は否定された。 更に極度の非単調性、即ち任意の密度 Pに対して $P \leq Q$ を満たしながら Picard 原理の成立する密度 Q を構成できること、が 1988 年 Nakai-Tada [88] により示された (**本論文§5.1 の定理 5.4**) 。 従って、Pが回転不変の場合でも一般の Q に対して単調性 (1.18) は成立するとは限らない (**本論文§5.1 の系 5.5**) 。 反対に、Q が回転不変の場合の単調性 (1.18) 、も 1990 年 Tada [106] により否定された (**本論文§5.3 の定理 5.10**) 。尚、一般密度に関する Picard 原理の斉次性 (1.19) については、成否はもちろん、部分的な結果さえも得られていない。

単調性の問題の否定的な解決は、皮肉にも、Picard 原理の研究の困難さを暗示している。 Picard 原理の成立のための密度に関する直接的な条件、例えば強 Picard 原理のための (1.15) の様な条件、は現在得られていない。 条件 (1.15) と異なり単調性を否定する条件でなければならず、具体的な形の予想さえも与えられていない。

1.2.2. 孤立特異点に於いて Picard 原理が成立しないような密度の研究や、連続特異点に於ける Picard 原理の研究では、得られた結果を Martin 境界の言葉に翻訳して記述することが多い。 そこで本小節では、Martin により確立された Martin 境界の理論に関する研究の歴史を概観する。

$\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ の単位球 $B = \{|X| < 1\}$ 上の調和関数は、適当な条件のもとに、Poisson 積分表示

$$u(X) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\sqrt{\pi^n}} \int_{\partial B} \frac{1 - |X|^2}{|X - Y|^n} u(Y) d\sigma(Y) \qquad (1.24)$$

される。 Γはガンマ関数を表し、σは Bの境界 (即ち単位球面) ∂Bの面積要素を表す。 1941 年 Martin [57] は (1.24) を、$\mathbf{R}^n$内の任意の領域 D上の調和関数の積分表示に、一般化した:

Martin 境界の理論. G^Dを D上の Green 関数とするとき、Martin 核

$$K^D(X,\cdot) = \frac{G^D(X,\cdot)}{G^D(A,\cdot)} \quad (X \in D)$$

がすべてその上に連続拡張できるような Dの最小の完閉化 D^*を Dの Martin 完閉化、$\partial^* D = D^* - D$を Dの Martin(理想) 境界と呼ぶ。 ただし、A は D内の固定点とする。 Martin 境界の点 Y^*を極とする Martin 核

$$K^D(\cdot,Y^*) = \lim_{Y \to Y^*} K^D(\cdot,Y)$$

が minimal の、即ち $h \le K^D(\cdot,Y^*)$ を満たす D上の正値調和関数が $K^D(\cdot,Y^*)$ の正数倍に限られる、とき Y^*を minimal 点と呼び、minimal 点の全体を$\delta^* D$と記す。D上の正値調和関数 u に対し$\delta^* D$上の測度μ_u が唯一存在して、(1.24) の一般化である表現定理

$$u(X) = \int_{\delta^* D} K^D(X,Y^*)d\mu_u(Y^*) \tag{1.25}$$

が成立する。

1947-1948 年 Brelot [17] は Martin 境界の一般的な性質を研究し、特に Dの非正則点上の Martin 境界は 1 点であることを示した。 1952 年 Parreau [86] 、1963 年 Constantinesucu-Cornea [25] 、1969 年 Helms [36] は Riemann 面上で Martin 境界の理論を展開した。 また、1956 年 Brelot [19] 、1969 年 Naïm [64] 、1971 年 Brelot [20] 、1986 年 Ikegami [40] は調和空間の Martin 境界について研究している。

Schrödinger 方程式に関する Martin 境界の研究は Riemann 面上で開始されたが、ポテンシャル論の準備が必要であった。 1952 年 Ozawa [83] は Schrödinger 方程式をはじめて Riemann 面上で研究し、Riemann 面の分類に応用した。 1954 年 Myrberg [60] は最大値原理、Harnack 不等式、Dirichlet 問題、解の収束等を研究し、Riemann 面上の Schrödinger 方程式に関するポテンシャル論の基礎を与えた。Harnack 不等式は、[60] とは独立に、1954-1956 年 Serrin [94] によっても示されている。 Serrin は非負の Pを係数とする楕円型方程式 (1.12) の解に対して示している。 また、[60] とは異なる最大値原理が 1959 年 Royden [89] により示されている。より一般的な最大値原理は 1970 年の Miranda [58] が詳しい。 尚、1974 年 Schiff [90] は Martin 境界と Wiener 境界の理論を利用して最大値原理を精密化している。

Pを密度とする Schrödinger 方程式に関する Green 関数は P-Green 関数と呼ばれるが、1954 年 Myrberg [61] は任意の Riemann 面上で、$P \ge 0$ かつ $P \not\equiv 0$ のとき P-Green 関数が存在することを示した。 $P \ge 0$ とは限らない場合の P-Green 関数の存在条件は 1972 年 Myrberg [63] 、1972-1973 年 Lahtinen [54,55,56] 、1986 年 Murata [59] により研究されている。 Martin 境界の研究の準備として、P-Green

関数の研究と同様に重要な、supersolution の研究は 1960 年 Myrberg [62] 、Nakai [65] により与えられている。 尚 Myrberg は [62] に於いて、Schrödinger 方程式の Pをはじめて**密度** (Dichte) と呼んだ。

Schrödinger 方程式に関する Martin 完閉化、Martin(理想) 境界は密度 Pに依存して、それぞれ **P-Martin 完閉化**、**P-Martin(理想) 境界**と呼ばれる。 P-Martin 境界の理論は 1954-1955 年 Ozawa [84,85] により研究が開始され、ポテンシャル論の整備にともなって、1960 年 Nakai [65] により確立された、即ち Riemann 面上の Schrödinger 方程式の正解に対し表現定理 (1.25) が示された。 表現定理は 1963 年Šur [96] により、$P\equiv 0$ の場合の $\mathbf{R}^n$上の楕円型方程式 (1.12) 、即ち

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(X)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)u(X)=0\ 、 \tag{1.26}$$

の正解に対しても示された。 更に、1964 年 Itô は多様体上の方程式 (1.26) に対して示している。 Ozawa [84,85] は Riemann 面の P-Martin 境界は理想境界の近傍の外での Pの挙動には影響されないことを示している。 より一般に、Pの摂動が P-Martin 境界に影響を及ぼさないための条件について、1979 年 Boukricha [12] 、1982 年、1988 年 Tada [99,103] 、1986 年 Murata [59] 、1989 年 Nakai [75] は研究している (**本論文§4.2 の定理 4.4 、§4.4 の定理 4.9**) 。

Nakai [65] により示された表現定理により、Pに関する Picard 原理と P-Martin 境界の関係が明らかとなった: Pの孤立特異点ζに於ける Pに関する Picard 原理の成立はζ上の P-Martin 境界が 1 点であることと同等である。 孤立していない特異点に於いても Picard 原理が同様に定義されるが、Pに関する Picard 原理と P-Martin 境界の関係は、孤立特異点に於ける場合とは少し異なる。 この関係を、$P\equiv 0$ の場合に、はじめて研究したのは Brelot [17] であった。

1.2.3. Picard 原理が成立しないような密度に対しては Pの Picard 次元、更には P-Martin 境界が研究の対象になっている。 Ωを $\mathbf{C}$ の穴あき単位円板 $\{0<|z|<1\}$ 、Γを単位円周 $\{|z|=1\}$ とするとき、定義 (1.7) の集合、即ち

$$PP(\Omega;\Gamma)=\{u:\Omega\text{上 } u\geq 0 \text{ かつ } (-\Delta+P)u=0,\ \Gamma\text{上 } u=0\}\ 、$$

の次元 (2.2.4 節参照) 、即ち原点上の minimal 点の個数 (正確には濃度) 、は (原点に於ける)Pの **Picard 次元**と呼ばれ、$\dim P$と記される。 Ωが Riemann 面の end の場合も、理想境界に於ける Pの Picard 次元が同様にして定義される。 従って Picard 原理の成立と $\dim P=1$ とは同等である。

$P \equiv 0$ の場合 $\dim P = \dim 0$ は特に $\dim \Omega$ と記され、Ω の調和次元と呼ばれている。 Bôcher [11] 、Picard [87,88] が示したように、Ω が $\mathbf{R}^n$ の穴あき球の場合は $\dim \Omega = 1$ である。 しかし、Ω が Riemann 面の end の場合はそうとは限らない。1952 年 Heins [37] は $\dim \Omega_m = m$ $(m = 2, 3, \cdots)$ を満たす Ω_m を構成した。 更に 1954 年 Kuramochi [53] 、1981 年 Segawa [91] は $\dim \Omega_{\aleph_0} = \aleph_0$ ($\aleph_0$ は可算無限濃度) を満たす $\Omega_{\aleph_0}$ を、1959 年 Constantinescu-Cornea [24] は $\dim \Omega_{\aleph} = \aleph$ ($\aleph$ は連続無限濃度) を満たす $\Omega_{\aleph}$ を、それぞれ構成した。

$P \not\equiv 0$ の場合の $\dim P$ の研究は、すべて $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ の穴あき単位球 Ω 上の $P \geq 0$ を満たす密度 P に関して行われている。 1974 年 Nakai [66] は、回転不変密度 P に対し P に関する Picard 原理が成立しないとき、原点上の P-Martin 境界は円周であること、従って $\dim P = \aleph$ であること、を示した。 Nakai [66] は $n = 2$ 、即ち Ω が $\mathbf{C}$ 内の穴あき単位円板、のときに示したが、$n \geq 3$ の場合も同様であることが 1978 年 Imai-Tada [43] 、1978 年 Boukricha-Hueber [13] 、1986 年 Murata [59] により示されている。 P が回転不変でなくても回転不変密度 Q に近い、即ち (1.23) が成立する、場合は $\dim P = \dim Q$ であることが 1987 年 Tada [102] によって示され (**本論文§4.3 の定理 4.5**) 、更に原点上の P-Martin 境界と Q-Martin 境界が一致することが 1988 年 Tada [103] により示された (**本論文§4.4 の定理 4.9**) 。従って P が回転不変であるかまたは回転不変密度に近い場合は、$\dim P$ は 1 か $\aleph$ のどちらかであることが明らかとなった。

しかし、$\dim P_m = m$ $(m = 2, 3, \cdots)$ や $\dim P_{\aleph_0} = \aleph_0$ や $\dim P_{\aleph} = \aleph$ を満たす密度 P_m や $P_{\aleph_0}$ や $P_{\aleph}$ が 1979 年 Nakai [73] 、1984 年 Nakai-Tada [78] により、穴あき単位円板 Ω 上で構成された。 $P_m, P_{\aleph_0}, P_{\aleph}$ は当然回転不変ではないし、回転不変密度に近くもない。 また、密度の大小と Picard 次元の大小は無関係であること、即ち Picard 次元の非単調性、が 1989 年 Nakai-Tada [82] により明らかにされた (**本論文§5.2 の定理 5.8**) 。 一方、典型的な一般密度

$$P(re^{i\theta}) = \begin{cases} r^{\beta_j} & (\theta_{2j-1} \leq \theta \leq \theta_{2j};\ j = 1, \cdots, k) \text{、} \\ 0 & (\text{その他の}\theta) \end{cases}$$

$$(0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{2k} = 2\pi,\ \beta_j < -2\ (j = 1, \cdots, k))$$

に対して、原点上の P-Martin 境界が 1986 年 Murata [59] により決定されている。

1.2.4. 孤立していない特異点に於ける Picard 原理の研究は 1926 年 Bouligand [14] により開始された。 $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ の領域 D、D 上の密度 P、D の境界 ∂D の点 Y に対し、集合

$$PP(D; \partial D - \{Y\}) = \{u:\ D\text{上}\ u \geq 0\ \text{かつ}\ (-\Delta + P)u = 0\text{、}\ \partial D - \{Y\}\ \text{上}\ u = 0\} \tag{1.27}$$

が1個の元から生成されるとき、即ち

$$PP(D;\partial D-\{Y\})=\{cu_0 : c\geq 0\}$$

と表せるとき、Schrödinger 方程式の密度 Pに関する **Picard 原理**が Yに於いて成立するという。 楕円型方程式 (1.12) に関しても同様に Picard 原理が定義される。尚、定義 (1.27) の条件

$$\partial D-\{Y\} \text{ 上 } u=0$$

は、正確には条件

$$Y \text{の任意の近傍の外で } u \text{ は有界で、} \partial D-\{Y\} \text{ の正則点で } u=0$$

を表す。

Yに於ける Picard 原理の成立から Y上の P-Martin 境界$\partial_P^* D(Y)$ (2.2.3 節参照) が1点であることを導くには、条件

$$\{K_P^D(\cdot,Y^*):\ Y^*\in\partial_P^* D(Y)\}\subset PP(D;\partial D-\{Y\}) \tag{1.28}$$

が必要である。 ただし $K_P^D(\cdot,Y^*)$ は Y^*を極とする D上の P-Martin 核 (2.2.3 節参照) を表す。 従って、Dが有界のとき各点 $Y\in\partial D$に於いて (1.28) を伴った Picard 原理が成立すれば、Dの P-Martin 完閉化は $\mathbf{R}^n$での Dの閉包$\overline{D}$と一致する。

本小節では (1.28) を伴った Picard 原理の研究や P-Martin 境界の研究の歴史を、Dの連続境界点に於ける場合、集積境界点に於ける場合、無限遠点に於ける場合に分けて概観する。

連続境界点に於ける Picard 原理は、まず $P\equiv 0$ の場合の Schrödinger 方程式、即ち調和関数、に対して研究された。 1933 年 Vallée Poussin [108] は∂Dの曲率が有界なとき、1968-1970 年 Hunt-Wheeden [38,39] は Dが Lipschitz 領域のとき、1982 年 Jerison-Kenig [46] は Dが NTA 領域のとき、それぞれ∂Dの各点に於いて (1.28) を伴なった Picard 原理が成立することを示した。 また 1979 年 Kesten [52] は、Dが回転体のときその頂点に於いて (1.28) を伴なった Picard 原理を研究している。 尚、Vallée Poussin は表現定理 (1.25) も示している。

楕円型方程式 (1.12) に関する Picard 原理は∂Dの形状と∂Dの近傍に於ける Pの挙動に影響される。 1964 年 Itô [44,45] は∂Dが滑らかで $P\equiv 0$ のとき、1981 年 Caffarelli-Fabes-Mortola-Salsa [21] は (1.12) が発散型で Dが Lipschitz 領域で $P\equiv 0$ のとき、1977 年 Taylor [107] 、1978 年 Ancona [2] は Dが Lipschitz 領域で $P\geq 0$ のとき、それぞれ∂Dの各点に於いて (1.28) を伴なった Picard 原理が成立することを示した。 ただし (1.12) の係数について、Itô [44,45] は$\overline{D}$上で滑

らかさを仮定し、Taylor [107]、Ancona [2] は D上で有界 Hölder 連続性を仮定しているが、Caffarelli-Fabes-Mortora-Salsa [21] は D上での連続性は仮定していない。

Ancona [2] は、(1.28) を伴なった Picard 原理の研究にとって有力な道具である **Carleson 評価と境界 Harnack 原理**を、Lipschitz 領域上の楕円型方程式に対して確立した。 Carleson 評価も境界 Harnack 原理も境界の近傍に於ける Harnack 不等式であり、調和関数の場合の Carleson 評価は、1961 年 Carleson[22] により特殊な Lipschitz 領域の境界で示された。 また調和関数の場合の境界 Harnack 原理は、1972 年 Kemper [51]、1977 年 Dahlberg [26]、1978 年 Wu [109] により Lipschitz 領域の境界で示されてる。

連続境界点に於いて Pが$+\infty$ に発散する場合の研究は、1980 年 Ancona [4] の研究を除いて、すべて Schrödinger 方程式 (1.4) に対して行われている。 1979 年 Imai [41] は、$\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ の単位球 B上の密度 Pが回転不変のとき、∂Bでの Pの増大度に関係せず、Bの P-Martin 完閉化 B_P^*は $B_P^* = \overline{B}$であることを、Picard 原理を経由せずに示した。 従って、Pの増大度が大きいとき∂Bの各点に於いて (1.28) を伴なった Picard 原理の成否は明らかにされていない。 Pが回転不変でない場合は $B_P^* = \overline{B}$であるとは限らない。 1980 年 Ancona [4] は B上の楕円型方程式 (1.12) に対し、Pが条件

$$P(X) = O\left((1-|X|)^{-2+\alpha}\right) \quad (|X| \to 1;\ \alpha > 0)$$

を満たすとき、∂Bの各点に於いて (1.28) を伴なった Picard 原理が成立することを示した。 この条件は、1984 年 Suzuki [97] により条件

$$\int_0^1 (1-r)\left\{\max_{|X|\leq r} P(X)\right\} dr < \infty$$

に、また 1986 年 Tada [101] により条件

$$P(X) = O\left((1-|X|)^{-2}\right) \quad (|X| \to 1)$$

に、それぞれ一般化された。 尚、Suzuki [97] は Bを $C^{1,\alpha}$ $(\alpha > 0)$ 級領域に一般化して示し、Tada [101] は Bを $B \subset \mathbf{C}$ に制限して示している。 ただし、段落の初めに述べたように、Suzuki [97] も Tada [101] も Schrödinger 方程式 (1.4) に対して示している。 また Suzuki [97] は、(1.28) を満たしながら Picard 原理が成立しない密度の例を与えている。

Pが連続境界の 1 点のみで$+\infty$ に発散する場合の研究は、すべて平面領域上の Schrödinger 方程式 (1.4) に対して行われている。 この場合は常に (1.28) が成立し、Picard 原理の成否のみが研究の対象となる。 1986 年 Tada [100]、Murata [59] は、単位上半円板$\Omega^+ = \{|z| < 1,\ \mathrm{Im} z > 0\}$ 上の回転不変密度 Pに関する原点

に於ける Picard 原理は、穴あき単位円板 $\{0 < |z| < 1\}$ 上で考えた Picard 原理と一致することを示した (**本論文§6.1 の定理 6.1**)。 この一致性は、Ω^+を単位扇形 $\{|z| < 1,\ \alpha < \arg z < \beta\}$ で置き換えても成立する (**本論文§6.1 の定理 6.3**)。 しかし 1989 年 Tada [104] は、一般密度に対してはこの一致性が成立するとは限らないことを示した (**本論文§6.2 の定理 6.5**)。 また 1990 年 Tada [106] は、Ω^+ 上の一般密度に関する原点に於ける Picard 原理の非単調性を示した (**本論文 5.3.3 節**)。 一方 1989 年 Tada [105] は、扇形上の領域の頂点に於いて、Picard 原理が成立するための頂点での密度の増大度と領域の形状の関係を調べている (**本論文§6.3 の定理 6.7 、定理 6.9**)。

孤立境界点でも連続境界点でもない境界点を集積境界点と呼ぶことにして、集積境界点に於ける Picard 原理や Martin 境界の研究は、1984 年 Ancona [5,6] の研究を除いて、すべて調和関数に対して行われている。 また、境界が有限個の超曲面に含まれる領域上で研究されていて、密度 Pは $P \equiv 0$ か有界と仮定されているので、どの境界点に於いてもは (1.28) 成立している。

特に境界が 1 個の超曲面に含まれる領域は **Denjoy 領域**と呼ばれるが、1979 年 Ancona [3] 、1980 年 Benedicks [10] は、それぞれ異なった方法で、Denjoy 領域 Dの Martin minimal 境界は∂Dの各点上高々2 点であることを示した。 Ancona [3] は一般領域 Uの境界点 Yに対し、Yで∂Uに接する U内の球 B_Yが存在すれば、Yを頂点とする U内の円錐は Y上の minimal 点 1 点に集積することを示した。 そしてこの事実を使って、∂Dが 1 個の C^2級超曲面に含まれる場合に、∂Dの各点上の minimal 点は高々2 点であることを示した。 Ancona はまた、B_Yが存在しないときの反例を [2,3] で与えているが、1985 年 Segawa-Tada [93] は、この反例を利用して Martin 境界の擬等角非不変性を示している。 一方 Benedicks [10] は、∂Dの点 Y上の minimal 点が 1 点であるための、即ちに Y於いて Picard 原理が成立するための、具体的な判定法を与えている。 尚、Dが Denjoy 領域でない場合は、Y上の minimal 点が 1 点であることと Y上の Martin 境界点が 1 点であることとは、同等とは限らないが、Denjoy 領域の場合は同等である。

Benedicks [10] の判定法では、Yに於ける∂Dの集積の度合いを調和測度を用いて評価しているが、1988 年 Segawa [92] は Lebesgue 測度を用いて評価し、Benedicks の判定法より具体的で精密な判定法を得た。 Segawa [92] の判定法は $D \subset \mathbf{C}$ の場合の判定法であったが、1989 年 Gardiner [27] は $D \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ の場合の判定法に一般化し、更に精密化した。 一方 1989 年 Chevallier [23] は、∂Dが 1 個の Lipschitz 超曲面に含まれるとき、∂Dの各点上の minimal 点は高々2 点であることを示した。 Chevallier [23] は更に、∂Dの $n-1$ 次元測度 (ただし $D \subset \mathbf{R}^n$) が正のとき、殆どすべての∂D の点に於いて Picard 原理が成立しないことを示した。 また$\partial D_1 \subset \partial D_2$の場合に、$\partial D_1$の点に於いて D_1上と D_2上の Picard 原理の関係を調べている。

境界が m 個 $(m \geq 2)$ の超曲面 $L_1, \cdots, L_m$ に含まれる領域 D に対しては、$L_1, \cdots, L_m$ の交点 (共有点) Y に於ける D の調和次元 $\dim D$、即ち Y 上の minimal 点の個数、が研究されている。 尚、調和次元という言葉は通常理想境界成分が 1 個の領域に対して使われ、上述の領域 D に対する $\dim D$ は Y に於ける D の**相対調和次元**と呼ばれる。

1985 年 Nakai-Sario [76] は、平面領域 D の境界が原点を始点とする m 個の半直線 $L_1, \cdots, L_m$ に含まれ、$L_1, \cdots, L_m$ が原点の回りの角の m 等分線に近いとき、原点に於いて $\dim D \leq m$ であることを示した。 この結果は、$L_1, \cdots, L_m$ が Lipschitz 超曲面でしかも角の等分面に近くない場合でも、$\overline{D}$ $(D \subset \mathbf{R}^n\ (n \geq 2))$ 上 Hölder 連続な係数を持ち $P \geq 0$ である楕円型方程式 (1.12) に対して成立する。 この事実は既に、1982-1984 年 Ancona [5,6] により知られていた。 $\dim D$ に関する研究は、現時点では上述の [76]、[5,6] 以外は発表されていない。 従って Picard 原理、即ち $\dim D = 1$、に関する結果は全く得られていない。 尚、平面領域の集積境界点 ζ に於ける相対調和次元は、等角写像に関する ζ の弱性や不安定性とは無関係であることが、1985 年 Nakai-Tada [79] により示されている。

無限遠点 ∞ に於ける Picard 原理の研究は、その殆どが ∞ に於いて (1.28) を満たしながら Picard 原理が成立しない場合の研究であり、従って ∞ 上の Martin 境界の決定を目的としている。 1972 年 Brawn [15] は $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の帯領域 $D = \mathbf{R}^n \times (0,1)$ $(n \geq 1)$ の調和 Martin 完閉化 D^* を決定した。 1986 年 Aikawa [1] は、$\mathbf{R}^m$ $(m \geq 1)$ 内の Lipschitz 領域 U に対し、$\mathbf{R}^{n+m}$ 内の帯領域 $D = \mathbf{R}^n \times U$ $(n \geq 1)$ の D^* を決定した。 更に 1989 年 Gardiner [28] は、Aikawa [1] の結果を U が NTA 領域の場合に一般化した。 一方、負曲率の Riemann 多様体 M に対し、1985 年 Anderson-Schoen [9] は Laplace-Beltrami 方程式に関する M の Martin 完閉化 M^* を決定し、1985-1987 年 Ancona [7,8] は楕円型方程式に関する M^* を決定した。

§1.3. 本論文の構成

小節 1.2.1 の最初で述べたように、Schrödinger 方程式は平面 $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ の領域上で考える場合が本質的と思われるので、本論文では、平面領域上で Schrödinger 方程式 $(-\Delta + P)u = 0$ を考える。 また、密度 P が非負の場合を扱う。

第 2 章では、Schrödinger 方程式の解のポテンシャル論的な基本性質を述べ、本論文で使用される基本的な概念と記号を定義する。 §2.1 では、最大値原理、Harnack 不等式、Dirichlet 問題、解の列の完備性、等を述べる。 §2.2 では、P-Green 関数、P-Martin 核を定義して P-Martin 完閉化、P-Martin 境界を構成し、表現定理

を述べる。 また、Picard 次元や Picard 原理を定義し、P-Martin 境界や P-Martin minimal 境界との関係を説明する。

第 3 章では、孤立境界点上の P-Martin 境界を研究する。 そのため$\Omega = \{0 < |z| < 1\}$ 上の密度 Pを考えるが、この章では Pは回転不変、即ち、$P(z) = P(|z|)$ とする。 §3.1 では、Ωの P-Martin 完閉化Ω^*_Pが、Pの特異性指数$\alpha(P)$ により決定されることを述べる。 特に、$\alpha(P) = 0$ は原点に於ける Pに関する Picard 原理の成立と同値であるが、§3.2 では、$\alpha(P) = 0$ を判定する P-単位判定法を述べる。 §3.3 では、P-単位判定法より扱い易い、1 階 P-単位判定法を導く。 §3.4 では、Picard 原理に関する Pの essential 集合を定義し、特別な Pに対する Pの essential 集合を決定する。

第 4 章に於いても、孤立境界点上の P-Martin 境界を研究するが、回転不変とは限らないΩ上の一般密度を扱う。 §4.1 では原点に於いて、一般密度に関して、Picard 原理と境界 Harnack 原理の同値性を証明する。 §4.2-4.4 では、回転不変密度 Pに近い一般密度 Q について研究する。 §4.2 では、原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立すれば、Q に関する Picard 原理も成立することを証明する。 §4.3 では、原点に於ける Q の Picard 次元と Pの Picard 次元が、一致することを証明する。 §4.4 では、原点上の Q-Martin 境界と P-Martin 境界が、一致することを証明する。

第 5 章でも、原点に於いてΩ上の密度に関する Picard 原理や Picard 次元を研究するが、特に非単調性について詳しく調べる。 §5.1 では、任意に与えられた密度 Pに対し、原点に於いて Picard 原理が成立する密度 Q を、Ω上 $P \leq Q$ を満たす様に構成する。 更に§5.2 では、$m = 2, 3, \cdots$も任意に与えて、原点に於ける Picard 次元が m である密度 Q を、Ω上 $P \leq Q$ を満たす様に構成する。 §5.3 では、原点に於いて Picard 原理が成立する回転不変密度 Q に対し、一般密度 PがΩ上 $P \leq Q$ を満たしても、Pに関する Picard 原理は成立するとは限らないことを示す。

第 6 章では、連続境界点上の P-Martin 境界を研究する。 §6.1 では、Ω上の回転不変密度 Pに対し、上半円板$\Omega^+ = \Omega \cap \{\mathrm{Im} z > 0\}$ や原点を頂点とする角領域$\Omega_\theta = \Omega \cap \{0 < \arg z < \theta\}$ $(0 < \theta < 2\pi)$ 上で考えた、原点上の P-Martin 境界を決定する。 特に、原点に於ける Pに関する Picard 原理は、Ω^+やΩ_θ上で考えてもΩ上で考えても、同等であることを証明する。 しかし、Pが回転不変でない場合は同等とは限らないことを、§6.2 で示す。 §6.3 では、角状領域の頂点に於いて Picard 原理が成立するための、密度の増大度と領域の細さとの関係を調べる。

第 7 章では、今後の研究課題として、本研究分野に於ける主な未解決問題を提示することにより、本論文を締め括る。

第2章　諸定義

本章では、Schrödinger 方程式の解の基本的な性質を述べ、本論文で使用する基本的な概念と記号を定義する。

§2.1.　解の基本的性質

2.1.1.　Dを平面領域、即ち複素平面 $\mathbf{C}$ の連結開部分集合、とする。D上の非負局所 Hölder 連続関数を D上の密度と呼ぶ。Pを D上の密度とするとき、方程式

$$(2.1) \qquad (-\Delta + P(z))u(z) = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},\ z = x + iy,\ i = \sqrt{-1}\right)$$

を、Pを密度とする **Schrödinger 方程式**と呼ぶ。最大値原理や supersolution などを考えるとき、調和関数の場合を基礎にして考えると理解し易いが、その際符号の混乱を避けるため、微分作用素

$$(2.2) \qquad L_P u(z) = (\Delta - P(z))u(z)$$

を用いると都合がよい。密度に関する局所 Hölder 連続性の仮定は、(2.1) に関する Dirichlet 問題の解が C^2級関数となるための十分条件であり、従って本論文では、(2.1) の解は C^2級関数に限ることにする。

D上の C^2級関数の全体を $C^2(D)$ で表し

$$(2.3) \qquad P(D) = \{u \in C^2(D) :\ (-\Delta + P)u = 0\}\ 、$$

$$(2.4) \qquad PP(D) = \{u \in C^2(D) :\ (-\Delta + P)u = 0,\ u \geq 0\}$$

と定義する。記号 $PP(D)$ の最初の Pは密度を表し、次の Pは非負であることを表す。従って、Q を密度とする Schrödinger 方程式の D上の非負解の全体は、$QP(D)$ で表される。特に、$P \equiv 0$ のときの $P(D)$ や $PP(D)$ は、即ち D上の調和関数の全体や非負調和関数の全体は、$H(D)$ や $HP(D)$ で表される。

$\mathbf{C}$ の部分集合 X に対して、Xの閉包を$\overline{X}$で表し、Xの境界$\overline{X}-X$を∂Xで表す。また、X上の連続関数の全体を $C(X)$ と記す。fを∂D上の関数とするとき、(2.1) に関する D上の Dirichlet 問題の境界値 fに対する解 u 、即ち

$$\lim_{D \ni z \to \zeta} u(z) = f(\zeta) \quad (\zeta \in \partial D)$$

を満たす $u \in P(D)$ 、が唯一存在すれば、u を P_f^D と記す。 特に、$P \equiv 0$ のときの P_f^D は H_f^D と記される。

2.1.2. Dを平面領域とし Pを D上の密度とするとき、$P(D)$, $PP(D)$ の関数は次の諸性質を持つことが、Myrberg [60] により示されている。

最大値原理 1. $u \in PP(D)$ は Dの 1 点 z_0で $u(z_0) = 0$ のとき $u \equiv 0$ である。

最大値原理 2. Dは有界とする。 $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ が D上 $L_P u \leq 0$ かつ ∂D上 $u \geq 0$ を満たすとき、D上 $u \geq 0$ である。

Harnack 不等式. Kを Dの完閉部分集合とするとき、K, D, Pに依存する正数 $C = C(K; D, P)$ が存在して

$$C^{-1}u(z_2) \leq u(z_1) \leq Cu(z_2) \quad (z_1, z_2 \in K;\ u \in PP(D))$$

が成立する。

Dirichlet 問題の可解性. Dは有限個の互いに素な Jordan 曲線で囲まれた有界な領域とする。 Pは$\overline{D}$を含む領域上の密度とする。 すると $f \in C(\partial D)$ のとき、(2.1) に関する D上の Dirichlet 問題の境界値 fに対する解 P_f^Dが唯一存在して

$$P_f^D(z) = H_f^D(z) - \frac{1}{2\pi}\iint_D G^D(z,\zeta)P_f^D(\zeta)P(\zeta)d\xi d\eta \tag{2.5}$$
$$(z \in D,\ \zeta = \xi + i\eta)$$

が成立する、ただし $G^D(z,\zeta)$ は D上の調和 Green 関数とする。

$P(D)$ の完備性. $P(D)$ の関数列 $\{u_n\}_1^\infty$が D上広義一様に u に収束すれば、$u \in P(D)$ である。

$P(D)$ の単調完備性. $P(D)$ の関数列 $\{u_n\}_1^\infty$が D上 $u_n \leq u_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たしているとき、$\{u_n\}$ は D上広義一様に $P(D)$ の関数に収束するか、または $+\infty$ に発散する。

最大値原理 2 の応用として、次の形の最大値原理も成立する。

最大値原理 3. Dは有界とする。 $u, v \in P(D) \cap C(\overline{D})$ が∂D上 $u \leq v$を満たすとき、D上 $u \leq v$である。

最大値原理 4. Dは有界とし、Q は $P \leq Q$ を満たす D上の密度とする。$u \in P(D) \cap C(\overline{D})$ と $v \in Q(D) \cap C(\overline{D})$ が∂D上 $u \geq v \geq 0$(または $u \geq v$かつ $u \geq 0$ を満たすとき、D上 $u \geq v$ である。

最大値原理 2 は Dが非有界の場合でも、また $u \in C^2(D)$ が $u \notin C(\overline{D})$ の場合でも成立する。 ただし境界条件 $u \geq 0$ は、条件

$$\sup\left\{\inf_{z\in D-K} u(z) : \ K\text{は } D\text{の完閉部分集合}\right\} \geq 0$$

で置き換える。 最大値原理 3,4 に関しても同様の一般化が可能である。

§2.2. P-Martin 境界と Picard 原理

2.2.1. Dを平面領域、Pを D上の密度とする。 Dの点ζに対し、次の 3 条件を満たす関数 $G_P^D(\cdot,\zeta)$ を、ζを極とする D上の P-Green 関数と呼ぶ:

(2.6) $$G_P^D(\cdot,\zeta) \in PP(D-\{\zeta\}) \text{、}$$

(2.7) $$\log|z-\zeta| - G_P^D(z,\zeta) = O(1) \quad (z \to \zeta) \text{、}$$

(2.8) $$\partial D\text{の近傍上 } G_P^D(\cdot,\zeta) \text{ は有界で, } D\text{の正則境界点で } G_P^D(\cdot,\zeta) = 0 \text{ 。}$$

特に $P \equiv 0$ のときの P-Green 関数 $G_P^D(\cdot,\zeta)$ は、調和 Green 関数であり $G^D(\cdot,\zeta)$ と記される。 $G_P^D(\cdot,\zeta)$ は高々1個存在するが、その存否は Dと Pに依存しζには依存しない。 Myrberg [60] により、$P \not\equiv 0$ のとき任意の Dに対し $G_P^D(\cdot,\zeta)$ の存在が示されている。 尚 $P \equiv 0$ の場合は、$\mathbf{C}-D$の対数容量が零のとき、かつそのときの限り、$G_P^D(\cdot,\zeta)$ が存在する。

ζも変数と考えた 2 変数関数 $G_P^D(z,\zeta)$ は次の諸性質を持つ (Nakai [65] 参照):

(2.9) $$G_P^D(z,\zeta) > 0, \quad G_P^D(\zeta,\zeta) = +\infty \quad (z,\zeta \in D) \text{、}$$

(2.10) $$G_P^D(z,\zeta) = G_P^D(\zeta,z) \quad (z,\zeta \in D) \text{、}$$

(2.11) $$\frac{1}{G_P^D(\cdot,\cdot)} \text{は } D \times D\text{上連続である、}$$

(2.12) $$D \subset D'\text{のとき } G_P^D(z,\zeta) \leq G_P^{D'}(z,\zeta) \quad (z,\zeta \in D) \text{、}$$

$$P \leq Q \text{ のとき } G_P^D(z,\zeta) \geq G_Q^D(z,\zeta) \quad (z,\zeta \in D) \text{、} \tag{2.13}$$

ただし D'は平面領域、Q は D上の密度とする。

Dが有限個の互いに素な C^3級の Jordan 曲線で囲まれた有界領域で、Pが$\overline{D}$を含む領域上の密度のとき、$G_P^D(z,\cdot)$ は$\overline{D}-\{z\}$ 上 C^2 級となる。 従って Green の公式により、$f \in C(\partial D)$ に対する P_f^Dは

$$P_f^D(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} f(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta} G_P^D(z,\zeta)ds(\zeta) \quad (z \in D) \tag{2.14}$$

と表示される。 ただし、$\partial/\partial n_\zeta$は Dに関するζでの内法線微分を表し、ds はの∂D線素を表す。 この表示は Poisson 積分表示 (1.24) の一般化となっているが、最終的な一般化が P-Martin 境界の理論に於ける表現定理である (次小節参照) 。

2.2.2. Dを平面領域とし Pを D上の密度とする。 D内に参照点 z_0を固定して D上の **P-Martin 核** $K_P^D(z,\zeta)$ を次の様に定義する。 まず $z,\zeta \in D$のとき

$$K_P^D(z,\zeta) = \begin{cases} \dfrac{G_P^D(z,\zeta)}{G_P^D(z_0,\zeta)} & (z_0 \neq \zeta) \text{、} \\ 0 & (z_0 = \zeta,\ z \neq \zeta) \text{、} \\ 1 & (z_0 = \zeta = z) \end{cases} \tag{2.15}$$

とする。 D上の連続関数 $K_P^D(z,\cdot)$ の族 $\mathcal{F} = \{K_P^D(z,\cdot) : z \in D\}$ による Dの完閉化 D_P^*が唯一存在する (Constantinescu-Cornea [25] 、Helms [36] 参照) 。 即ち、D_P^* は Dを稠密に含む完閉空間で、次の条件を満たす:

$$\text{各 } K_P^D(z,\cdot) \in \mathcal{F} \text{ は } D_P^* \text{上連続拡張できる、} \tag{2.16}$$

$$D_P^* - D \text{の点は } \mathcal{F} \text{により分離できる。} \tag{2.17}$$

この D_P^*は、z_0の位置に無関係に定まり、Dの **P-Martin 完閉化**と呼ばれ

$$\partial_P^* D = D_P^* - D \tag{2.18}$$

は Dの **P-Martin(理想) 境界**と呼ばれる。 そこで最終的に $K_P^D(z,\zeta^*)$ を $z \in D, \zeta^* \in D_P^*$に対して

$$K_P^D(z,\zeta^*) = \lim_{D \ni \zeta \to \zeta^*} K_P^D(z,\zeta) \tag{2.19}$$

と定義し、ζ^*を極とする D上の P-Martin 核と呼ぶ。 この収束は、関数族 $\{K_P^D(\cdot,\zeta)\}$ の収束として考えると $D-\{\zeta^*\}$ 上広義一様であり、従って

$$K_P^D(\cdot,\zeta^*) \in PP(D - \{\zeta^*\}) - \{0\} \text{、} \tag{2.20}$$

$$(2.21) \qquad K_P^D(\cdot,\cdot) \text{ は } D \times D_P^* - \{(z,z):\ z \in D\} \text{ 上連続}$$

である。 尚$\zeta = \zeta^* \in D$のとき、定義 (2.15) の $K_P^D(z,\zeta)$ と定義 (2.19) の $K_P^D(z,\zeta^*)$ は同一である。

D_P^*は距離空間の完備化により定義することもできる: V_0を z_0中心の D に含まれる円板とするとき、D_P^*の位相は距離

$$(2.22) \qquad d(\zeta_1^*,\zeta_2^*) = \iint_{V_0} \frac{\left|K_P^D(z,\zeta_1^*) - K_P^D(z,\zeta_2^*)\right|}{1+\left|K_P^D(z,\zeta_1^*) - K_P^D(z,\zeta_2^*)\right|} dxdy \quad (\zeta_1^*,\zeta_2^* \in D_P^*)$$

による位相と同相である。

$u \in PP(D)$ に対し D上 $v \le u$ を満たす $v \in PP(D)$ が常に $v = cu$ $(c \ge 0)$ と表されるとき、u は **minimal** であるという。 $K_P^D(\cdot,\zeta^*)$ が minimal であるような ζ^*を **minimal(境界) 点**と呼び、その全体

$$(2.23) \qquad \delta_P^* D = \{\text{minimal 点}\}$$

を Dの **minimal 境界**と呼ぶ。 調和関数の場合 (1.2.2 節参照) と同様の表現定理が、Nakai [65] により示されている:

表現定理. $u \in PP(D)$ に対し$\delta_P^* D$上の非負 Borel 測度μ_uが唯一存在して

$$u(\cdot) = \int_{\delta_P^* D} K_P^D(\cdot,\zeta^*) d\mu_u(\zeta^*)$$

が成立する。

μ_uは u の**表現測度**と呼ばれている。

2.2.3. D_P^*の点列の収束は 2 種類の位相で考えられる場合がある。 平面位相での収束は単に収束と呼び、D_P^*の位相で $\{\zeta_n\}_1^\infty$がζ^*に収束するときは

$$(2.24) \qquad P-\lim_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta^*$$

と記すことにする。 尚、平面位相での閉包や境界も単に閉包、境界と呼ぶ。

Dの境界の点ζと P-Martin 境界の点ζ^*に対し、ζに収束する D の点列 $\{\zeta_n\}_1^\infty$ で (2.24) を満たすものが存在するとき、ζ^*をζ上の P-Martin 境界点と呼ぶ。 そして集合

$$(2.25) \qquad \partial_P^* D(\zeta) = \{\zeta \text{上の } P\text{-Martin 境界点}\}$$

をζ上の P-Martin 境界と呼ぶ。 D_P^*は完閉であるので

$$\partial_P^* D(\zeta) \neq \emptyset \quad (\zeta \in \partial D)$$

であり、Dが有界なら

$$\partial_P^* D = \bigcup_{\zeta \in \partial D} \partial_P^* D(\zeta)$$

が成立する。 従って Dが有界の時

(2.26) $$\partial_P^* D(\zeta) = \{1\text{ 点 }\} \quad (\zeta \in \partial D)\text{ 、}$$

(2.27) $$\partial_P^* D(\zeta_1) \cap \partial_P^* D(\zeta_2) = \emptyset \quad (\zeta_1, \zeta_2 \in \partial D,\ \zeta_1 \neq \zeta_2)$$

が成立すれば、$D_P^* = \overline{D}$となる。 しかし一般には、(2.26) や (2.27) は成立するとは限らない。 尚 $D_P^* = \overline{D}$は、Dの恒等写像が D_P^*から$\overline{D}$の上への同相写像に拡張できることを意味する。

$\partial_P^* D(\zeta)$ の中の minimal 点の全体、即ち

(2.28) $$\delta_P^* D(\zeta) = \partial_P^* D(\zeta) \cap \delta_P^* D$$

をζ上の (P-Martin)minimal 境界と呼ぶ。 Dが有界のとき$\delta_P^* D(\zeta)$ の定義から

$$\delta_P^* D = \bigcup_{\zeta \in \partial D} \delta_P^* D(\zeta)$$

は明らかであるが、$\partial_P^* D(\zeta)$ と異なり$\delta_P^* D(\zeta) \neq \emptyset$ とは限らない。 また一般に、$\partial_P^* D(\zeta)$ が 1 点であることと$\delta_P^*(\zeta)$ が 1 点であることとは、互いに必要条件でも十分条件でもない。

2.2.4. 本小節では Dは有界領域とする。 また Pは D上の密度、z_0は $K_P^D(z,\zeta)$ の定義で使用されている Dの固定点とする。 各$\zeta \in \partial D$に対し

(2.29) $$PP(D; \partial D - \{\zeta\}) = \left\{ u \in PP(D) : \begin{array}{c} u\text{ は}\zeta\text{の任意の近傍の} \\ \text{外で有界で、}\partial D - \{\zeta\} \\ \text{の正則点では } u = 0 \end{array} \right\}\text{ 、}$$

(2.30) $$PP_1(D; \partial D - \{\zeta\}) = \{u \in PP(D; \partial D - \{\zeta\}) :\ u(z_0) = 1\}$$

と定義する。 $u \in PP_1(D; \partial D - \{\zeta\})$ が

$$u = tu_1 + (1-t)u_2 \quad (0 < t < 1;\ u_1, u_2 \in PP_1(D; \partial D - \{\zeta\}),\ u_1 \neq u_2)$$

の形に表せないとき、u は端点であるという。 端点の全体を $\mathrm{ex}.PP_1(D;\partial D-\{\zeta\})$ と記すと、各 $u\in PP_1(D;\partial D-\{\zeta\})$ に対し $\mathrm{ex}.PP_1(D;\partial D-\{\zeta\})$ 上の非負 Borel 測度ν_uが唯一存在して

$$u=\int_{\mathrm{ex}.PP_1(D;\partial D-\{\zeta\})} v d\nu_u(v)$$

が成立する (Nakai[71,72] 参照) 。 そこで集合 $\mathrm{ex}.PP_1(D;\partial D-\{\zeta\})$ の濃度を $\dim PP(D;\partial D-\{\zeta\})$ 、略して $\dim P$、と記してζに於ける Pの (D 上の)Picard 次元と呼ぶ:

(2.31) $$\dim P=\dim PP(D;\partial D-\{\zeta\})=\#(\mathrm{ex}.PP_1(D;\partial D-\{\zeta\}))\text{。}$$

尚、Dが有界でない場合や、無限遠点 ∞ が Dの境界点で$\zeta=\infty$ の場合でも、$PP(D;\partial D-\{\zeta\})$ や $\dim PP(D;\partial D-\{\zeta\})$ を同様に定義することができる。

$PP(D;\partial D-\{\zeta\})$ は定数関数 0 しか含まない場合もあるが

(2.32) $$PP(D;\partial D-\{\zeta\})\neq\{0\}\ \Rightarrow\ \delta_P^*D(\zeta)\neq\emptyset$$

である。 また $u\in PP_1(D;\partial D-\{\zeta\})$ に対しては、u が端点であることと minimal であることとは同等であるので、条件

(2.33) $$\left\{K_P^D(\cdot,\zeta^*):\ \zeta^*\in\partial_P^*D(\zeta)\right\}\subset PP(D;\partial D-\{\zeta\})$$

が成立しているときは、$PP(D;\partial D-\{\zeta\})\neq\{0\}$ であり

(2.34) $$\left\{K_P^D(\cdot,\zeta^*):\ \zeta^*\in\delta_P^*D(\zeta)\right\}=\mathrm{ex}.PP_1(D\partial D-\{\zeta\})\neq\emptyset\text{、}$$
$$\text{即ち}\#\delta_p^*D(\zeta)=\dim PP(D;\partial D-\{\zeta\})\geq 1$$

となる。 尚、ζが Dの孤立境界点の場合には任意の Pに対し (2.33) が、従って (2.34) が、成立している。

$\dim PP(D;\partial D-\{\zeta\})=1$ のとき、即ち $PP(D;\partial D-\{\zeta\})$ が適当な $u\not\equiv 0$ により

(2.35) $$PP(D;\partial D-\{\zeta\})=\{cu:\ c\geq 0\}$$

と表されるとき、Pに関する (D上の)Picard 原理がζに於いて成立するという。 ζ が Dの孤立境界点の場合には、(2.34) によりζに於いて

(2.36) $$\text{Picard 原理が成立する}\ \Leftrightarrow\ \delta_P^*D(\zeta)=\{1\text{ 点 }\}$$

である。 また、全ての$\zeta\in\partial D$に対して (2.33) が成立しているときは、次の 4 条件は同値になる:

(2.37) 全ての$\zeta\in\partial D$に於いて Picard 原理が成立する、

(2.38) 全ての$\zeta \in \partial D$に対して$\delta^*_P D(\zeta) = \{1$ 点$\}$である、

(2.39) 全ての$\zeta \in \partial D$に対して$\partial^*_P D(\zeta) = \{1$ 点$\}$である、

(2.40) $D^*_P = \overline{D}$。

第3章　回転不変密度に関する孤立境界点上のMartin境界

本章及び次章では、孤立境界点上の P-Martin 境界を研究する。 その為本章と次章を通して

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z| < 1\},\ \Gamma = \partial\Omega - \{0\} = \{|z| = 1\}\text{、}$$

$$\Omega_\rho = \{0 < |z| < \rho\},\ \Gamma_\rho = \{|z| = \rho\}\ \ (0 < \rho \leq 1)$$

とし、Ω上の密度は全て、$\Omega \cup \Gamma$を含む或領域上で局所 Hölder 連続であると仮定する。 従って、Ω上の任意の密度 Pに対して

$$\left\{K_P^\Omega(\cdot, \zeta^*) : \zeta^* \in \partial_P^*\Omega(\zeta)\right\} \subset PP(\Omega; \partial\Omega - \{\zeta\})\ \ (\zeta \in \partial\Omega) \tag{3.1}$$

$$\partial_P^*\Omega(\zeta) = \delta_P^*\Omega(\zeta) = \{1\text{ 点 }\}\ \ (\zeta \in \Gamma) \tag{3.2}$$

が成立する。 $\zeta \in \Gamma$に関する (3.1) と (3.2) は Itô [45] の方法 (または Ancona [2] の方法) で示せる。 また、$\zeta = 0$ に関する (3.1) は Harnack 不等式から従う。 (3.1) より

$$\partial_P^*\Omega(\zeta_1) \cap \partial_P^*\Omega(\zeta_2) = \emptyset\ \ (\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\Omega, \zeta_1 \neq \zeta_2)$$

であるので、Γ上の P-Martin 境界$\bigcup_{\zeta\in\Gamma} \partial_P^*\Omega(\zeta)$ はΓ自身と一致し、$\partial_P^*\Omega(0)$ が決定されれば$\partial_P^*\Omega$が、従ってΩ_P^*が、決定される。 特に次の 4 条件は互いに同値である:

(3.3)　　原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立する、

$$\delta_P^*\Omega(0) = \{1\text{ 点 }\}\text{、} \tag{3.4}$$

$$\partial_P^*\Omega(0) = \{1\text{ 点 }\}\text{、} \tag{3.5}$$

$$\Omega_P^* = \overline{\Omega}\text{。} \tag{3.6}$$

§3.1 では、Ω上の回転不変密度 Pに対する$\partial_P^*\Omega$を決定する。 §3.2 では、Ω上の回転不変密度 Pに関する原点に於ける Picard 原理の成否を判定する、P-単位判定法を説明する。 本研究で引用する回数の多い公式や定理は、その証明も付して説明する。 尚、P-Martin 核の一次独立性についての証明も与える。

§3.3 では 1 階 P-単位判定法を与え、既に知られている幾つかの結果の別証に応用する。 §3.4 では、Ω上の回転不変密度に関する Picard 原理の essential 集合を研究する。

§3.1. 回転不変密度に関する Martin 境界

Ω上の回転不変密度 Pに関する原点上の P-Martin 境界は、Ω上の P-Green 関数の Fourier 級数展開を調べることにより決定される。 本節ではその概略を述べる (Nakai [66] 参照) 。

3.1.1. PをΩ上の回転不変密度、即ち $P(z) = P(|z|)$ $(z \in \Omega)$ を満たす密度、とする。 各整数 $n = 0, 1, \cdots$に対し、密度 $Q(z) = P(z) + n^2/|z|^2$に関する定義 (2.2) の微分作用素 L_Qを $L_{P,n}$と記す。 即ち

$$L_{P,n}u(z) = \left(\Delta - P(z) - \frac{n^2}{|z|^2}\right) u(z) \tag{3.7}$$

とする。 すると任意の$\rho \in (0, 1]$ と n に対し、次の形の最大値原理が成立する。

最大値原理 5. 有界な $u \in C^2(\Omega_\rho) \cap C(\Omega_\rho \cup \Gamma_\rho)$ が

$$\Omega_\rho \text{上 } L_{P,n}u \leq 0,\ \Gamma_\rho \text{上 } u \geq 0$$

を満たせば、Ω_ρ上 $u \geq 0$ である。

証明は、$u(z) + \varepsilon \log |z|^{-1}$ $(\varepsilon > 0)$ に最大値原理 2 を適用して$\varepsilon \to 0$ とすればよい。 尚この最大値原理は、Pが回転不変でない場合でも成立する。

最大値原理 5 により、Γ_ρ上で境界値 1 をとる Schrödinger 方程式のΩ_ρ上の有界解 $e_n(z, \rho)$ が、唯一存在する。 $e_n(z, \rho)$ をΩ_ρ上の n 階 **P-単位**と呼ぶ。 特に 0 階 P-単位を単に **P- 単位**と呼ぶ。 尚、Pが回転不変でない場合でも、Ω_ρ上の n 階 P-単位や P-単位を同様に定義し、同様の記号を使用する。 Pは回転不変であるので、最大値原理 5 により $e_n(z, \rho)$ も回転不変である。 そして $(0, \rho]$ 上の rの関数 $e_n(r, \rho)$ は、方程式

$$\ell_{P,n}u(r) \equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - P(r) - \frac{n^2}{r^2}\right) u(r) = 0 \tag{3.8}$$

の、$u(\rho) = 1$ を満たす $(0, \rho)$ 上の唯一有界解となる。 この rの関数 $e_n(r, \rho)$ もΩ_ρ上の n 階 P-単位と呼ぶ。 微分作用素を $L_{P,n}$ から $\ell_{P,n}$に変更したとき、最大値原

理 5 は次の形になる。

最大値原理 6. 有界な $u \in C^2(0,\rho) \cap C(0,\rho]$ が

$$(0,\rho)\ \text{上}\ \ell_{P,n}u \le 0,\ \ u(\rho) \ge 0$$

を満たせば、$(0,\rho)$ 上 $u \ge 0$ である。

3.1.2. 最大値原理 6 から導かれる、Ω_ρ上の n 階 P-単位の基本的性質を列記する。 以下では $u'(r) = du(r)/dr$とする。 先ず

$$0 < e_0(r,\rho) = \frac{e_0(r,\delta)}{e_0(\rho,\delta)} \le 1 \quad (0 < r < \rho < \delta \le 1)\ \text{、} \tag{3.9}$$

$$0 < e_n(r,\rho) = \frac{e_n(r,\delta)}{e_n(\rho,\delta)} < 1 \quad (0 < r < \rho \le \delta \le 1, n \ge 1) \tag{3.10}$$

が成立する。 続いて

$$\ell_{P,n}\left(\frac{r^n}{\rho^n} - e_n(r,\rho)\right) \le 0$$

により

$$\begin{gathered} e_n(r,\rho) \le \frac{r^n}{\rho^n},\ \frac{e_n(r,\delta)}{r^n} \le \frac{e_n(\rho,\delta)}{\rho^n},\ \frac{n}{r} \le \frac{e_n'(r,\delta)}{e_n(r,\delta)} \\ (0 < r \le \rho \le \delta \le 1, n \ge 0) \end{gathered} \tag{3.11}$$

が順に成立する。 また

$$\ell_{P,n}\left(e_n(r,\rho) - e_{n+1}(r,\rho)\right) < 0$$

により

$$\begin{gathered} e_{n+1}(r,\rho) < e_n(r,\rho),\ \frac{e_{n+1}(r,\delta)}{e_n(r,\delta)} < \frac{e_{n+1}(\rho,\delta)}{e_n(\rho,\delta)},\ \frac{e_n'(\rho,\delta)}{e_n(\rho,\delta)} \le \frac{e_{n+1}'(\rho,\delta)}{e_{n+1}(\rho,\delta)} \\ (0 < r < \rho \le \delta \le 1, n \ge 0) \end{gathered} \tag{3.12}$$

が順に成立する。 すると (3.11) により

$$\ell_{P,n+1}\left(e_{n+1}(r,\rho) - \frac{r}{\rho}e_n(r,\rho)\right) \le 0$$

であるので

$$\begin{gathered} \frac{r}{\rho}e_n(r,\rho) \le e_{n+1}(r,\rho),\ \frac{re_n(r,\delta)}{e_{n+1}(r,\delta)} \le \frac{\rho e_n(\rho,\delta)}{e_{n+1}(\rho,\delta)}\text{、} \\ \frac{e_{n+1}'(r,\delta)}{e_{n+1}(r,\delta)} - \frac{e_n'(r,\delta)}{e_n(r,\delta)} \le \frac{1}{r} \quad (0 < r \le \rho \le \delta \le 1, n \ge 0) \end{gathered} \tag{3.13}$$

が順に成立する。 また (3.12) と (3.13) により

$$\ell_{P,n+1}\left(e_{n+1}(r,\rho)-\frac{e_{n+2}(r,\rho)e_n(r,\rho)}{e_{n+1}(r,\rho)}\right)\le 0$$

であるので

$$\frac{e_{n+2}(r,\rho)}{e_{n+1}(r,\rho)}\le\frac{e_{n+1}(r,\rho)}{e_n(r,\rho)}\quad(0<r\le\rho\le 1, n\ge 0) \tag{3.14}$$

が成立する。 最後に

$$\ell_{P,n+2}\left(e_{n+2}(r,\rho)-\frac{e_{n+1}(r,\rho)^4}{e_n(r,\rho)^3}\right)\le 0$$

から

$$\left\{\frac{e_{n+1}(r,\rho)}{e_n(r,\rho)}\right\}^3\le\frac{e_{n+2}(r,\rho)}{e_{n+1}(r,\rho)}\quad(0<r\le\rho\le 1, n\ge 0) \tag{3.15}$$

が従う。

3.1.3. $\Omega=\Omega_1$上の n 階 P-単位 $e_n(r,1)$ を単に $e_n(r)$ と記す。 $(0,1]$ 上の関数

$$\frac{e_n(r)}{e_0(r)}=\frac{e_n(r)}{e_{n-1}(r)}\cdots\frac{e_1(r)}{e_0(r)}$$

は、(3.12) により増加関数であるので、極限

$$\alpha_n(P)=\lim_{r\to 0}\frac{e_n(r)}{e_0(r)}\quad(n\ge 0)$$

が存在する。 この極限$\alpha_n(P)$ を Pの n **階特異性指数**と呼ぶ。 特に、1 階特異性指数$\alpha_1(P)$ を単に$\alpha(P)$ と記して、Pの**特異性指数**と呼ぶ。 すると、(3.14) と (3.15) により

$$0\le\alpha(P)^{(3^n-1)/2}\le\alpha_n(P)\le\alpha(P)^n<1 \tag{3.16}$$

が成立する。

3.1.4. Ω上の P-Green 関数 $G_P^\Omega(z,\zeta)$ と P-Martin 核 $K_P^\Omega(z,\zeta)$ を、それぞれ簡単に $G_P(z,\zeta), K_P(z,\zeta)$ と記す。 z_0を $K_P(z,\zeta)$ の定義で使用されるΩの固定点とする:

$$K_P(z,\zeta)=\frac{G_P(z,\zeta)}{G_P(z_0,\zeta)}\quad(z,\zeta\in\Omega)\text{ 。}$$

$\rho \in (0, |z_0|)$ を任意に固定して、$z \in \{\rho < |z| < 1\}$ と $r \in (0, \rho]$ に対し $G_P(z, re^{i\theta})$ を Fourier 級数展開する:

$$G_P(z, re^{i\theta}) = \frac{a_0(z,r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(z,r)\cos n\theta + b_n(z,r)\sin n\theta\}\text{、} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} a_n(z,r) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} G_P(z, re^{i\theta})\cos n\theta \quad (n \geq 0)\text{、} \\ b_n(z,r) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} G_P(z, re^{i\theta})\sin n\theta \quad (n \geq 1)\text{。} \end{cases}$$

区間 $(0, \rho]$ 上の r の関数 $a_n(z,r), b_n(z,r)$ は、方程式 (3.8) の (0,1) 上の有界解であるので

$$\begin{cases} a_n(z,r) = a_n(z,\rho)e_n(r,\rho) = a_n(z,\rho)\dfrac{e_n(r)}{e_n(\rho)}\text{、} \\ b_n(z,r) = b_n(z,\rho)e_n(r,\rho) = b_n(z,\rho)\dfrac{e_n(r)}{e_n(\rho)} \end{cases}$$

と表せる。 $z \in \{\rho < |z| < 1\}$ を固定すると、$a_n(z,\rho), b_n(z,\rho)$ は n に関して有界であり、(3.14) により

$$\frac{e_n(r,\rho)}{e_0(r,\rho)} = \frac{e_n(r,\rho)}{e_{n-1}(r,\rho)} \cdots \frac{e_1(r,\rho)}{e_0(r,\rho)} \leq \left\{\frac{e_1(r,\rho)}{e_0(r,\rho)}\right\}^n < 1 \quad (0 < r < \rho) \tag{3.18}$$

であるので、級数 (3.17) の収束は $r \in (0, \rho']$ $(0 < \rho' < \rho), \theta \in [0, 2\pi)$ に関して一様である。 従って$\alpha(P) = 0$ のとき、$\arg\zeta$ $(0 < |\zeta| \leq \rho')$ の挙動に関係せず

$$\lim_{\zeta \to 0} K_P(z,\zeta) = \frac{a_0(z,\rho)}{a_0(z_0,\rho)} \equiv k_P(z)$$

であり、$\alpha(P) > 0$ のとき

$$\begin{aligned} M_P(z;\theta) &= \lim_{r \to 0, \sigma \to \theta} \frac{G_P(z, re^{i\sigma})}{e_0(r)} \\ &= \frac{a_0(z,\rho)}{2e_0(\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(P)}{e_n(\rho)}\{a_n(z,\rho)\cos n\theta + b_n(z,\rho)\sin n\theta\} \end{aligned}$$

と置いて

$$\lim_{r \to 0, \sigma \to \theta} K_P(z, re^{i\sigma}) = \frac{M_P(z;\theta)}{M_P(z_0;\theta)} \equiv k_P(z;\theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

である。

3.1.5. $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$のとき $z \in \Omega$の関数として $k_P(z,\theta_1) \not\equiv k_P(z,\theta_2)$ であることを、Nakai [66] は $z \in \Omega - \overline{\Omega}_\rho = \{\rho < |z| < 1\}$ の関数の族

$$\{a_n(z,\rho)\ (n \geq 0),\ b_n(z,\rho)\ (n \geq 1)\}$$

の一次独立性に基づいて示しているが、ここでは別の証明を与える。

Pの回転不変性と一般化された最大値原理 2(2.1.2 節参照) により、Ω上の P-Green 関数は次の性質を持つ:

$$G_P(z,\zeta) = G_P(ze^{i\theta},\zeta e^{i\theta}) \quad (z,\zeta \in \Omega;\ \theta \in \mathbf{R}) \text{、} \tag{3.19}$$

$$\begin{gathered} G_P(z,re^{i\sigma}) = G_P(z,re^{i\tau}) \\ \left(z \in \Omega,\ \left|\arg z - \frac{\sigma+\tau+\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2},\ 0 < r < 1;\ \sigma,\tau \in \mathbf{R}\right) \text{、} \end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered} G_P(z,re^{i\sigma}) \geq G_P(z,re^{i\tau}) \\ \left(z \in \Omega,\ \frac{\sigma+\tau}{2} - \pi \leq \arg z \leq \frac{\sigma+\tau}{2},\ 0 \leq \sigma < \tau < 2\pi\right) \text{、} \end{gathered} \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered} G_P(xe^{i(\sigma+\theta)},re^{i\theta}) \geq G_P(xe^{i(\tau+\theta)},re^{i\theta}) \\ (0 < x < 1,\ 0 < r < 1,\ 0 \leq |\sigma| \leq |\tau| \leq \pi,\ \theta \in \mathbf{R}) \text{。} \end{gathered} \tag{3.22}$$

一方

$$M_P(z;\theta) = \lim_{r\to 0,\sigma\to\theta} \frac{G_P(z,re^{i\sigma})}{e_0(r)} \quad (z \in \Omega,\ \theta \in \mathbf{R})$$

であるので、$M_P(z;\theta)$ も同様の性質を持つ:

$$M_P(z;\sigma) = M_P(ze^{i\tau};\sigma+\tau) \quad (z \in \Omega;\ \sigma,\tau \in \mathbf{R}) \text{、} \tag{3.23}$$

$$\begin{gathered} M_P(z;\sigma) = M_P(z;\tau) \\ \left(z \in \Omega,\ \left|\arg z - \frac{\sigma+\tau+\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2};\ \sigma,\tau \in \mathbf{R}\right) \text{、} \end{gathered} \tag{3.24}$$

$$\begin{gathered} M_P(z;\sigma) \leq M_P(z;\tau) \\ \left(z \in \Omega,\ \frac{\sigma+\tau}{2} - \pi \leq \arg z \leq \frac{\sigma+\tau}{2},\ 0 \leq \sigma < \tau < 2\pi\right) \text{、} \end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered} M_P(xe^{i(\sigma+\theta)};\theta) \geq M_P(xe^{i(\tau+\theta)};\theta) \\ (0 < x < 1,\ 0 \leq |\sigma| \leq |\tau| \leq \pi,\ \theta \in \mathbf{R}) \text{。} \end{gathered} \tag{3.26}$$

$k_P(\cdot;\theta_1)\not\equiv k_P(\cdot;\theta_2)$ を背理法で証明するため、$k_P(\cdot;\theta_1)\equiv k_P(\cdot;\theta_2)$ となる θ_1,θ_2 $(0\le\theta_1<\theta_2<2\pi)$ の存在を仮定する。 $\arg z=(\theta_1+\theta_2)/2$ を満たす $z\in\Omega$をとると、(3.24) により $M_P(z;\theta_1)=M_P(z;\theta_2)$ となり、一方 $k_P(z;\theta_1)=k_P(z;\theta_2)$ であるので、$M_P(z_0;\theta_1)=M_P(z_0;\theta_2)$ となる。 従って

$$M_P(\cdot;\theta_1)=M_P(\cdot;\theta_2)$$

である。 この式と (3.23) により

$$M_P(z;\theta_1-\theta_2)=M_P(ze^{i\theta_2};\theta_1)=M_P(ze^{i\theta_2};\theta_2)=M_P(z;0)\text{ 、}$$

$$\text{同様に } M_P(z;\theta_2-\theta_1)=M_P(z;0)\quad(z\in\Omega)$$

であるので

$$\theta_3=\min\left(\theta_2-\theta_1,2\pi-(\theta_2-\theta_1)\right)$$

と置くと

$$M_P(z;0)=M_P(z;\theta_3)=M_P(ze^{-i\theta_3};0)\quad(z\in\Omega)$$

となる。 従って (3.24) により、$r\in(0,1)$ に対し

$$M_P(r;0)=M_P(re^{-in\theta_3};0)=M_P(re^{in\theta_3};0)\quad(n=0,1,\cdots)\text{ 、}$$

$$M_P(re^{\pi i};0)=M_P(re^{(\pi-\theta_3)i};0)$$

となる。 $0<\theta_3\le\pi$であるので$\pi-\theta_3\le n\theta_3\le\pi$を満たす自然数 n が存在し、その n に対し (3.26) により

$$M_P(r;e^{in\theta_3})\le M_P(re^{(\pi-\theta_3)i};0)$$

となるが、同時に

$$M_P(r;0)\ge M_P(re^{\pi i};0)$$

も成立しているので

$$M_P(r;0)=M_P(re^{\pi i};0)$$

となる。 即ち、$M_P(\cdot;0)$ は回転不変である。 (3.23) により $M_P(\cdot;\theta)$ も、従って $k_P(\cdot;\theta)$ も、回転不変である。

表現定理により $u\in PP(\Omega;\Gamma)$ を積分表示したときの表現測度をμ_uとする。μ_uの台 $\mathrm{supp}\mu_u$は$\delta_P^*(0)$ に含まれるので、u は $k_P(\cdot;\theta)$ $(0\le\theta<2\pi)$ を核とする積分で表示され、従って回転不変となる。 即ち、$PP(\Omega;\Gamma)$ の関数は全て回転不変となる。 ところが$\alpha(P)>0$ と

$$\frac{e_0(r)}{e_0(t)^2}=\left\{\frac{e_1(t)}{e_0(t)}\right\}^2\frac{e_0(r)}{e_1(t)^2}\ge\alpha(P)^2\frac{e_1(r)}{e_1(t)^2}\quad(r,t\in(0,1])$$

により、$z = \mathrm{e}^{i\theta}$の関数

$$e_0(r)\int_r^1 \frac{dt}{te_0(t)^2} + \alpha(P)^2 e_1(r)\int_r^1 \frac{dt}{te_1(t)^2}\sin\theta$$

は $PP(\Omega;\Gamma)$ に属するが、回転不変ではない。 この矛盾により、$k_P(\cdot;\theta_1) \not\equiv k_P(\cdot;\theta_2)$ $(0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi)$ でなければならない。

3.1.6. 前の 2 小節の議論により、回転不変密度 Pに関するΩの Martin 完閉化Ω_P^*は次のように決定される:

定理 3.1. PがΩ上の回転不変密度の時、Ωから $\{\alpha(P) < |z| < 1\}$ への同相写像

$$\pi_P(z) = \{\alpha(P) + (1-\alpha(P))|z|\}\frac{z}{|z|}$$

はΩ_P^*から $\{\alpha(P) \leq |z| \leq 1\}$ への同相写像に拡張され、$\partial_P^*\Omega(0) = \delta_P^*\Omega(0)$ である。

$\alpha(P) = 0$ のときの P-Martin 核 $K_P(\cdot,\pi_P^{-1}(0)) = k_P(\cdot)$ と、$\alpha(P) > 0$ のときの P-Martin 核 $K_P(\cdot,\pi_P^{-1}(\alpha(P)\mathrm{e}^{i\theta}))$ が、それぞれ minimal であることは、(2.34) と (3.23) から従う。

定理 3.1 により、Pの原点に於ける Picard 次元 $\dim P = \dim PP(\Omega;\Gamma)$ は$\alpha(P)$で表すことができる:

$$\dim P = 1 + \alpha(P)\cdot\aleph、 \tag{3.27}$$

ただし$\aleph$は連続体の濃度を表す。 従って Picard 原理も$\alpha(P)$ で決定される:

定理 3.2. Ω上の回転不変密度 Pに関する原点に於ける Picard 原理は、$\alpha(P) = 0$ の時かつその時に限り、成立する。

§3.2. P-単位判定法

PをΩ上の回点不変密度とするとき、原点に於けるPに関する Picard 原理や原点上の P-Martin 境界は、Pの特異性指数$\alpha(P)$ により決定される。 本節では、$\alpha(P) = 0$ かどうかを調べるための P-単位判定法を説明する (Nakai [69] 、Kawamura-Nakai [50] 参照)。

3.2.1. PをΩ上の回転不変密度としΩ上の n 階 P-単位を $e_n(r)$ とする。 区間 $[0,\infty)$ 上の関数

$$a_n(t) = \mathrm{e}^{-t}\frac{e_n'(\mathrm{e}^{-t})}{e_n(\mathrm{e}^{-t})}$$

は、**Riccati 方程式**

$$-a'(t) + a(t)^2 = \mathrm{e}^{-2t}P(\mathrm{e}^{-t}) + n^2 \tag{3.28}$$

の $[0,\infty)$ 上の唯一非負解であり、**Riccati 成分**と呼ばれる。 特に Riccati 成分 $a_0(t), a_1(t)$ の性質を調べることにより、$\alpha(P) = 0$ の判定法

$$\alpha(P) = 0 \ \Leftrightarrow\ \int_0^\infty \frac{dt}{a_0(t)+1} = \infty \tag{3.29}$$

が得られる。 この判定法の $e_0(r)$ による記述を **P-単位判定法**と呼ぶ:

定理 3.3. Ω上の回転不変密度 Pに対し

$$\alpha(P) = 0 \ \Leftrightarrow\ \int_0^1 \frac{dr}{r\left(r\dfrac{e_0'(r)}{e_0(r)}+1\right)} = \infty\ 。\tag{3.30}$$

正数 c, kが存在して

$$\phi(r_1) + k \leq c(\phi(r_2) + k) \quad (0 < r_2 \leq r_1 \leq 1)$$

が成立すれば、関数$\phi(r)$ は $r \to 0$ のとき**殆ど増加**であると言うが、$r^2P(r)$ が殆ど増加の場合、Pを直接調べて$\alpha(P) = 0$ を判定する方法が得られている:

定理 3.4. Ω上の回転不変密度 Pに対し、$r^2P(r)$ が $r \to 0$ の時殆ど増加であるなら

$$\alpha(P) = 0 \ \Leftrightarrow\ \int_0^1 \frac{dr}{r\sqrt{r^2P(r)+1}} = \infty\ 。\tag{3.31}$$

$r^2P(r)$ が殆ど増加ではないとき、(3.31) に於いて $\Leftarrow$は成立するとは限らない。 しかし、$\Rightarrow$ は成立する:

定理 3.5. Ω上の回転不変密度 Pに対し

$$\alpha(P)=0 \;\Rightarrow\; \int_0^1 \frac{dr}{r\sqrt{r^2P(r)+1}}=\infty \text{。} \tag{3.32}$$

以上の判定法を用いて次の諸結果が得られている。

系 3.6. Ω上の回転不変密度 P, Q に対し

$$\Omega\text{上 } P\leq Q \;\Rightarrow\; \dim P\leq \dim Q \tag{3.33}$$

が成立する、ただし $\dim P=\dim PP(\Omega;\Gamma), \dim Q=\dim QP(\Omega;\Gamma)$ とする。

系 3.7. Ω上の回転不変密度 Pと正数 c に対し

$$\dim(cP)=\dim P\text{。} \tag{3.34}$$

例 3.8. $P(z)=|z|^s$に対し

$$\alpha(P)=0 \;\Leftrightarrow\; s\geq -2\text{。}$$

例 3.9. $\log_1=\log,\cdots,\log_{n+1}=\log(\log_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ とするとき

$$P(z)=\frac{1}{|z|^2}\left(\log_1|z|^{-1}\right)^2\cdots\left(\log_n|z|^{-1}\right)^2\left(\log_{n+1}|z|^{-1}\right)^s$$

に対し

$$\alpha(P)=0 \;\Leftrightarrow\; s\leq 2\text{。}$$

§3.3. 1階P-単判定法

本節では、P単位判定法より扱い易い1階 P-単位判定法を導く。 またそれを使用して、定理3.3、系3.7、例3.8、$n=1$の場合の例3.9、のそれぞれの別証を与える。

3.3.1. PをΩ上の回転不変密度とし、$e_n(r)$ をΩ上の n 階 P-単位とする。(0,1] 上の rの関数

$$b(r)=\left\{\log\frac{e_2(r)}{e_1(r)}\right\}'=\frac{e_2'(r)}{e_2(r)}-\frac{e_1'(r)}{e_1(r)}$$

は (3.12) により

$$\begin{aligned}b'(r)&=\frac{3}{r^2}-\frac{1}{r}b(r)-b(r)\left\{\frac{e_2'(r)}{e_2(r)}+\frac{e_1'(r)}{e_1(r)}\right\}\\&\leq\frac{3}{r^2}-\frac{1}{r}b(r)-\frac{2e_1'(r)}{e_1(r)}b(r)\end{aligned}$$

を満たすので

$$b(r)\leq\frac{e_1(r)}{2r^2e_1'(r)}\{3-rb(r)-r^2b'(r)\}$$

であり、更に (3.11) と (3.13) により

$$\begin{aligned}\int_r^1 b(t)dt&\leq\frac{3}{2}\int_r^1\frac{e_1(t)}{t^2e_1'(t)}dt-\frac{1}{2}\int_r^1\frac{e_1(t)}{te_1'(t)}b(t)dt-\left[\frac{e_1(t)}{2e_1'(t)}b(t)\right]_r^1\\&\quad+\frac{1}{2}\int_r^1\left(1-\left\{\frac{e_1(t)}{e_1'(t)}\right\}^2\left\{P(t)+\frac{1}{t^2}\right\}+\frac{e_1(t)}{te_1'(t)}\right)b(t)dt\\&\leq\frac{3}{2}\int_r^1\frac{e_1(t)}{t^2e_1'(t)}dt-\frac{e_1(r)}{2e_1'(1)}b(1)+\frac{e_1(r)}{2e_1'(r)}b(r)+\frac{1}{2}\int_r^1 b(t)dt\\&\leq\frac{3}{2}\int_r^1\frac{e_1(t)}{t^2e_1'(t)}dt+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_r^1 b(t)dt\end{aligned}$$

である。 従って

$$\log\frac{e_1(r)}{e_2(r)}\leq 3\int_r^1\frac{e_1(t)}{t^2e_1'(t)}dt+1\text{、}$$

即ち

$$\frac{e_2(r)}{e_1(r)}\geq\exp\left(-3\int_r^1\frac{e_1(t)}{t^2e_1'(t)}dt-1\right)\text{、}\tag{3.35}$$

が成立する。 一方 $(0,1]$ 上の r の関数

$$E(r) = e_1(r)\exp\left(-\int_r^1 \frac{e_1(t)}{t^2 e_1'(t)}dt\right)$$

は

$$\ell_{P,2}\{E(r) - e_2(r)\} = -\left\{\frac{e_1(r)}{re_1'(r)}\right\}^2 P(r)E(r) \leq 0$$

を満たすので $e_2(r) \leq E(r)$ 、即ち

$$\frac{e_2(r)}{e_1(r)} \leq \exp\left(-\int_r^1 \frac{e_1(t)}{t^2 e_1'(t)}dt\right) \text{、} \tag{3.36}$$

が成立する。そこで、(3.16) と (3.35) と (3.36) により **1 階 P-単位判定法**が得られる:

定理 3.10. Ω上の回転不変密度 Pに対し

$$\alpha(P) = 0 \iff \int_0^1 \frac{e_1(r)}{r^2 e_1'(r)}dr = \infty \text{ 。}$$

尚、(3.11) と (3.12) と (3.36) により不等式

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{e_0'(r)}{e_0(r)} + \frac{1}{r}\right\} \leq \frac{e_1'(r)}{e_1(r)} \leq \frac{e_0'(r)}{e_0(r)} + \frac{1}{r}$$

が成立するので、定理 3.10 の証明は定理 3.3 の証明の別証を与える。

3.3.2. 本小節では系 3.7 の別証を与える。そこで、P, Q は $P(z) \leq Q(z)$ $(z \in \Omega)$ を満たすΩ上の回転不変密度とする。 Ω_ρ $(0 < \rho \leq 1)$ 上の n 階 P-単位、n 階 Q-単位をそれぞれ $e_n(r,\rho), f_n(r,\rho)$ とすると

$$\ell_{P,n}\{e_n(r,\rho) - f_n(r,\rho)\} \leq 0$$

により、順に

$$f_n(r,\rho) \leq e_n(r,\rho),\ \frac{f_n(r,\delta)}{e_n(r,\delta)} \leq \frac{f_n(\rho,\delta)}{e_n(\rho,\delta)},\ \frac{e_n'(r,\delta)}{e_n(r,\delta)} \leq \frac{f_n'(r,\delta)}{f_n(r,\delta)} \tag{3.37}$$
$$(0 < r \leq \rho \leq \delta \leq 1,\ n \geq 0)$$

が成立する。 従って

$$\ell_{Q,n}\left\{f_{n+1}(r,\rho) - f_n(r,\rho)\frac{e_{n+1}(r,\rho)}{e_n(r,\rho)}\right\} \leq 0$$

となり

$$\frac{e_{n+1}(r,\rho)}{e_n(r,\rho)} \le \frac{f_{n+1}(r,\rho)}{f_n(r,\rho)} \quad (0<r\le\rho\le 1,\ n\ge 0) \tag{3.38}$$

が成立する (Imai [41] 参照)。 尚、(3.37) と定理 3.10 により系 3.6 の別証が得られるが、(3.38) を使用すれば定理 3.10 は不要である。

ここで特に、定数 c $(c>1)$ に対し $Q=cP$の場合を考える。 すると不等式

$$\ell_{Q,n}\{f_n(r,\rho)-e_n(r,\rho)^c\} = -(c-1)e_n(r,\rho)^c\left(c\left\{\frac{e_n'(r,\rho)}{e_n(r,\rho)}\right\}^2+\frac{n^2}{r^2}\right)\le 0$$

により、順に

$$e_n(r,\rho)^c \le f_n(r,\rho),\ \frac{e_n(r,\delta)^c}{f_n(r,\delta)} \le \frac{e_n(\rho,\delta)^c}{f_n(\rho,\delta)},\ \frac{f_n'(r,\delta)}{f_n(r,\delta)} \le c\frac{e_n'(r,\delta)}{e_n(r,\delta)} \tag{3.39}$$
$$(0<r\le\rho\le\delta\le 1,\ n\ge 0)$$

が成立する。 一方 $P\le Q$ により、(3.37) も成立しているので

$$\frac{1}{c}\frac{e_1(r)}{e_1'(r)} \le \frac{f_1(r)}{f_1'(r)} \le \frac{e_1(r)}{e_1'(r)}$$

であり、従って定理 3.10 を使用して $\dim P = \dim Q = \dim(cP)$ を得る。 尚、$0<c<1$ の場合でも

$$\dim P = \dim\left(\frac{1}{c}cP\right) = \dim(cP)$$

となる。

3.3.3. 本小節では例 3.8 の別証を与える。 そこで、正数ε $(\varepsilon<1)$ に対しΩ上の回転不変密度

$$P(z)=\frac{1}{|z|^{2+2\varepsilon}},\quad Q(z)=\frac{1}{|z|^{2+2\varepsilon}}-\frac{\varepsilon}{|z|^{2+\varepsilon}}$$

を考える。 Ω上の n 階 P-単位と n 階 Q-単位をそれぞれ $e_n(r), f_n(r)$ とすると、$Q\le P$により (3.12) と (3.37) から

$$\frac{f_0'(r)}{f_0(r)} \le \frac{e_0'(r)}{e_0(r)} \le \frac{e_1'(r)}{e_1(r)}$$

が従う。 更に

$$f_0(r)=\exp\left(\frac{1-r^{-\varepsilon}}{\varepsilon}\right)$$

であることに注意すると

$$\int_0^1 \frac{e_1(r)}{r^2 e_1'(r)}dr \le \int_0^1 \frac{f_0(r)}{r^2 f_0'(r)}dr = \int_0^1 \frac{1}{r^{1-\varepsilon}}dr < \infty$$

がわかる。 従って例 3.8 の⇒ が得られる。 一方、密度 $R(z) = |z|^{-2}$に対するΩ上の 1 階 R-単位 $g_1(r)$ は $g_1(r) = r$であるので、(3.37) により例 3.8 の ⇐も得られる。

3.3.4. 本小節では $n = 1$ の場合の例 3.9 の別証を与える。 そこで、Ω上の回転不変密度

$$P(z) = \frac{1}{|z|^2}\left(\log|z|^{-1}\right)^2, \quad Q(z) = \frac{4}{|z|^2}\left(\log\frac{\mathrm{e}}{|z|}\right)^2 - \frac{3}{|z|^2}$$

を考え、Ω上の 1 階 P-単位と 1 階 Q-単位をそれぞれ $e_1(r), f_1(r)$ とする。 すると、不等式 $P \le Q$ と等式

$$f_1(r) = \exp\left(1 - \left(\log\frac{\mathrm{e}}{r}\right)^2\right)$$

と (3.12) により

$$\int_0^1 \frac{e_1(r)}{r^2 e_1'(r)}dr \ge \int_0^1 \frac{f_1(r)}{r^2 f_1'(r)}dr = \int_0^1 \frac{dr}{2r\log(\mathrm{e}/r)} = \infty$$

が成立し、$n = 1$ の場合の例 3.9 の ⇐が得られる。

次に、正数ε ($\varepsilon < 1$) に対しΩ上の回転不変密度

$$P(z) = \frac{1}{|z|^2}\left(\log\frac{1}{|z|}\right)^{2+2\varepsilon}, \quad Q(z) = 72P(z) \text{ 、}$$

$$R(z) = \frac{(2+\varepsilon)^2}{|z|^2}\left(\log\frac{\mathrm{e}}{|z|}\right)^{2+2\varepsilon} - \frac{(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)}{|z|^2}\left(\log\frac{\mathrm{e}}{|z|}\right)^{\varepsilon}$$

を考え、Ω上の n 階 P-単位、n 階 Q-単位、n 階 R-単位をそれぞれ $e_n(r), f_n(r), g_n(r)$ とする。 すると、不等式

$$\begin{aligned} R(z) &\le \frac{9}{|z|^2}\left(1 + \log\frac{1}{|z|}\right)^{2+2\varepsilon} \\ &\le \frac{9\cdot 2^{1+2\varepsilon}}{|z|^2}\left(1 + \left(\log\frac{1}{|z|}\right)^{2+2\varepsilon}\right) \\ &\le Q(z) + \frac{9^2}{|z|^2} \end{aligned}$$

と (3.39),(3.13),(3.37) により

$$72\frac{e_1'(r)}{e_1(r)} \geq \frac{f_1'(r)}{f_1(r)} \geq \frac{f_9'(r)}{f_9(r)} - \frac{8}{r} \geq \frac{g_0'(r)}{g_0(r)} - \frac{8}{r}$$

が成立する。更に等式

$$g_0(r) = \exp\left(1 - \left(\log\frac{\mathrm{e}}{r}\right)^{2+\varepsilon}\right)$$

により

$$72\frac{e_1'(r)}{e_1(r)} \geq \frac{2+\varepsilon}{r}\left(\log\frac{\mathrm{e}}{r}\right)^{1+\varepsilon} - \frac{8}{r} \geq \frac{1}{r}\left(\log\frac{\mathrm{e}}{r}\right)^{1+\varepsilon} \quad (0 < r \leq \mathrm{e}^{-7})$$

であるので

$$\int_0^1 \frac{e_1(r)}{r^2 e_1'(r)}dr \leq \int_{\mathrm{e}^{-7}}^1 \frac{e_1(r)}{r^2 e_1'(r)}dr + 72\int_0^{\mathrm{e}^{-7}} \frac{dr}{r(\log(\mathrm{e}/r))^{1+\varepsilon}} < \infty$$

が成立し、$n=1$ の場合の例 3.9 の⇒ が得られる。

§3.4. Picard 原理の essential 集合

3.4.1. 原点に於いて、Ω上の回転不変密度 Pに関する Picard 原理が成立しているとき、Ω上の回転不変密度 Q がΩ上 $Q \leq P$を満たせば、系 3.6 により、Q に関する Picard 原理も成立する。 特に密度 $P(z) = |z|^{-2}$に関しては、Q が原点に収束する適当な同心円環の列の上で $Q \leq P$を満たせば、Q に関する Picard 原理が成立する、ことが知られている。 このような円環列を表すため、本節では、数列 $\{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty$ は常に条件

$$0 < b_{n+1} < a_n < b_n < 1 \ (n = 1, 2, \cdots), \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

を満たすものとし

$$A = A(\{a_n\}, \{b_n\}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n \leq |z| \leq b_n\}$$

と定義する。 Ω上の回転不変密度 Pに対し、A 上 $Q \leq P$を満たすΩ上の任意の回転不変密度 Q に関する Picard 原理が、原点に於いて成立するとき、A を Pに関する Picard 原理の、または単に Pの、essential 集合と呼ぶ。 Pに関する Picard 原理が成立しないとき、Pの essential 集合は存在しないが、Picard 原理が成立するとき常に essential 集合が存在するかどうかは不明である。 特に密度 $P(z) = |z|^{-2}$

に関しては、次のようなの essential 集合の存在が知られている (Kawamura [48] 参照): 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{b_n}{a_n} \right)^2 = \infty \tag{3.40}$$

を満たせば、$A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ は密度 $|z|^{-2}$ の essential 集合である。

本節では、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が条件 (3.40) を満たさないとき A は密度 $|z|^{-2}$ の essential 集合ではないことを、従って密度 $|z|^{-2}$ の essential 集合は条件 (3.40) で決定されることを、示す。 また、密度 $|z|^{-2}(\log |z|^{-1})^2$ の essential 集合も決定する。

3.4.2. PはΩ上の回転不変密度で、定数 a, b, α $(0 < a < b < 1, \alpha \geq 0)$ に対し $P(r) = \alpha/r^2$ $(a \leq r \leq b)$ を満たしているとする。 Ω上の一階 P-単位を $e_1(r)$ とすると、$e_1(r)$ は区間 $[a, b]$ 上で

$$e_1(r) = \lambda r^{\beta} + \mu r^{-\beta} \quad (\beta = \sqrt{\alpha + 1})$$

と表示される。 (3.9) と (3.11) により $e_1(a) > 0, e_1'(a) > 0$ であるので$\lambda > 0$ である。 更に $e_1'(a)/e_1(a) \geq a^{-1}$により

$$-a^{2\beta} < \frac{\mu}{\lambda} \leq \frac{\beta - 1}{\beta + 1} a^{2\beta} \tag{3.41}$$

となっている。 従って、積分

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{e_1(r)}{r^2 e_1'(r)} dr &= \int_a^b \frac{1}{\beta} \left(\frac{2\lambda r^{2\beta - 1}}{\lambda r^{2\beta} - \mu} - \frac{1}{r} \right) dr \\ &= \frac{1}{\beta^2} \log \frac{a^{\beta}(b^{2\beta} - \mu/\lambda)}{b^{\beta}(a^{2\beta} - \mu/\lambda)} \end{aligned} \tag{3.42}$$

は次のように評価される:

$$\int_a^b \frac{e_1(r)}{r^2 e_1'(r)} dr > \frac{1}{\beta^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^{\beta} + \left(\frac{a}{b} \right)^{\beta} \right\}, \tag{3.43}$$

$$\int_a^b \frac{e_1(r)}{r^2 e_1'(r)} dr \leq \frac{1}{\beta^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^{\beta} + \left(\frac{a}{b} \right)^{\beta} + \beta \left(\left(\frac{b}{a} \right)^{\beta} - \left(\frac{a}{b} \right)^{\beta} \right) \right\}。 \tag{3.44}$$

PはΩ上の回転不変密度で、各区間$[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 上 $P(r) = \alpha_n/r^2$ $(\alpha_n \geq 0)$ を満たしているものとする。 Q は $A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ 上 $Q \leq P$を満たすΩ上の任意の回転不変密度とする。 更にΩ上の回転不変密度

$$R(z) = \max(P(z), Q(z)) \quad (z \in \Omega)$$

を考え、Ω上の1階Q-単位、1階R-単位をそれぞれ$f_1(r), g_1(r)$とする。 (3.37) により

$$\frac{f_1(r)}{f_1'(r)} \geq \frac{g_1(r)}{g_1'(r)} \quad (0 < r < 1)$$

となっているが、(3.43) により$\beta_n = \sqrt{\alpha_n + 1}$と置いて

$$\int_{a_n}^{b_n} \frac{g_1(r)}{r^2 g_1'(r)} dr > \frac{1}{\beta_n^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{\beta_n} + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\beta_n} \right\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

であるので、定理 3.10 を用いて次の補題が得られる。

補題 3.11. Pは各区間$[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 上の値が $P(r) = \alpha_n/r^2$ $(\alpha_n \geq 0)$ となっている、Ω上の回転不変密度とする。 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{\beta_n} + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\beta_n} \right\} = \infty \quad (\beta_n = \sqrt{\alpha_n + 1})$$

を満たすとき、$A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ は Pの essential 集合である。

3.4.3. 小節 3.4.6 に於いて補題 3.11 の逆が成立することを示すが、本小節以降小節 3.4.5 までは、その準備に充てる。

ε, c, a, b は条件$\varepsilon < 1, c < a < b < 1$を満たす正数とする。 区間$[c, b]$上の関数

$$h_\varepsilon(r) = 1 - (1 - \varepsilon) \frac{\log(b/r)}{\log(b/a)}$$

を考えると、$h_\varepsilon(r)$ は $\ell h_\varepsilon(r) = 0, h_\varepsilon(a) = \varepsilon, h_\varepsilon(b) = 1$ を満たす、ただし $P \equiv 0, n = 0$ に関する (3.8) の $\ell_{P,n} = \ell_{0,0}$を単にℓと記す、即ち

$$\ell u(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) u(r) = u''(r) + \frac{1}{r} u'(r)$$

とする。 ここで正数δ_εを、次の条件を満たすように選ぶ:

$$0 < \delta_\varepsilon < \frac{a - c}{4}, \quad h_\varepsilon(a - 2\delta_\varepsilon) < 0 \text{ 。}$$

次に $[c,a]$ 上の関数

$$\psi_n(r) = \exp\left(n\left(r - \frac{a+c}{2}\right)^2\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を考える。 ψ_n は

$$\frac{\psi_n(a-2\delta_\varepsilon)}{\psi_n(a-\delta_\varepsilon)} = \exp\left(-n\delta_\varepsilon\left(a-c-3\delta\varepsilon\right)\right)、$$

$$\begin{aligned}\frac{\ell\psi_n(r)}{\psi_n(r)} &= 4n^2\left(r-\frac{a+c}{2}\right)^2 + 2n + \frac{2n}{r}\left(r-\frac{a+c}{2}\right) \\ &= \left\{2n\left(r-\frac{a+c}{2}\right)+\frac{1}{2r}\right\}^2 + 2n - \frac{1}{4r^2} \\ &\geq 2n - \frac{1}{4c^2}\end{aligned}$$

を満たすので、十分大きい番号 $n_\varepsilon = n_{\varepsilon,c,a,b}$を選んで

$$(3.45) \qquad \frac{\ell\psi_{n_\varepsilon}(r)}{\psi_{n_\varepsilon}} > 0 \ (c \leq r \leq a), \quad \frac{\psi_{n_\varepsilon}(a-2\delta_\varepsilon)}{\psi_{n_\varepsilon}(a-\delta_\varepsilon)} < h_\varepsilon(a-2\delta_\varepsilon)$$

が成立する様にできる。 そこで、Ω上の回転不変密度 $Q_\varepsilon = Q_{\varepsilon,c,a,b}$ で次の条件を満たすものを構成する:

$$Q_\varepsilon(z) = \frac{\ell\psi_{n_\varepsilon}(|z|)}{\psi_{n_\varepsilon}(|z|)} \ (c+\delta_\varepsilon \leq |z| \leq a-\delta_\varepsilon)、$$

$$\mathrm{supp}Q_\varepsilon \subset \{c \leq |z| \leq a\}。$$

Ω上の Q_ε-単位を $f_{\varepsilon,0}(r)$ とすると、最大値原理 3 により

$$\frac{f_{\varepsilon,0}(r)}{f_{\varepsilon,0}(b)} < \frac{\psi_{n_\varepsilon}(r)}{\psi_{n_\varepsilon}(a-\delta_\varepsilon)} \quad (c+\delta_\varepsilon \leq r \leq a-\delta_\varepsilon)$$

であるので、(3.45) により

$$\frac{f_{\varepsilon,0}(a-2\delta_\varepsilon)}{f_{\varepsilon,0}(b)} < h_\varepsilon(a-2\delta_\varepsilon)$$

となる。 従って、最大値原理 4 により

$$\frac{f_{\varepsilon,0}(r)}{f_{\varepsilon,0}(b)} < h_\varepsilon(r) \quad (a-2\delta_\varepsilon < r < b)$$

が成立する。 $h_\varepsilon(a)=\varepsilon$であったので、次の補題が示された。

補題 3.12. 4 個の正数ε, c, a, b $(\varepsilon<1, c<a<b<1)$ に対して、次の 2 条件を満たすΩ上の回転不変密度 $Q_\varepsilon=Q_{\varepsilon,c,a,b}$が存在する: (i) $\mathrm{supp}Q_\varepsilon \subset \{c \le |z| \le a\}$、(ii) Ω上の Q_ε-単位 $f_{\varepsilon,0}(r)$ は

$$\frac{f_{\varepsilon,0}(a)}{f_{\varepsilon,0}(b)}<\varepsilon$$

を満たす。

3.4.4. $\varepsilon, c, a, b, \alpha$は条件 $0<\varepsilon<1, 0<c<a<b<1, \alpha \ge 0$ を満たす実数とする。 PをΩ上の回転不変密度で、条件

$$P(r)=\frac{\alpha}{r^2} \quad (a \le r \le b) \tag{3.46}$$

を満たすものとする。 $Q_{\delta,c,a,b}$を正数δ $(\delta<1)$ と c, a, b に関する補題 3.12 の密度ととする。 Ω上の 1 階 $(P+Q_{\delta,c,a,b})$-単位を $e_{\delta,1}(r)$ とすると、$e_{\delta,1}(r)$ は $[a,b]$ 上

$$e_{\delta,1}(r)=\lambda_\delta r^\beta+\mu_\delta r^{-\beta} \quad (\beta=\sqrt{\alpha+1}) \tag{3.47}$$

と表される。 また、Ω上の $Q_{\delta,c,a,b}$-単位、1 階 $Q_{\delta,c,a,b}$-単位をそれぞれ $f_{\delta,0}(r), f_{\delta,1}(r)$ とすると、(3.14) と補題 3.12 により

$$\frac{f_{\delta,1}(a)}{f_{\delta,1}(b)} \le \frac{f_{\delta,0}(a)}{f_{\delta,0}(b)}<\delta$$

であるので、$Q_{\delta,c,a,b} \le P+Q_{\delta,c,a,b}$により (3.38) から

$$\frac{e_{\delta,1}(a)}{e_{\delta,1}(b)} \le \frac{f_{\delta,1}(a)}{f_{\delta,1}(b)}<\delta$$

が従う。 この不等式に (3.46) を代入すると

$$\frac{\mu_\delta}{\lambda_\delta}<\frac{\delta b^\beta-a^\beta}{a^{-\beta}-\delta b^{-\beta}}$$

が得られる。 一方、(3.41) により$\mu_\delta/\lambda_\delta>-a^{2\beta}$も成立している。 $\mu_\delta/\lambda_\delta$の値は、区間 $[a,b]$ 上以外での Pの挙動に依存する量であるが、$\mu_\delta/\lambda_\delta$に関する上述の 2 個の不等式は、$P$が条件 (3.46) を満たしている限り常に成立する。 従って、(3.46) を満たす Pに関して一様に

$$\lim_{\delta \to 0}\frac{\mu_\delta}{\lambda_\delta}=-a^{2\beta}$$

であり、更に (3.42) により

$$\lim_{\delta \to 0}\int_a^b \frac{e_{\delta,1}(r)}{r^2 e'_{\delta,1}(r)}dr=\frac{1}{\beta^2}\log\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^\beta+\left(\frac{a}{b}\right)^\beta\right\}$$

となる。そこでに任意の正数εに対し、Pに依存しない正数$\delta = \delta_{\varepsilon,c,a,b}$を選んで

$$\int_a^b \frac{e_{\delta,1}(r)}{r^2 e'_{\delta,1}(r)} dr < \frac{1}{\beta^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b}{a}\right)^\beta + \left(\frac{a}{b}\right)^\beta \right\} + \varepsilon$$

が成立するようにできる。以上により次の補題が示された。

補題 3.13. 5 個の実数$\varepsilon, c, a, b, \alpha$ ($\varepsilon > 0, 0 < c < a < b < 1, \alpha \geq 0$) に対して、次の条件を満たす$\Omega$上の回転不変密度 $Q_\varepsilon = Q_{\varepsilon,c,a,b,\alpha}$が存在する: (i) $\mathrm{supp} Q_\varepsilon \subset \{c \leq |z| \leq a\}$, (ii) Pを $[a, b]$ 上 $P(r) = \alpha/r^2$であるΩ上の任意の回転不変密度とするとき、Ω上の 1 階 $(P + Q_\varepsilon)$-単位 $e_{\varepsilon,1}$は

$$\int_a^b \frac{e_{\varepsilon,1}(r)}{r^2 e'_{\varepsilon,1}(r)} dr < \frac{1}{\beta^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b}{a}\right)^\beta + \left(\frac{a}{b}\right)^\beta \right\} + \varepsilon \quad (\beta = \sqrt{\alpha + 1})$$

を満たす。

3.4.5. ε, c, p, q, a は条件 $c < p < q < a < 1, p < ce^{\varepsilon/3}, q > ae^{-\varepsilon/3}$を満たす正数とする。$\Omega$上の回転不変密度 R_n ($n = 1, 2, \cdots$) を

$$\mathrm{supp} R_n \subset \{c \leq |z| \leq a\}, \quad R_n(r) = \frac{n^2 - 1}{r^2} \quad (p \leq r \leq q)$$

であるように構成し、Ω上の 1 階 R_n-単位を $g_{n,1}(r)$ とする。すると (3.44) により、$g_{n,1}(r)$ に関して次の評価が得られる:

$$\begin{aligned}
\int_p^q \frac{g_{n,1}(r)}{r^2 g'_{n,1}(r)} dr &\leq \frac{1}{n^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{q}{p}\right)^n + \left(\frac{p}{q}\right)^n + n\left(\frac{q}{p}\right)^n \right\} \\
&= \frac{1}{n} \log \frac{q}{p} + \frac{1}{n^2} \log \left(1 + \frac{n}{2}\right) \\
&< \frac{1}{n} \log \frac{a}{c} + \frac{1}{n^2} \log \left(1 + \frac{n}{2}\right)。
\end{aligned}$$

従って、$n = n_{\varepsilon,c,a}$を十分大きな番号として

$$\int_p^q \frac{g_{n,1}(r)}{r^2 g'_{n,1}(r)} dr < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる。一方、(3.11) 及び p, qが満たしている条件から

$$\int_c^p \frac{g_{n,1}(r)}{r^2 g'_{n,1}(r)} dr \leq \int_c^p \frac{1}{r} dr < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_q^a \frac{g_{n,1}(r)}{r^2 g'_{n,1}(r)} dr < \frac{\varepsilon}{3}$$

が従うので、次の補題が成立する。

補題 3.14. 3個の正数ε, c, a $(c < a < 1)$ に対して、次の条件を満たすΩ上の回転不変密度 $R_\varepsilon = R_{\varepsilon,c,a}$が存在する: (i) $\mathrm{supp} R_\varepsilon \subset \{c \leq |z| \leq a\}$ 、(ii) Ω上の 1 階 R_ε-単位 $g_{\varepsilon,1}(r)$ は

$$\int_c^a \frac{g_{\varepsilon,1}(r)}{r^2 g'_{\varepsilon,1}(r)} dr < \varepsilon$$

を満たす。

3.4.6. 本小節では、補題 3.11 の逆が成立することを示す。 その為、PはΩ上の回転不変密度で、各区間 $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 上 $P(r) = \alpha_n / r^2$ $(\alpha_n \geq 0)$ を満たしているものとする。

正数列 $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$を、$\sum_1^\infty \varepsilon_n < \infty$ であるように選び固定する。 5個の実数$\varepsilon = \varepsilon_n, c = b_{n+1}, a = a_n, b = b_n, \alpha = \alpha_n$に関する補題 3.13 の密度 $Q_{\varepsilon,c,a,b,\alpha}$を Q_nと記す。また、3個の実数$\varepsilon = \varepsilon_n, c = b_{n+1}, a = a_n$に関する補題 3.14 の密度 $R_{\varepsilon,c,a}$を R_nと記す。 そこで、Ω上の回転不変密度

$$Q(z) = P(z) + \sum_{n=1}^\infty (Q_n(z) + R_n(z)) \quad (z \in \Omega)$$

を考える。 Ω上の 1 階 $(P + Q_n)$-単位、1 階 Q-単位、1 階 R_n-単位をそれぞれ $e_{n,1}(r), f_1(r), g_{n,1}(r)$ とすると、Ω上 $P + Q_n \leq Q, R_n \leq Q$ であるので、(3.38) から

$$\frac{f_1(r)}{f'_1(r)} \leq \frac{e_{n,1}(r)}{e'_{n,1}(r)}, \quad \frac{f_1(r)}{f'_1(r)} \leq \frac{g_{n,1}(r)}{g'_{n,1}(r)} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が従う。 一方、補題 3.13 と補題 3.14 により

$$\int_{a_n}^{b_n} \frac{e_{n,1}(r)}{r^2 e'_{n,1}(r)} dr < \frac{1}{\beta_n^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{\beta_n} + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\beta_n} \right\} + \varepsilon_n \quad (\beta_n = \sqrt{\alpha_n + 1}) \text{、}$$

$$\int_{b_{n+1}}^{a_n} \frac{g_{n,1}(r)}{r^2 g'_{n,1}(r)} dr < \varepsilon_n$$

である $(n = 1, 2, \cdots)$ 。 従って

$$\int_0^{b_1} \frac{f_1(r)}{r^2 f'_1(r)} dr < \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\beta_n^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{\beta_n} + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\beta_n} \right\} + 2 \sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n$$

を得る。 この式の右辺の第一項が収束すれば、定理 3.10 により、Q に関する Picard 原理は原点に於いて成立しない。 一方、Q は $A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ 上 $Q = P$を満たしているので、A は Pの essential 集合ではない。 以上により次の補題が成立する。

補題 3.15. Pは各区間 $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 上の値が $P(r) = \alpha_n/r^2$ $(\alpha_n \geq 0)$ となっている、Ω上の回転不変密度とする。 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{\beta_n} + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\beta_n} \right\} < \infty \quad (\beta_n = \sqrt{\alpha_n + 1})$$

を満たすとき、$A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ は Pの essential 集合ではない。

3.4.7. 集合 $A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ が密度 $|z|^{-2}$の essential 集合であるための必要十分条件は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\sqrt{2}} \right\} = \infty \tag{3.48}$$

であることが、補題 3.11 と補題 3.15 からわかる。 この条件は (3.40) や

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{2} \left(\frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n} \right) = \infty \tag{3.49}$$

と同値である。 実際

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} > 1$$

のときは 3 条件 (3.40) と (3.48) と (3.49) は全て成立する。 そうではないとき、即ち $\lim_n b_n/a_n = 1$ のとき、でも同値であることを示す為に、各正数ρに対し区間 $[1, \infty)$ 上の x の関数

$$\psi(x) = (\log x)^2 - \rho \log \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

を考える。 すると、微分計算

$$\{x\psi'(x)\}' = \frac{2\left(x^4 + 2(1-\rho)x^2 + 1\right)}{x\left(x^2 + 1\right)}$$

により、不等式

$$(\log x)^2 > \log \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \quad (x > 1) \text{、}$$

$$(\log x)^2 < 3 \log \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \quad (1 < x < x_0)$$

が成立する、ただし x_0は適当な定数とする。 従って $\lim b_n/a_n = 1$ のとき、2 条件 (3.40) と (3.49) が同値であることがわかる。 更に、この結論を数列 $\{a_n^{\sqrt{2}}\}, \{b_n^{\sqrt{2}}\}$ に適用することにより、(3.40) と (3.48) の同値性もわかる。 以上により、密度 $|z|^{-2}$

の essential 集合は次のように決定される:

定理 3.16. 集合 $A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ に関する次の 3 条件は互いに同値である:

(3.50) A は密度 $|z|^{-2}$ の essential 集合である、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \infty \text{、} \tag{3.51}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{2}\left(\frac{b_n}{a_n} + \frac{a_n}{b_n}\right) = \infty \text{。} \tag{3.52}$$

3.4.8 本小節では、密度 $P(z) = |z|^{-2}(\log|z|)^2$ の essential 集合を決定する。密度 P は各区間 $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 上で

$$\frac{\left(\log b_n\right)^2}{r^2} \leq P(r) \leq \frac{\left(\log a_n\right)^2}{r^2}$$

を満たしているので、補題 3.11 により、条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \log \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\alpha_n} + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\alpha_n}\right\} = \infty \quad \left(\alpha_n = \sqrt{(\log a_n)^2 + 1}\right) \tag{3.53}$$

が成立すれば、$A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ は P の essential 集合となる。 また補題 3.15 により、A が P の essential 集合なら、条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \log \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\beta_n} + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\beta_n}\right\} = \infty \quad \left(\beta_n = \sqrt{(\log b_n)^2 + 1}\right) \tag{3.54}$$

が成立する。 更に不等式

$$\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\log a_n} + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\log a_n} < \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\alpha_n} + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\text{、}$$

$$\frac{1}{\left(\log a_n\right)^2} < \frac{\left(\log a_1\right)^{-2} + 1}{\alpha_n^2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により、条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log a_n)^2} \log \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\log a_n} + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\log a_n}\right\} = \infty \tag{3.55}$$

から条件 (3.53) がしたがう。

正数ρ ($\rho > 1$) に対して、区間 $(0, \infty)$ 上の x の関数

$$\psi(x) = \psi(x; \rho) = \frac{1}{x^2} \log \frac{1}{2} \left(\rho^x + \rho^{-x} \right)$$

を考える。 微分計算

$$x^3 \psi'(x) = -2 \log \frac{1}{2} \left(\rho^x + \rho^{-x} \right) + \frac{x \left(\rho^x - \rho^{-x} \right) \log x}{\rho^x + \rho^{-x}}、$$

$$\left\{ x^3 \psi'(x) \right\}' = \frac{\left(4x (\log \rho) - \rho^{2x} + \rho^{-2x} \right) \log \rho}{\left(\rho^x + \rho^{-x} \right)}、$$

$$\lim_{x \to 0} x^3 \psi'(x) = \lim_{x \to 0} \left\{ x^3 \psi'(x) \right\}' = 0 、$$

$$\left\{ \left(\rho^x + \rho^{-x} \right)^2 \left(x^3 \psi'(x) \right)' \right\}' = 2 (\log \rho)^2 \left(2 - \rho^{2x} - \rho^{-2x} \right)$$

により、ψは減少関数であることがわかる。 従って

$$\psi \left(\log b_n^{-1}; \frac{b_n}{a_n} \right) > \psi \left(\beta_n; \frac{b_n}{a_n} \right)$$

であり、条件 (3.54) から条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log b_n)^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{\log b_n} + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\log b_n} \right\} = \infty \tag{3.56}$$

が従う。

以上で次の関係が明かとなった: (3.55) $\Rightarrow$ (3.53) $\Rightarrow$ A は Pの essential 集合 $\Rightarrow$ (3.54) $\Rightarrow$ (3.56)。 従って (3.56) $\Rightarrow$ (3.55) を示せば、これらの条件は同値となり、$P(z) = |z|^{-2} (\log |z|)^2$ の essential 集合が決定される。 以下に於いて (3.56) $\Rightarrow$ (3.55) を示す。

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が条件

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log b_n^{-1}}{\log a_n^{-1}} = 1 \tag{3.57}$$

を満たす場合は、正数 Mが存在して

$$\frac{1}{\log b_n^{-1}} \leq \frac{M}{\log a_n^{-1}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となるので、不等式

$$\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\log b_n} + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\log b_n} < \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\log a_n} + \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\log a_n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

により (3.56) $\Rightarrow$ (3.55) を得る。

次に数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が (3.57) を満たさない場合、即ち

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log b_n^{-1}}{\log a_n^{-1}} < 1$$

である場合を考える。 この場合は正数δ ($\delta < 1$) と $\{n\}_1^\infty$ の部分列 $\{n(k)\}_{k=1}^\infty$を適当に選んで

$$\frac{\log b_{n(k)}^{-1}}{\log a_{n(k)}^{-1}} \le \delta \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とできる。 ここで $\lim_n a_n = 0$ により

$$\exp\left(\frac{1-\delta}{2}\left(\log a_{n(k)}\right)^2\right) \ge 2 \quad (k \ge k_0)$$

を満たす番号 k_0が存在するので、$k \ge k_0$のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{b_{n(k)}}{a_{n(k)}}\right)^{\log a_{n(k)}^{-1}} &= \frac{1}{2}\exp\left(\left(\log a_{n(k)}\right)^2\left(1 - \frac{\log b_{n(k)}}{\log a_{n(k)}}\right)\right) \\
&\ge \frac{1}{2}\exp\left((1-\delta)\left(\log a_{n(k)}\right)^2\right) \\
&\ge \exp\left(\frac{1-\delta}{2}\left(\log a_{n(k)}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

である 。従って

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{\left(\log a_{n(k)}\right)^2} \log \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{b_{n(k)}}{a_{n(k)}}\right)^{\log a_{n(k)}} + \left(\frac{a_{n(k)}}{b_{n(k)}}\right)^{\log a_{n(k)}}\right\} \\
&\qquad \ge \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1-\delta}{2} = \infty
\end{aligned}$$

となる。 即ち、(3.57) が満たされない場合は、常に (3.55) が成立する。 以上で (3.56) $\Rightarrow$ (3.55) が明らかとなり、密度 $|z|^{-2}(\log|z|)^2$の essential 集合が次のように決定された:

定理 3.17. 集合 $A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ に関する次の 3 条件は、互いに同値である:

$$A \text{ は密度} \frac{(\log|z|)^2}{|z|^2} \text{の essential 集合である、} \tag{3.58}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log a_n)^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{\log a_n} + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\log a_n} \right\} = \infty \text{、} \tag{3.59}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log b_n)^2} \log \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{\log b_n} + \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{\log b_n} \right\} = \infty \text{。} \tag{3.60}$$

この定理により、密度 $P(z) = |z|^{-2}(\log|z|)^2$ の essential 集合が、確かに存在することがわかる: $a_n = 2^{-2n}, b_n = 2^{-2n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対する集合 $A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ は P の essential 集合である。

第4章　回転不変に近い密度に関する孤立境界点上の Martin 境界

Ω上の密度を扱う場合、回転不変でない密度でも構わないことを強調したいとき、**一般密度**という言葉を用いる。 数学的には、一般密度といっても単に密度といっても、同じものを意味する。

Ω上の一般密度 P, Q に対し

$$Q(z) - P(z) = O\left(|z|^{-2}\right) \quad (z \to 0) \tag{4.1}$$

が成立しているとき、Q を Pに**近い密度**と呼ぶ。 特に Pが回転不変の場合は、Q を回転不変密度 Pに近い密度、または密度 Pを略して、**回転不変に近い密度**と呼ぶ。

本章では、一般密度 Q が回転不変密度 Pに近いとき、原点に於いて、Q に関する Picard 原理、Q の Picard 次元、Q-Martin 境界を研究する。 §4.2 では Pと Q に関する Picard 原理の関係を、§4.3 では Pと Q の Picard 次元の関係を、§4.4 では P-Martin 境界と Q-Martin 境界の関係を、それぞれ調べる。

§4.1.　Picard 原理と境界 Harnack 原理

本節では、Ω上の一般密度 Pに関する、原点に於ける境界 Harnack 原理を定義し、それが原点に於ける Pに関する Picard 原理と、同値であることを証明する。

4.1.1.　PをΩ上の一般密度とする。 Ωの部分領域$\Omega_\rho = \{0 < |z| < \rho\}$ $(0 < \rho \leq 1)$ 内の完閉集合 Kに対し、正数

$$C(K; \Omega_\rho, P) = \sup\left\{\frac{u(z_1)}{u(z_2)} :\ z_1, z_2 \in K,\ u \in PP\left(\Omega_\rho\right) \cap C\left(\Omega_\rho \cup \Gamma_\rho\right) - \{0\}\right\}$$

を (Ω_ρ上で考えた $L_P u = 0$ に関する)Kの Harnack 定数と呼ぶ、ただし$\Gamma_\rho = \{|z| = \rho\}$ とする。 小節 2.1.2 の Harnack 不等式により $C(K) < \infty$ である。 u がΓ_ρ上でも連続であるという条件は、以後の議論を簡単にするための技術的な条件であり、実際は定義からその条件を取り去っても $C(K; \Omega_\rho, P)$ の値は変わらない。

各$\rho \in (0, 1]$ に対して、原点とΓ_ρを分離するΩ_ρ内の Jordan 曲線 K_ρが存在して

$$C(K_\rho; \Omega_\rho, P) = O(1) \quad (\rho \to 0) \tag{4.2}$$

となるとき、原点に於いて P に関する**境界 Harnack 原理**が成立するという。 尚、通常の境界 Harnack 原理の定義では、(4.2) の代わりに

$$C(K_\rho; \Omega_\rho - \overline{\Omega}_{\rho'}, P) = O(1) \ \ (\rho \to 0)$$

が用いられる、ただし ρ' は $0 < \rho' < \rho$ を満たす適当な正数であり、K_ρ は Γ_ρ と $\Gamma_{\rho'}$ を分離する Jordan 曲線を表す。 従って (4.2) を用いた定義は、広義境界 Harnack 原理と呼ぶべきかも知れないが、Picard 原理との同値性を優先させて、形容詞'広義'は付けないことにする。

4.1.2. P を Ω 上の一般密度とする。 原点に於いて、P に関する境界 Harnack 原理が成立すれば、P に関する Picard 原理が成立することの証明を本小節で与える。

P に関して (4.2) を仮定する。 従って、正数 C と Jordan 曲線の族 $\{K_\rho:\ 0 < \rho \leq\}$ が存在して

$$C(K_\rho; \Omega_\rho, P) \leq C \ \ (0 < \rho \leq 1) \tag{4.3}$$

が成立する。 u と v を $PP_1(\Omega; \Gamma)$ に属する任意の関数とする。 Ω 上の P-Martin 核の定義 (2.15) や関数族 $PP_1(\Omega; \Gamma)$ の定義 (2.30) で用いる、Ω 内の参照点を z_0 とする。 従って $u(z_0) = v(z_0) = 1$ である。 以下に於いては常に $0 < \rho < |z_0|$ とし、Jordan 曲線 K_ρ で囲まれた領域を D_ρ で表す。

先ず (4.3) により

$$\frac{u(z_1)}{u(z_2)} \leq C^2 \frac{v(z_1)}{v(z_2)} \ \ (z_1, z_2 \in K_\rho) \tag{4.4}$$

が成立する。 この不等式は、最大値原理 2 により、$z_1 \in \Omega - \overline{D}_\rho$ の時も有効である。 ここで $z_1 = z_0$ を代入すると

$$\frac{v(z_2)}{u(z_2)} \leq C^2 \ \ (z_2 \in K_\rho)$$

が得られる。 また、$z_1 \in \Omega - \overline{D}_\rho$ に関する不等式 (4.4) は、u と v を交換しても構わないので、

$$v(z_1) \leq C^2 \frac{v(z_2)}{u(z_2)} u(z_1) \leq C^4 u(z_1)$$

が得られる。 ρ は $0 < \rho < |z_0|$ の範囲で任意であったので、結局 Ω 上で

$$v \leq C^4 u \tag{4.5}$$

が成立する。 そこで実数

$$\lambda_0 = \max\{\lambda :\ \Omega\text{上}\lambda v \leq u\}$$

を考えると、(4.5) 及び u と vを交換した (4.5) により、$0 < C^{-4} \leq \lambda_0 \leq C^4 < \infty$ である。 今もし$\lambda_0 v \not\equiv u$ であれば、Ω上 $u - \lambda_0 v > 0$ であり

$$\frac{1}{1-\lambda_0}(u - \lambda_0 v) \in PP_1(\Omega; \Gamma)$$

となるので、(4.5) によりΩ上

$$v \leq \frac{C^4}{1-\lambda_0}(u - \lambda_0 v)$$

が成立する。 即ち

$$\left(\lambda_0 + \frac{1-\lambda_0}{C^4}\right) v \leq u$$

が成立し、λ_0の定義に矛盾する。 従って$\lambda_0 v \equiv u$ であり、原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立する。 以上により次の定理が示された。

定理 4.1. 原点に於いて、Ω上の一般密度に関する境界 Harnack 原理が成立すれば、Picard 原理が成立する。

4.1.3. PをΩ上の一般密度とする。 各ρに対し、Ω_ρの近似列 $\{1/n < |z| < \rho\}$ $(n = m, m+1, \cdots)$ 上の P-Green 関数の収束や最大値原理 5 により、公式 (2.14) は $D = \Omega_\rho$の場合も成立する。 即ち、Ω_ρ上の P-Green 関数 $G_P^{\Omega_\rho}$により、有界な $u \in P(\Omega_\rho) \cap C(\Omega_\rho \cup \Gamma_\rho)$ は

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\rho} u(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta} G_P^{\Omega_\rho}(z, \zeta) ds(\zeta) \tag{4.6}$$

と表される。 ただし∂/∂_ζはΓ_ρ上のΩ_ρに関する内法線微分とする。 従って、正数 Cと Jordan 曲線の族 $\{K_\rho :\ 0 < \rho \leq 1\}$ で

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial n_\zeta} G_P^{\Omega_\rho}(z_1, \zeta)}{\dfrac{\partial}{\partial n_\zeta} G_P^{\Omega_\rho}(z_2, \zeta)} < C \quad (z_1, z_2 \in K_\rho; \zeta \in \Gamma_\rho, 0 < \rho \leq 1)$$

を満たすものが存在すれば、境界 Harnack 原理 (4.3) が得られる。 本小節ではこの方針に沿って、定理 4.1 の逆を証明する。

Pは原点に於いてPicard原理が成立する、Ω上の一般密度とする。各$\rho \in (0,1]$に対し、Ω_ρのP-Martin境界は原点上1点である、即ち

$$\partial_P^* \Omega_\rho(0) = \{\zeta_\rho^*\}$$

である (Ozawa [84,85]、Nakai [72] 参照)。そこで、ζ_ρ^*を極とするΩ_ρ上のP-Martin核$K_P^{\Omega_\rho}(z,\zeta_\rho^*)$を$k_\rho(z)$とする。また、$\Omega_\rho$上の$P$-Green関数$G_P^{\Omega_\rho}(z,\zeta)$を$g_\rho(z,\zeta)$とし、$e_0(z)$を$\Omega$上の$P$-単位とする、即ち$\Gamma$上の境界値が1である$L_P u = 0$の$\Omega$上の唯一有界解とする (3.1.1節参照)。双対定理 (Heins [37]、Hayasi [35]、Nakai [72] 参照) により、$\zeta \to 0$の時$g_\rho(\cdot,\zeta)/e_0(\zeta)$は$ck_\rho(\cdot)$ $(c>0)$に、$\Omega_\rho \cup \Gamma_\rho$上広義一様収束する。従って$\Gamma_\rho$上一様に

$$\lim_{\zeta\to 0} \frac{\partial}{\partial n_z} \frac{g_\rho(z,\zeta)}{e_0(\zeta)} = \frac{\partial}{\partial n_z} ck_\rho(z) \equiv h_\rho(z) \quad (z \in \Gamma_\rho) \tag{4.7}$$

となる。ここで、Γ_ρ上$h_\rho > 0$であることに注意する (Miranda [58] 参照)。(4.7)により、各正数$C \in (1,\infty)$と$\rho \in (0,1]$に対し

$$\varepsilon = \varepsilon(C,\rho) = \frac{\sqrt{C}-1}{\sqrt{C}+1} \min_{\Gamma_\rho \ni z} h_\rho(z)$$

と置くと、正数$\delta = \delta(C,\rho) \in (0,\rho]$が存在して

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_z} \frac{g_\rho(z,\zeta)}{e_0(\zeta)} - h_\rho(z) \right| < \varepsilon \quad (z \in \Gamma_\rho, \zeta \in \Omega_\delta) \tag{4.8}$$

が成立する。

境界 Harnack 原理 (4.3) を見たすK_ρを、場合分けして求める。先ず

$$\lim_{\zeta \to 0} e_0(\zeta) = 0$$

の場合を考える。各$\lambda \in (0,1)$に対し、$\{\zeta \in \Omega:\ e_0(\zeta) < \lambda\}$の連結成分で原点を境界点に持つものを$A_\lambda$とする。十分小さい$\lambda = \lambda(C,\rho)$は$\overline{A_\lambda} - \{0\} \subset \Omega_\delta$を満たすので、$\zeta_1, \zeta_2 \in \partial A_\lambda - \{0\}$に対しては

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{\partial}{\partial n_z} g_\rho(z,\zeta_1)}{\dfrac{\partial}{\partial n_z} g_\rho(z,\zeta_2)} &= \frac{\partial}{\partial n_z} \frac{g_\rho(z,\zeta_1)}{e_0(\zeta_1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_z} \frac{g_\rho(z,\zeta_2)}{e_0(\zeta_2)} \right\}^{-1} \\
&< \frac{h_\rho(z) - \varepsilon}{h_\rho(z) - \varepsilon} \\
&\le \frac{h_\rho(z) + \left(\sqrt{C}-1\right)\left(\sqrt{C}+1\right)^{-1} h_\rho(z)}{h_\rho(z) - \left(\sqrt{C}-1\right)\left(\sqrt{C}+1\right)^{-1} h_\rho(z)} \\
&= \sqrt{C} \\
&< C
\end{aligned}$$

である。 従って、$K_\rho = \partial A_\lambda - \{0\}$ と定めて (4.3) が成立する。

次に $\lim_{\zeta\to 0} e_0(\zeta) \neq 0$ の場合を考える、即ち

$$\limsup_{\zeta\to 0} e_0(\zeta) \equiv \alpha > 0$$

とする。 すると、原点で thin であるΩの閉集合 Eが存在して

$$\lim_{\Omega - E \ni \zeta \to 0} e_0(\zeta) = \alpha$$

となる (Brelot [20] 参照)。 従って、(0,1) 内の減少列 $\{\lambda_n\}_1^\infty$で

$$E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_{\lambda_n} = \emptyset$$

を満たすものが存在し、十分大きな番号 $m = m(C,\rho)$ に対しては

$$\lambda_m < \delta = \delta(C,\rho) \text{ かつ } |e_0(\zeta) - \alpha| < \frac{\sqrt{C}-1}{\sqrt{C}+1}\alpha \quad (\zeta \in \Gamma_{\lambda_m})$$

である。 この不等式と (4.8) により、$z \in \Gamma_\rho$と$\zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma_{\lambda_m}$は

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial}{\partial n_z} g_\rho(z,\zeta_1)}{\frac{\partial}{\partial n_z} g_\rho(z,\zeta_2)} &= \frac{\partial}{\partial n_z}\frac{g_\rho(z,\zeta_1)}{e_0(\zeta_1)} \left\{ \frac{\partial}{\partial n_z}\frac{g_\rho(z,\zeta_2)}{e_0(\zeta_2)} \right\}^{-1} \frac{e_0(\zeta_1)}{e_0(\zeta_2)} \\
&< \sqrt{C}\frac{\alpha + \left(\sqrt{C}-1\right)\left(\sqrt{C}+1\right)^{-1}\alpha}{\alpha - \left(\sqrt{C}-1\right)\left(\sqrt{C}+1\right)^{-1}\alpha} \\
&= C
\end{aligned}$$

を満たす。 そこで、$K_\rho = \Gamma_{\lambda_m}$と定めて (4.3) が成立する。 以上により定理 4.1 の逆が証明された

定理 4.2. 原点に於いて、Ω上の一般密度 Pに関する Picard 原理が成立すれば、Pに関する境界 Harnack 原理が成立する。

尚上の証明から、K_ρは原点に限りなく近く、また Cは限りなく 1 に近く、選べることがわかる。

§4.2. 回転不変に近い密度に関する Picard 原理

本節では、Ω上の一般密度 Q がΩ上の回転不変 Pに近いとき、原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立すれば、Q に関する Picard 原理も成立することを証

明する。

4.2.1. PをΩ上の回転不変密度とし、Ω_ρ $(0 < \rho \leq 1)$ 上の n 階 P-単位を $e_n(r,\rho)$ $(n = 0, 1, \cdots)$ とする。 各$\sigma \in (0, 2\pi]$ に対し、Γ_ρ上の非負 C^2級関数$\psi_{\sigma,m}$の増加列 $\{\psi_{\sigma,m}\}_{m=1}^{\infty}$で

$$\lim_{m\to\infty} \psi_{\sigma,m}(\theta) = \begin{cases} 1 & (0 < \theta < \sigma) \\ 0 & (\sigma \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases}$$

を満たすものを作り、Γ_ρ上の境界値が$\psi_{\sigma,m}$である $L_P u = 0$ のΩ_ρ上の唯一有界解を$u_{\rho,\sigma,m}$と記す。 Γ_r $(0 < r \leq \rho)$ 上の関数 $u_{\rho,\sigma,m}(re^{i\theta})$ の Fourier 級数展開を

$$\begin{aligned} u_{\rho,\sigma,m}(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2}a_0(r;\rho,\sigma,m) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n(r;\rho,\sigma,m)\cos n\theta + b_n(r;\rho,\sigma,m)\sin n\theta\}\text{、} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_n(r;\rho,\sigma,m) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u_{\rho,\sigma,m}(re^{i\theta})\cos n\theta d\theta & (n \geq 0)\text{、} \\ b_n(r;\rho,\sigma,m) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u_{\rho,\sigma,m}(re^{i\theta})\sin n\theta d\theta & (n \geq 1) \end{cases}$$

とすると、$r \in (0,\rho]$ の関数 $a_n(r;\rho,\sigma,m)$ と $b_n(r;\rho,\sigma,m)$ は方程式 (3.8) の、即ち $\ell_{P,n}u = 0$ の、$(0,\rho)$ 上の有界解であるので

$$\begin{cases} a_n(r;\rho,\sigma,m) &= a_n(\rho;\rho,\sigma,m)e_n(r,\rho) \\ b_n(r;\rho,\sigma,m) &= b_n(\rho;\rho,\sigma,m)e_n(r,\rho) \end{cases}$$

と表される。 $a_n(\rho;\rho,\sigma,m)$ と $b_n(\rho;\rho,\sigma,m)$ は n, m に関して一様に有界であり、更に

$$\lim_{m\to\infty} a_0(\rho;\rho,\sigma,m) = \frac{\sigma}{\pi}\text{、}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{m\to\infty} a_n(\rho;\rho,\sigma,m) &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\sigma} \cos n\tau d\tau \quad (n \geq 1)\text{、} \\ \displaystyle\lim_{m\to\infty} b_n(\rho;\rho,\sigma,m) &= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\sigma} \sin n\tau d\tau \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

であるので、(3.18) により

$$\lim_{m\to\infty} u_{\rho,\sigma,m}(re^{i\theta}) = \frac{e_0(r,\rho)}{2\pi}\sigma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_n(r,\rho)}{\pi}\int_0^{\sigma}\cos n(\theta-\tau)d\tau$$

となる。 従って

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left\{\lim_{m\to\infty} u_{\rho,\sigma,m}(re^{i\theta})\right\} = \frac{e_0(r,\rho)}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e_n(r,\rho)}{\pi}\cos n(\theta-\sigma) \tag{4.9}$$

が成立する。

一方 (4.6) を用いると、Ω_ρ上の P-Green 関数 $G_P^{\Omega_\rho}$により、$u_{\rho,\sigma,m}$は

$$u_{\rho,\sigma,m}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\partial}{\partial t}G_P^{\Omega_\rho}(re^{i\theta}, te^{i\tau})\right]_{t=\rho}\psi_{\sigma,m}(\rho e^{i\tau})\rho d\tau$$

と表される。 従って

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left\{\lim_{m\to\infty}u_{\rho,\sigma,m}(re^{i\theta})\right\} = -\frac{\rho}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}G_P^{\Omega_\rho}(re^{i\theta}, te^{i\sigma})\right]_{t=\rho}$$

が成立する。 この式と (4.9) から次の補題が従う。

補題 4.3. Ω上の回転不変密度 Pに対して、$G_P^{\Omega_\rho}$は

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t}G_P^{\Omega_\rho}(re^{i\theta}, te^{i\sigma})\right]_{t=\rho} = \rho^{-1}\left\{e_0(r,\rho) + 2\sum_{n=1}^{\infty}e_n(r,\rho)\cos n(\theta-\sigma)\right\}$$
$$(0 < r < \rho;\ \theta,\sigma \in [0, 2\pi))$$

を満たす。

この補題と (3.18) により次の評価を得る。

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t}G_P^{\Omega_\rho}(re^{i\theta}, te^{i\sigma})\right]_{t=\rho} \le \rho^{-1}e_0(r,\rho)\left\{1+\frac{e_1(r,\rho)}{e_0(r,\rho)}\right\}\left\{1-\frac{e_1(r,\rho)}{e_0(r,\rho)}\right\}^{-1}、 \tag{4.10}$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t}G_P^{\Omega_\rho}(re^{i\theta}, te^{i\sigma})\right]_{t=\rho} \ge \rho^{-1}e_0(r,\rho)\left\{1-3\frac{e_1(r,\rho)}{e_0(r,\rho)}\right\}\left\{1-\frac{e_1(r,\rho)}{e_0(r,\rho)}\right\}^{-1}。 \tag{4.11}$$

4.2.2. Pを原点に於いて Picard 原理が成立するΩ上の回転不変密度とし、Qを Pに近いΩ上の一般密度とする。 すると適当な正数 Cが存在して、Ω上

$$|Q(z) - P(z)| \le \frac{C}{|z|^2}$$

である。 そこで、回転不変密度

$$R(z) = \max\left(P(z) - \frac{C}{|z|^2}, 0\right)\quad (z\in\Omega)$$

を考えると、Ω上

$$R(z) \leq P(z) \leq R(z) + \frac{C}{|z|^2}、$$

$$R(z) \leq Q(z) \leq R(z) + \frac{2C}{|z|^2}$$

が成立する。 更に $2C \leq 9k^2$を満たす正整数 kを選び、Ω上の回転不変密度

$$S(z) = R(z) + \frac{(3k)^2}{|z|^2}$$

を考える。 ここで、$Q \leq S$に注意する。

Ω_ρ $(0 < \rho \leq 1)$ 上の n 階 R-単位、n 階 S-単位をそれぞれ $f_n(R,\rho), h_n(r,\rho)$ とすると、(3.14) と (3.15) により

$$\frac{f_{5k}(r,\rho)}{f_{3k}(r,\rho)} \leq \left\{\frac{f_1(r,\rho)}{f_0(r,\rho)}\right\}^{2k}, \quad \frac{h_{4k}(r,\rho)}{h_0(r,\rho)} \geq \left\{\frac{h_1(r,\rho)}{h_0(r,\rho)}\right\}^{(81^k-1)/2}$$

であるので、$f_{3k}(r,\rho) = h_0(r,\rho)$ と $f_{5k}(r,\rho) = h_{4k}(r,\rho)$ を代入して

$$\frac{h_1(r,\rho)}{h_0(r,\rho)} \leq \left\{\frac{f_1(r,\rho)}{f_0(r,\rho)}\right\}^{4k/(81^k-1)} \tag{4.12}$$

を得る。 従って

$$\lambda_k = \left(27^k - 1\right)\left(81^k - 1\right)$$

と置いて

$$\frac{h_0(r,\rho)}{f_0(r,\rho)} = \frac{f_{3k}(r,\rho)}{f_0(r,\rho)} \geq \left\{\frac{f_1(r,\rho)}{f_0(r,\rho)}\right\}^{(27^k-1)/2} \geq \left\{\frac{h_1(r,\rho)}{h_0(r,\rho)}\right\}^{\lambda_k} \tag{4.13}$$

が成立する。

今、原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立してΩ上 $R \leq P$であるので、系 3.6 により、Rに関する Picard 原理も成立する、即ち Rの特異性指数$\alpha(R)$ は 0 である。 すると (3.9) により

$$\lim_{r\to 0}\frac{f_1(r,\rho)}{f_0(r,\rho)} = \lim_{r\to 0}\frac{f_1(r)f_0(\rho)}{f_0(r)f_1(\rho)} = \alpha(R)\frac{f_0(\rho)}{f_1(\rho)} = 0 \quad (0 < \rho \leq 1)$$

である、ただし $f_0(r), f_1(r)$ はそれぞれΩ上の R-単位、n 階 R-単位を表す。 従って (4.12) により

$$\frac{h_1(r_\rho,\rho)}{h_0(r_\rho,\rho)} = \frac{1}{4}$$

を満たす $r_\rho \in (0,\rho)$ が、各 $\rho \in (0,1]$ に対して存在する。

Ω_ρ上の Q-Green 関数 $G_Q^{\Omega_\rho}$、R-Green 関数 $G_R^{\Omega_\rho}$、S-Green 関数 $G_S^{\Omega_\rho}$は、Ω上 $R \le Q \le S$により、$\Omega_\rho \times \Omega_\rho$上

$$G_S^{\Omega_\rho} \le G_Q^{\Omega_\rho} \le G_R^{\Omega_\rho}$$

を満たしている。一方、(4.10) と (4.11) をそれぞれ $G_R^{\Omega_\rho}$と $G_S^{\Omega_\rho}$に適用して $r = r_\rho$ を代入し、更に (3.38) を用いると、各$\rho \in (0,1]$ と$\theta, \sigma \in [0, 2\pi)$ に対して

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{\partial}{\partial t} G_R^{\Omega_\rho}(r_\rho e^{i\theta}, te^{i\sigma})\right]_{t=\rho} &\le \rho^{-1} f_0(r_\rho,\rho)\left\{1+\frac{f_1(r_\rho,\rho)}{f_0(r_\rho,\rho)}\right\}\left\{1-\frac{f_1(r_\rho,\rho)}{f_0(r_\rho,\rho)}\right\}^{-1} \\
&\le \rho^{-1} f_0(r_\rho,\rho)\left\{1+\frac{h_1(r_\rho,\rho)}{h_0(r_\rho,\rho)}\right\}\left\{1-\frac{h_1(r_\rho,\rho)}{h_0(r_\rho,\rho)}\right\}^{-1} \\
&= \frac{5}{3}\rho^{-1} f_0(r_\rho,\rho)\text{、} \\
\left[-\frac{\partial}{\partial t} G_S^{\Omega_\rho}(r_\rho e^{i\theta}, te^{i\sigma})\right]_{t=\rho} &\ge \rho^{-1} h_0(r_\rho,\rho)\left\{1-3\frac{h_1(r_\rho,\rho)}{h_0(r_\rho,\rho)}\right\}\left\{1-\frac{h_1(r_\rho,\rho)}{h_0(r_\rho,\rho)}\right\}^{-1} \\
&= \frac{1}{3}\rho^{-1} h_0(r_\rho,\rho)
\end{aligned}$$

となる。従って (4.13) から

$$\begin{aligned}
\frac{\left[-\frac{\partial}{\partial t} G_Q^{\Omega_\rho}(z_1, te^{i\sigma})\right]_{t=\rho}}{\left[-\frac{\partial}{\partial t} G_Q^{\Omega_\rho}(z_2, te^{i\sigma})\right]_{t=\rho}} &\le \frac{\left[-\frac{\partial}{\partial t} G_R^{\Omega_\rho}(z_1, te^{i\sigma})\right]_{t=\rho}}{\left[-\frac{\partial}{\partial t} G_S^{\Omega_\rho}(z_2, te^{i\sigma})\right]_{t=\rho}} \\
&\le 5\frac{f_0(r_\rho,\rho)}{h_0(r_\rho,\rho)} \\
&\le 5\left\{\frac{h_0(r_\rho,\rho)}{h_1(r_\rho,\rho)}\right\}^{-\lambda_k} \\
&= 5 \cdot 4^{\lambda_k}
\end{aligned}$$

$$\left(z_1, z_2 \in \Gamma_{r_\rho}; 0 \le \sigma < 2\pi, 0 < \rho \le 1\right)$$

が従う。そこで $K_\rho = \Gamma_{r_\rho}$と定めると、原点に於いて Q に関する境界 Harnack 原理

$$C(K_\rho; \Omega_\rho, Q) \le 5 \cdot 4^{\lambda_k} \quad (0 < \rho \le 1)$$

が成立する。すると、定理 4.2 により次の定理を得る。

定理 4.4. PをΩ上の回転不変密度とし、Q を Pに近いΩ上の一般密度とする。原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立するとき、Q に関する Picard 原理も成立する。

§4.3. 回転不変に近い密度に関する Picard 次元

PをΩ上の回転不変密度とし、Q を Pに近いΩ上の一般密度とする。前節では、原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立すれば、Q に関する Picard 原理も成立することを示した。本節では、原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立しないとき、Q に関する Picard 原理も成立しないことを示す。実際にはもう少し詳しく、原点に於ける Pの Picard 次元と Q の Picard 次元が、一致することを証明する。

4.3.1. Pを原点に於いて Picard 原理が成立しないΩ上の回転不変密度とし、Ω上の P-単位を $e_0(r)$ 、Pの特異性指数を$\alpha(P)$ 、Ω上の P-Green 関数を $G_P = G_P^\Omega$、Ω上の P-Martin 核を $K_P = K_P^\Omega$とする。定理 3.1 に於いて、Ωから $\{\alpha(P) < |z| < 1\}$ への同相写像π_Pが、Ω_P^*から $\{\alpha(P) \le |z| \le 1\}$ への同相写像に拡張されて

$$K_P\left(z, \pi_P^{-1}(\alpha(P)e^{i\theta})\right) = k_0(z;\theta) = \frac{M_P(z;\theta)}{M_P(z_0;\theta)} \quad (z \in \Omega)$$

$$M_P(z;\theta) = \lim_{r\to 0, \sigma\to\theta} \frac{G_P(z, re^{i\sigma})}{e_0(r)} \quad (0 \le \theta < 2\pi)$$

であることが示されている。ただし z_0は、K_Pと $PP_1(\Omega;\Gamma)$ の定義で使用されるΩの参照点を表す。また$\partial_P^*\Omega(0) = \delta_P^*\Omega(0)$ も示されているので、$\zeta = 0$ に関する (3.1) と (2.34) により

$$\mathrm{ex}.PP_1(\Omega;\Gamma) = \left\{\frac{M_P(\cdot;\theta)}{M_P(z_0,\theta)} : \ 0 \le \theta < 2\pi\right\}$$

である。

ここで、区間 $(0,1]$ 上の関数

$$N_P(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_P(re^{i\theta};0)d\theta、$$

$$E_P(r) = e_0(r)\int_r^1 \frac{dt}{te_0(t)^2}$$

を考える。$\ell_{P,0}N_P(r) = \ell_{P,0}E_P(r) = 0$ であるので、$z \in \Omega$の関数 $N_P(|z|)$ と $E_P(|z|)$ は $L_PN_P(|z|) = L_PE_P(|z|) = 0$ を満たす。更にΓ上 $N_P(|z|) = E_P(|z|) = 0$ である

ので、$\{\rho<|z|<1\}$ $(0<\rho<1)$ 上で最大値原理 3 を適用することにより、適当な正数λ_Pが存在して

$$\Omega上\ N_P(|z|)=\lambda_P E_P(|z|)\ 、即ち\ (0,1)\ 上\ N_P(r)=\lambda_P E(r)\ 、$$

となる。 そこで $N_P(r)$ の定義式に、$\theta=\sigma=0$ に対する (3.26) を代入して

$$M_P(r;0)\geq N_P(r)=\lambda_P E_P(r) \tag{4.14}$$

が得られる。

4.3.2. Q をΩ上の一般密度とする。 各$\theta\in[0,2\pi)$ に対し、原点上のΩの Q-Martin 境界$\partial_Q^*\Omega(0)$ の点ζ^* で、次の条件を満たすもの全体を$\partial_Q^*\Omega(0,\theta)$ と記す: Ω内の点列 $\{\zeta_n\}_1^\infty$が存在して

$$\lim_{n\to\infty}|\zeta_n|=0,\ \lim_{n\to\infty}\arg\zeta_n=\theta,\ Q-\lim_{n\to\infty}\zeta_n=\zeta^* \tag{4.15}$$

が成立する。 定義から明らかに

$$\partial_Q^*\Omega(0,\theta)\neq\emptyset,\ \ \partial_Q^*\Omega(0)=\bigcup_{0\leq\theta<2\pi}\partial_Q^*\Omega(0,\theta)$$

であるが、

$$\partial_Q^*\Omega(0,\theta_1)\cap\partial_Q^*\Omega(0,\theta_2)=\emptyset\quad(0\leq\theta_1<\theta_2<2\pi) \tag{4.16}$$

の成否は一般には不明である。

本小節では、原点に於いて Picard 原理が成立しない様なΩ上の回転不変密度 R と正整数 kに対して、Q がΩ上

$$R(z)\leq Q(z)\leq R(z)+\frac{k^2}{|z|^2}$$

を満たしているとき、(4.16) が成立することを証明する。 そこで $S(z)=R(z)+k^2/|z|^2$ $(z\in\Omega)$ と置き、Ω上の n 階 R-単位、n 階 S -単位をそれぞれ $f_0(r),h_0(r)$ とする。 また、Ω上の Q-Green 関数、R-Green 関数、S-Green 関数をそれぞれ G_Q,G_R,G_Sとする。 尚、f_0と h_0は元来は $z\in\Omega$の関数である。 円周 $\{|z|=|z_0|/2\}$ 上の $G_Q(z_0,\cdot)$ の最大値と最小値をそれぞれ m_1,m_2とすると、最大値原理 5 により

$$m_2\frac{h_0(\zeta)}{h_0(z_0/2)}\leq G_Q(z_0,\zeta)\leq m_1\frac{f_0(\zeta)}{f_0(z_0/2)}\quad\left(0<|\zeta|\leq\frac{|z_0|}{2}\right)$$

であるので、Ω上の Q-Martin 核 $K_Q = K_Q^\Omega$は $z \in \Omega, 0 < |\zeta| \le |z_0|/2$ のとき

$$(4.17) \qquad \frac{f_0(z_0/2)}{m_1}\frac{h_0(\zeta)}{f_0(\zeta)}\frac{G_S(z,\zeta)}{h_0(\zeta)} \le K_Q(z,\zeta) \le \frac{h_0(z_0/2)}{m_2}\frac{f_0(\zeta)}{h_0(\zeta)}\frac{G_R(z,\zeta)}{f_0(\zeta)}$$

と評価される。

θを任意の角度、ζ^*を$\partial_Q^*\Omega(0,\theta)$ の任意の点、$\{\zeta_n\}_1^\infty$をΩ内の点列で (4.15) を満たすものとする。 Sの定義により $h_0 = f_k$であるので、Rの k階特異性指数$\alpha_k(R)$ は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_0(\zeta_n)}{f_0(\zeta_n)} = \alpha_k(R)$$

で与えられる。 今、原点に於いて Rに関する Picard 原理は成立していないので $\alpha(R) = \alpha_1(R) > 0$ であり、(3.16) により$\alpha_k(R) > 0$ である。 またΩ上 $R \le S$であるので、系 3.6 により、Sの特異性指数$\alpha(S)$ も$\alpha(S) > 0$ である。 従って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G_S(z,\zeta_n)}{h_0(\zeta_n)} = M_S(z;\theta)$$

となる。 そこで (4.17) に$\zeta = \zeta_n$を代入して $n \to \infty$ とすると、$z \in \Omega$に対し

$$(4.18) \qquad \frac{\alpha_k(R)}{m_1} f\left(\frac{z_0}{2}\right) M_S(z;\theta) \le K_Q(z,\zeta^*) \le \frac{1}{\alpha_k(R)m_2} h_0\left(\frac{z_0}{2}\right) M_R(z;\theta)$$

を得る。

(4.16) を背理法で証明するため、或θ_1, θ_2 $(0 \le \theta_1 < \theta_2 < 2\pi)$ に対して

$$\partial_Q^*\Omega(0,\theta_1) \cap \partial_Q^*\Omega(0,\theta_2) \ni \zeta_0^*$$

と仮定する。 すると、$\theta = \theta_j$ $(j = 1,2)$ と$\zeta^* = \zeta_0^*$に関する (4.18) から

$$(4.19) \qquad M_R(z;\theta_1) \ge \beta M_S(z;\theta_2) \quad (z \in \Omega), \quad \beta = \alpha_k(R)^2 \frac{m_2}{m_1}\frac{f_0(z_0/2)}{h_0(z_0/2)}$$

が従う。 特に $z = re^{i\theta_2}$ $(0 < r < 1)$ を代入すると、(3.23) と (4.14) により

$$M_R\left(re^{i(\theta_2-\theta_1)};0\right) = M_R\left(re^{i\theta_2};\theta_1\right) \ge \beta M_S\left(re^{i\theta_2};\theta_2\right)$$
$$= \beta M_S(r;0) \ge \beta\lambda_S E_S(r)$$

となる。 そこで

$$\theta_3 = \min\left(\theta_2 - \theta_1, 2\pi - (\theta_2 - \theta_1)\right)$$

と置くと、(3.26) により

$$(4.20) \qquad M_R(re^{i\theta};0) \ge \beta\lambda_S E_S(r) \quad (|\theta| \le \theta_3)$$

を得る。 更に、π/θ_3より大きい最小の整数をνとすると、任意の $z\in\Omega$に対し常に

$$1\le j_z\le\nu,\quad \left|\arg z-\frac{2(j_z-1)}{\nu}\pi\right|\le\theta_3$$

を満たす整数 j_zが存在するので、(3.23) と (4.20) により

$$\sum_{j=1}^{\nu}M_R\left(z;\frac{2(j-1)}{\nu}\pi\right)\ge\beta\lambda_S E_S(|z|)$$

が成立する。 一方

$$E_S(r)=h_0(r)\int_r^1\frac{dt}{th_0(t)^2}\ge\frac{h_0(r)}{f_0(r)}f_0(r)\int_r^1\frac{dt}{tf_0(t)^2}\ge\alpha_k(R)E_R(r)$$

であるので

$$\sum_{j=1}^{\nu}M_R\left(z;\frac{2(j-1)}{\nu}\pi\right)\ge\beta\lambda_S\alpha_k(R)E_R(|z|)$$

となる。 ここで $E_R(|z|)$ は $RP(\Omega;\Gamma)$ に属し、各 $M_R(z;2(j-1)\pi/\nu)$ $(j=1,\cdots,\nu)$ は $RP(\Omega;\Gamma)$ に属する minimal 関数であるので、E_Rは適当な非負実数 $c_1,\cdots,c_\nu$により

$$E_R(|z|)=\sum_{j=1}^{\nu}c_jM_R\left(z;\frac{2(j-1)}{\nu}\pi\right)\quad(z\in\Omega)$$

と表される (Constantinescu-Cornea [25] 参照)。 すると

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu}c_jM_R\left(z;\frac{2j-1}{\nu}\pi\right)&=\sum_{j=1}^{\nu}c_jM_R\left(ze^{i-i\pi/\nu};\frac{2(j-1)}{\nu}\pi\right)\\&=E_R(|z|)\\&=\sum_{j=1}^{\nu}c_jM_R\left(z;\frac{2(j-1)}{\nu}\pi\right)\end{aligned}$$

を得るが、これは $M_R(\cdot;j\pi/\nu)$ $(j=0,\cdots,2\nu-1)$ が全て minimal 関数であるという事実に矛盾する。 従って (4.16) が証明された。

4.3.3. Pを原点に於いて Picard 原理が成立しないΩ上の回転不変密度とし、Q を Pに近いΩ上の一般密度とする。 小節 4.2.2 の場合と同様にして、Ω上

$$R(z)\le P(z)\le S(z)=R(z)+\frac{k^2}{|z|^2},\quad R(z)\le Q(z)\le S(z)$$

を満たすΩ上の回転不変密度 R,Sが存在する、ただし kは適当な正整数とする。 原点に於ける Picard 原理は Pに関して成立しないので、系 3.6 により、$R(z)+(3k)^2/|z|^2$

に関しても成立しない。 更に (4.12) により Rに関して、再度系 3.6 により Sに関して、それぞれ成立しない。 従って (4.16) が成立している。

原点に於ける Q の Picard 次元 $\dim Q = \dim QP(\Omega;\Gamma)$ は、$\zeta = 0$ に関する (3.1) と (2.34) により、原点上の Q-Martin minimal 境界$\delta_Q^*\Omega(0)$ の濃度で与えられる:

$$\dim Q = \#\delta_Q^*\Omega(0)\ 。$$

可算無限濃度$\aleph_0$に対し $\dim Q > \aleph_0$が成立することを背理法で証明する為、$\#\delta_Q^*\Omega(0) \le \aleph_0$と仮定する。(4.16) により、各$\zeta^* \in \delta_Q^*\Omega(0)$ に対し

$$\zeta^* \in \partial_Q^*\Omega(0, \theta(\zeta^*))$$

となる$\theta(\zeta^*) \in [0, 2\pi)$ が一意的に決まり、背理法の仮定から

$$\theta_0 \in [0, 2\pi) - \bigcup\left\{\theta(\zeta^*) : \zeta^* \in \delta_Q^*\Omega(0)\right\}$$

であるθ_0の存在が従う。 そこで集合$\partial_Q^*\Omega(0, \theta_0)$ からζ_0^*をとり、適当な非負定数 $c(\zeta^*)$ と $K_Q(\cdot, \zeta^*)$ $(\zeta^* \in \delta_Q^*\Omega(0))$ により、$K_Q(\cdot, \zeta^*)$ を

$$K_Q(\cdot, \zeta_0^*) = \sum c(\zeta^*) K_Q(\cdot, \zeta^*)$$

と表す。 或$\zeta_1^* \in \delta_Q^*\Omega(0)$ に対し $c(\zeta_1^*) > 0$ であり、$\theta_1 = \theta(\zeta_1^*)$ と置くと$\theta_0 \neq \theta_1$である。 また

$$K_Q(\cdot, \zeta_0^*) \ge c(\zeta_1^*) K_Q(\cdot, \zeta_1^*)$$

と (4.18) により

$$M_R(\cdot; \theta_0) \ge c(\zeta_1^*) \beta M_S(\cdot; \theta_1) \tag{4.21}$$

が成立する。 ところが、前小節に於いて$\theta_1 \neq \theta_2$と (4.19) から矛盾を導いたのと全く同じ方法で、$\theta_0 \neq \theta_1$と (4.21) から矛盾を導くことができる。従って

$$\dim Q = \#\delta_Q^*\Omega(0) > \aleph_0 \tag{4.22}$$

でなければならない。

Ω上の任意の密度の Picard 次元は高々連続体の濃度$\aleph$であるので (Nakai [73] 参照) 、連続体仮説により、(4.22) は $\dim Q = \aleph$を意味する。 一方、$\dim P = \dim PP(\Omega;\Gamma)$ も$\alpha(P) > 0$ と (3.27) により $\dim P = \aleph$となっている。 従って次の定理を得る。

定理 4.5. Ω上の一般密度 Q がΩ上の回転不変密度 Pに近いとき

$$\dim Q = \dim P$$

が成立する。

尚、原点に於いてPに関するPicard原理が成立している場合は、即ち$\dim P = 1$の場合は、前節に於いて$\dim Q = 1$であることが示されている。

§4.4. 回転不変に近い密度に関するMartin境界

PをΩ上の回転不変密度とし、QをPに近いΩ上の一般密度とする。前節では、原点に於いてPに関するPicard原理が成立しないとき、Qに関するPicard次元はPに関するPicard次元に一致することを示した。本節では更に詳しく、原点上のQ-Martin境界はP-Martin境界と一致することを証明する。

4.4.1. PとQをΩ上$P \leq Q$を満たすΩ上の一般密度とする。uを$PP(\Omega;\Gamma)$に属する関数で$u \not\equiv 0$とするとき、$\Gamma \cup \Gamma_\rho$ $(0 < \rho < 1)$上の境界値がuである、$\Omega - \overline{\Omega}_\rho$上の方程式$L_Q u = 0$の解を$u_\rho$とする。$\{u_\rho\}$は$\rho \to 0$のとき減少であり、従って$QP(\Omega;\Gamma)$の関数に収束する。その極限関数$Q_u$をで表す。$QP(\Omega;\Gamma)$に属する$v(\not\equiv 0)$に対しても、$\Gamma \cup \Gamma_\rho$上の境界値が$v$である$\Omega - \overline{\Omega}_\rho$上の方程式$L_P u = 0$の解を$v_\rho$とすると、$\{v_\rho\}$は$\rho \to 0$のとき増加であり、$PP(\Omega;\Gamma)$の関数に収束するかまたは$+\infty$に発散する。その極限関数を$P_v$で表す。従って$P_v \in PP(\Omega;\Gamma)$または$P_v \equiv +\infty$である。また、$\Omega$上

$$0 \leq Q_u \leq u, \quad v \leq P_v$$

であることは明かである。

uを$PP(\Omega;\Gamma)$に属するminimal関数とし、vを$QP(\Omega;\Gamma)$に属しΩ上$0 < v \leq u$を満たす関数とする。正数

$$\lambda_0 = \max\{\lambda : \ \lambda v \leq Q_u\}$$

を考えると、$v \leq Q_u$により$1 \leq \lambda_0 < \infty$である。また$\lambda_0 v \leq u$により

$$0 < \lambda_0 v \leq P_{\lambda_0 v} \leq u$$

であるので、正数λ_1 $(\lambda_1 \leq 1)$により$P_{\lambda_0 v}$は$P_{\lambda_0 v} = \lambda_1 u$と表される。すると

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} v \leq P_{(\lambda_0/\lambda_1)v} = u, \quad \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \leq Q_u$$

が順に成立し、λ_0の定義から$\lambda_1 = 1$が従い、$0 \leq Q_u - \lambda_0 v$がわかる。更に

$$u + P_{Q_u - \lambda_0 v} = P_{\lambda_0 v} + P_{Q_u - \lambda_0 v} = P_{Q_u} \leq u$$

により $P_{Q_u-\lambda_0 v} \leq 0$ であり、$Q_{u-\lambda_0 v} \leq P_{Q_u-\lambda_0 v}$ により $Q_u \equiv \lambda_0 v$を得る。 以上により次の補題が証明された。

補題 4.6. P, Q はΩ上 $P \leq Q$ を満たすΩ上の一般密度とする。 $u \in PP(\Omega;\Gamma)$ が minimal のとき

$$\{v \in QP(\Omega;\Gamma):\ v \leq u\} = \{\lambda Q_u:\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

であり、$Q_u \not\equiv 0$ なら Q_uは minimal である。

この補題から次の系が従う。

系 4.7. P, Q はΩ上 $P \leq Q$ を満たすΩ上の一般密度とする。 u_1と u_2が共に $PP(\Omega;\Gamma)$ に属する minimal 関数で、u_1/u_2が定数と異なるとき

$$\{v \in QP(\Omega;\Gamma):\ v \leq u_1, v \leq u_2\} = \{0\}$$

である。

4.4.2. Pは原点に於いて Picard 原理が成立しない、Ω上の回転不変密度とする。 従って Pの特異性指数$\alpha(P)$ は$\alpha(P) > 0$ である。 Q は正整数 kに対し

$$P(z) \leq Q(z) \leq P(z) + \frac{k^2}{|z|^2} \quad (z \in \Omega)$$

を満たす上の一般密度とする。 Ω上の P-Martin 核 $K_P = K_P^\Omega$と Q-Martin 核 $K_Q = K_Q^\Omega$の定義で使用する参照点は、共通の z_0とし$\rho = |z_0|/2$ と置く。 そしてΩ上の P-Green 関数 $G_P = G_P^\Omega$と Q-Green 関数 $G_Q = G_Q^\Omega$に対し、正数

$$m_P = \max_{|\zeta|=\rho} G_P(z_0, \zeta), \quad m_Q = \min_{|\zeta|=\rho} G_Q(z_0, \zeta)$$

を考える。 するとΩ上の n 階 P-単位 $e_n(z)$ により、$G_P(z_0, \cdot)$ と $G_Q(z_0, \cdot)$ は

$$G_P(z_0, \zeta) \leq \frac{m_1}{e_0(\rho)} e_0(\zeta), \quad G_Q(z_0, \zeta) \geq \frac{m_2}{e_k(\rho)} e_k(\zeta) \quad (\zeta \in \Omega_\rho)$$

と評価される。 Pの階特異性指数$\alpha_k(P)$ は、(3.12) と (3.16) により

$$\frac{e_k(\zeta)}{e_0(\zeta)} \geq \alpha_k(P) \geq \alpha(P)^{(3^n-1)/2} > 0 \quad (\zeta \in \Omega)$$

を満たしているので、$\zeta \in \Omega_\rho$に対し

$$G_P(z_0, \zeta) \leq C G_Q(z_0, \zeta), \quad C = \frac{m_1}{m_2} \frac{e_k(\rho)}{e_0(\rho)} \frac{1}{\alpha_k(P)}$$

が成立するが、$P \leq Q$ により $G_P \geq G_Q$ も成立しているので

$$K_Q(z,\zeta) \leq CK_P(z,\zeta) \quad (z \in \Omega, \zeta \in \Omega_\rho) \tag{4.23}$$

を得る。

ζ^*を原点上の P-Martin 境界$\partial_P^*\Omega(0)$ の点とする。 Ω内の点列 $\{\zeta_n\}_1^\infty$で

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n = 0, \quad P - \lim_{n\to\infty} \zeta_n = \zeta^*$$

を満たすものを取る。 更に、Ω_Q^*の位相で収束する $\{\zeta_n\}$ の部分列をとり、その極限を $I_\Omega^*(\zeta^*)$ と記すと、(4.23) により

$$K_Q\left(z, I_\Omega^*(\zeta^*)\right) \leq CK_P(z,\zeta^*) \quad (z \in \Omega)$$

が成立する。 定理 3.1 により $K_P(\cdot,\zeta^*)$ は minimal であるので、補題 4.6 により、$I_\Omega^*(\zeta^*)$ は $\{\zeta_n\}$ 及びその部分列の選び方に依存せず、ζ^*のみに依存して定まる。 即ち、$\partial_P^*\Omega(0)$ から$\partial_Q^*\Omega(0)$ への写像 I_Ω^*が定義される。 Γ上の P- Martin 境界や Q-Martin 境界はΓ自身と一致しているので、$\Omega\cup\Gamma$ 上では I_Ω^*を恒等写像と定義して、I_Ω^*はΩ_P^*からΩ_Q^*への写像となる。 I_Ω^*の構成法から、I_Ω^*が連続であることや全射であることが容易にわかり、更に系 4.7 により、I_Ω^*が単射であることがわかる。 完閉空間の連続な全単射は逆写像も連続であるので、I_Ω^* はΩ_P^*からΩ_Q^*への同相写像となる。 従って次の補題が成立する。

補題 4.8. Pを原点に於いて Picard 原理が成立しないΩ上の回転不変密度とし、Q を適当な正整数 kと正数 Cに対し

$$P(z) \leq Q(z) \leq P(z) + \frac{k^2}{|z|^2} \quad (z \in \Omega)$$

を満たすΩ上の一般密度とする。 するとΩ_Q^*とΩ_P^*は一致する。 即ちΩの恒等写像は、Ω_P^*からΩ_Q^*への同相写像に拡張され、$\partial_Q^*\Omega(0) = \delta_Q^*\Omega(0)$ である。

尚、原点上の Q-Martin 境界$\partial_Q^*\Omega(0)$ の点がすべて minimal であることは、補題 4.6 による。

4.4.3. PをΩ上の回転不変密度とし、Q を Pに近いΩ上の一般密度とする。小節 4.2.2 の場合と同様にして、適当な正整数 kに対し、Ω上

$$R(z) \leq P(z) \leq R(z) + \frac{k^2}{|z|^2}、$$

$$R(z) \leq Q(z) \leq R(z) + \frac{k^2}{|z|^2}$$

を満たすΩ上の密度 Rを構成することができる。

原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立する場合は、定理 4.4 により Q に関する Picard 原理も成立し、従ってΩ_P^*とΩ_Q^*は共に $\{0 \leq |z| \leq 1\}$ に一致する。 一方、原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立しない場合は、補題 4.5 により、R に関する Picard 原理が、従って Q に関する Picard 原理が、それぞれ成立しない。すると、補題 4.8 によりΩ_P^*とΩ_R^*が、またΩ_Q^* とΩ_R^*が、それぞれ一致する。 以上により次の定理が証明された。

定理 4.9. Ω上の一般密度 Q がΩ上の回転不変密度 Pに近いとき、Ω_Q^*はΩ_P^*に一致する。 即ち、Ωの恒等写像はΩ_P^*からΩ_Q^*への同相写像に拡張され、$\partial_Q^*\Omega(0) = \delta_Q^*\Omega(0)$ である。

この定理と定理 3.1 から次の系が従う。

系 4.10. Ω上の一般密度 Q がΩ上の回転不変密度 Pに近いとき、Ω_Q^*は $\{\alpha(P) \leq |z| \leq 1\}$ に一致する。

第5章 Picard原理の非単調性

Qを原点に於いてPicard原理が成立するΩ上の密度とする。PをΩ上$P \leq Q$を満たすΩ上の密度とする。PとQが共に回転不変の場合には、系3.6により、原点に於いてPに関するPicard原理が成立する。即ち、Ω上の回転不変密度に関する原点に於けるPicard原理には、単調性がある。しかし、一般密度に関するPicard原理には単調性がない (Nakai-Tada [80] 参照)。即ち

$$P(z) \leq Q(z)\ (z \in \Omega)\ \text{かつ}\ \dim PP(\Omega;\Gamma) > \dim QP(\Omega;\Gamma) = 1 \tag{5.1}$$

を満たすΩ上の密度P, Qが存在する ($\Gamma = \{|z| = 1\}$)。本章では、このようなPとQについて詳しく研究する。尚、$\dim PP(\Omega;\Gamma)$の定義で使用する関数族$PP_1(\Omega,\Gamma)$の定義 (2.30)、即ち

$$PP_1(\Omega,\Gamma) = \{u \in PP(\Omega;\Gamma) : u(z_0) = 1\}\text{、}$$

に於いて条件$u(z_0) = 1$を条件

$$-\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial|z|}u(z)d|z| = 2\pi \tag{5.2}$$

で置き換えても、ex.$PP_1(\Omega,\Gamma)$は、従って$\dim PP(\Omega;\Gamma)$は、変化しない。本章に限り、$PP_1(\Omega,\Gamma)$の定義では条件(5.2)を使用する。

§5.1では、任意のPに対して$P \leq Q$かつ$\dim QP(\Omega;\Gamma) = 1$を満たす$Q = Q_P$が存在することを証明する。従って$P$が回転不変であっても、(5.1)を満たす$P$と$Q$が存在することになる。反対に$Q$が回転不変の場合でも、(5.1)を満たす$P$と$Q$が存在することを、§5.3で証明する。§5.2では、任意のPと任意の正整数mに対し、$P \leq Q$かつ$\dim QP(\Omega;\Gamma) = m$を満たす$Q = Q_{P,m}$が存在することを証明する。

§5.1. 極度の非単調性

Ω上の密度Pが$\Omega \cup \Gamma$を含む領域上でC^p級 ($p = 1, 2, \cdots, \infty$) のとき、PをΩ上のC^p密度と呼ぶ。本節では、任意に与えられたΩ上の密度Pに対し

$$P(z) \leq Q(z)\ (z \in \Omega)\ \text{かつ}\ \dim QP(\Omega;\Gamma) = 1 \tag{5.3}$$

を満たすΩ上のC^∞密度$Q = Q_P$を構成する。

5.1.1. Ω内の Jordan 領域Y_nの閉包$\overline{Y}_n$の列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$は、次の 2 条件を満たすとき$\Omega$内の **$\mathcal{Y}$-列**と呼ばれる: (i) $\overline{Y}_n \cap \overline{Y}_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ 、(ii) $\{\overline{Y}_n\}$ は原点に収束する、即ち任意正数εに対し

$$\overline{Y}_n \cap \{\varepsilon \leq |z| < 1\} \neq \emptyset$$

を満たす n は有限個である。 特に各 Jordan 曲線∂Y_nが C^p級 $(p = 1, 2, \cdots, \infty)$ の曲線の場合、$\{\overline{Y}_n\}$ は $C^p\mathcal{Y}$-列と呼ばれる。 Ωの $\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$に対して、集合

$$W = W\left(\left\{\overline{Y}_n\right\}\right) = \Omega - \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y}_n$$

は連結であり、従ってΩの部分領域である。 原点に於ける Pの W上の Picard 次元

$$\dim PP(W; \partial W - \{0\})$$

を、$\{\overline{Y}_n\}$ に関する (原点に於ける)**Pの相対 Picard 次元**と呼ぶ。 ただし、関数族 $PP_1(W; \partial W - \{0\})$ の定義に於ける条件 $u(z_0) = 1$ は、条件 (5.2) で置き換えて考える。 $\{\overline{Y}_n\}$ に関する Pの相対 Picard 次元は、$\{\overline{Y}_n\}$ を強調して、$\dim(P, \{\overline{Y}_n\})$ とも記される:

$$\dim(P, \{\overline{Y}_n\}) = \dim PP(W; \partial W - \{0\})\text{ 。}$$

次の定理は、条件 (5.3) を満たす $Q = Q_P$の構成に於いて本質的役割を果たす。

定理 5.1. Ω上の任意の密度 Pに対して、Ωの C^∞ $\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$で $\dim(P, \{\overline{Y}_n\}) = 1$ を満たすものが存在する。

この定理の証明は、次小節以降 3 小節に分割して与えられる。

5.1.2. 求める $\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}$ または領域 $W = W(\{\overline{Y}_n\})$ は、3 本の数列 $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$, $\{\delta_n\}_1^\infty$を用いて構成される。

先ず数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を、条件

$$0 < a_{n+1} < b_n < a_n < 1 \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

を満たすように選び固定する。 次に数列 $\{\delta_n\}$ を、とりあえず $0 < \delta_n < \pi/2$ である様に選ぶ。 $\{\delta_n\}$ は $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ と定理 5.1 の Pに依存して、十分速く 0 に収束する必要があるが、その速さは次小節で指定する。

求める Jordan 領域 Y_nを定義する Jordan 曲線∂Y_nは、次の様にして構成される。 2本の円弧

$$\alpha_n = \{|z| = a_n, \delta_n \leq \arg z \leq 2\pi - \delta_n\}、$$

$$\beta_n = \{|z| = b_n, \delta_n \leq \arg z \leq 2\pi - \delta_n\}$$

を考える。 そして図形

$$\{b_n \leq |z| \leq a_n, 0 < \arg z \leq \delta_n\}$$

内の単純弧γ_n^+により、2点 $a_n e^{i\delta_n}$と $b_n e^{i\delta_n}$を結ぶ。 同様に図形

$$\{b_n \leq |z| \leq a_n, -\delta_n \leq \arg z < 0\}$$

内の単純弧γ_n^-により、2点 $a_n e^{-i\delta_n}$と $b_n e^{-i\delta_n}$ を結ぶ。 そこで、4個の曲線$\alpha_n, \gamma_n^+, \beta_n, \gamma_n^-$を連結した Jordan 曲線を$\partial Y_n$と定義する。 ただし、$\partial Y_n$が C^∞級曲線になる様に$\gamma_n^\pm$を選んでおく。

この様にして構成された $C^\infty\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$に関する $W = W(\{\overline{Y}_n\})$ を、その部分領域

$$W_n = W \cap A_n \quad (A_n = \{a_n < |z| < 1\})$$

の増加列 $\{W_n\}_1^\infty$で近似しておく。 ∂W_nは互いに交わらない有限個の C^∞級 Jordan 曲線$\Gamma, \partial Y_1, \cdots, \partial Y_{n-1}, \Gamma_{a_n} = \{|z| = a_n\}$ から成り立っている。

5.1.3. 数列 $\{\delta_n\}_1^\infty$の満たすべき条件を指定する。 Pを定理 5.1 の密度、即ち任意に与えられたΩ上の密度、とする。 実軸上の区間 $(a_1, 1)$ 内に点 a_0を固定し、各 W_n上の P-Green 関数 $G_P^{W_n}$に対し

$$H_n(\zeta, z) = \left(\frac{\partial}{\partial n_\zeta} G_P^{W_n}(\zeta, z)\right) \Bigg/ \left(\frac{\partial}{\partial n_\zeta} G_P^{W_n}(\zeta, a_0)\right) \quad ((\zeta, z) \in \partial W_n \times W_n)$$

と置く、ただし$\partial/\partial n_\zeta$は W_nに関する外法線微分を表す。 $\partial W_n \times W_n$上$\partial G_P^{W_n}(\zeta, z)/\partial n_\zeta > 0$ であるので、$H_n(\zeta, z)$ は定義可能であり正である。 更に Harnack 不等式により、関数 $(\zeta, z) \mapsto \partial G_P^{W_n}(\zeta, z)/\partial n_\zeta$は$\partial W_n \times W_n$上連続となるので、$H_n(\zeta, z)$も$\partial W_n \times W_n$上連続となる。 a_0を中心とし W_1に含まれる小円板 B_0を固定すると、$H_n(\zeta, z)$ は$\partial W_n \times B_0$上一様連続であるので、W_nの一部分

$$I_n = \{|z| = a_n, -\delta_n \leq \arg z \leq \delta_n\}$$

上の関数

$$\psi_n(\zeta) = \sup_{z \in B_0} |H_n(\zeta, z) - H_n(a_n, z)|$$

は$\psi_n(a_n) = 0$を満たし、I_n上非負連続である。 尚、ψ_nの値は$\delta_1,\cdots,\delta_{n-1}$及び$\gamma_1^{\pm},\cdots,\gamma_{n-1}^{\pm}$に依存するが、$\delta_n$には依存しない。 そこで、$\delta_n$が満たすべき条件

$$\sup_{\zeta\in I_n}\psi_n(\zeta) < 2^{-n}$$

を指定する。 即ち$\{\delta_n\}$を、条件

$$\sup_{\zeta\in I_n}\left(\sup_{z\in B_0}|H_n(\zeta,z)-H_n(a_n,z)|\right) < 2^{-n}\quad (n=1,2,\cdots) \tag{5.4}$$

を満たすように選び固定する。

5.1.4. 本小節に於いて定理 5.1 の証明を完了する。 その為には、前小節で確定した$W = W(\{\overline{Y}_n\})$に対して

$$PP(W;\partial W - \{0\}) = \{\lambda h:\ \lambda \geq 0\}$$

を満たす関数hの存在を示せばよい。 hはW_n上の関数

$$h_n(z) = H_n(a_n, z)\quad (n=1,2,\cdots)$$

を用いて作成される。 各h_nは$PP(W_n;\partial W_n - \{a_n\})$に属し$h_n(a_0) = 1$を満たしているので、Harnack 不等式により、$\{h_n\}_1^{\infty}$は正規族である。 従って、適当な部分列$\{h_{\nu(n)}\}$はW上広義一様収束する。 その極限関数

$$h(z) = \lim_{n\to\infty} h_{\nu(n)}(z)\quad (z\in W) \tag{5.5}$$

が求める関数である。

先ず、(5.5) の収束は$\overline{W}-\{0\}$上でも広義一様であることを示す。 各mに対し

$$C_m = \left\{\frac{a_{m+1}+b_m}{2} < |z| < 1\right\}\cap W、$$

$$c_m = \left\{|z| = \frac{a_{m+1}+b_m}{2}\right\}$$

と置く。 n,m,pを$n>m$を満たす任意正整数とする。 $\nu(n+p)>\nu(n)\geq m+1$により、$h_{\nu(n)}$と$h_{\nu(n+p)}$は$\overline{C}_m$上で定義されていることがわかる。 特に$\partial C_m - c_m$上$h_{\nu(n)} - h_{\nu(n+p)} = 0$であるので、最大値原理 4 により

$$\begin{aligned}\max_{z\in C_m}\left|h_{\nu(n)}(z)-h_{\nu(n+p)}(z)\right| &= \max_{z\in\partial C_m}\left|h_{\nu(n)}(z)-h_{\nu(n+p)}(z)\right|\\ &= \max_{z\in c_m}\left|h_{\nu(n)}(z)-h_{\nu(n+p)}(z)\right|\end{aligned}$$

となる。 c_mは W内の完閉部分集合であるので、この式の最右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する。 従って p の任意性により、$\{h_{\nu(n)}\}$ は C_m上で一様収束することがわかる。 更に m の任意性により、$\overline{W} - \{0\}$ 上で広義一様収束することになる。ここで $h_{\nu(n)}$と同様、h も $PP(W; \partial W - \{0\})$ 属することがわかる。

次に $PP(W; \partial W - \{0\})$ は h で生成されることを示す。 vは $PP(W; \partial W - \{0\})$ に属し $v(a_0) = 1$ とする。 Green の公式により vは

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial W_n} v * dG_P^{W_n}(\cdot, z) \quad (z \in W_n)$$

と表されるが、$\partial W_n - I_n$上 $v = 0$ により

$$v(z) = \int_{I_n} \left\{ -\frac{1}{2\pi} v(\zeta) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} G_P^{W_n}(\zeta, z) \right\} |d\zeta| \quad (z \in W_n)$$

となる。 更に、I_n上の測度

$$d\mu_n(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} v(\zeta) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} G_P^{W_n}(\zeta, z) |d\zeta| \tag{5.6}$$

と前小節で定義された関数 H_nを使用すると、vは

$$v(z) = \int_{I_n} H_n(\zeta, z) d\mu_n(\zeta) \quad (z \in W_n) \tag{5.7}$$

の形になる。 この式に $z = a_0$を代入すると$\mu(I_n) = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であることがわかり、(5.4) と (5.6) と (5.7) から、$z \in W_n$に対して

$$\begin{aligned} \left| v(z) - h_{\nu(n)}(z) \right| &= \left| \int_{I_{\nu(n)}} H_{\nu(n)}(\zeta, z) d\mu_{\nu(n)}(\zeta) - H_{\nu(n)}(a_{\nu(n)}, z) \right| \\ &= \left| \int_{I_{\nu(n)}} \left\{ H_{\nu(n)}(\zeta, z) - H_{\nu(n)}(a_{\nu(n)}, z) \right\} d\mu_{\nu(n)}(\zeta) \right| \\ &\geq \int_{I_{\nu(n)}} \left| H_{\nu(n)}(\zeta, z) - H_{\nu(n)}(a_{\nu(n)}, z) \right| d\mu_{\nu(n)}(\zeta) \\ &< 2^{-\nu(n)} \end{aligned}$$

が従う。 そこで $n \to \infty$ として B_0上 $v \equiv h$ が、従って W上 $v \equiv h$ が、得られる。以上で定理 5.1 の証明が完了した。

5.1.5. Ωの部分集合 E上の関数ϕの E上の上限ノルムを $\|\phi\|_E$で表す:

$$\|\phi\|_E = \sup_{z \in E} |\phi(z)| 。$$

また、長さが有限なΩ内の曲線γ上の可測関数ϕの L_1ノルムを $\|\phi\|_\gamma^{L_1}$ と記す:

$$\|\phi\|_\gamma^{L_1} = \int_\gamma |\phi(z)||dz| 。$$

γの長さを $|\gamma|$ で表すと、$\|\phi\|_\gamma^{L_1} \le |\gamma|\|\phi\|_\gamma$となることは明かである。

Ω内の Jordan 領域 Xは、その境界∂Xが C^p級 (または解析的) Jordan 曲線であるとき、C^p(または解析的)Jordan 領域と呼ばれる ($p = 1, 2, \cdots, \infty$) 。

PをΩ上の密度とするとき、Pの値が十分大きな点に於いては、方程式 $L_P u = 0$ の正値解の値はその回りの点の値に比べて十分小さい。 この事実の正確な記述が次の定理である。

定理 5.2. X, YをΩ内の任意の C^∞Jordan 領域で $X \supset \overline{Y}$を満たすものとし、εを任意正数とするとき、Ω上の C^∞密度 $P = P(\cdot; X, Y, \varepsilon)$ で、$\mathrm{supp}\, P \subset Y$かつ

$$\|P_f^X\|_{\overline{Y}} \le \varepsilon \|f\|_{\partial X}^{L_1} \quad (f \in C(\partial X)) \tag{5.8}$$

を満たすものが存在する。

ここで、$C(\partial X)$ は∂X上の連続関数の全体であり、P_f^Xは f を境界値とする $L_P u = 0$ の X上の解であった。 この定理の証明は次小節以降 2 小節に分割して与えられる。

5.1.6. 補助的な解析的 Jordan 領域 Zで$\overline{Y} \subset Z \subset \overline{Z} \subset X$を満たすものを取る。 $\zeta = \Psi(z)$ を Yから $\{|\zeta| < 1\}$ 上への Riemann の写像関数とし

$$Y_n = \Psi^{-1}\left(\left\{|\zeta| < 1 - \frac{1}{2n}\right\}\right)$$

と置くと、Y_nは解析的 Jordan 領域であり、$\{Y_n\}_1^\infty$は Yの近似列となる。 Ω上の密度 P_nの列 $\{P_n\}_1^\infty$を、次の条件を満たす様に構成する:

$$Y_n\text{上 } P_n = n \text{、} \Omega - Y_{n+1}\text{上 } P_n = 0 \text{、} Y_{n+1} - Y_n\text{上 } 0 \le P_n \le n 。$$

一方、ωをΩ上の連続関数で次の条件を満たすものとする:

$$\overline{Y}\text{上}\omega = 0 \text{、} \Omega - Z\text{上}\omega = 1 \text{、} Z - \overline{Y}\text{上}\Delta\omega = 0 。$$

従って、ωは $Z - \overline{Y}$上では∂Zの調和測度と一致している。 本小節では

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(P_n)_1^Z - \omega\right\|_{\overline{Z}} = 0 \tag{5.9}$$

を証明する。

Y内に任意に点 z_1を取り固定する。 更に、z_1を中心とする円板 Uで$\overline{U} \subset Y$を満たすものを固定する。 U上の調和 Green 関数 G^Uに対し、(2.5) により

$$1 = (P_n)_1^U(z) + \frac{1}{2\pi}\int_U G^U(z,\zeta)P_n(\zeta)\,(P_n)_1^U(\zeta)d\xi d\eta \quad (\zeta = \xi + i\eta)$$

が成立する。 十分大きな n に対しては、$\overline{U} \subset Y_n$により U上 $P_n = P$である。 従って、$(P_n)_1^U$は z_1を中心にして回転不変であり、また劣調和であるので

$$(P_n)_1^U(z_1) \le (P_n)_1^U(z) \quad (z \in U)$$

となる。 すると十分大きな n に対して

$$1 \ge (P_n)_1^U(z_1) + \frac{1}{2\pi}(P_n)_1^U(z_1)\int_U G^U(z,\zeta)d\xi d\eta、$$

即ち

$$(P_n)_1^U(z_1) \le \frac{2\pi}{2\pi + n\displaystyle\int_U G^U(z,\zeta)d\xi d\eta}、$$

が成立し $\lim_n (P_n)_1^U = 0$ を得る。 一方∂U上の値の比較により、U上 $(P_n)_1^Z \le (P_n)_1^U$がわかるので、z_1の任意性と併せて

$$\lim_{n\to\infty}(P_n)_1^Z(z) = 0 \quad (z \in Y)$$

が得られる。 $\{P_n\}$ は増加列であるので $\{(P_n)_1^Z\}_{n=1}^\infty$は減少列であり、従って Dini の定理により、この収束は広義一様収束となり

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(P_n)_1^Z\right\|_{\overline{Y}_m} = 0 \quad (m = 1,2,\cdots) \tag{5.10}$$

が成立する。

ωの定義に於いて、$\overline{Y}$を$\overline{Y}_m$ $(m = 1,2,\cdots)$ に置き換えて得られるωをω_mと記す。 即ち、ω_mはΩ上の連続関数で、Y_m上$\omega_m = 0$、$\Omega - Z$上$\omega_m = 1$ であり、$Z - \overline{Y}_m$上では∂Zの調和測度と一致している。 すると、$\{\omega_m\}_1^\infty$は$\overline{Z}$上ωに一様収束する:

$$\lim_{n\to\infty}\|\omega_m - \omega\|_{\overline{Z}} = 0 \text{ 。} \tag{5.11}$$

Jordan 曲線∂Yが解析的な場合には、∂Yを越えてωが調和接続できるので、Y_m上でωとω_mを比較することが可能となり、(5.10) が示される。 また∂Yが解析的でない場合は、∂Yの各点ζ に於いてζを中心とする小円板 U_ζを固定し、$U_\zeta - \overline{Y}_m$上で考えた$\partial U_\zeta - \overline{Y}_m$の調和測度の$\zeta$に於ける値を、$m$ で評価することにより、(5.10) が示される。

$\overline{Z}$上$\omega \le (P_n)_1^Z$であり、$(P_n)_1^Z$は$\overline{Y}_m \cup \partial Z$ 上$\omega_m + \|(P_n)_1^Z\|_{\overline{Y}_m}$以下であるので、$\overline{Z}$上

$$\omega \le (P_n)_1^Z \le \omega_m + \left\|(P_n)_1^Z\right\|_{\overline{Y}_m}$$

が成立し、従って

$$\left\|(P_n)_1^Z - \omega\right\|_{\overline{Z}} \le \|\omega - \omega_m\|_{\overline{Z}} + \left\|(P_n)_1^Z\right\|_{\overline{Y}_m}$$

となる。先ず $n \to \infty$ とし、続いて $m \to \infty$ とすれば、(5.10) と (5.11) により、(5.9) を得る。

5.1.7. X上の調和 Green 関数 G^Xに対して

$$k(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}G^X(z,\zeta) \quad ((z,\zeta) \in X \times \partial X)$$

と置く、ただし$\partial/\partial n_\zeta$は Xに関する外法線微分とする。また、X上の P_n-Green 関数 $G_{P_n}^X$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して

$$K_n(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}G_{P_n}^X(z,\zeta) \quad ((z,\zeta) \in X \times \partial X)$$

と置く。すると、$G_{P_n}^X \le G^X$により

$$K_n(z,\zeta) \le k(z,\zeta) \quad ((z,\zeta) \in X \times \partial X)$$

である。$k(z,\zeta)$ は $X \times \partial X$上連続であるので、正数

$$c = \sup_{(z,\zeta)\in\overline{Z}\times\partial X} k(z,\zeta)$$

は有限であり、$\partial Z \times \partial X$上

$$K_n(z,\zeta) \le c(P_n)_1^Z(z) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる。最大値原理 2 により、この不等式は$\overline{Z} \times \partial X$上でも成立する。従って

$$\|K_n(\cdot,\zeta)\|_{\overline{Y}} \le c\|(P_n)_1^Z\|_{\overline{Y}} \quad (\zeta \in \partial X;\ n = 1, 2, \cdots)$$

であり、任意の $f \in C(\partial X)$ と $z \in \overline{Y}$に対して

$$\begin{aligned}
\left|(P_n)_f^X(z)\right| &= \left|\int_{\partial X} K_n(z,\zeta)f(\zeta)|d\zeta|\right| \\
&\le \int_{\partial X} K_n(z,\zeta)|f(\zeta)||d\zeta| \\
&\le c\left\|(P_n)_1^Z\right\|_{\overline{Y}} \int_{\partial X} |f(\zeta)||d\zeta|
\end{aligned}$$

を得る。(5.9) により $\lim_{n\to\infty}\|(P_n)_1^Z\|_{\overline{Y}}=0$ であるので、$c\|(P_n)_1^Z\|_{\overline{Y}}<\varepsilon$を満たす n を選び $P=P_n$とすれば、(5.8) が成立する。以上で定理 5.2 が証明された。

5.1.8. PをΩ上の密度とする。$\overline{D}\subset\Omega\cup\Gamma$を満たす領域 D上で考えた、連続境界値 fに対する $L_P u=0$ の Dirichlet 問題の解 P_f^Dの定義を、次の様に拡張する。Dを$\overline{D}\subset\Omega\cup\Gamma$とは限らない、即ち$\partial D\ni 0$でも構わない、$\Omega$の部分領域とする。$D$上の連続関数 s が、$\overline{U}\subset D$である任意の円板 Uに対し、U上 $s\geq P_s^U$を満たすとき、s は D上 $(L_P u=0)$ の supersolution であるという。fを$\partial D-\{0\}$ 上の連続関数とし、$\partial D-\{0\}$ 上の下極限が $|f|$ 以上である、D上の非負の supersolution の全体を $\mathcal{S}_{|f|}$とする。$\mathcal{S}_{|f|}\neq\emptyset$ のとき P_f^Dを次の様に定める。先ず $f\geq 0$ に対し $\mathcal{S}_f=\mathcal{S}_{|f|}$の下被を P_f^Dとする。そして一般の fに対しては

$$P_f^D=P_{\max(f,0)}^D-P_{\max(-f,0)}^D$$

と定める。

P_f^Dは $L_P u=0$ の解であり、∂Dが連続体の和集合である場合は、$\partial D-\{0\}$ 上の P_f^Dの境界値は fに一致する。また $f\geq 0$ の場合は、$\partial D-\{0\}$ 上の境界値が fである の D上の最小非負解になる。これらの事実は、調和関数の場合 (Constantinescu-Cornea [25] 参照) と同様の方法で示される。

5.1.9. PをΩ上の密度とし、$\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$を$\Omega$内の $\mathcal{Y}$-列とする。Q をΩ上の密度で、Ω上 $Q\geq P$かつ supp $(Q-P)\subset\bigcup_1^\infty\overline{Y}_n$を満たすものとする。$\Omega$上の $L_Q u=0$ の解は、$W=W(\{\overline{Y}_n\})$ 上では $L_P u=0$ の解でもあるので、$QP(\Omega;\Gamma)$ から $PP(W;\partial W-\{0\})$ への写像

$$Tu=T_{Q,P,\{\overline{Y}_n\}}u=u-P_u^W\quad(u\in QP(\Omega;\Gamma))$$

が定義可能である。この写像は次の性質を持つ:

$$u_1\leq u_2\Rightarrow Tu_1\leq Tu_2,\ T(\lambda u)=\lambda Tu\ (\lambda\geq 0),\ T(u_1+u_2)=Tu_1+Tu_2\text{。}$$

一般に Tは単射や全射であるとは限らない。特に Tが全単射であるとき、Q は Pに関する $\{\overline{Y}_n\}$ の正規付随密度と呼ばれる。そのときは重要な関係式

$$\dim QP(\Omega;\Gamma)=\dim(P,\{\overline{Y}_n\})\tag{5.12}$$

が成立する。 この式は、$QP_1(\Omega;\Gamma)$ から $PP_1(W;\partial W-\{0\})$ への写像

$$Eu=\frac{Tu}{\ell(Tu)}\quad (u\in QP_1(\Omega;\Gamma))\text{、}$$

$$\text{ただし } \ell(v)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v(z)}{\partial|z|}|dz|$$

を ex.$QP_1(\Omega;\Gamma)$ 上に制限して考えたとき、それが ex.$QP_1(\Omega;\Gamma)$ から ex.$PP_1(W;\partial W-\{0\})$ への全単射を与えていることから導かれる。 正規付随密度に関しては次の定理が成立する。

定理 5.3. Ω上の任意の密度 PとΩ内の任意の C^∞ $\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$に対し、$P$に関する $\{\overline{Y}_n\}$ の正規付随密度 Q が常に存在する。 もし Pが C^p密度なら、Q も C^p 密度であるように選べる $(p=1,2,\cdots,\infty)$ 。

この定理の証明は、次小節以降 3 小節に分割して与えられる。

5.1.10. 各$\overline{Y}_n$に対し$\overline{Y}_n\subset X_n$を満たす$\Omega$内の Jordan 領域 X_nを取る。 ただし $\{\overline{X}_n\}_1^\infty$が$\Omega$内の $C^\infty\mathcal{Y}$-列となる様に取る。 集合$\Omega-\bigcup_1^\infty\overline{X}_n$内に点 b_0を固定し、$W=W(\{\overline{Y}_n\})$ に対し

$$\mathcal{F}=\left\{u\in PP\left(W\left(\left\{\overline{Y}_n\right\}\right)\right):u(b_0)=1\right\}$$

と置く。 すると Harnack 不等式により

$$x_n=\sup_{u\in\mathcal{F}}\left(\max_{z\in\partial X_n}u(z)\right)<+\infty\quad (n=1,2,\cdots)$$

である。 領域 $X=X_n,Y=Y_n$と正数$\varepsilon=(2x_n|\partial X_n|)^{-1}$に対する定理 5.2 の C^∞密度 $P(\cdot;X,Y,\varepsilon)$ を P_nと記す。 従って、supp $P_n\subset Y_n$であり

$$\left\|(P_n)_f^{X_n}\right\|_{\overline{Y}_n}\le\frac{1}{2x_n|\partial X_n|}\|f\|_{\partial X_n}^{L_1}\le\frac{1}{2x_n}\|f\|_{\partial X_n}$$

が各 $f\in C(\partial X_n)$ に対して成立している $(n=1,2,\cdots)$ 。 そこでΩ上の密度 $Q=Q_{P,\{\overline{Y}_n\}}$を

$$Q(z)=\begin{cases}P(z)+P_n(z) & \left(z\in\overline{X}_n;n=1,2,\cdots\right)\text{、}\\ P(z) & \left(z\in\Omega-\displaystyle\bigcup_{n=1}^\infty\overline{X}_n\right)\end{cases}$$

で定義する。

5.1.11. 本小節では、$QP(\Omega;\Gamma)$ から $PP(W;\partial W-\{0\})$ への写像 $T=T_{Q,P,\{\overline{Y}_n\}}$が単射であることを証明する。即ち、$W$上 $Tu_1=Tu_2$を満たす $QP(\Omega;\Gamma)$ の任意の関数 u_1,u_2に対し、Ω上 $u_1\equiv u_2$を示す。

$u_j(b_0)\neq 0$ のとき $u_j/u_j(b_0)\in\mathcal{F}$であり、$u_j(b_0)=0$ のとき $u_j\equiv 0$ であるので

$$\|u_j\|_{\partial X_n}\leq x_nu_j(b_0)\quad (j=1,2)$$

が成立する。X_n上 $Q=P+P_n\geq P_n$により $u_j\leq (P_n)^{X_n}_{u_j}$となり、$P_n$と x_nの定義から

$$\|u_j\|_{\overline{Y}_n}\leq \left\|(P_n)^{X_n}_{u_j}\right\|_{\overline{Y}_n}\leq \frac{1}{2x_n}\|u_j\|_{\partial X_n}<\frac{1}{2}u_j(b_0)\quad (j=1,2)$$

が従う。即ち

$$u_j(z)\leq \frac{1}{2}u_j(b_0)\quad \left(z\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{Y}_n;j=1,2\right)$$

が成立する。Γ上では $u_1=u_2=0$ となっているので、$\partial W-\{0\}$ 上 u_1と u_2は有界である。従って$\bigcup_1^\infty\overline{Y}_n$上でも有界となる。一方、$Tu_1=Tu_2$により W上 $u_1-u_2=P^W_{u_1-u_2}$であるので、u_1-u_2は W上でも有界になる。結局 u_1-u_2はΩ上有界となり、最大値原理5により $u_1-u_2\equiv 0$、即ち $u_1\equiv u_2$、がわかる。

5.1.12. 本小節ではTが全射であることを証明する。その為、集合

$$\Lambda_X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\partial X_n,\quad \Lambda_Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}\partial Y_n$$

に対し、$C(\Lambda_X)$ から $C(\Lambda_Y)$ への有界線型作用素

$$(K\phi)(z)=Q^{X_n}_{\phi}(z)\quad (\phi\in C(\Lambda_X),z\in\partial Y_n;n=1,2,\cdots)$$

を考える。また、Λ_Y上の有界連続関数の全体 $CB(\Lambda_Y)$ から、Λ_X上の有界連続関数の全体 $CB(\Lambda_X)$ への、有界線型作用素

$$(L\psi)(z)=P^W_{\psi}(z)\quad (\psi\in CB(\Lambda_Y),z\in\Lambda_X)$$

も考える。ただしΓ上$\psi=0$ として P^W_ψを定義する。$C(\Lambda_X)$ の部分空間から $CB(\Lambda_X)$ への有界線型写像

$$M=L\circ K$$

を利用して、Tが全射であることを示す。

vを $PP(W;\partial W-\{0\})$ に属する任意の関数とする。vは∂X_n上 $x_nv(b_0)$ 以下であるので、前小節に於いて $u_j\leq u_j(b_0)/2$ を示したのと同様の方法で、Λ_Y上

$Kv \le v(b_0)/2$ がわかる。 すると W上 $Mv \le v(b_0)/2$ である。 vを Mvで置き換えて $M^2 v \le v(b_0)/2^2$となり、帰納法により

$$\|M^m v\|_{\Lambda_X} \le \frac{1}{2^m} v(b_0) \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

が成立する。 従ってΛ_X上の関数

$$\phi_v = \sum_{m=0}^{\infty} M^m v$$

が定義できる。 $K\phi_v$は$\bigcup_1^\infty X_n$上 $L_Q u = 0$ の解であり、$v + M\phi_v$は W上 $L_Q u = 0$ の解である。 しかもΛ_X上$\phi_v - M\phi_v = v$でありΛ_Y上 $v + M\phi_v = K\phi_v$であるので、

$$\partial\left(W \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right)\right) = \Lambda_X \cup \Lambda_Y \quad \text{上} \quad K\phi_v = v + M\phi_v$$

である。 そこで

$$u(z) = \begin{cases} (K\phi_v)(z) & \left(z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) \\ v(z) + (M\phi_v)(z) & (z \in W) \end{cases}$$

と置くと、u はΩ上の関数として定義可能であり、$QP(\Omega;\Gamma)$ に属する。 更に

$$Tu = u - P_u^W = (v + M\phi_v) - L(K\phi_v) = v$$

となり、Tが全単射であることがわかる。 同時に定理 5.3 の証明が完了する。

5.1.13. PをΩ上の密度とする。 Pに対し、Ω上 $R \ge P$を満たすΩ 上の C^∞ 密度 Rを選び固定する。 定理 5.1 により

$$\dim\left(R, \{\overline{Y}_n\}\right) = 1$$

を満たすΩ内の $C^\infty\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$が存在する。 更に定理 5.3 により、$R$に関する $\{\overline{Y}_n\}$ の C^∞正規付随密度 Q が存在する。 Q はΩ上 $Q \ge R$を満たし $\dim QP(\Omega;\Gamma) = \dim(R, \{\overline{Y}_n\})$ であるので、次の定理を得る。

定理 5.4. Ω上の任意の密度 Pに対し、Ω上の C^∞密度 $Q = Q_P$で

$$\Omega\text{上}\ Q \ge P \text{かつ} \dim QP(\Omega;\Gamma) = 1$$

を満たすものが存在する。

この定理により、Ω上の密度 Q が、原点に於いて Picard 原が理成立しないΩ上の回転不変密度により下から支えられても、Q に関する Picard 原理が成立しないとは限らないことがわかる:

系 5.5. Ω上の回転不変密度 Pと一般密度 Q で、次の条件を満たすものが存在する: (i) Ω上 $P \leq Q$ 、(ii) 原点に於ける Picard 原理は、Pに関して成立し Q に関して成立しない。

PをΩ上の密度とする。 数列 $\{p_n\}_1^\infty, \{q_n\}_1^\infty$で条件

$$0 < p_{n+1} < q_n < p_n < 1 \ (n = 1, 2, \cdots), \ \lim_{n\to\infty} p_n = 0 \tag{5.13}$$

を満たすものに対し、円環

$$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_n(q_n, p_n) = \{q_n < |z| < p_n\} \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

を考える。 定理 5.1 の証明で使用した数列 $\{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty$を

$$q_n < b_n < a_n < p_n \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たす様に選べば、$\dim(P, \{\overline{Y}_n\}) = 1$ を満足する $\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$として

$$\overline{Y}_n \subset \mathcal{U}_n \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

となるものが選べる。 この $\{\overline{Y}_n\}$ の、Pに関する、正規付随密度 Q が定理 5.3 により存在する。 Q は

$$\mathrm{supp}(Q - P) \subset \bigcup_{n=1}^\infty \overline{Y}_n$$

を満たしているので、次の定理が得られる。

定理 5.6. Ω上の任意の密度 Pと、(5.13) を満たす任意の数列 $\{p_n\}_1^\infty, \{q_n\}_1^\infty$に対し、次の条件を満たす$\Omega$上の密度 Q が存在する:

(i) Ω上 $Q \geq P$、

(ii) $\Omega - \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n(q_n, p_n)$ 上 $Q = P$、

(iii) 原点に於いて Q に関する Picard 原理が成立する。

この定理の重要性は、$\mathcal{U}_n(q_n, p_n)$ をどんなに細く与えても構わない点にある。尚、円環列 $\{\mathcal{U}_n(q_n, p_n)\}$ を、原点とΓを分離して原点に収束する互いに素な 2 重連結領域の列で置き換えても、定理 5.6 は成立する。

§5.2. Picard 次元の非単調性

PをΩ上の任意の密度とする。前節では、Ω上 $Q \geq P$を満たし $\dim QP(\Omega;\Gamma) = 1$ であるΩ上の C^∞密度 Q を構成した。本節では、正整数 m も任意に与えて

$$\Omega 上\ Q \geq P かつ\ \dim QP(\Omega;\Gamma) = m$$

を満たすΩ上の C^∞密度 $Q = Q_{P,m}$を構成する。任意正整数 n に対し、$\dim P_nP(\Omega;\Gamma) = n$ を満たすΩ上の密度 P_nの存在が知られているので (Nakai [73]、Nakai-Tada [78] 参照)、$Q_{P,m}$の存在は、原点に於ける Picard 原理と同様 Picard 次元についても、単調性が極度に成り立たないことを意味する。

$Q_{P,m}$を構成する為には定理 5.1 を一般化する必要がある。即ち、本節では次の定理が本質的役割を果たす。

定理 5.7. Ω上の任意の密度 Pと任意正整数 m に対して、Ωの $C^\infty\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$ で $\dim(P, \{\overline{Y}_n\}) = m$ を満たすものが存在する。

この定理と定理 5.3 を使用すれば、前節と同様にして、$Q_{P,m}$が構成できる。しかし、定理 5.7 は定理 5.1 の証明の単純な一般化、即ち定理 5.1 の各 Y_nを各々 m 個の C^∞Jordan 領域に分割する方法、では証明することができない。

5.2.1. Ωの部分領域は次の 3 条件を満たすとき **admissible 部分領域**と呼ばれる: (i) $\partial W - \{0\}$ は連続体の和集合である、(ii) Γは∂W の連結成分の一つである、(iii) $\partial W \ni 0$。特に$\partial W - \{0\}$ の各点の適当な近傍に於いて、∂Wが C^∞級 Jordan 弧になっているとき、Wは C^∞admissible 部分領域と呼ばれる。例えば、Ωの $\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$に対し、$W = W(\{\overline{Y}_n\}) = \Omega - \bigcup_1^\infty \overline{Y}_n$は admissible 部分領域であり、$\{\overline{Y}_n\}$ が C^∞なら Wも C^∞である。PをΩ上の密度とし WをΩの admissible 部分領域とするとき、原点に於いて W上で考えた Pの Picard 次元 $\dim PP(W; \partial W - \{0\})$ は、Wに関する (原点に於ける)Pの**相対 Picard 次元**と呼ばれ、$\dim(P, W)$ と記される:

$$\dim(P, W) = \dim PP(W; \partial W - \{0\})\ 。$$

ただし、$PP_1(W; \partial W - \{0\})$ の定義に於ける正規化条件 $u(z_0) = 1$ は、条件 (5.2)

即ち

$$-\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial|z|}u(z)|dz| = 2\pi$$

で置き換えて考える。 前節同様、他の Picard 次元の定義に於いても、$u(z_0)=1$ は (5.2) で置き換える。 尚、Ωの $\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$に関する Pの相対 Picard 次元 $\dim(P,\{\overline{Y}_n\})$ は、admissible 部分領域 $W=W(\{\overline{Y}_n\})$ に関する Pの相対 Picard 次元と一致する。

定理 5.7 を証明するためには準備として次の定理が必要であり、その証明を次小節以降 5 小節に分割して与える。

定理 5.8. Ω上の任意の密度 Pと正整数 m $(m\geq 2)$ に対して、Ωの C^∞ admissible 部分領域$\Omega_{P,m}$で $\dim(P,\Omega_{P,m})=m$ を満たすものが存在する。

5.2.2. 求める$\Omega_{P,m}$は 5 本の数列 $\{a_n\}_1^\infty,\{b_n\}_1^\infty,\{p_n\}_1^\infty,\{q_n\}_1^\infty,\{\theta_n\}_1^\infty$ をもとにして構成される。 そのうち $\{a_n\},\{b_n\},\{p_n\},\{q_n\}$ が満たすべき条件は

$$0<a_{n+1}<q_n<p_n<a_n<1 \ (n=1,2,\cdots),\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

であり、そのように選んだ後固定する。 一方 $\{\theta_n\}$ は、とりあえず

$$0<\theta_n<\frac{\pi}{4m} \ \ (n=1,2,\cdots)$$

を満たすように選んでおく。 既に与えられた $P,m,\{a_n\},\{b_n\},\{p_n\},\{q_n\}$ に依存して、$\{\theta_n\}$ は十分速く 0 に収束することを要求されるが、その速さは次小節で指定する。

$\Omega_{P,m}$の境界$\partial\Omega_{P,m}$は、Γと原点を除いて、m 個の合同な C^∞級 Jordan 弧から成るが、その一つを次の様にして作成する。 先ず、次式で与えられる円弧$\alpha_n^\pm,\beta_n^\pm$

と線分$\gamma_n^{\pm}$の無限個の列 $(n=1,2,\cdots)$ を考える:

$$\alpha_n^+ = \left\{|z| = a_n, \theta_n \le \arg z \le \frac{\pi}{4m}\right\}、$$

$$\alpha_n^- = \left\{|z| = a_n, -\frac{\pi}{4m} \le \arg z \le -\theta_n\right\}、$$

$$\beta_n^+ = \left\{|z| = b_n, \theta_n \le \arg z \le \frac{\pi}{4m}\right\}、$$

$$\beta_n^- = \left\{|z| = b_n, -\frac{\pi}{4m} \le \arg z \le -\theta_n\right\}、$$

$$\gamma_n^+ = \left\{q_n \le |z| \le p_n, \arg z = \frac{\pi}{2m}\right\}、$$

$$\gamma_n^- = \left\{q_n \le |z| \le p_n, \arg z = -\frac{\pi}{2m}\right\}。$$

そして6組の2点 $a_n e^{i\theta_n}$と $b_n e^{i\theta_n}$、$a_n e^{-i\theta_n}$と $b_n e^{-i\theta_n}$、$b_n e^{\pi i/4m}$と $p_n e^{\pi i/2m}$、$b_n e^{-\pi i/4m}$と $p_n e^{-\pi i/2m}$、$q_n e^{\pi i/2m}$と $a_{n+1} e^{\pi i/4m}$、$q_n e^{-\pi i/2m}$と $a_{n+1} e^{-\pi i/4m}$ をそれぞれつなぐ6本の開 Jordan 弧$\sigma_n^+, \sigma_n^-, \tau_n^+, \tau_n^-, \upsilon_n^+, \upsilon_n^-$を、それぞれ集合

$$\{b_n < |z| < a_n, 0 < \arg z < \theta_n\}、$$

$$\{b_n < |z| < a_n, -\theta_n < \arg z < 0\}、$$

$$\left\{p_n < |z| < b_n, \frac{\pi}{4m} < \arg z < \frac{\pi}{2m}\right\}、$$

$$\left\{p_n < |z| < b_n, -\frac{\pi}{2m} < \arg z < -\frac{\pi}{4m}\right\}、$$

$$\left\{a_{n+1} < |z| < q_n, \frac{\pi}{4m} < \arg z < \frac{\pi}{2m}\right\}、$$

$$\left\{a_{n+1} < |z| < q_n, -\frac{\pi}{2m} < \arg z < -\frac{\pi}{4m}\right\}$$

の中に取る $(n=1,2,\cdots)$。 そこで、円弧

$$\left\{|z| = a_1, \frac{\pi}{4m} \le \arg z \le \frac{\pi}{m}\right\}$$

と無限個の曲線$\alpha_n^+, \sigma_n^+, \beta_n^+, \tau_n^+, \gamma_n^+, \upsilon_n^+$ $(n = 1,2,\cdots)$ をこの順に連結してできる Jordan 弧をΓ_1^+と記す。 同様に、円弧

$$\left\{|z| = a_1, -\frac{\pi}{m} \le \arg z \le -\frac{\pi}{4m}\right\}$$

と無限個の曲線$\alpha_n^-, \sigma_n^-, \beta_n^-, \tau_n^-, \gamma_n^-, \upsilon_n^-$ $(n=1,2,\cdots)$ をこの順に連結してできる Jordan 弧をΓ_1^-と記す。このとき、$\Gamma_1^{\pm}$が C^∞級の曲線となるように$\sigma_n^{\pm}, \tau_n^{\pm}, \upsilon_n^{\pm}$ を選んで

おく。

次に、$\Gamma_1^\pm$を原点の回りに角度 $2(j-1)\pi/m$ $(j=2,\cdots,m)$ だけ回転して得られる、C^∞級の Jordan 弧$\Gamma_j^\pm$を考える:

$$\Gamma_j^\pm = \left\{ z\mathrm{e}^{2(j-1)\pi i/m} : z \in \Gamma_1^\pm \right\} \quad (\text{複号同順})。$$

そして、Jordan 曲線$\Gamma_j^+ \cup \Gamma_{j+1}^- \cup \{0\}$ で囲まれるΩの部分領域を S_j $(j=1,\cdots,m)$ と記す、ただし$\Gamma_{m+1}^- = \Gamma_1^-$とする。 すると、求める$\Omega_{P,m}$は

$$\Omega_{P,m} = \Omega - \bigcup_{j=1}^{m} \overline{S}_j$$

で与えられる。

原点に於ける$\Omega_{P,m}$に関する Pの相対 Picard 次元は、Ωの admissible 部分領域

$$A_j = \Omega_{P,m} \cap \left\{ |z| < b_1, \frac{2j-3}{m}\pi < \arg z < \frac{2j-1}{m}\pi \right\}$$
$$(j=1,\cdots,m)$$

に関する Pの相対 Picard 次元 $\dim(P, A_j)$ で決まる。 そこで $\dim(P, A_j)$ を調べる為に、A_jの近似列 $\{A_{jn}\}_{n=2}^{\infty}$、

$$A_{jn} = A_j \cap \{|z| > a_n\}\ 、$$

を考える。 各∂A_{jn}は C^∞級 Jordan 曲線であることに注意する。

5.2.3. 本小節では、数列 $\{\theta_n\}$ が満たすべき条件を指定する。 最初にθ_1 を任意に固定する。

各 $j=1,\cdots,m$ と $n=2,3,\cdots$に対し、∂A_{jn}の一部である円弧

$$I_{jn} = \left\{ |z| = a_n, -\theta_n \le \arg z - \frac{2(j-1)}{m}\pi \le \theta_n \right\}$$

を考え、その中点を a_{jn}と記す:

$$a_{jn} = a_n \mathrm{e}^{2(j-1)\pi i/m}。$$

また、実軸上の開区間 (a_2, b_1) 内に点 z_1を固定し、z_1中心の小円板 D_1を、$A_{1,2}$に含まれるように選ぶ。 更に、各 $j=1,\cdots,m$ に対し

$$z_j = z_1 \mathrm{e}^{2(j-1)\pi i/m},\ D_j = \left\{ z\mathrm{e}^{2(j-1)\pi i/m} : z \in D_1 \right\}$$

と置くと、$z_j \in A_{j2}$であり $D_j \subset A_{j2}$である。

A_{jn}上の P-Green 関数 $g_{jn} = G_P^{A_{jn}}$に対し、関数

$$h_{jn}(\zeta, z) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial n_\zeta} g_{jn}(\zeta, z)}{\dfrac{\partial}{\partial n_\zeta} g_{jn}(\zeta, z_j)} \quad ((\zeta, z) \in \partial A_{jn} \times A_{jn})$$

を考える。 ただし、$\partial/\partial n_\zeta$は A_{jn}に関する外法線微分を表す。 $(\zeta, z) \in \partial A_{jn} \times A_{jn}$に対し$\partial g_{jn}(\zeta, z)/\partial n_\zeta > 0$ であるので、h_{jn}は定義可能である。 また Harnack 不等式により、$(\zeta, z) \in \partial A_{jn} \times A_{jn}$ の関数$\partial g_{jn}(\zeta, z)/\partial n_\zeta$ は連続関数である。 従って h_{jn}は $(\zeta, z) \in \partial A_{jn} \times D_j$ 上一様連続であり、$\zeta \in I_{jn}$の関数

$$\psi_{jn}(\zeta) = \sup_{z \in D_j} |h_{jn}(\zeta, z) - h_{jn}(a_{jn}, z)|$$

は I_{jn}上非負連続となる。 ここでψ_{jn}の取る値は、$\theta_2, \cdots, \theta_{n-1}$や$\sigma_l^\pm$ $(l = 2, \cdots, n-1)$や$\tau_l^\pm, v_l^\pm$ $(l = 1, \cdots, n-1)$ に依存するが、θ_nには依存しないことに注意する。 更に$\psi_{jn}(a_{jn}) = 0$ に注意して、条件

$$\max_{1 \le j \le m} \sup_{\zeta \in I_{jn}} \psi_{jn}(\zeta) < 2^{-n}$$

を満たす$\theta_n \in (0, \pi/4m)$ が存在することがわかる。 この条件を満たす様にθ_nを選び固定する。 即ち $\{\theta_n\}_1^\infty$を条件

$$\max_{1 \le j \le m} \sup_{\zeta \in I_{jn}} \left(\sup_{z \in D_j} |h_{jn}(\zeta, z) - h_{jn}(a_{jn}, z)| \right) < 2^{-n} \tag{5.14}$$
$$(n = 2, 3, \cdots)$$

を満たすように、帰納的に定める。

5.2.4. 前小節でその形状が確定した A_j $(j = 1, \cdots, m)$ に対し、本小節では $\dim(A_j, P) = 1$ を証明する。 即ち関数族 $PP(A_j; \partial A_j - \{0\})$ が、1 個の $k_j \in PP(A_j; \partial A_j - \{0\})$ から生成されることを示す。

k_jを求める為に、関数

$$k_{jn}(z) = h_{jn}(a_{jn}, z) \quad (z \in A_{jn}; n = 2, 3, \cdots)$$

を考える。 各 k_{jn}は $PP(A_{jn}; \partial A_{jn} - \{a_{jn}\})$ に属し $k_{jn}(z_j) = 1$ を満たしているので、Harnack 不等式により $\{k_{jn}\}_{n=2}^\infty$は正規族であり、従ってその適当な部分列 $\{k_{j\nu(n)}\}_{n=1}^\infty$は、$PP(A_j)$ に属する関数 k_jに A_j上広義一様収束する:

$$k_j(z) = \lim_{n \to \infty} k_{j\nu(n)}(z) \quad (z \in A_j) \text{。} \tag{5.15}$$

最大値原理4により、この収束は$\overline{A}_j-\{0\}$上広義一様であり、$k_j \in PP(A_j;\partial A_j-\{0\})$となる。一方$k_j(z_j)=1$であることは明かである。

このk_jから$PP(A_j;\partial A_j-\{0\})$が生成されることを示す為、$v(z_j)=1$を満たす$v$を$PP(A_j;\partial A_j-\{0\})$から任意に選ぶ。Greenの公式により

$$v(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial A_{jn}} v * dg_{jn}(\cdot,z) \quad (z\in A_{jn}; n=2,3,\cdots)$$

と表せるが、$\partial A_{jn}-I_{jn}$上$v=0$であるので

$$v(z)=\int_{I_{jn}}\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}g_{jn}(\zeta,z)v(z)\right\}|d\zeta|$$

となる。更に、I_{jn}上の測度

$$d\mu_{jn}(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_\zeta}g_{jn}(\zeta,z_j)v(\zeta)|d\zeta| \tag{5.16}$$

と関数h_{jn}を用いて

$$v(z)=\int_{I_{jn}} h_{jn}(\zeta,z)d\mu_{jn}(\zeta) \quad (z\in A_{jn}; n=2,3,\cdots) \tag{5.17}$$

となる。この式に$z=z_j$を代入して得られる等式$\mu_{jn}(I_{jn})=1$は、次の評価に於いて重要な役割を果たす: (5.14) と (5.16) と (5.17) により、任意の$z\in D_j$に対し

$$\begin{aligned}
&\left|v(z)\ -k_{j\nu(n)}(z)\right| \\
&=\left|\int_{I_{j\nu(n)}} h_{j\nu(n)}(\zeta,z)d\mu_{j\nu(n)}(\zeta)-h_{j\nu(n)}(a_{j\nu(n)},z)\right| \\
&=\left|\int_{I_{j\nu(n)}}\left\{h_{j\nu(n)}(\zeta,z)-h_{j\nu(n)}(a_{j\nu(n)},z)\right\}d\mu_{j\nu(n)}(\zeta)\right| \\
&=\int_{I_{j\nu(n)}}\left|h_{j\nu(n)}(\zeta,z)-h_{j\nu(n)}(a_{j\nu(n)},z)\right|d\mu_{j\nu(n)}(\zeta) \\
&<2^{-\nu(n)}
\end{aligned}$$

が成立する。この評価により

$$\sup_{z\in D_j}\left|v(z)-h_{j\nu(n)}(z)\right|\le 2^{-\nu(n)} \quad (n=2,3,\cdots)$$

がわかる。ここで$n\to\infty$とすると、(5.15) から$v(z)=k_j(z)$ $(z\in D_j)$が従い、A_j上$v\equiv k_j$となる。以上により$\dim(P,A_j)=1$ $(j=1,\cdots,m)$が証明された。

5.2.5. 本小節では各 $u \in PP(A_1; \partial A_1 - \{0\})$ に対し、有界な関数を u に加えて、$PP(\Omega_{P,m}; \partial\Omega_{P,m} - \{0\})$ に属する関数 vに拡張する方法を述べる。 その為 A_1を単に A と記し、次式で表されるΩの部分領域 $B = B_1$と円弧 J_1, I_2を考える:

$$B = B_1 = \Omega_{P,m} - (A_1 \cap \{|z| \leq a_2\})\text{、}$$

$$J_1 = \{|z| = b_1, |\arg z| \leq \theta_1\}\text{、}$$

$$I_2 = I_{1,2} = \{|z| = a_2, |\arg z| \leq \theta_2\}\text{。}$$

$C(I_2)$ から $C(J_1)$ への有界線型作用素 Kを

$$(K\phi)(z) = P_\phi^B(z) \quad (z \in J_1, \phi \in C(I_2))$$

で定義する。 ただし、ϕは$\partial B - (I_2 \cup \{0\})$ 上$\phi = 0$ と考え、P_ϕ^Bは小節 5.1.8 で拡張して定義された Dirichlet 問題の解とする。 反対に、$C(J_1)$ から $C(I_2)$ への有界線型作用素 L を

$$(L\phi)(z) = P_\phi^A(z) \quad (z \in I_2, \phi \in C(J_1))$$

で定義する。 ただし、ϕは$\partial A - (J_1 \cup \{0\})$ 上$\phi = 0$ と考える。 上述の v、即ち $u \in PP(A; \partial A - \{0\})$ に対する $v \in PP(\Omega_{P,m}; \partial\Omega_{P,m} - \{0\})$ 、は $C(I_2)$ から $C(I_2)$ への有界線型作用素

$$M = L \circ K$$

を用いて構成される。

$C(J_1)$ または $C(I_2)$ に属するϕの上限ノルムをそれぞれ $\|\phi\|_1, \|\phi\|_2$で表す:

$$\|\phi\|_1 = \sup_{z \in J_1} |\phi(z)|, \quad \|\phi\|_2 = \sup_{z \in I_2} |\phi(z)|\text{。}$$

特に$\rho = \|L1\|_2$と置くと、最大値原理 4 により$\rho < 1$である。 すると、各 $u \in C(I_2)$ に対し

$$\|M^n u\|_2 \leq \rho^n \|u\|_2 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

であるので、$C(I_2)$ に属する関数

$$\phi_u = \sum_{n=1}^{\infty} M^n u$$

が定義可能である。 ここで、$K\phi_u$と $u + M\phi_u$はそれぞれ B上と A 上の $L_P u = 0$ の解であり、また

$$I_2\text{上}\phi_u - M\phi_u = u\text{、}J_1\text{上 } u + M\phi_u = K\phi_u\text{、}$$

$$\partial(A \cap B) - (J_1 \cup I_2)\text{ 上 } u = K\phi_u = M\phi_u = 0$$

であるので、$PP(\Omega_{P,m};\partial\Omega_{P,m}-\{0\})$ に v属するを

$$v(z)=\begin{cases}(K\phi_u)(z) & (z\in B)\text{、}\\ u(z)+(M\phi_u)(z) & (z\in A)\end{cases}$$

により定義することができる。 vは

$$|v(z)|=|(K\phi_u)(z)|\le\|\phi_u\|_2\le\sum_{n=0}^{\infty}\|u\|_2\rho^n=\frac{1}{1-\rho}\|u\|_2\quad(z\in B)\text{、}$$

$$|v(z)-u(z)|=|(M\phi_u)(z)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\|u\|_2\rho^n=\frac{\rho}{1-\rho}\|u\|_2\quad(z\in A)$$

を満たす。

5.2.6. k_jを小節 5.2.4 で得られた $PP(A_j;\partial A_j-\{0\})$ の生成元とする $(j=1,\cdots,m)$ 。 k_1に対し、次の条件を満たす $v_1\in PP(\Omega_{P,m};\partial\Omega_{P,m}-\{0\})$ の存在が、前小節で示された:

v_1は B_1上有界であり、v_1-k_1は A_1上有界である。

v_1の構成法と全く同様の方法により、次の条件を満たす $v_j\in PP(\Omega_{P,m};\partial\Omega_{P,m}-\{0\})$ $(j=2,\cdots,m)$ を構成することができる:

v_jは B_j上有界であり、v_j-k_jは A_j上有界である。

ただし

$$B_j=\Omega_{P,m}-(A_j\cap\{|z|\le a_2\})$$

とする。

各 v_jは A_j上非有界であり他の A_l $(l\ne j)$ 上有界であるので、$\{v_j\}_1^m$は一次独立である。従って $\dim(P,\Omega_{P,m})\ge m$ を得る。一方、$v\ (\not\equiv 0)$ を $PP(\Omega_{P,m};\partial\Omega_{P,m}-\{0\})$ に属する任意の関数とするとき、各 A_j $(j=1,\cdots,m)$ 上で

$$v-P_v^{A_j}=c_jk_j$$

を満たす正数 c_jが存在し

$$v-c_jv_j=P_v^{A_j}+c_j(k_j-v_j)$$

により A_j上 $v-c_jv_j$は有界となる。 従って

$$w=v-\sum_{j=1}^{m}c_jv_j$$

は$\Omega_{P,m}$上有界である。更に$\partial\Omega_{P,m}-\{0\}$上 $w=0$ であるので、最大値原理 5 の証明と同様の方法により、$\Omega_{P,m}$上 $w\equiv 0$ 、即ち

$$v\equiv\sum_{j=1}^{m}c_jv_j、$$

を示すことができる。すると $\dim(P,\Omega_{P,m})\leq m$ であり、既に示した $\dim(P,\Omega_{P,m})\geq m$ と合わせて、$\dim(P,\Omega_{P,m})=m$ を得る。以上により定理 5.8 が証明された。

5.2.7. 本小節以降 3 小節 5.2.7-9 に於いて、定理 5.7 を証明する。定理 5.7 の C^∞ $\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}$ は、既に構成されている$\Omega_{P,m}$と 2 本の数列 $\{r_n\}_1^\infty,\{s_n\}_1^\infty$ から作られる。

数列 $\{r_n\}$ に要求される条件は

$$q_n<r_n<p_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

だけであり、そのように選んだ後固定する。ここで、$\{p_n\}_1^\infty,\{q_n\}_1^\infty$ は$\Omega_{P,m}$ を構成するときに使用した数列である。一方数列 $\{s_n\}$ は、とりあえず

$$\frac{q_n+r_n}{2}<s_n<r<n\quad(n=1,2,\cdots)$$

を満たすように選んでおく。既に与えられた$\Omega_{P,m}$と $\{r_n\}$ に依存して、$\{r_n-s_n\}_1^\infty$ は十分速く 0 に収束することを要求されるが、その速さは次小節で指定する。

各 $j=1,\cdots,m$ と $n=1,2,\cdots$に対し Jordan 弧

$$\Lambda_{jn}^+=\Gamma_j^+\cap\left\{r_n\leq|z|\leq s_{n-1},\frac{2(j-1)}{m}\pi\leq\arg z\leq\frac{2j-1}{m}\pi\right\}、$$

$$\Lambda_{jn}^-=\Gamma_{j+1}^-\cap\left\{r_n\leq|z|\leq s_{n-1},\frac{2j-1}{m}\pi\leq\arg z\leq\frac{2j}{m}\pi\right\}$$

を考える、ただし$\Gamma_{m+1}^-=\Gamma_1^-, s_0=a_1$とする。そして$\Lambda_{jn}^+$の端点 $r_n\mathrm{e}^{(4j-3)\pi i/2m}$と$\Lambda_{jn}^-$の端点 $r_n\mathrm{e}^{(4j-1)\pi i/2m}$を、領域

$$\left\{\frac{r_n+s_n}{2}<|z|<r_n,\left|\arg z-\frac{2j-1}{m}\pi\right|<\frac{\pi}{2m}\right\}$$

内の Jordan 弧λ_{jn}で結び、また$\Lambda_{j,n+1}^+$の端点 $s_n\mathrm{e}^{(4j-3)\pi i/2m}$と$\Lambda_{j,n+1}^-$の端点 $s_n\mathrm{e}^{(4j-1)\pi i/2m}$を、領域

$$\left\{s_n<|z|<\frac{r_n+s_n}{2},\left|\arg z-\frac{2j-1}{m}\pi\right|<\frac{\pi}{2m}\right\}$$

内の Jordan 弧ν_{jn}で結ぶ。 ここで、4 個の Jordan 弧$\nu_{j,n-1}, \Lambda_{jn}^{+}, \lambda_{jn}, \Lambda_{jn}^{-}$をこの順に連結すると 1 個の Jordan 曲線Γ_{jn}が得られる、ただし$\nu_{j0} = \emptyset$とする。 このΓ_{jn}が C^{∞}級 Jordan 曲線となるように、$\nu_{j,n-1}$とλ_{jn} を選んでおく。 Γ_{jn}で囲まれた Jordan 領域を S_{jn}とすると、定理 5.7 で求めるΩの $C^{\infty}\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^{\infty}$は

$$\{\overline{Y}_n\}_1^{\infty} = \left\{\overline{S}_{jn} :\ 1 \leq j \leq m, n \geq 1\right\}$$

で与えられる。

5.2.8. 数列 $\{s_n\}$ の満たすべき条件を求める為に、各 $j = 1, \cdots, m$ と $n = 1, 2, \cdots$ に対しΩの部分領域

$$\begin{aligned} U_{jn} = &\left\{\frac{3q_n + r_n}{4} < |z| < \frac{r_n + p_n}{2},\right.\\ &\left.\frac{2j-1}{m}\pi - \frac{3\pi}{4m} < \arg z < \frac{2j-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2m}\right\}\\ &\cup \left\{s_n < |z| < r_n, \left|\arg z - \frac{2j-1}{m}\pi\right| < \frac{\pi}{2m}\right\}\\ &\cup \left\{\frac{3q_n + r_n}{4} < |z| < \frac{r_n + p_n}{2},\right.\\ &\left.\frac{2j-1}{m}\pi + \frac{\pi}{2m} < \arg z < \frac{2j-1}{m}\pi + \frac{3\pi}{4m}\right\} \end{aligned}$$

を考える。 更に、次式で定義される U_{jn}の部分集合γ_{jn}と、∂U_{jn}の部分集合 F_{jn}を考える:

$$\begin{aligned} \gamma_{jn} &= \left(U_{jn} \cap \left\{\arg z = \frac{2j-1}{m}\pi - \frac{\pi}{2m}\right\}\right)\\ &\cup \left(U_{jn} \cap \left\{\arg z = \frac{2j-1}{m}\pi + \frac{\pi}{2m}\right\}\right)、\\ F_{jn} &= \partial U_{jn} - \left\{\left|\arg z - \frac{2j-1}{m}\pi\right| \leq \frac{\pi}{2m}\right\}。 \end{aligned}$$

U_{jn}上で考えた F_{jn}の P-調和測度をω_{jn}とする ($j = 1, \cdots, m; n = 1, 2, \cdots$)。即ち$\omega_{jn}$は U_{jn}上 $L_P u = 0$ の解で、∂U_{jn}上の境界値は F_{jn}上 1 であり$\partial U_{jn} - F_{jn}$上 0 である。 すると文献 [80,p.632] の Lemma 1 の証明と同様の方法により

$$\lim_{s_n \to r_n} \sup_{z \in \gamma_{jn}} \omega_{jn}(z) = 0 \quad (j = 1, \cdots, m; n = 1, 2, \cdots) \tag{5.18}$$

を示すことができる。 一方 Carleson 評価 (Ancona [2] 参照) により、適当な正数 C_{jn} ($j = 1, \cdots, m; n = 1, 2, \cdots$) に対し

$$u(z) \leq C_{jn} u(z_1) \quad (z \in F_{jn}, u \in PP(\Omega_{P,m}; \partial\Omega_{P,m} - \{0\})) \tag{5.19}$$

が成立する。 ただし z_1は、小節 5.2.3 で定められた区間 (a_2, b_1) 内の固定点である。 そこで、数列 $\{s_n\}$ の各 s_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が満たすべき条件を

$$\sup_{z\in\gamma_{jn}} \omega_{jn}(z) < \frac{1}{2C_{jn}} \quad (j =, \cdots, m) \tag{5.20}$$

とする。

5.2.9. 条件 (5.20) を満たすように数列 $\{s_n\}$ を選び固定する。 このような $\{s_n\}$ の存在は (5.18) により保証されている。 この $\{s_n\}$ から作成した C^∞ $\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty = \{\overline{S}_{jn}\}_{1\leq j\leq m, n\geq 1}$に対して、定理 5.7 が成立することを証明する。 即ちΩの C^∞admissible 部分領域

$$W = W\left(\{\overline{Y}_n\}\right) = W\left(\{\overline{S}_{jn}\}\right) = \Omega - \bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{S}_{jn}$$

に対して、$\dim(P, W) = m$ を示す。

$PP(W; \partial W - \{0\})$ から $PP(\Omega_{P,m}; \partial\Omega_{P,m} - \{0\})$ への写像

$$\Phi u = u - P_u^{\Omega_{P,m}} \quad (u \in PP(W; \partial W - \{0\}))$$

を用いて、$PP_1(W; \partial W - \{0\})$ から $PP_1(\Omega_{P,m}; \partial\Omega_{P,m} - \{0\})$ への写像

$$\Phi_1 u = \frac{\Phi u}{\ell(\Phi u)} \quad (u \in PP_1(W; \partial W - \{0\})$$

を定義する、ただし

$$\ell(\Phi u) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial|z|}(\Phi u)(z)|dz|$$

とする。 すると、文献 [80,pp.638-639] の Theorem 1 の証明と同様の方法により、不等式 (5.19) と (5.20) を用いて、Φ_1が全単射であることを示すことができる。 従って $\dim(P, W) = \dim(P, \Omega_{P,m})$ であり、定理 5.8 により $\dim(P, W) = m$ を得る。 以上で定理 5.7 が証明された。

5.2.10. 前小節で確定した $C^\infty\mathcal{Y}$-列 $\{\overline{Y}_n\}_1^\infty$と最初に与えられた密度 Pに対し、5.3 定理により、Pに関する $\{\overline{Y}_n\}$ の正規付随密度 $Q_{P,m}$が存在する。 必要なら Pを C^∞密度 P' $(P' \geq P)$ で置き換えればよいので、Q_{Pm}は C^∞密度としてよい。 従って、定理 5.4 は次のように拡張される:

定理 5.9. Ω上の任意の密度 Pと任意正整数 m に対し、Ω上の C^∞密度 $Q=Q_{P,m}$で

$$\Omega\text{上}\ Q \geq P\text{かつ}\ \dim QP(\Omega;\Gamma)=m$$

を満たすものが存在する。

§5.3. 回転不変密度支配下での非単調性

5.3.1. 次式で定義されるΩ上の一般密度 Pと回転不変密度 Q を考える:

$$P(re^{i\theta})=\frac{1}{r^2}\left(\log\frac{1}{r}\right)^2\left(\frac{1}{4}+\cos^2\theta\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}+\sin^2\theta\right)\text{、} \tag{5.21}$$

$$Q(z)=\frac{5}{4|z|^2}\left(\log\frac{1}{|z|}\right)^2+\frac{3}{2|z|^2}\text{。}$$

Ω上 $P\leq Q$ は明かである。 また、系 3.6 と系 3.7 と例 3.9 により、原点に於いて Q に関する Picard 原理が成立する。

Ω上の正値関数

$$E_j(re^{i\theta})=\exp\left\{\frac{1}{4}\left(\log\frac{1}{r}\right)^2+(-1)^j\left(\log\frac{1}{r}\right)\sin\theta\right\}\quad (j=1,2)$$

を考える。 次の計算により、E_1と E_2はΩ上で方程式 $L_P u=0$ の解であることがわかる:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E_j(re^{i\theta})}{E_j(re^{i\theta})} &= \left\{-\frac{1}{2r}\log\frac{1}{r}-\frac{(-1)^j}{r}\sin\theta\right\}^2\\ &\quad -\frac{1}{2r^2}\log\frac{1}{r}-\frac{(-1)^j}{r^2}\sin\theta\\ &\quad +\frac{1}{2r^2}\log\frac{1}{r}+\frac{1}{2r^2}+\frac{(-1)^j}{r^2}\sin\theta\\ &\quad +\frac{1}{r^2}\left\{\left((-1)^j\left(\log\frac{1}{r}\right)\cos\theta\right)^2-(-1)^j\left(\log\frac{1}{r}\right)\sin\theta\right\}\\ &= P(re^{i\theta})\text{。}\end{aligned}$$

Ω上の P-単位を e_0とする。 即ち e_0は、Γ上で境界値 1 を取る方程式 $L_P u=0$ のΩ上の唯一有界解とする。 E_1と E_2もΓ上の境界値は 1 であるが、原点に於いては$+\infty$ に発散している。 従って E_1-e_0と E_2-e_0は $PP(\Omega;\Gamma)$ に属する。 しか

し、$E_1 - e_0$と $E_2 - e_0$は明らかに一次独立である。 即ち $\dim PP(\Omega;\Gamma) \geq 2$ であり、原点に於いて Pに関する Picard 原理は成立しない。 以上により、回転不変密度の支配下でも、Picard 原理には単調性がないことがわかる:

定理 5.10. 次の条件を満たすΩ上の一般密度 Pと回転不変密度 Q が存在する: Ω上 $P \leq Q$ であるが、原点に於ける Picard 原理は、Q に関して成立し Pに関して成立しない。

5.3.2. Ω上の密度は、適当な定数 c $(c > 1)$ に対し

$$\frac{1}{c}P(|z|) \leq P(z) \leq cP(|z|) \quad (z \in \Omega) \tag{5.22}$$

を満たすとき、**殆ど回転不変**であるといわれる (Nakai [66] 参照)。 Pが殆ど回転不変であるとき、原点に於ける Picard 原理の成否は、$P(z)$ に関しても $P(|z|)$ に関しても同等であることが予想されていた。 しかし (5.21) で定義される密度 Pにより、この予想は否定される。 実際

$$\frac{1}{5}P(|z|) \leq P(z) \leq 5P(|z|)$$

により、Pは殆ど回転不変であるが

$$P(|z|) = \frac{5}{4|z|^2}\left(\log\frac{1}{|z|}\right)^2 + \frac{1}{2|z|^2}$$

に関する Picard 原理は成立し、$P(z)$ に関する Picard 原理は成立しない。 尚、(5.22) の c の値がどんなに 1 に近くても、この予想は成立しない。 この事実は次の例からわかる: 正数εに対しΩ上の密度

$$P_\varepsilon(re^{i\theta}) = \frac{1}{r^2}\left(\log\frac{1}{r}\right)^2\left(\frac{1}{4} + \varepsilon^2\cos^2\theta\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2} + \sin^2\theta\right)$$

は $c = (1 + 4\varepsilon^2)$ に関する (5.22) を満たし、$P_\varepsilon(|z|)$ に関する Picard 原理は成立するが、原点で挙動が異なる 2 個の解

$$E_{\varepsilon j}(re^{i\theta}) = \exp\left\{\frac{1}{4}\left(\log\frac{1}{r}\right)^2 + (-1)^j\varepsilon\left(\log\frac{1}{r}\right)\sin\theta\right\} \quad (j = 1, 2)$$

の存在により、$P_\varepsilon(z)$ に関する Picard 原理は成立しない。

この例によると、Ω上の密度 Pが正数εに対し

$$P(z) \leq \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right)\frac{1}{|z|^2}\left(\log\frac{1}{|z|}\right)^2 \quad (z \in \Omega)$$

を満たしても、Pに関する Picard 原理が成立するとは限らないことがわかる。

5.3.3. Pと Q を上半円板$\Omega^+ = \Omega \cap \{\mathrm{Im} z > 0\}$ 上の密度とする。 Ω^+上の密度に関する原点に於ける Picard 原理の単調性を調べるため、Pと Q は$\overline{\Omega}^+ - \{0\}$を含む或領域上で非負局所 Hölder 連続とする。 原点に於いてΩ^+上で考えた Picard 原理 (2.2.4 節参照) を、単に Picard 原理と呼ぶことにする。 すると、文献 [80] と同様の方法で、Picard 原理には単調性がないことが示せる: Picard 原理が成立しない Pと成立する Q を、Ω^+上 $P \le Q$ を満たす様に構成できる。 このような Pと Q は、定理 5.4 と同様の方法で、Pを回転不変と仮定しても構成できる。ただし、$P(z) = P(|z|i)$ $(z \in \Omega^+)$ のとき Pは回転不変であると言う。 本小節では、反対に Q を回転不変と仮定しても、この様な Pと Q が存在することを証明する。

次式で定義されるΩ^+上の一般密度 Pと回転不変密度 Q を考える:

$$P(re^{i\theta}) = \frac{4}{r^2}\left(\log\frac{1}{r}\right)^2\left(1+\cos^2 2\theta\right) + \frac{1}{r^2}\left(2+\sin^2 2\theta\right),$$

$$Q(z) = \frac{8}{|z|^2}\left(\log\frac{1}{|z|}\right)^2 + \frac{3}{|z|^2}。$$

Ω^+上 $P \le Q$ は明かである。 また、系 3.6 と系 3.7 と例 3.9 及び次章の定理 6.1 により、Q に関する Picard 原理が成立する。 しかし、方程式 $L_P u = 0$ は原点での挙動が異なる 2 個の正値解

$$E_j(re^{i\theta}) = \exp\left\{\left(\log\frac{1}{r}\right)^2 + (-1)^j\left(\log\frac{1}{r}\right)\sin 2\theta\right\} \quad (j = 1, 2)$$

を持つ。 各 $n = 2, 3, \cdots$に対し$\Omega_n^+ = \Omega^+ \cap \{|z| > 1/n\}$ と置き、$\partial\Omega_n^+ \cap \partial\Omega^+$上の境界値が $E_1(= E_2)$ で$\partial\Omega_n^+ \cap \Omega^+$上の境界値が 0 である、$L_P u = 0$ のΩ_n^+上の解を u_nとする。 各Ω_n^+上

$$u_n \le u_{n+1} \le \min(E_1, E_2)$$

であるので、$\{u_n\}_1^\infty$はΩ^+上 $L_P u = 0$ の正値解 E_0に収束する。 $\partial\Omega^+ - \{0\}$ 上 $E_0 = E_1 = E_2 = 0$ でありΩ^+上 $E_0 \le E_1, E_0 \le E_2$であるので、$E_1 - E_0$と $E_2 - E_0$は共に $PP(\Omega^+; \partial\Omega^+ - \{0\})$ に属する。 Ω^+上の Pの値と$\partial\Omega^+ - \{0\}$ 上の $E_1(= E_2)$の値は、虚軸に関して左右対称であるので、$\{u_n\}$ の極限 E_0も左右対称である。 一方、E_1と E_2は両方とも左右対称ではない。 しかも互いに他の反転である。 従って $E_1 - E_0$と $E_2 - E_0$は一次独立であり、Pに関する Picard 原理は成立しない。

第6章　連続境界点上のP-Martin境界

Dを有界な平面領域、PをD上の密度、ζ_0をDの連続境界点とするとき、ζ_0上のP-Martin境界$\partial_P^* D(\zeta_0)$はζ_0の近傍での∂Dの形状とPの挙動に依存する。特に、ζ_0の適当な近傍U_0内で∂Dが Lipschitz 曲線でありU_0上でPが有界な場合は、Ancona [3] により、ζ_0に於いてPに関する境界 Harnack 原理が成立することが知られている:

境界 Harnack 原理.　正数Cと、ζ_0を含むU_0内の Jordan 領域U_nの減少列$\{U_n\}_1^\infty$で、各$D_n = (U_{3n-2} - \overline{U}_{3n}) \cap D$が連結であるものが存在して、各$F_n = \partial U_{3n-1} \cap D$上で境界 Harnack 不等式

$$\frac{u_1(z_1)}{u_1(z_2)} \leq C \frac{u_2(z_1)}{u_2(z_2)} \quad (z_1, z_2 \in F_n;\ u_1, u_2 \in PP(D_n; \partial D_n \cap \partial D) - \{0\})$$

が成立する、ただし一般に∂Dの部分集合γに対し

$$PP(D;\gamma) = \{u \in PP(D) :\ \gamma \text{上}\ u = 0\}$$

とする。

ζ_0に於いてPに関する境界 Harnack 原理が成立しているとき、最大値原理 2 により、各F_n $(n = 1, 2, \cdots)$上で Carleson 評価が成立する。

Carleson 評価.　正数C_nが存在して、上述のD_n, F_nに対し境界 Harnack 不等式

$$u(z) \leq C_n u(z_n) \quad (z \in F_n, u \in PP(D_n; \partial D_n \cap \partial D))$$

が成立する、ただしz_nはF_nの固定点とする。

各F_n $(n = 1, 2, \cdots)$上で Carlson 評価が成立しているとき

$$\left\{K_P^D(\cdot, \zeta^*) :\ \zeta^* \in \partial_P^* D(\zeta_0)\right\} \subset PP(D; \partial D - \{\zeta_0\})\ 、$$
$$\partial_P^* D(\zeta_0) \cap \partial_P^* D(\zeta) = \emptyset \quad (\zeta \in \partial D - \{\zeta_0\})$$

が成立する。また、ζ_0に於いてPに関する境界 Harnack 原理が成立しているとき、ζ_0に於いてPに関する Picard 原理

$$\dim P = \dim PP(D; \partial D - \{\zeta_0\}) = 1$$

が成立することが、孤立境界点に於いて境界 Harnack 原理が成立している場合 (4.1.2 節参照) と同様の方法で、示されて

$$\partial_P^* D(\zeta_0) = \delta_P^* D(\zeta_0) = \{1\text{ 点 }\}$$

となる (2.2.4 節参照)。 従って、∂Dの全ての点に於いてPに関する境界 Harnack 原理が成立すれば、$D_P^* = \overline{D}$となる。 尚 $P \not\geq 0$ の場合は、境界 Harnack 原理から Carlson 評価を導くことができるかどうかは、明らかでない。

本章では、Pに関する境界 Harnack 原理が成立するとは限らない点ζ_0に於いて、$\partial_P^* D(\zeta_0)$ を研究する。 その為、ζ_0以外の∂Dの各点ζに於いてはPに関する境界 Harnack 原理が成立している様なDとPを、研究の対象とする。 従って

$$\left\{K_P^D(\cdot,\zeta^*):\ \zeta^* \in \partial_P^* D(\zeta)\right\} \subset PP(D;\partial D - \{\zeta\}) \quad (\zeta \in \partial D) \tag{6.1}$$

が成立し

$$\partial_P^* D(\zeta_1) \cap \partial_P^* D(\zeta_2) = \emptyset \quad (\zeta_1 \neq \zeta_2 \in \partial D)\text{、} \tag{6.2}$$

$$\partial_P^* D(\zeta) = \delta_P^* D(\zeta) = \{1\text{ 点 }\} \quad (\zeta \in \partial D - \{\zeta_0\}) \tag{6.3}$$

となっている。 もしζ_0に於いて、Pに関する境界 Harnack 原理、またはより一般に Picard 原理、の成立が示されれば、$\zeta = \zeta_0$にたいする (6.3) も成立して $D_P^* = \overline{D}$ となる。

§6.1 では、Pを$\Omega = \{0 < |Z| < 1\}$ 上の回転不変密度とするとき、上半円板 $\Omega^+ = \Omega \cap \{\mathrm{Im} z > 0\}$ で考えた原点上の P-Martin 境界$\partial_P^*\Omega^+(0)$ を研究する。 §6.2 では、回転不変ではないPに対しては、§6.1 の結果が必ずしも成立しないことを示す。 §6.3 では、角状領域 A の頂点に於いて、Pに関する Picard 原理が成立する様な A の形状と Pの増大度について調べる。

§6.1. 回転不変密度に関する上半円板の Martin 境界

Pを$\Omega = \{0 < |z| < 1\}$ 上の回転不変密度とする。 本節では、上半円板

$$\Omega^+ = \Omega \cap \{\mathrm{Im} z > 0\}$$

の P-Martin 完閉化 $(\Omega^+)_P^*$を決定する。 前章までと同様に、Pは$\Omega \cup \Gamma$ ($\Gamma = \{|z| = 1\}$) を含む或領域上で非負局所 Hölder 連続と仮定するので、$D = \Omega^+$に対する (6.2) と$\zeta_0 = 0$ に対する (6.3) が成立している。 従って、原点上の P-Martin 境界$\partial_P^*\Omega^+(0)$ が決定されれば、$(\Omega^+)_P^*$が決定される。

6.1.1. PをΩ上の回転不変密度とし、Ω上の P-Green 関数 G_P^{Ω} とΩ^+上の P-Green 関数 $G_P^{\Omega^+}$をそれぞれ簡単に G_P, G_P^+と記す。 ζの共役複素数を$\overline{\zeta}$で表すとき、Pの対称性 $P(\zeta)=P(\overline{\zeta})$ から

$$G_P^+(z,\zeta)=G_P(z,\zeta)-G_P(z,\overline{\zeta}) \quad (z,\zeta\in\Omega^+)$$

が従う。 Ω上の n 階 P-単位を $e_n(r)$ とすると、G_Pの Fourier 級数展開 (3.17) により、G_P^+の Fourier 級数展開

$$G_P^+(z,re^{i\theta})=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(z,\rho)}{e_n(\rho)}e_n(r)\sin n\theta \quad (z\in\Omega^+, 0<r\leq\rho<|z|)\ 、$$

$$b_n(z,\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}G_P(z,\rho e^{i\theta})\sin n\theta d\theta$$

が得られる。

Ωの場合の M_Pに相当する関数

$$M_P^+(z,\zeta)=\frac{G_P^+(z,\zeta)}{e_1(\zeta)\sin(\arg\zeta)} \quad (z,\zeta\in\Omega^+)$$

を考える。 この式に G_P^+の Fourier 級数展開を代入すると、M_P^+の Fourier 級数展開

$$M_P^+(z,re^{i\theta})=2\frac{b_1(z,\rho)}{e_1(\rho)}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n(z,\rho)}{e_n(\rho)}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\frac{e_n(r)}{e_1(r)}$$

$$(z\in\Omega^+, 0<r\leq\rho<|z|, 0\leq\theta<2\pi)$$

を得る。 $\Omega_\rho=\{0<|z|<\rho\}$ 上の n 階 P-単位を $e_n(r,\rho)$ とすると、(3.9) と (3.18) により

(6.4)
$$\left|\frac{b_n(z,\rho)}{e_n(\rho)}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\frac{e_n(r)}{e_1(r)}\right|\leq n\frac{a_0(z,\rho)}{e_1(\rho)}\left\{\frac{e_1(r,\rho)}{e_0(r,\rho)}\right\}^{n-1}\ 、$$
$$a_0(z,\rho)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}G_P(z,\rho e^{i\theta})d\theta$$

が成立する。 ここで、$\alpha(P)=0$ の場合を考えると、$\zeta\to 0$ のとき $M_P^+(z,\zeta)$ はΩ^+上広義一様に

$$M_P^+(z)\equiv 2\frac{b_1(z,\rho)}{e_1(\rho)} \quad (z\in\Omega^+)$$

に収束し、$b_1(z,\rho)>0$ により $M_P^+(z)>0$ である。 従って、Ω^+上の P-Martin 核

$$K_P^+(z,\zeta)=K_P^{\Omega^+}(z,\zeta)=\frac{G_P^+(z,\zeta)}{G_P^+(z_0,\zeta)}$$

は$\zeta \to 0$のとき、Ω^+上広義一様に

$$k_P^+(z) \equiv \frac{M_P^+(z)}{M_P^+(z_0)} \quad (z \in \Omega^+)$$

に収束する。

次に$\alpha(P) > 0$の場合を考える。この場合は、$\zeta = re^{i\theta}$が原点に収束する方法に依存して、$M_P^+(z,\zeta)$の極限が異なる: $r \to 0, \theta \to \sigma$のとき、$M_P^+(z, re^{i\theta})$は$\Omega^+$上広義一様に

$$(6.5) \qquad M_P^+(z;\sigma) \equiv \begin{cases} 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(z,\rho)}{e_n(\rho)} \frac{\alpha_n(P)}{\alpha(P)} & (\sigma = 0) \\ 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(z,\rho)}{e_n(\rho)} \frac{\sin n\sigma}{\sin \sigma} \frac{\alpha_n(P)}{\alpha(P)} & (0 < \sigma < \pi) \\ 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{b_n(z,\rho)}{e_n(\rho)} \frac{\alpha_n(P)}{\alpha(P)} & (\sigma = \pi) \end{cases}$$

$$(z \in \Omega^+, 0 < \rho < |z|)$$

に収束する。関数族$\{b_n(\cdot,\rho):\ n \geq 1\}$の一次独立性 (Nakai [66] 参照) により$M_P^+(z;\sigma) > 0$であり、従って$K_P^+(z, re^{i\theta})$は、$r \to 0, \theta \to \sigma$のとき$\Omega^+$上広義一様に

$$(6.6) \qquad k_P^+(z;\sigma) \equiv \frac{M_P^+(z;\sigma)}{M_P^+(z_0;\sigma)} \quad (z \in \Omega^+)$$

に収束する。再度$\{b_n(\cdot,\rho):\ n \geq 1\}$の一次独立性を用いて

$$k_P^+(\cdot;\sigma) \not\equiv k_P^+(\cdot;\tau) \quad (0 \leq \sigma < \tau \leq \pi)$$

もわかる。

以上により$\partial_P^*\Omega^+(0)$は、$\alpha(P) = 0$の場合は$\{1$点$\}$であることが、また$\alpha(P) > 0$の場合は区間$[0,\pi]$と同一視できることが、示された:

定理 6.1. PがΩ上の回転不変密度のとき、Ω^+から$\{\alpha(P) < |z| < 1, \mathrm{Im} z > 0\}$への同相写像

$$\pi_P^+(z) = \{\alpha(P) + (1-\alpha(P))|z|\}\frac{z}{|z|}$$

は、$(\Omega^+)_P^*$から$\{\alpha(P) \leq |z| \leq 1, \mathrm{Im} z \geq 0\}$への同相写像に拡張され、$\partial_P^*\Omega^+(0) = \delta_P^*\Omega^+(0)$である。

$\alpha(P) = 0$の場合の$\partial_P^*\Omega^+(0) = \delta_P^*\Omega^+(0)$、即ち$k_P^+(z)$が minimal であること、は$D = \Omega^+$と$\zeta = 0$に対する (2.34) から明かである。$\alpha(P) > 0$の場合も

$k_P^+(z;\sigma)$ $(0 \le \sigma \le \pi)$ は全て minimal であるが、その証明は小節 6.1.2-3 で与えられる。

6.1.2.　先ず、$0 < \sigma < \pi$のとき $k_P^+(z;\sigma)$ が minimal であることを、小節 3.1.4 で示されている

$$k_P(z;\theta) = \frac{M_P(z;\theta)}{M_P(z_0;\theta)} \quad (0 \le \theta < 2\pi)$$

の minimal 性に基づいて、示す。 尚、$M_P(z;\theta)$ の級数表示は

$$M_P(z;\theta) = \frac{a_0(z;\rho)}{2e_0(\rho)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(P)}{e_n(\rho)} \{a_n(z,\rho)\cos n\theta + b_n(z,\rho)\sin n\theta\}$$

であったので、(6.5) により

$$M_P^+(z;\sigma) = \frac{1}{\alpha(P)\sin\sigma} \{M_P(Z;\sigma) - M_P(z;2\pi - \sigma)\}$$

が成立し、従ってある正数 $C_1 = C_1(P,\sigma), C_2 = C_2(P,\sigma)$ に対し

$$k_P^+(z;\sigma) = C_1 k_P(z;\sigma) - C_2 k_P(z;2\pi - \sigma) \tag{6.7}$$

が成立している。

u^+を $PP(\Omega^+)$ に属する関数で

$$u^+(z) \le k_P^+(z;\sigma) \quad (z \in \Omega^+)$$

を満たすものとする。 (6.1) と定理 6.1 により $\partial\Omega^+ - \{0\}$ 上 $k_P^+(\cdot;\sigma) = 0$ であるので、実軸の部分集合 $(-1,0) \cup (0,1)$ 上 $u^+ = 0$ であり、Ω上の関数

$$u(z) = \begin{cases} u^+(z) & (z \in \Omega^+)\text{、} \\ -u^+(\overline{z}) & (z \in \Omega - \Omega^+) \end{cases}$$

は $L_P u = 0$ のΩ上の解となる。 そこで、Ω上の $L_P u = 0$ の解

$$v(z) = C_1 k_P(z;\sigma) - u(z)$$

を考えると、(6.6) により

$$v(z) = \begin{cases} C_1 k_P(z;\sigma) - u^+(z) \ge k_P^+(z;\sigma) - u^+(z) \ge 0 & (z \in \Omega^+)\text{、} \\ C_1 k_p(z;\sigma) + u^+(\overline{z}) \ge 0 & (z \in \Omega - \Omega^+) \end{cases}$$

であり、一方

$$v(z) \leq \begin{cases} C_1 k_P(z;\sigma) & (z \in \Omega^+)\text{、} \\ C_1 k_p(z;\sigma) + C_1 k_P(\overline{z};\sigma) & (z \in \Omega - \Omega^+) \end{cases}$$

も成立している。 ここで、Pの対称性により $M_P(\overline{z};\sigma) = M_P(z;2\pi-\sigma)$ であるので、或正数 $C_3 = C_3(P,\sigma)$ に対し

$$k_P(\overline{z};\sigma) = C_3 k_P(z;2\pi-\sigma) \tag{6.8}$$

であり、Ω上

$$0 \leq v(z) \leq C_1 k_P(z;\sigma) + C_1 C_3 k_P(z;2\pi-\sigma)$$

となっていることがわかる。 従って、適当な非負定数 C_4, C_5により、vはΩ上

$$v(z) = C_4 k_P(z;\sigma) + C_5 k_P(z;2\pi-\sigma)$$

と表される (Constantinescu-Cornea [25] 参照)。 すると u^+はΩ^+上

$$u^+(z) = (C_1 - C_4)k_P(z;\sigma) - C_5 k_P(z;2\pi-\sigma)$$

の形となる。 $C_5 \geq 0, u^+(z) \geq 0$ により $C_1 - C_4 > 0$ であり、更に、実数 x $(0 < |x| < 1)$ に対し $k_P^+(x;\sigma) = u^+(x) = 0$ であるので、(6.7) と (6.8) からそれぞれ $C_3(C_1 - C_4) = C_5$と $C_3 C_1 = C_2$が従う。 結局

$$u^+(z) = \frac{C_1 - C_4}{C_1} k_P^+(z;\sigma)$$

となり、$k_P^+(z;\sigma)$ が minimal であることがわかる。

6.1.3. 本小節では、$k_P^+(z;0)$ と $k_P^+(z;\pi)$ が minimal であることを証明する。 Pの対称性 $P(x+iy) = P(-x+iy)$ により、どちらか一方例えば $K_P^+(z;0)$ が、minimal であることを示せばよい。 その為に、μ_0^+を小節 2.2.2 の表現定理に於ける $k_P^+(\cdot;0)$ の表現測度とする。 $\partial\Omega^+ - \{0\}$ 上 $k_P^+(z;0) = 0$ であることと $D = \Omega^+$ にたいする (6.1) により、μ_0^+の台は

$$\left(\pi_P^+\right)^{-1}(\{|z| = \alpha(P), \mathrm{Im}z \geq 0\})$$

に含まれる。

$k_P^+(z;0)$ が minimal であることを背理法で示す為、$k_P^+(z;0)$ は minimal ではないと仮定する。 すると、区間 $(0,\pi)$ 上の測度μが存在して

$$k_P^+(z;0) = \int_{(0,\pi)} k_P^+(z;\sigma)d\mu(\sigma)$$

が成立する。 この式の右辺に (6.5) と (6.6) を代入すると

$$k_P^+(z;0) = \int_{(0,\pi)} \frac{2}{M_P^+(z_0;\sigma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(z,\rho)}{e_n(\rho)} \frac{\sin n\sigma}{\sin\sigma} \frac{\alpha_n(P)}{\alpha(P)} d\mu(\sigma)$$

を得る。 (3.18) と (6.4) により、$r \to 0$ かつ$\theta \to \sigma$のときの $M_P^+(z;re^{i\theta})$ 収束は、$\sigma \in [0,\pi]$ に関して一様であり、$M_P^+(z_0;\sigma)$ はσの連続関数である。 一方、各σに対して $M_P^+(z_0;\sigma) > 0$ であるので

$$\sup_{0\le\sigma\le\pi} \frac{1}{M_P^+(z_0;\sigma)} < \infty$$

である。 従って

$$k_P^+(z;0) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(z,\rho)}{e_n(\rho)} \frac{\alpha_n(P)}{\alpha(P)} \int_{(0,\pi)} \frac{1}{M_P^+(z_0;\sigma)} \frac{\sin n\sigma}{\sin\sigma} d\mu(\sigma) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

となる。 この級数展開と (6.5),(6.6) による $k_P^+(z;0)$ の級数展開の各項を、$\{b_n(\cdot;\rho) : n \ge 1\}$ の一次独立性を用いて、比較することにより

$$\frac{n}{M_P^+(z_0;0)} = \int_{(0,\pi)} \frac{1}{M_P^+(z_0;\sigma)} \frac{\sin n\sigma}{\sin\sigma} d\mu(\sigma) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成立する。 そこで、Lebesgue の定理を用いて

$$\frac{1}{M_P^+(z_0;0)} = \int_{(0,\pi)} \frac{1}{M_P^+(z_0;\sigma)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n\sigma}{n\sin\sigma} d\mu(\sigma) = 0$$

が得られる。 この矛盾により、$k_P^+(z;0)$ は minimal でなければならない。

6.1.4. PをΩ上の回転不変密度とする。 本小節では、各θ $(0 < \theta < 2\pi)$ に対して角領域

$$\Omega_\theta = \{0 < |z| < 1, 0 < \arg z < \theta\}$$

の P-Martin 完閉化 $(\Omega_\theta)_P^*$を決定する。

Ω^+からΩ_θへの等角写像

$$\phi(z) = \phi_\theta(z) = z^{\theta/\pi} \quad (z \in \Omega^+)$$

を考えると、$u \in C^2(\Omega_\theta)$ に対し $v(z) = u(\phi(z))$ $(z \in \Omega^+)$ は

$$\Delta v(z) = \left|\frac{d}{dz}\phi(z)\right|^2 (\Delta u)(\phi(z)) \tag{6.9}$$

を満たす。 Ω上の回転不変密度$Q = Q_{P,\theta}$を、$z \in \Omega^+$に対しては

$$Q(z) = \left|\frac{d}{dz}\phi(z)\right|^2 P(\phi(z)) = \frac{\theta^2}{\pi^2}|z|^{2\theta-\pi}P(z^{\theta/\pi}) \tag{6.10}$$

で、また$z \in \Omega - \Omega^+$に対しては$Q(z) = Q(|z|i)$で定義する。 すると(6.9)により、$PP(\Omega_\theta; \partial\Omega_\theta - \{0\})$と$QP(\Omega^+; \partial\Omega^+ - \{0\})$は自然に同型となり、$\partial_P^*\Omega_\theta(0)$と$\partial_Q^*\Omega^+(0)$は同相となる。 従って、$\partial_P^*\Omega_\theta(0)$は$Q$の特異性指数$\alpha(Q)$により決定される。

$\alpha(Q)$を調べるために、各正数λに対してΩ上の回転不変密度

$$P_\lambda(z) = P(z) + \frac{\lambda}{|z|^2}$$

を考え、Ω上のP-単位、P_λ-単位をそれぞれ$e_0(r), e_\lambda(r)$とする。 $e_\lambda(r)$は次の基本的性質を持つ:

補題 6.2. $0 < \lambda < \mu$のとき

$$\left\{\frac{e_\lambda(r)}{e_0(r)}\right\}^{(\mu/\lambda)^2} \leq \frac{e_\mu(r)}{e_0(r)} \leq \frac{e_\lambda(r)}{e_0(r)} \quad (0 < r \leq 1)$$

が成立する。

証明. 最大値原理6により、後半の不等式は自明である。 前半の不等式を示す為に$s = (\mu/\lambda)^2$ (> 1)と置き、$r \in (0, 1]$の関数

$$F(r) = e_\lambda(r)^s e_0(r)^{1-s}$$

を考える。 Fは$F(1) = 1, 0 < F(r) \leq 1$を満たし、更に

$$\frac{F'(r)}{F(r)} = s\frac{e'_\lambda(r)}{e_\lambda(r)} - (s-1)\frac{e'_0(r)}{e_0(r)}、$$

$$\begin{aligned}\frac{F''(r)}{F(r)} &= \left\{\frac{F'(r)}{F(r)}\right\}^2 + \left\{\frac{F'(r)}{F(r)}\right\}' \\ &= s\frac{e''_\lambda(r)}{e_\lambda(r)} - (s-1)\frac{e''_0(r)}{e_0(r)} - s\left\{\frac{e'_\lambda(r)}{e_\lambda(r)}\right\}^2 + (s-1)\left\{\frac{e'_0(r)}{e_0(r)}\right\}^2 \\ &\quad + \left\{s\frac{e'_\lambda(r)}{e_\lambda(r)} - (s-1)\frac{e'_0(r)}{e_0(r)}\right\}^2、\end{aligned}$$

を満たす。 従って

$$\begin{aligned}\frac{F''(r)+r^{-1}F'(r)}{F(r)} &= s\left\{P(r)+\frac{\lambda^2}{r^2}\right\}^2-(s-1)P(r)\\ &\quad +s(s-1)\left\{\frac{e'_\lambda(r)}{e_\lambda(r)}-\frac{e'_0(r)}{e_0(r)}\right\}^2\\ &\geq P_\mu(r)\end{aligned}$$

となり、$F(r)\leq e_\mu(r)$ を得る。この不等式は補題の前半の不等式と同等である。

(証明終り)

この補題により、$\alpha(P)=0$ と$\alpha(Q)=\alpha(Q_{P,\theta})=0$ とは同値であることがわかる。 実際、Ω上の Q-単位 $f_0(r)$ と 1 階 Q-単位 $f_1(r)$ は、(6.9) と (6.10) により

$$f_0(r)=e_0(r^{\theta/\pi}),\ f_1(r)=e_{\pi/\theta}(r^{\theta/\pi})$$

で与えられるので

$$\alpha(Q)=\lim_{r\to 0}\frac{f_1(r)}{f_0(r)}=\lim_{r\to 0}\frac{e_{\pi/\theta}(r)}{e_0(r)}\equiv\alpha_{\pi/\theta}(P)$$

であるが、補題 6.2 により$\alpha_{\pi/\theta}(P)=0$ と$\alpha(P)=0$ は同値である。 以上により $(\Omega_\theta)^*_P$が決定された:

定理 6.3. PをΩ上の回転不変密度とし、θを $0<\theta<2\pi$を満たす角度とするとき、Ω_θから $\{\alpha(P)<|z|<1, 0<\arg z<\theta\}$ への同相写像

$$\pi_{\theta P}(z)=\{\alpha(P)+(1-\alpha(P))|z|\}\frac{z}{|z|}$$

は $(\Omega_\theta)^*_P$から $\{\alpha(P)\leq|z|\leq 1, 0\leq\arg z\leq\theta\}$ への同相写像に拡張され、$\partial^*_P\Omega_\theta(0) = \delta^*_P\Omega_\theta(0)$ である。

この定理により次の系を得る。

系 6.4. PをΩ上の回転不変密度とする。 次の 3 個の領域上で考えた、原点に於けるPに関する Picard 原理は、全て一致する: (i) Ω上、(ii) 任意のΩ_θ $(0<\theta<2\pi)$ 上、(iii) 適当なΩ_θ $(0<\theta<2\pi)$ 上。

§6.2. 角領域のP-Martin 境界

前節の$\Omega_\theta=\{0<|z|<1, 0<\arg z<\theta\}$ 、またはΩ_θを回転して得られる領域を、(原点を頂点とする) 角領域と呼ぶことにする。 $\Omega=\{0<|Z|<1\}$ 上の

密度 Pが回転不変のとき、系 6.4 により、原点に於ける Pに関する Picard 原理の成否は、Ω上で考えても任意の角領域上で考えても、同等であった。 しかしながら、Pが回転不変でないときはこれ等の Picard 原理の成否は一致するとは限らない。 本節では、これらの Picard 原理の成否が一致しない様な Pを具体的に構成する。

6.2.1. 正数 a, b, c, d を $3/4 < d < c < b < a < 1$ を満たす様に選び、原点に巻き付く螺線状のΩの閉部分集合

$$S_1 = \left\{ re^{i\theta} : 2^{-\theta/2\pi} b \le r \le 2^{-\theta/2\pi} a, 0 \le \theta < \infty \right\}、$$

$$S_2 = \left\{ re^{i\theta} : 2^{-\theta/2\pi} d \le r \le 2^{-\theta/2\pi} c, 0 \le \theta < \infty \right\}$$

を考える。 単連結領域

$$U = \{0 < |z| \le \infty\} - (S_1 \cup S_2)$$

は$\Gamma = \{|z| = 1\}$ の外側 $\{1 < |z| \le \infty\}$ に等角写像され、Carathéodory の定理により、Uの境界要素はΓの点と 1 対 1 に対応する。 Uの原点上の境界要素は、2 種類の横断線

$$\alpha_n = [2^{-n}c, 2^{-n}b] \text{ と } \beta_n = [2^{-n-1}a, 2^{-n-1}d]$$

の基本列 $\{\alpha_n\}_1^\infty$ と $\{\beta_n\}_1^\infty$ で定められる 2 個の要素から成る。 従って、Uの原点上の調和 Martin minimal 境界は 2 点から成る。 Uから完閉部分集合 $\{1 \le |z| \le \infty\}$ を取り除いて得られる、Uの部分領域

$$V = \Omega - (S_1 \cup S_2)$$

に対しても、Vの原点上の調和 Martin minimal 境界$\delta^* V(0)$ は 2 点から成る。

6.2.2. 条件 $0 < t_n < \pi$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\lim_n t_n = 0$ を満たす数列 $\{t_n\}_1^\infty$ に対し

$$S_{1n} = \left\{ re^{i\theta} : 2^{-\theta/2\pi} b \le r \le 2^{-\theta/2\pi} a, 2(n-1)\pi \le \theta \le 2n\pi - t_n \right\}、$$

$$S_{2n} = \left\{ re^{i\theta} : 2^{-\theta/2\pi} d \le r \le 2^{-\theta/2\pi} c, 2(n-1)\pi \le \theta \le 2n\pi - t_n \right\}$$

で定義されるΩの $\mathcal{Y}$-列 (5.1.1 節参照)$\{S_{jn}\}_{j=1,2;n\ge1}$を考え

$$W = \Omega - \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_{1n} \cup S_{2n})$$

と置く。 $\{S_{jn}\}$ に関する、原点に於ける、密度 $Q \equiv 0$ の相対 Picard 次元

$$\dim(Q, \{S_{jn}\}) = \dim QP(W; \partial W - \{0\})$$

は、特に、原点に於ける $\{S_{jn}\}$ の相対調和次元と呼ばれる。 また、記号 $QP(W;\partial W-\{0\})$ は $HP(W;\partial W-\{0\})$ と記される。 従って

$$\dim(0,\{S_{jn}\})=\dim HP(W;\partial W-\{0\})$$

である。 同様に、原点に於ける、密度 $Q\equiv 0$ の V上の Picard 次元は、原点に於ける Vの調和次元と呼ばれ、記号 $QP(V;\partial V-\{0\})$ は $HP(V;\partial V-\{0\})$ と記される。 従って、(6.1) と (2.34) により

$$\dim HP(V;\partial V-\{0\})=\delta^{*}V(0)=2$$

である。 すると、文献 [80,pp.638-639] の Theorem 1 の証明と同様の方法により、数列 $\{t_n\}$ が十分速く 0 に収束するとき

$$\dim HP(W;\partial W-\{0\})=\dim HP(V;\partial V-\{0\})$$

$$\text{即ち}\dim HP(W;\partial W-\{0\})=2$$

となることを示すことができる。そこで、$\{t_n\}$ をこの式を満たす様に選び固定する。

6.2.3. 定理 5.3 により、密度 $Q\equiv 0$ に関する $\mathcal{Y}$-列 $\{S_{jn}\}$ の正規付随密度 Pが存在する。 この Pが本節で求める密度であることを示す。

最初に

$$\dim PP(\Omega;\Gamma)=\dim HP(W;\partial W-\{0\})=2$$

であることに注意する。 従って、原点に於ける Pに関する Picard 原理はΩ 上では成立しない。

次に角領域 A を、$0\leq\sigma<\tau\leq\sigma+2\pi<4\pi$を満たす$\sigma,\tau$により

$$A=\left\{re^{i\theta}:0<r<1,\sigma<\theta<\tau\right\}$$

と表し、A の部分領域

$$A_n=\left\{re^{i\theta}:\frac{1}{2}2^{-\theta/2\pi}<r<\frac{3}{4}2^{-\theta/2\pi},\sigma<\theta-2(n-1)\pi<\tau\right\}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

を考える。 すると、$\partial A\cap\partial A_n$上零境界値をもち $PP(A_n)-\{0\}$ に属する関数 u,v に対して、曲線

$$\gamma_n=\left\{re^{i\theta}:r=\frac{5}{8}2^{-\theta/2\pi},\sigma<\theta-2(n-1)\pi<\tau\right\}$$

上で境界 Harnack 不等式

$$\frac{u(z)}{u(z_n)} \le c_n \frac{v(z)}{v(z_n)} \quad (z \in \gamma_n) \tag{6.11}$$

が成立する (本章序文参照)。 ただし $z_n \in \gamma_n$, $\arg z_n = (\sigma+\tau)/2$ とする。 また、c_nは Pと n に依存し、u と vと zには依存しない正数である。 ところが

$$\mathrm{supp} P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(S_{1n} \cup S_{2n}), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A - (S_{1n} \cup S_{2n})$$

により、各 A_n上 $P=0$ である。 更に、γ_nと z_nの位置を考慮した A_n は、γ_1と z_1の位置を考慮した A_1と相似である $(n=1,2,\cdots)$。 すると、$c_n = c_1$ $(n=1,2,\cdots)$としても (6.11) は成立する。 即ち、A 上原点に於いて Pに関する境界 Harnack 原理が成立する。 従って Pが求める密度である:

定理 6.5. 次の条件を満たすΩ上の密度 Pが存在する: 原点に於ける Pに関する Picard 原理は、原点を頂点とする任意の角領域上で成立するが、Ω上では成立しない。

6.2.4. 定理 6.5 の証明で構成した密度 Pは $\dim PP(\Omega;\Gamma)=2$ を満たしているが、各 $m=2,3,\cdots$に対し、$\dim P_mP(\Omega;\Gamma)=m$ かつ定理 6.5 を満たすΩ上の密度 P_mも構成することができる。 その為には、巻き付きながら原点に収束する互いに素なΩの m 個の閉部分集合 $T_1,\cdots,T_m$を考えればよい。 そして各 T_jから、原点に収束する十分細い帯の列を取り除いて、$\mathcal{Y}$-列 $\{T_{jn}\}_{1\le j\le m, n\ge 1}$を作成する。 すると、密度 $Q\equiv 0$ に関する $\{T_{jn}\}$ の正規付随密度が求める密度 P_mである:

定理 6.6. 各 $m=1,2,\cdots$に対し、次の条件を満たすΩ上の密度 P_mが存在する: 原点を頂点とする任意の角領域 A 上で P_mに関する Picard 原理が成立するが、$\dim P_mP(\Omega;\Gamma)=m$ である。 換言すると、任意の A に対し$\delta^*_{P_m}A(0)=\{1\text{ 点 }\}$であるが、$\delta^*_{P_m}\Omega(0)=\{m\text{ 点 }\}$である。

尚、$m=1$ に対する P_1は $P_1\equiv 0$ でよい。

§6.3. 角状領域の P-Martin 境界

6.3.1. 区間 [0,1] 上の連続関数ϕ_1,ϕ_2で、Lipscitz 条件

$$|\phi_j(x_1)-\phi_j(x_2)| \le \alpha|x_1-x_2| \quad (x_1,x_2\in[0,1]; j=1,2) \tag{6.12}$$

及び条件

$$\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0,\ \phi_1(x) < \phi_2(x) \quad (x \in (0,1]) \tag{6.13}$$

を満たすものに対し、領域

$$A = A(\phi_1, \phi_2) = \{x + iy : \phi_1(x) < y < \phi_2(x), 0 < x < 1\}$$

を**角状領域**と呼ぶ。 角状領域は角領域$\Omega_\theta = \{0 < |z| < 1, 0 < \arg z < \theta\}$を一般化した領域であり、特に原点での頂角が 0 の場合も扱うことができる。

Pを右半平面 $\mathcal{H} = \{\mathrm{Re}z > 0\}$ 上の密度とする。 A を角状領域とするとき、原点に於ける Pに関する A 上の Picard 原理が成立すれば、A の P-Martin 完閉化 A^*_Pは$\overline{A}$と一致する (本章序文参照)。 原点に於ける Pに関する A 上の Picard 原理を、単に Picard 原理と呼ぶことにすると、A を任意に固定したとき、原点での Pの増大度が A に依存して十分小さければ、Picard 原理が成立することが予想される。 例えば $P \equiv 0$ なら Picard 原理が成立する。 また、$A = \Omega_\theta$に対しては、

$$P(z) = O\left(|z|^{-2}\right) \quad (z \to 0)$$

のとき Picard 原理が成立する ([101] 参照)。 次小節に於いて、Picard 原理が成立するためには、原点での Pの増大度が A に依存してどの程度小さければ十分であるかを、境界 Harnack 原理を経由して調べる。

6.3.2. Pを $\mathcal{H}$上の密度とし、$A = A(\phi_1, \phi_2)$ を角状領域とする。Pと正数 ρ, δ $(\delta < 1)$ に対し、区間 (0,1] 上の t の関数

$$\Psi(t; P, \rho, \delta) = \max\{P(z) : |\mathrm{Re}z - t| \le \rho t, |\mathrm{Im}z| \le \delta\}$$

を考える。 そして、Pは適当なρ, δに対し

$$\Psi(x; P, \rho, \delta) = O\left(\{\phi_2(x) - \phi_2(x)\}^{-2}\right) \quad (x \to 0) \tag{6.14}$$

を満たしていると仮定する。

十分小さい正数 t を任意に固定し

$$\beta = \frac{\rho\left(\phi_2(t) - \phi_1(t)\right)}{1 + 3\alpha}$$

と置き、A の部分領域

$$U = A \cap \{|\mathrm{Re}z - t| < \beta\}$$

を考える、ただしαはϕ_1とϕ_2が満たしている条件 (6.12) に於ける Lipschitz 定数αとする。 t は十分小さいので、(6.12) と (6.14) により領域 Uは閉集合

$$\{|\mathrm{Re}z - t| \leq \rho t, |\mathrm{Im}z| \leq \delta\}$$

に含まれ、(6.13) により U上

$$P \leq \frac{C_1}{(\phi_1(t) - \phi_2(t))^2} \leq C_1 \left(\frac{\rho}{(1+3\alpha)\beta}\right)^2 \tag{6.15}$$

が成立する。 ただし、C_1は Pとρとδに依存し、t には依存しない正数を表す。

z平面上の領域 Uを、写像

$$\zeta = F(z) = \frac{1}{\beta}(z - t - \phi_1(t))$$

によりζ平面上の領域 $F(U)$ に写像する。 $F(U)$ は 2 直線 $|\mathrm{Re}\zeta| = 1$ と、αを Lipschitz 定数とする 2 個の Lipschitz 連続関数

$$\psi_j(\xi) = \frac{1}{\beta}(\phi_j(\beta\xi + t) - \phi_1(t)) \quad (-1 \leq \xi \leq 1; j = 1, 2)$$

のグラフ、により囲まれた領域となり、その高さ

$$\psi_2(0) - \psi_1(0) = \frac{1+3\alpha}{\rho}$$

は t に依存しない。 また領域 U上の $L_P u = 0$ の解 u に対し、$F(U)$ 上の関数 $v(\zeta) = u(F^{-1}(\zeta))$ は方程式

$$\left(-\Delta + \beta^2 P\left(F^{-1}(\zeta)\right)\right) v(\zeta) = 0 \quad \left(\zeta = \xi + i\eta, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)$$

を満たす。 ここで、(6.15) により

$$\beta^2 P\left(F^{-1}(\zeta)\right) \leq C_1 \left(\frac{\rho}{1+3\alpha}\right)^2$$

であるので、t に依存しない正数 C_2に対し、線分 $[t + \phi_1(t)i, t + \phi_2(t)i]$ 上で境界 Harnack 不等式が成立する:

$$\frac{u_1(t+iy)}{u_1(t+iy_t)} \leq C_2 \frac{u_2(t+iy)}{u_2(t+iy_t)}$$
$$(\phi_1(t) \leq y \leq \phi_2(t); u_1, u_2 \in PP(U; \partial U \cap \partial A))\text{。}$$

ただし $y_t = (\phi_1(t) + \phi_2(t))/2$ とする。 t は任意に固定されていたので、原点に於いて Pに関する A 上の境界 Harnack 原理が成立し、従って Picard 原理が成立す

る。 以上により次の定理を得る。

定理 6.7. ϕ_1とϕ_2は (6.12) と (6.13) を満たす関数とする。 $\mathcal{H}$上の密度 Pが適当な正数ρ, δ $(\delta < 1)$ に対し

$$\Psi(x; P, \rho, \delta) = O\left(\{\phi_2(x) - \phi_1(x)\}^{-2}\right) \quad (x \to 0)$$

を満たすとき、原点に於いて Pに関する $A(\phi_1, \phi_2)$ 上の Picard 原理が成立する。

特に$\phi_1(x) = 0, \phi_2(x) = x^s$ $(s \geq 1)$ と置くことにより、次の系を得る。

系 6.8. $s \geq 1$ とする。 $\mathcal{H}$上の密度 Pが

$$P(z) = O\left(|z|^{-2s}\right) \quad (z \to 0)$$

を満たすとき、原点に於いて Pに関する

$$\{x + iy : 0 < y < x^s, 0 < x < 1\}$$

上の Picard 原理が成立する。

一方、Pを固定して考えることにすると、定理 6.7 は次の形となる。

定理 6.9. Pを $\mathcal{H}$上の密度とする。 (6.12) と (6.13) を満たす関数ϕ_1とϕ_2が、適当な正数ρ, δ $(\delta < 1)$ に対し

$$\phi_1(x) - \phi_2(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Psi(x; P, \rho, \delta)}}\right) \quad (x \to 0)$$

を満たすとき、原点に於いて Pに関する $A(\phi_1, \phi_2)$ 上の Picard 原理が成立する。

第7章　未解決問題

本章では現時点での未解決問題を提示して、今後の研究課題としたい。

PをΩ上の回転不変密度とする。原点に於けるPに関するPicard原理の成否を判定する方法として、Kawamura-Nakai [50] により、P-単位判定法 (定理3.3参照) が得られているが、この判定法はP-単位を調べる間接的な判定法である。直接的な判定法を求めることができないであろうか?

問題 7.1. Ω上の回転不変密度Pに関する原点に於けるPicard原理の判定法を、直接Pを含む判定式の形で求めよ。

Kawamura-Nakai [50] により、回転不変密度に関するPicard原理には斉次性があることが知られているが (系3.7参照)、一般密度の場合は不明である:

問題 7.2. Pは原点に於いてPicard原理が成立するΩ上の一般密度とする。cを正数とするとき、cPに関するPicard原理は成立するか?

定理3.16に於いて密度$|z|^{-2}$のessential集合が決定された。より強い意味でのessential集合を次の様に定義する: $A = A(\{a_n\}, \{b_n\})$ 上 $Q(z) \leq |z|^{-2}$を満たすΩ上の任意の一般密度Qに関するPicard原理が、原点に於いて成立するとき、Aを$|z|^{-2}$の強essential集合と呼ぶことにする。

問題 7.3. $|z|^{-2}$の強essential集合を決定せよ。

尚、条件 $\limsup_{n\to\infty} b_n/a_n > 1$ は、Aが$|z|^{-2}$の強essential集合であるための十分条件であることが、Kawamura [48] により知られている。また定理5.10により、$|z|^{-2}(\log|z|)^2$の強essential集合は存在しないことがわかる。

PはΩ上の回転不変密度とし、QはPに近い一般密度とする。原点に於いてPに関するPicard原理が成立するとき、Qに関するPicard原理も成立することが、定理4.9で示された。更に、Pに関するPicard原理の成否に関係せず常に、原点上のP-Martin境界とQ-Martin境界が一致することが、定理4.9で示された。これ等の定理は、Pが一般密度の場合も成立することが予想される:

問題 7.4. PはΩ上の一般密度、QはPに近いΩ上の一般密度とする。原点に於いてPに関するPicard原理が成立するとき、Qに関するPicard原理は成立するか?

問題 7.5. PはΩ上の一般密度、Q は Pに近いΩ上の一般密度とする。 原点上の P-Martin 境界は Q-Martin 境界と一致するか?

PをΩ上の一般密度とする。 $P(z) = O(|z|^{-2})$ $(z \to 0)$ のとき、原点に於いて Pに関する Picard 原理が成立することが、Kawamura [48] により示されている。しかし、Pが $P(z) = O(|z|^{-2}(\log|z|)^2)$ $(z \to 0)$ を満たしても、Pに関する Picard 原理は成立するとは限らないことが、定理 5.10 に於いて示されている。 支配する一般密度に関する Picard 原理を、全て成立させる様な回転不変密度の増大度は、どの程度であろうか?

問題 7.6. 次の条件を満たす定数 s $(0 < s < 2)$ は存在するか? 条件: $P(z) = O(|z|^{-2}(\log|z|)^s)$ $(z \to 0)$ を満たすΩ上の任意の密度 Pに関する Picard 原理が、原点に於いて成立する。

以上の問題 7.2-7.6 は孤立境界点に於ける問題であるが、連続境界点に於いても同様の問題が考えられる。 しかし、僅かな例外 (定理 6.5 参照) を除いて、現時点まででもそうであった様に、或問題が孤立境界点に於いて解決されれば、連続境界点に於いても同様の方法で解決できることが、予想される。 この予想は正しいであろうか?

参 考 文 献

[1] H. Aikawa: *On the Martin boundary of Lipschitz strips*, J. Math. Soc. Japan, **38**(1986), 527-541.

[2] A. Ancona: *Principe de Harnack a la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans domaine lipschitzien*, Ann. Inst. Fourier, **28**(1978), 169-213.

[3] A. Ancona: *Une propriéte de la compactification de Martin d'un domaine euclidien*, Ann. Inst. Fourier, **29**(1979), 71-90.

[4] A. Ancona: *Théorème de Fatou et frontière de Martin pour une classe d'opérateurs elliptiques dans un demi-espace*, C. R. Acad. Sc. Paris, **290**(1980), 401-404.

[5] A. Ancona: *Régularité d'accés des bouts, et frontière de Martin d'un domaine euclidien*, C. R. Acad. Sc. Paris, **294**(1982), 479-482.

[6] A. Ancona: *Régularité d'accés des bouts, et frontière de Martin d'un domaine euclidien*, J. Math. pures appl., **63**(1984), 215-260.

[7] A. Ancona: *Variétés à corbure négative, operateurs elliptiques et frontière de Martin*, C. R. Acad. Sc. Paris, **301**(1985), 193-196.

[8] A. Ancona: *Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary*, Ann. Math., **125**(1987), 495-536.

[9] M. Anderson and R. Schoen: *Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature*, Ann. of Math., **121**(1985), 429-461.

[10] M. Benedicks: *Positive harmonic fonctions vanishing on the boundary of certain domains in* $\mathbf{R}^n$, Arkiv för Mat., **18**(1980), 53-72.

[11] M. Bôcher: *Singular point of functions which satisfy partial differential equations of the elliptic type*, Bull. Amer. Math. Soc., **9**(1903), 455-465.

[12] A. Boukricha: *Das Picard-Princzip und verwandte Fragen bei Störung von harmonischen Räumen*, Math. Ann., **239**(1979), 247-270.

[13] A. Boukricha and H. Hueber: *The Poisson space* ${}^cP_X$ *for* $\Delta u = cu$ *with rotation-free* c, Bull. Classe Sci., **64**(1978), 651-658.

[14] M. G. Bouligand: *Fonctions Harmoniques. Principes des Picard et de Dirichlet*, Mémorial des Science Mathématiques, **11**(1926).

[15] F. T. Brawn: *The Martin boundary of* $\mathbf{R}^n \times]0,1[$, J. London Math. Soc., (2), **5**(1972), 59-66.

[16] M. Brelot: *Étude de l'équation de la chaleur* $\Delta u = c(M)u(M), c(M) \geq 0$, *au voisinage d'un point singulier du coefficient*, Ann. Éc. Norm., (3), **48**(1931),153-246.

[17] M. Brelot: *Sur le principe des singularités positives et la topologie de R. S. Martin*, Ann. Univ. Grenoble Sci. Math., Phys., **23**(1947-1948), 113-138.

[18] M. Brelot: *Sur le principe des singularites et la notion de source pour l'équation* (1) $\Delta u(M) = c(M)u(M)$, $(c \geq 0)$, Ann. Univ. Lyon Sc. Math. Astro., **11**(1948), 9-19.

[19] M. Brelot: *Le problème de Dirichlet axiomatique et frontière de Martin*, J. Math. pures apple., **35**(1956), 297-335.

[20] M. Brelot: *On Topologies and Boundaries in Potential Theory*, Lecture Notes in Math., **175**, Springer, 1971.

[21] L. Caffarelli, F. Fabes, S. Mortola and S. Salsa: *Boundary behavior of non-negative solutions of elliptic operators in divergence form*, Ind. Uni. Math. J., **30**(1981), 621-640.

[22] L. Carleson: *On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables*, Ark. för Mat., **4**(1961), 393-399.

[23] N. Chevallier: *Frontière de Martin d'un domaine de* $\mathbf{R}^n$ *dont le bord est inculs dans hypersurface lipschitzien*, Ark. för Mat., **27**(1989), 29-48.

[24] C. Constantinescu und A. Cornea: *Über einige Probleme von M. Heins*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **4**(1959),277-281.

[25] C. Constantinescu und A. Cornea: *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*, Springer, 1963.

[26] Björn E. J. Dahlberg: *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rat. Mech. Anal., **65**(1977), 275-288.

[27] S. Gardiner: *Minimal harmonic functions on Denjoy domains*, Proc. Amer. Math. Soc., **107**(1989), 963-970.

[28] S. Gardiner: *The Martin boundaries of NTA strips*, Bull. London Math. Soc., **22**(1990), 163-166.

[29] M. M. Gevrey: *Sur certaines propriétés des fonctions harmoniques et leur extension aux équations aux dérivées partielles linéaires*, C. R. Acad. Sc. Paris, **183**(1926), 544-546.

[30] M. M. Gevrey: *Sur une généralisation du principe des singularités positives de M. Picard*, C. R. Acad. Sc. Paris, **211**(1940), 581-584.

[31] D. Gilbarg and J. Serrin: *On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations*, J. d'Analyse Math., **4**(1954-1956), 309-340.

[32] M. Godefroid: *Sur un article de Kawamura et Nakai a propos du principe de Picard*, Bull. Sci. Math., **102**(1978), 295-303.

[33] P. Hartman and A. Wintner: *On the local behabiour of solitions of non-parabolic partial differential equations.* II, Amer. J. Math., **76**(1954),351-361.

[34] P. Hartman and A. Wintner: *On the local behabiour of solitions of non-parabolic partial differential equations.* III, Amer. J. Math., **77**(1955),453-474.

[35] K. Hayashi: *Les solutions positives de l'équation $\Delta u = Pu$ sur une surface de Riemann*, Kōdai Math. Sem. Rep., **13**(1961), 20-24.

[36] L. L. Helms: *Introduction to Potential Theory*, Wiley, 1969.

[37] M. Heins: *Riamann surfaces of infinite genus*, Ann. of Math., **55**(1952), 296-317.

[38] R. A. Hunt and R. L. Wheeden: *On the boundary values of harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **132**(1968), 307-322.

[39] R. A. Hunt and R. L. Wheeden: *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc., **147**(1970), 507-527.

[40] T. Ikegami: *Compactifications of Maritin type of harmonic spaces*, Osaka J. Math., **23**(1986), 653-680.

[41] H. Imai: *On singular indeces of rotation free densities*, Pacific J. Math., **80**(1979), 179-190.

[42] H. Imai: *Picard principle for linear elliptic differential operators*, Hirosima Math. J., **14**(1985), 527-535.

[43] H. Imai and T. Tada: *Picard principle for rotation free densities on the Euclidean N-space* ($N \geq 3$), Bull. Daido Inst. Tech., **13**(1978), 1-12.

[44] S. Itô: *On existence of Green function and positive superharmonic functions for linear elliptic operators of second order*, J. Math. Soc. Japan, **16**(1964), 199-306.

[45] S. Itô: *Martin boundary for linear differential operators of second order in a manifold*, J. Math. Soc. Japan, **16**(1964), 307-334.

[46] D. S. Jerison and C. E. Kenig: *Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domaines*, Adv. in Math., **46**(1982), 80-147.

[47] M. Kawamura: *Picard principle for finite densities on some end*, Nagoya Math. J., **67**(1977), 35-40.

[48] M. Kawamura: *On a conjecture of Nakai on Picard principle*, J. Math. Soc. Japan, **31**(1979), 359-371.

[49] M. Kawamura: *A remark on inhomogeneity of Picard principle*, J. Math. Soc. Japan, **32**(1980), 517-519.

[50] M. Kawamura and M. Nakai: *A test of Picard principle for rotation free densities*, II, J. Math. Soc. Japan, **28**(1976), 323-342.

[51] J. T. Kemper: *A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities*, Comm. Pure Appl. Math., **25**(1972), 247-255.

[52] H. Kesten: *Positive harmonic functions with zero boundary values*, Proc. Symposia Pure Math., **35**(1979), 349-352.

[53] Z. Kuramochi: *An example of a null-boundary Riemann surface*, Osaka Math. J., **6**(1954), 83-91.

[54] A. Lahtinen: *On the solution of* $\Delta u = Pu$ *for acceptable densities on open Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **515**(1972), 1-38.

[55] A. Lahtinen: *On the equation* $\Delta u = Pu$ *and the classification of acceptable densities on Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **533**(1973), 1-26.

[56] A. Lahtinen: *On the existence of singular solutions of* $\Delta u = Pu$ *on Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **546**(1973), 1-15.

[57] R. S. Martin: *Minimal positive harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **49**(1941), 137-172.

[58] C. Miranda: *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, Springer, 1970.

[59] M. Murata: *Structure of positive solitions to* $(-\Delta + V)u = 0$ *in* $\mathbf{R}^n$, Duke Math. J., **53**(1986), 869-943.

[60] L. Myrberg: *Über die Integration der Differentialgleichung* $\Delta u = c(P)u$ *auf offenen Riemannschen Frächen*, Math. Scand. **2**(1954), 142-152.

[61] L. Myrberg: *Über die Existenz der Greenschen Funktion der Gleichung* $\Delta u = c(P)u$ *auf Riemannschen Flächen*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **170**(1954), 1-8.

[62] L. Myrberg: *Über subelliptische Funktionen*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **290** (1960), 1-9.

[63] L. Myrberg: *Über die Integration der Gleichung* $\Delta u = c(z)u$ *auf einer Riemannsche Fläche im indefiniten Fall*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **514**(1972), 1-10.

[64] L. Naïm: *Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **7**(1957), 183-281.

[65] M. Nakai: *The space of non-negative solutions of the equation* $\Delta u = pu$ *on a Riemann surface*, Kōdai Math. Sem. Rep., **12**(1960),151-178.

[66] M. Nakai: *Martin boundary over an isolated singularity of rotation free density*, J. Math. Soc. Japan, **26**(1974), 483-507.

[67] M. Nakai: *A remark on Picard principle*, Proc. Japan Acad., **50**(1974), 806-808.

[68] M. Nakai: *A test for Picard principle*, Nagoya Math. J., **56**(1974), 105-119.

[69] M. Nakai: *A test of Picard principle for rotation free densities*, J. Math. Soc. Japan, **27**(1975), 412-431.

[70] M. Nakai: *A remark on Picard principle.* II, Proc. Japan Acad., **51**(1975), 308-311.

[71] M. Nakai: *Picard principle and Riemann theorem*, Tôhoku Math. J., **28** (1986), 277-292.

[72] M. Nakai: *Picard principle for finite densities*, Nagoya Math. J., **70**(1978), 7-24.

[73] M. Nakai: *The range of Picard dimension*, Proc. Japan Acad., **55**(1979), 379-383.

[74] M. Nakai: *Strong Picard principle*, J. Math. Soc. Japan, **32**(1980), 631-638.

[75] M. Nakai: *Comparison of Martin boundaries for Schrödinger operators*, Hokkaido Math. J., **18**(1989), 245-261.

[76] M. Nakai and L. Sario: *Harmonic and relative harmonic dimensions*, Ann. Acad Sci. Fenn., **10**(1985), 419-432.

[77] M. Nakai and T. Tada: *Dirichlet integral and Picard principle*, Nagoya Math. J., **86**(1982), 85-99.

[78] M. Nakai and T. Tada: *The distribution of Picard dimensions*, Kodai Math. J., **7**(1984), 1-15.

[79] M. Nakai and T. Tada: *Relative harmonic dimensions of weak and unstable boundary components*, Teubner-Texte zur Mathematik, **76**(1985), 308-322.

[80] M. Nakai and T. Tada: *Nonmonotoneity of Picard principle*, Trans. Amer. Math. Soc., **292**(1985), 629-644.

[81] M. Nakai and T. Tada: *Extreme nonmonotoneity of Picard principle*, Math. Ann., **281**(1988), 279-293.

[82] M. Nakai and T. Tada: *Nonmonotoneity of Picard dimensions*, Geometry and Topology, World Scientific, 1989, 235-250.

[83] M. Ozawa: *Classification of Riemann surfaces*, Kōdai Math. Sem. Rep., **4**(1952), 63-76.

[84] M. Ozawa: *Some classes of positive solutions of* $\Delta u = Pu$ *on Riemann surfaces*, I, Kōdai Math. Sem. Rep., **6**(1954), 121-126.

[85] M. Ozawa: *Some classes of positive solutions of* $\Delta u = Pu$ *on Riemann surfaces*, II, Kōdai Math. Sem. Rep., **7**(1955), 15-20.

[86] M. Parreau: *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann*, Ann. Inst. Fourier, **3**(1952), 103-197.

[87] M. É. Picard: *Deux théorèmes élémentaires sur les singularités des fonctions harmoniques*, C. R. Acad. Sc. Paris, **176**(1923), 933-935.

[88] M. É. Picard: *Sur les singularités des fonctions harmoniques*, C. R. Acad. Sc. Paris, **176**(1923), 1025-1026.

[89] H. L. Royden: *The equation* $\Delta u = Pu$, *and the classification of open Riemann surfaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **271**(1959), 1-27.

[90] J. L. Schiff: *Nonnegative solution of $\Delta u = Pu$ on open Riemann surfaces*, J. d'Analyse Math., **27**(1974), 230-241.

[91] S. Segawa: *A duality relation for harmonic dimensions and its applications*, Kodai Math. J., **4**(1981), 508-514.

[92] S. Segawa: *Martin boundaries of Denjoy domains*, Proc. Amer. Math. Soc., **103**(1988), 177-183.

[93] S. Segawa and T. Tada: *Martin compactifications and quasiconformal mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **93**(1985), 242-244.

[94] J. Serrin: *On the Harnack inequality for linear elliptic equations*, J. d'Analyse Math., **4**(1954-1956),292-308.

[95] W. Stożek: *Sur l'allure d'une fonction harmonique dans le voisinage d'un point exceptionnel*, Ann. Soc. Polon. Math., **4**(1925), 52-58.

[96] M. G. Šur: *Granica Martina dlja lineĭnogo èllipticěskogo operatora vtorogo porjadka* (*The Martin boundary for a linear elliptic second order operator*), Izv. Akad. Nauk, SSSR, **27**(1963), 45-60 (Russian).

[97] N. Suzuki: *Martin boundary for $\Delta - P$*, Hiroshima Math. J., **14**(1984), 67-74.

[98] T. Tada: *On a criterion of Picard principle for rotation free densities*, J. Math. Soc. Japan, **32**(1980), 587-592.

[99] T. Tada: *The role of boundary Harnack principle in the study of Picard principle*, J. Math. Soc. Japan, **34**(1982), 445-453.

[100] T. Tada: *The Martin boundary of the half disk with rotation free densities*, Hiroshima Math. J., **16**(1986), 315-325.

[101] T. Tada: *Picard principle for densities at a singularity in a nondegenerate boundary component*, Bull. Daido Inst. Tech., **22**(1986), 49-63.

[102] T. Tada: *Picard dimensions of close to rotationally invariant densities*, Proc. Amer. Math. Soc., **100**(1987), 467-473.

[103] T. Tada: *Martin compactifications of the punctured disk with close to rotation free densities*, Proc. Amer. Math. Soc., **103**(1988), 483-486.

[104] T. Tada: *A note on Martin boundary of angular regions for Schrödinger equations*, J. Math. Soc. Japan, **41**(1989), 285-290.

[105] T. Tada: *Martin compactification for a Schrödinger equation in an angular domain*, Topics in Math. Anal., World Scientific, 1989, 841-845.

[106] T. Tada: *Nonmonotoneity of Picard principle for Schrödinger operators*, Proc. Japan Acad., **66**(1990), 19-21.

[107] J. -C. Taylor: *On the Martin compactification of a bounded Lipschitz domain in a Riemann manifold*, Ann. Inst. Fourier, **28**(1977), 25-52.

[108] C. De la Vallée Poussin: *Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à corbure bornée*, Ann. Scoula Norm. Sup. di Pisa, **2**(1933), 167-197.

[109] J. -M. Wu: *Comparisons of kernel functions, boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains*, Ann. Inst. Fourier, **28**(1978), 147-167.

謝　辞

本研究の課題を与えてくださり、更に本研究に関して終始御指導と御教示を賜りました、名古屋工業大学数学教室の中井三留教授に深く感謝致します。

本研究を纏めて本論文を作成するに当たり、貴重な御意見と懇切な御指導を賜りました、名古屋工業大学電気情報工学科の岩住哲朗教授と川口喜三男教授、生産システム工学科の小和田正教授に謹んで感謝の意を表します。

本研究の進行及び本論文の作成に当たり、数々の御指導と御助言を頂きました、名古屋工業大学電気情報工学科の松井信行教授に深く感謝致します。

研究生活面で種々お世話になりました、名古屋工業大学電気情報工学科の松井研究室の岩崎誠氏に深くお礼申し上げます。

最後ながら、本研究内容に関する有益な御議論を頂き、また本研究完成に到る環境整備に並々ならぬ御援助を頂きました、大同工業大学数学教室の今井英夫教授と瀬川重男助教授に深くお礼申し上げます。

研 究 業 績

論 文

[1] H. Imai and T. Tada: *Picard principle for rotation free densities on the Euclidean N-space* ($N \geq 3$), Bull. Daido Inst. Tech., **13**(1978), 1-12.

[2] T. Tada: *On a criterion of Picard principle for rotation free densities*, J. Math. Soc. Japan, **32**(1980), 587-592.

[3] M. Nakai and T. Tada: *Dirichlet integral and Picard principle*, Nagoya Math. J., **86**(1982), 85-99.

[4] T. Tada: *The role of boundary Harnack principle in the study of Picard principle*, J. Math. Soc. Japan, **34**(1982), 445-453.

[5] M. Nakai and T. Tada: *The distribution of Picard dimensions*, Kodai Math. J., **7**(1984), 1-15.

[6] S. Segawa and T. Tada: *Martin compactifications and quasiconformal mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **93**(1985), 242-244.

[7] M. Nakai and T. Tada: *Relative harmonic dimensions of weak and unstable boundary components*, Teubner-Texte zur Mathematik, **76**(1985), 308-322.

[8] M. Nakai and T. Tada: *Nonmonotoneity of Picard principle*, Trans. Amer. Math. Soc., **292**(1985), 629-644.

[9] T. Tada: *The Martin boundary of the half disk with rotation free densities*, Hiroshima Math. J., **16**(1986), 315-325.

[10] T. Tada: *Picard principle for densities at a singularity in a nondegenerate boundary component*, Bull. Daido Inst. Tech., **22**(1986), 49-63.

[11] T. Tada: *Picard dimensions of close to rotationally invariant densities*, Proc. Amer. Math. Soc., **100**(1987), 467-473.

[12] M. Nakai and T. Tada: *Note on H^p on Riemann surfaces*, J. Math. Soc. Japan, **39**(1987), 663-666.

[13] M. Nakai and T. Tada: *Extreme nonmonotoneity of Picard principle*, Math. Ann., **281**(1988), 279-293.

[14] T. Tada: *Martin compactifications of the punctured disk with close to rotation free densities*, Proc. Amer. Math. Soc., **103**(1988), 483-486.

[15] M. Nakai and T. Tada: *Nonmonotoneity of Picard dimensions*, Geometry and Topology, World Scientific, 1989, 235-250.

[16] T. Tada: *A note on Martin boundary of angular regions for Schrödinger equations*, J. Math. Soc. Japan, **41**(1989), 285-290.

[17] T. Tada: *Martin compactification for a Schrödinger equation in an angular domain*, Topics in Math. Anal., World Scientific, 1989, 841-845.

[18] T. Tada: *Nonmonotoneity of Picard principle for Schrödinger operators*, Proc. Japan Acad., **66**(1990), 19-21.

[19] T. Tada: *Essential sets of Picard principle for rotation free densities*, Kodai Math. J., 掲載受理 (掲載期日未定).

注: 番号 [1]-[12] の論文は、本大学院入学以前に公表されている。番号 [13]-[19] の論文は、本大学院入学以後公表または公表予定のものである。

学会発表

[1] 多田俊政: Martin compactification of Euclidean space with rotation free densities 、日本数学会秋期総合分科会、1973 年 10 月 12 日、於岡山大学。

[2] 今井英夫、多田俊政: Test for Picard principle 、日本数学会秋期総合分科会、1976 年 10 月 4 日、於東京工業大学。

[3] 中井三留、多田俊政: Picard 原理における Dirichlet 積分の役割、日本数学会年会、1979 年 4 月 5 日、於名古屋工業大学。

[4] 多田俊政: Picard 原理と境界 Harnack 原理、ポテンシャル論研究集会、1981 年 1 月 21 日、於兵庫県城崎町。

[5] 多田俊政: Picard 原理における境界 Harnack 原理の役割、日本数学会年会、1981 年 4 月 6 日、於京都大学。

[6] 瀬川重男、多田俊政: Martin 完閉化の擬等角不変性、日本数学会秋期総合分科会、1981 年 10 月 7 日、於山口大学。

[7] 中井三留、多田俊政: 不安定境界成分と相対調和次元、ポテンシャル論研究集会、1982 年 1 月 27 日、於兵庫県城崎町。

[8] 多田俊政: 連続境界における$\Delta u = Pu$の Picard 原理、ポテンシャル論研究集会、1983 年 1 月 22 日、於大阪市立大学。

[9] 多田俊政: The role of boundary Harnack principle in the study of Picard principle 、「ポテンシャル論とその応用」研究集会、1983 年 7 月 8 日、於京都大学数理解析研究所。

[10] 多田俊政: 単位円周上 2 位特異点を持つ$\Delta u = Pu$に関する円板のマルチン境界、第 26 回函数論シンポジウム招待講演、1983 年 7 月 13 日、於秋田大学。

[11] 多田俊政: $\Delta u = Pu$に関するマルチン境界、ポテンシャル論研究集会、1984 年 1 月 19 日、於名古屋大学。

[12] 多田俊政: 回転不変に近い密度に関する孔あき円板のマルチン完閉化、ポテンシャル論研究集会、1984 年 12 月 18 日、於川崎医科大学。

[13] 多田俊政: 回転不変に近い密度に関する孔あき円板のマルチン完閉化、日本数学会年会、1985 年 4 月 2 日、於東京都立大学。

[14] 中井三留、多田俊政: Picard 次元の非単調性、ポテンシャル論研究集会、1986 年 1 月 17 日、於兵庫県城崎町。

[15] 中井三留、多田俊政: Riemann 面上の Hardy 族について、ポテンシャル論研究集会、1986 年 12 月 16 日、於大阪市立大学。

[16] 中井三留、多田俊政: 角状領域の Picard 原理、ポテンシャル論研究集会、1986 年 12 月 16 日、於大阪市立大学。

[17] 中井三留、多田俊政: Picard 原理の極度の非単調性、日本数学会年会、1987 年 4 月 2 日、於東京大学。

[18] 多田俊政: Schrödinger 方程式に関する扇形の Martin 境界、ポテンシャル論研究集会、1987 年 12 月 12 日、於愛知県伊良湖。

[19] 多田俊政: 角状領域の Picard 原理Ⅱ、ポテンシャル論研究集会、1989 年 1 月 13 日、於大阪市立大学。

[20] 多田俊政: Picard 原理の essential set 、ポテンシャル論研究集会、1989 年 12 月 7 日、於大阪市立大学。

注: 番号 [1]-[18] の学会発表は、 本大学院入学以前の発表であり、 番号 [19]-[20] の学会発表は、本大学院入学以後の発表である。