複合次元カメラにおける
多視点幾何とN次元復元

2009年

小塚　和紀

名古屋工業大学博士論文
甲第682号(課程修了による)
平成21年3月23日授与

目 次

第1章

序論

近年，コンピュータの性能の向上や普及率は目覚しい発展を遂げている．それに伴い，ロボットを初めとする人工知能システムは人にとって非常に身近な存在になっている．このようにコンピュータを用いて，人間の知能を実現するシステムにおいて，外界の状況をセンサでもって理解する知覚能力は欠かせないものである．中でも，カメラを用いて外界を認識する視覚能力は，人間の知覚の大部分を視覚が占めることから見ても，最も重要であると言える．

このような視覚認識の構造を数理的に考え，コンピュータとカメラを用いて実現する学問はコンピュータビジョンと呼ばれる．文字認識や画像検査などで用いられるパターン認識が画像をそのまま画像として出力するのに対し，コンピュータビジョンではカメラ画像を用いて3次元情報を復元する．そのためコンピュータビジョンにおいては，古くから複数のカメラ画像を用いることが考えられてきた．これは，カメラ画像が3次元の世界を投影して得られる2次元の情報であり，元の3次元の世界に対して1次元分の情報が不足しているからである．このように空間中に複数のカメラが存在する場合に，これら複数のカメラ間に成り立つ画像特有の幾何をエピポーラ幾何と呼ぶ．このエピポーラ幾何は2台カメラ間の幾何学的性質を記述できることから，始めはステレオ視における対応点探索問題を中心に利用されてきた．その後，エピポーラ幾何の計算がカメラの校正問題に他ならないことが明らかになり，エピポーラ幾何の重要性が認識されるようになった．一方で，カメラの低コスト化やコンピュータの高速化により，大量のカメラ画像をリアルタイムに処理できる可能性が広がり，より多くのカメラが用いられる時代となった．このように多くのカメラの使用が一般的になると共に，それまで2台のカメラ幾何に限定されていたエピポーラ幾何を，3台以上のカメラを扱う幾何へと拡張する多視点幾何の性質が次々と明らかにされてきた．

以下ではまず，従来の多視点幾何について簡単に振り返り，過去に行われてきた多視点幾何の研究について一部を紹介する．また，これらの多視点幾何の課題を踏まえた上で，本研究の目的と概要を述べる．

1.1 従来の多視点幾何

多視点幾何は先に述べたように，ステレオ対応の探索問題として，2台のカメラ間の関係を示すエピポーラ幾何の研究から始まった [35, 36, 21]．その後，多数のカメラの研究の進展と共に，それまで2台のカメラ幾何に限定されていたエピポーラ幾何を3台以上のカメラを扱う幾何へと拡張する多視点幾何の研究が急速に進展した．3台のカメラを扱う3視点幾何 (three- view geometry) は当初，エピポーラ幾何を組み合わせて考えられてきた [8, 9]．その後，Spetsakis らにより，3台カメラ間ではエピポーラ幾何以上の拘束が得られることが示された [54]．Spetsakis らは校正済みカメラではあるが，trilinear 拘束の性質を初めて3次元復元に利用した．この trilinear 拘束は Shashua らにより深く解析が行われ，3視点幾何がエピポーラ幾何の組み合わせではなく trifocal tensor により表現されるようになった [49, 50]．一方で，Hartley は射影幾何をもとに代数的な解析により3視点幾何を構築し，未校正な射影カメラによる trilinear 拘束を示した [20]．

3視点幾何はその後，さらに多くのカメラを扱う4視点幾何へと拡張され，4台間の幾何学的関係を表す quadrifocal tensor の性質が次々と明らかにされた [11, 65, 33]．Hartley は4視点幾何拘束である quadrilinear 拘束について解析を行い，4視点間における線形独立な式の本数を明らかにした [22]．一方，Shashua らは homograhpy tensor と呼ばれる tensor を導入することで，quadrifocal tensor の要素に関する幾何学的な拘束を明らかにした [51]．このように4視点幾何の解析が進むと同時に，3次元空間中においては，線形拘束によって表現できる多視点幾何拘束は4台間の quadrilinear 拘束までしか存在しないことも明らかになり，この4視点幾何の研究をもって従来の多視点幾何理論は一応の完成を見た．

一方で，このような多視点幾何理論を計算する手法についても広く研究が行われてきた．Hartley は代数的距離をコストとし，多視点幾何を安定に計算する手法を提案した [23, 25, 26]．Heyden は quadrifocal tensor に対して，一方，Sato は画像中におけるエピポールと多視点幾何の関係を解析し，エピポールが既知である場合の多視点幾何の計算法と必要対応点数を明らかにした [31, 47]．

この多視点幾何理論は単に複数の単焦点カメラ間の幾何学的関係を記述するのみでなく，単焦点カメラ画像へと変換可能であれば全てにおいて共通に適用可能である．そのため近年では，ミラーなどを用いた特殊なカメラやプロジェクタに関する研究が盛んに行われるようになり，その有用性が示されつつある [59, 60, 46, 16, 17, 18]．

1.2 本研究の目的と論文の概要

このように広く研究されている多視点幾何理論ではあるが，従来の研究において，カメラは3次元空間から2次元画像へ投影を行うことを前提にされてきた．これは我々が存在している空間が3次元であるのに対し，カメラの情報が2次元であるため当然のように思える．しかしながら，このような3次元空間から2次元画像への投影に基づく多視点幾何では，多視点幾何を計算するためにはこれら対応点とカメラの関係が固定である必要が

あった．そのため，カメラが移動しながら，対応点が運動する場合には多視点幾何を計算することはできない．このように従来の多視点幾何は，基本的には静止したカメラで静止した物体を撮影した場合に成り立つ多視点幾何であった．

このような課題に対して近年，運動するカメラと非剛体運動点との関係を記述できる，より一般的なカメラモデルにおいて成り立つ拡張多視点幾何が構築されつつある [19, 61, 48, 44, 60, 51, 68, 56]．Wolf らはカメラが独立に運動し，各対応点が等速直線運動する場合においても，多視点間の関係が記述できることを示した [69]．Hayakawa ら，Wan らはこれとは逆に対応点がが独立に運動し，カメラが等速直線運動する場合において多視点間の関係が記述できることを示した [30, 66]．本研究ではこのような多視点幾何をさらに深く解析し，運動するカメラ間で得られた画像から形状を復元する手法を提案するとともに，この多視点幾何が移動するレンジセンサで得られる歪んだ形状を補正できることを示す．

一方で，センサネットワークの研究の進展に伴い，カメラ画像のみならず様々な種類のセンサ（例えばラインセンサ，カメラ，レンジセンサ等）の情報を統合的に用いるセンサフュージョンに基づくシステムが重要となりつつある．しかし，従来の多視点幾何は，複数のカメラが互いに同じ種類である場合，すなわち投影像が同じ次元を持つ場合に限定されており，異なる種類のセンサ間の関係を記述することはできなかった．これに対して，鏡面反射カメラと透視投影カメラの多視点幾何や，透視投影カメラと 1 次元カメラの多視点幾何など，異なる種類のセンサ間の多視点幾何についての研究が提案されつつある [55, 64]．しかしながら，これまでに提案された異種センサ間の多視点幾何は，特定のセンサ間の幾何学的関係しか記述することができないため，他の種類のセンサや組み合わせに対しては一切適用できないという問題があった．

そこで本研究では，一般の異なる種類のセンサを組み合わせた場合において成り立つ新たな多視点幾何を提案する．これまでの多視点幾何では 3 次元空間から 2 次元画像への投影を仮定していたのに対し，本論文では一般の k 次元空間中から次元の異なるセンサへの投影を考えることにより，全ての次元のセンサと，その組み合わせにおいて成り立つ多視点幾何の一般理論を構築する．さらに，この新しい多視点幾何を応用することで，異なる次元のセンサ間において情報変換や形状復元が可能であることを示す．

1.3 本論文の構成

以下に本論文の構成を示す．

第 2 章 従来の多視点幾何

> 第 2 章ではまず，先に述べた従来の多視点幾何について，その数学的性質を述べる．本論文では，この多視点幾何理論を一般の次元に拡張していく．

第 3 章 高次元空間から画像空間への投影に基づく多視点幾何

第3章では，提案する拡張多視点幾何の一例として，高次元空間から画像空間への投影に基づく多視点幾何について述べる．第2章で述べた多視点幾何を拡張し，非剛体運動を行う物体を独立に運動する複数のカメラによって観測して得られる画像において多視点幾何拘束が存在することを明らかにする．次に，この拡張多視点幾何からカメラの運動が復元可能であることを利用し，移動するレンジセンサから得られる歪んだ3次元データを補正する手法を提案する．また，実験を行い，拡張多視点幾何により運動するレンジセンサの2次元データを補正可能であることを示す．

第4章　複合次元における多視点幾何

第4章では，拡張多視点幾何をさらに発展させ，異なる次元への投影を行うカメラ間で成り立つ多視点幾何の一般理論を提案する．異なる次元への投影を行うセンサ間で成り立つ多視点幾何拘束が存在することを明らかすると共に，提案した多視点幾何が，全ての多視点幾何を包含する一般理論であることを示す．さらに，複合次元カメラにおける多視点幾何からカメラ行列を復元する手法について述べる．また，実験を行い，複合次元多視点幾何により異なる次元の異なるセンサ群による3次元情報の復元やセンサ間での情報変換などが可能であることを示す．

第5章　結論

第5章では，複合次元カメラにおける多視点幾何についての成果と論旨をまとめ，多視点幾何の今後の展望について述べる．

第2章

従来の多視点幾何

本章では，従来の多視点幾何について詳しく述べる．多視点幾何は古くより，2台のカメラ間の関係を示すエピポーラ幾何として盛んに研究が行われてきた．第1章で述べたように，このエピポーラ幾何は近年多視点へと拡張され，その有効性が示されてきた．そのため多数のカメラの使用が一般化するとともに，3視点以上のカメラ間の関係を示す多視点幾何が急速に進展した．

2台間の関係を示すエピポーラ幾何がFundamental行列(基礎行列)やEssential行列(基本行列)のように行列を用いて解析されてきたのに対し，多視点幾何を解析し理解するためには行列を一般化したテンソル(tensor)の知識が欠かせない．そのため，次節以降では，まず多視点幾何を理解する上でベースとなるテンソルについて詳しく説明する．その後，テンソルを用いて，多視点幾何の性質について詳しく述べる．

2.1 テンソルの基礎

先に述べたように，従来，複数のカメラ間の相対的な位置・姿勢の情報を表すエピポーラ幾何は行列表記で表されてきた．例えば，2台のカメラ間の関係であるFundamental行列(基礎行列)やEssential行列(基本行列)は，3×3の行列で表される．それに対して，3視点幾何を表すtrifocal tenosrや，4視点幾何を表すquadrifocal tensorはベクトルや行列を拡張したテンソルを用いる．ここではまず，テンソルの表記の方法と性質について述べていくことにする．本節では，本論文で提案する新たな多視点幾何を理解する上でベースとなる幾何学的な拘束について代数的な側面と幾何学的な側面の両方について詳しく説明していく．

2.1.1 テンソル表記

テンソルは，スカラー，ベクトル，行列を含む数値の集合の総称である．テンソルの次元を階数と呼び，スカラーは0階のテンソル，ベクトルは1階のテンソル，行列は2階のテンソルと呼ばれる．このような2階のテンソルにさらに1次元分の情報が加わったもの

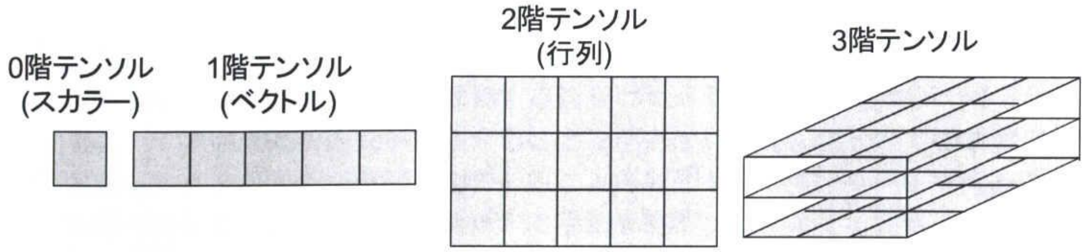


図 2.1 ベクトルとテンソル

を3階のテンソルと呼ぶ．このようにそれぞれの階数とその要素の次元数は一致していることが分かる．これをさらに N 次元に拡張していくと，N 階のテンソルは N 次元分の情報を持つものであると考えることができる．このようにテンソルは階数に対応した次元の広がりを持つ数値の集合である．以降では，一般によく知られているベクトルや行列を例にテンソルについて詳しく説明していく．

まず，テンソルの表記法とその規則について述べる．テンソルを記号を用いて表すとき，ベクトルや行列の表記とは異なり，その要素を用いて表す．例として，以下のようなベクトル $\mathbf{a}$ を考える．

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

ここで，ベクトル $\mathbf{a}$ は1階のテンソルである．このベクトルをテンソル表記を用いて表す場合，以下のようにベクトル $\mathbf{a}$ の第 i 要素を用いて表すことができる．

$$a^i \tag{2.2}$$

このとき，添え字 i はベクトルの要素に対応しており，$1, \cdots, 3$ の値を取る．同様に，以下のような 3×3 の行列，$\mathbf{A}$ を考える．

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

先ほどと同様，テンソルを記号を用いて表すときには，その要素を用いて表す．この行列は2階のテンソルであり，テンソル表記では以下のような i 行 j 列の要素を用いて表す．

$$A^i_j \tag{2.4}$$

添え字はベクトルのときと同様，行列の要素に対応している．ここで添え字について注目すると，上に付くものと下に付くものがあることが分かる．以降では，このような添え字の位置に関する規則に関して説明していく．

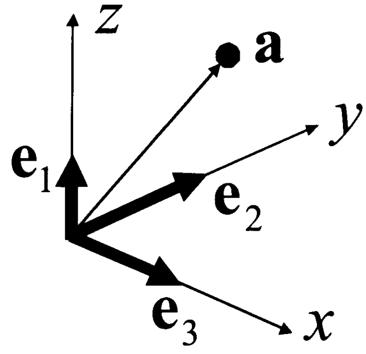


図 2.2 共変ベクトルと反変ベクトル

2.1.2 反変テンソルと共変テンソル

本論文では添え字の説明のために，図2.2のようなベクトル$\mathbf{a}$と，このベクトルの始点を原点とする座標系を用いる．今，x軸，y軸，z軸に対応する単位ベクトルをそれぞれ$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$とすると，ベクトル$\mathbf{a}$はこれらの基底ベクトル用いて表すことができる．

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \tag{2.5}$$

ここで，$\mathbf{a} = [a^1, a^2, a^3]^\top$，基底ベクトルを$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]^\top$とおくと，式(2.5)は以下のように表すことができる．

$$\mathbf{a} = \mathbf{E}\mathbf{a} \tag{2.6}$$

ここで，式(2.6)は3×3の行列$\mathbf{H}$とその逆行列$\mathbf{H}^{-1}$をかけて以下のように変形したとしてもベクトル$\mathbf{a}$に何ら変化はない．

$$\mathbf{a} = \mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{a} \tag{2.7}$$

式(2.7)において$\mathbf{EH}$に注目すると，このベクトルは基底ベクトル$\mathbf{E}$に座標変換$\mathbf{H}$を行ったベクトルであることを意味している．一方，$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{a}$に注目すると，このベクトルは$\mathbf{a}$に対して座標変換$\mathbf{H}$の逆の変換にあたる$\mathbf{H}^{-1}$を行ったベクトルであることが分かる．このようにして，一般に基底ベクトルがあった場合，そのベクトルに対して座標変換$\mathbf{H}$を加えると，このベクトルを用いて表される点の座標は$\mathbf{H}^{-1}$なる逆の変換を受ける．このように基底ベクトルに対して逆の変換を受けるベクトルは反変ベクトル（contravariant vector）あるいは1階反変テンソル（contravariant tensor）と呼ばれ，テンソル表記ではその要素は上付き添え字で表される．一方，基底ベクトルと同じ変換を受けるベクトルは共変ベクトル（covariant vector）あるいは1階共変テンソル（covariant tensor）と呼ばれ，テンソル表記ではその要素は下付き添え字で表される．さらに，これら上付き添え字と下付き添え字両方が要素に付くものは混合テンソル（mixed tensor）と呼ばれ，共変ベクトルを共変ベクトルに，もしくは反変ベクトルを反変ベクトルに移す変換などで用いられる．

2.1.3 テンソルの性質

ここで添え字以外のテンソル記法の規則について説明する．今，3次元空間中において，2つのベクトル $\mathbf{a} = [a^1, a^2, a^3]^\top$，$\mathbf{b} = [b^1, b^2, b^3]^\top$ の間の演算を考え，内積を例にして説明する．今，2つのベクトル $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ の内積を取った結果がスカラー c であるとすると，この演算は行列表記を用いて以下のように表すことができる．

$$c = \mathbf{a}^\top \mathbf{b} \tag{2.8}$$

このとき，$\mathbf{a}^\top$ は $\mathbf{a}$ を転置したものであるので，$\mathbf{a}^\top = [a_1, a_2, a_3]$ のように下付きの添え字を用いて表すことができる．従って，先ほどの演算はテンソル表記を用いて以下のように表せる．

$$c = \sum_{i=1}^{3} a_i b^i \tag{2.9}$$

ここで，テンソル表記では上付き添え字と下付き添え字は総和を取るという取り決めをすることにより，$\sum$ を省略して以下のように表すこともできる．

$$c = a_i b^i \tag{2.10}$$

このような省略記法をアインシュタインの規約（Einstein's convention）と呼ぶ．本論文ではこのアインシュタインの規約を用いることにする．

次にテンソル同士の計算に関する規則 (加法・乗法) について述べる．テンソルの加算は行列と同様，階数が同じもの同士でしか定義できない．ここで階数が同じ2つのテンソル A^{ij}，B^{ij} があるとき，その要素の和から成るテンソルを C^{ij} とすると，テンソルの和は以下のように表すことができる．

$$A^{ij} + B^{ij} = C^{ij} \tag{2.11}$$

また，テンソルの加算においては添え字の上下による区別もあるため，階数が一致していて，形が同じテンソル同士でしか定義できない．以下に，加算の例を示す．

$$A^{ij} + B^{ij} = C^{ij} \tag{2.12}$$

$$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij} \tag{2.13}$$

$$A_i^j + B_i^j = C_i^j \tag{2.14}$$

次に，テンソル同士の積について説明する．テンソル同士の積の場合には加算のときとは異なり違う形のテンソルでも積を取ることができる．また，積をとる場合には以下のようにあたかも添え字を足すように添え字を付ける．

$$A^{ij} B^{kl} = C^{ijkl} \tag{2.15}$$

ここでも，添え字の上下には注意をしなければならないが，先に述べたように違う形のテンソル同士で積を取ることができる．以下に異なる形のテンソル同士の例を示す．

$$A^{ij}B_{kl} = C^{ij}_{kl} \tag{2.16}$$
$$A^{ijk}B^{lm} = C^{ijklm} \tag{2.17}$$
$$A_iB^{jkl} = C^{jkl}_{i} \tag{2.18}$$

但し，テンソル同士の積について，掛け合わせるテンソルが同じ添え字を持つ場合には注意しなければならない．このような場合には，先に述べたアインシュタインの規約によりその添え字に関して総和を取ることになる．この結果，掛け合わせるテンソルが同じ添え字を持つ場合には，総和を取るとテンソルの階数が減少する．例えば，3階のテンソル A^{ijk} と1階のテンソル B_j，C_k の積は以下のように1階のテンソルとなる．

$$A^{ijk}B_jC_k = D^i \tag{2.19}$$

このように積を取ることにより，テンソルの階数が減少する性質をテンソルの縮約（contraction）と呼ぶ．また，このとき和を取っている添え字 j, k をダミーインデックス（dummy index）と呼び，そうでない添え字 i をフリーインデックス（free index）と呼ぶ．

さらに，テンソル同士の積に関して重要な性質がある．テンソル積は積の順番を入れ替えても結果に何ら変わりはないということである．この性質はアインシュタインの規約で省略していた総和記号を陽にして表すと，以下のように表せる．

$$\begin{aligned} A^{ijk}B_jC_k &= \sum_j\sum_k A^{ijk}B_jC_k \\ &= \sum_j\sum_k B_jC_kA^{ijk} \\ &= B_jC_kA^{ijk} \end{aligned} \tag{2.20}$$

式(2.20)より，式の意味に全く変化がないことが分かる．この性質はテンソルで表された式を整理する上で重要となる．以上のように，テンソルはベクトルや行列とは異なる様々な性質を持つことが分かる．

2.1.4 ϵ テンソル

次に特殊なテンソル ϵ_{ijk}(または ϵ^{ijk}) について説明する．ϵ テンソルは trifocal tensor や quadrifocal tensor を表すうえで重要となるため，性質を十分理解しておく必要がある．$\epsilon_{ijk}(i,j,k = 1\cdots3)$ テンソルは次のように定義される．

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & (i,j,k)\text{に同じものがある} \\ +1 & (i,j,k)\text{が}(1,2,3)\text{に対して偶置換} \\ -1 & (i,j,k)\text{が}(1,2,3)\text{に対して奇置換} \end{cases} \tag{2.21}$$

表 2.1 行列表記とテンソル表記

	行列表記	テンソル表記
ベクトル	$\mathbf{a}$	$a_i,\ a^i$
行列	$\mathbf{A}$	$A_{ij}, A^{ij}, A_i^j, A_j^i$
内積	$c = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$	$c = a_i b^i,\ c = a^i b_i$
外積	$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = [\mathbf{a}]_\times \mathbf{b}$	$c_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k,\ c^i = \epsilon^{ijk} a_j b_k$
座標変換	$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{a}$	$b^j = A_i^j a^i,\ b_j = A_j^i a_i$

この性質については ϵ^{ijk} も同様である．このように定義される 3 階の交代テンソル ϵ_{ijk} はエディントン (Eddington) のイプシロン，レビ - チビタ (Levi-Civita) の全反対称テンソルなどと呼ばれる．このテンソルを用いると，3 次元ベクトル $\mathbf{a} = [a^1, a^2, a^3]^\top$ と $\mathbf{b} = [b^1, b^2, b^3]^\top$ との外積は次のように表すことができる．

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k \tag{2.22}$$

また，式 (2.22) は行列表記では以下のように表すことができる．

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_\times \mathbf{b} \tag{2.23}$$

ここで，$[\mathbf{a}]_\times$ は以下に示す 3×3 の歪対称行列である．

$$[\mathbf{a}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

また，この歪対称行列は ϵ テンソルを用いると以下のように表せる．

$$\epsilon_{ijk} a^j \tag{2.25}$$

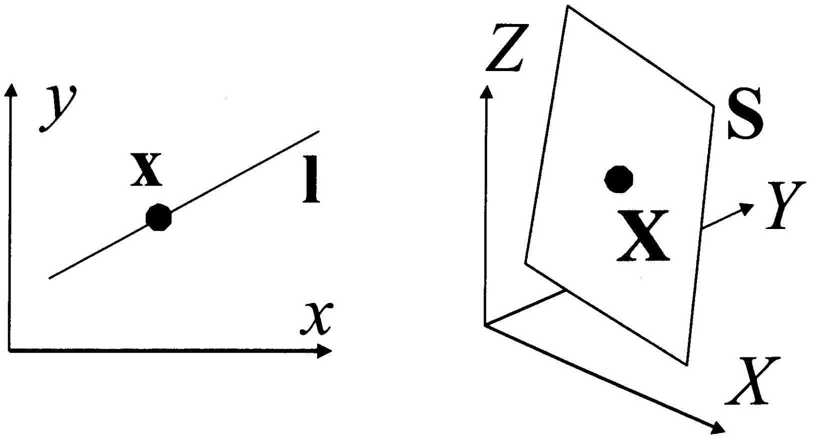
一方，下付添え字の ϵ_{ijk} と上付添え字の ϵ^{ijk} の積は以下のようにスカラーとなる．

$$\epsilon_{ijk} \epsilon^{ijk} = 6 \tag{2.26}$$

このように, ϵ テンソルを用いることで様々な演算をテンソル表記で簡潔に表すことが可能となる．これまで示してきた，内積や座標変換，外積に関する行列表記とテンソル表記をまとめたものを表 2.1 に示す

2.1.5 幾何学的拘束

本節では，多視点幾何を説明する上で必要となる幾何学的拘束について説明する．ここでは，拘束の基本的な要素となる点，直線，平面について説明し，それらが複数存在する場合における幾何学的拘束についてテンソルでどのように表現できるかについて述べる．



(a) 平面中の点と直線の交差　　(b) 空間中の点と平面の交差

図 2.3 空間中の点との交差

まず，2 次元平面上で幾何学的拘束について考えてみる．2 次元平面上には点，直線，曲線などの要素が存在し，様々な拘束が考えられるが，この中で最も基本的な幾何学的拘束は図 2.4(b) のように 3 直線が一点で交差するという拘束である．曲面などにおける複雑な拘束も全てこの拘束がベースとなっており，基本的な拘束の組み合わせで表現できる．そのため，以下では 3 直線の交差を中心に説明する．

ここで，複数の直線の交差について考えてみると，図 2.4(a) に示すように，一般に 2 本の直線は必ず 1 点で交差するが，3 本の直線が 1 点で交差することはない．従って，図 2.4(b) のように 3 本の直線が 1 点で交わるということは，そこに何かしらの拘束があると考えることができる．これが幾何学的拘束の基本的な考え方である．このような 3 直線が 1 点で交わるという幾何学的拘束を考えるためには，その要素となる点や直線がどのようなベクトルであるかを知る必要がある．ここではまず，点と直線がそれぞれどのようなベクトルであるかと点と直線の関係をどのように表すことができるかについて述べる．

今，図 2.3 (a) に示すような点と直線の関係は，点の斉次座標を $\mathbf{x} = [x^1, x^2, x^3]^\top$ とし，直線の斉次座標を $\mathbf{l} = [l_1, l_2, l_3]^\top$ とすると，これらを用いて以下のように表せる．

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{x} = 0 \tag{2.27}$$

ここで，式 (2.7) のように，式 (2.27) 中に 3×3 行列 $\mathbf{H}_{3\times3}$ とその逆変換 $\mathbf{H}_{3\times3}^{-1}$ を挿入すると式 (2.27) は以下のように書き表すことができる．

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{H}_{3\times3} \mathbf{H}_{3\times3}^{-1} \mathbf{x} = 0 \tag{2.28}$$

式 (2.28) において $\mathbf{l}^\top \mathbf{H}_{3\times3}$ に注目すると，このベクトルは直線 $\mathbf{l}$ に座標変換 $\mathbf{H}_{3\times3}$ を行ったベクトルであることを意味している．一方，$\mathbf{H}_{3\times3}^{-1}\mathbf{x}$ に注目すると，このベクトルは点 $\mathbf{x}$ に対して座標変換 $\mathbf{H}_{3\times3}$ の逆の変換にあたる $\mathbf{H}_{3\times3}^{-1}$ を行ったベクトルであることが分かる．

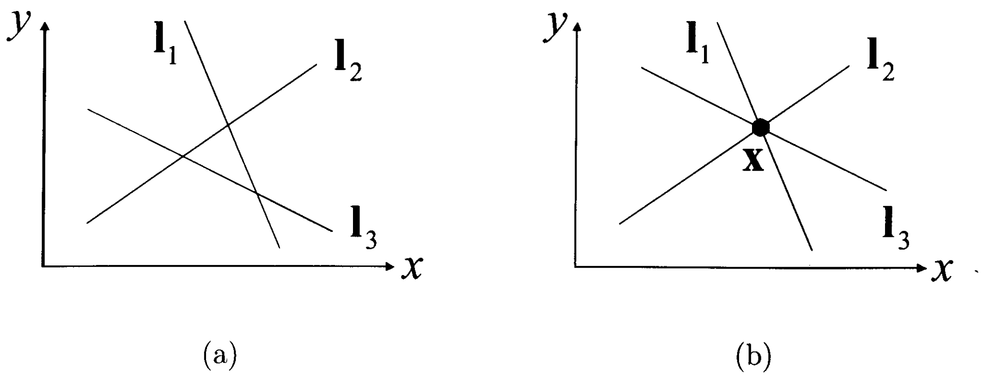


図 2.4 2 次元平面中の幾何学的拘束

すなわち，点 $\mathbf{x}$ は反変ベクトルであり，直線 $\mathbf{l}$ は共変ベクトルであることが分かる．従って，テンソル表記をすると，点は上付き添え字を用いて x^i と表し，直線は下付き添え字を用いて l_i と表すため，式 (2.27) は以下のように表せる．

$$x^i l_i = 0 \tag{2.29}$$

このように点と直線はそれぞれ反変ベクトル，共変ベクトルであることが分かる．また，それらの「点が直線上に存在する」あるいは「直線が点を通る」という関係は式 (2.27) のように表すことができることが分かる．

今，2 次元平面上で先に述べたようなベクトル間にどのような拘束が存在するかを考える．図 2.4(b) に示すように，3 直線 $\mathbf{l}^1, \mathbf{l}^2, \mathbf{l}^3$ が 1 点 $\mathbf{x}$ で交差しているとする．このとき，これら点と直線の関係は式 (2.27) より，以下のように表すことができる．

$$\mathbf{l}^{1\top}\mathbf{x} = 0 \tag{2.30}$$
$$\mathbf{l}^{2\top}\mathbf{x} = 0 \tag{2.31}$$
$$\mathbf{l}^{3\top}\mathbf{x} = 0 \tag{2.32}$$

式 (2.30)，式 (2.31)，式 (2.32) を $\mathbf{x}$ についてまとめると以下のように書き換えることができる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}^{1\top} \\ \mathbf{l}^{2\top} \\ \mathbf{l}^{3\top} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2.33}$$

式 (2.33) は $\mathbf{x}$ に関する方程式であり，3 直線の交点が $\mathbf{x}$ であることから，この方程式はゼロベクトルでない解 $\mathbf{x}$ を持つ．このとき，式 (2.33) の左辺の 3×3 行列の行列式を取ると，その行列式は以下のようににゼロになる．

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{l}^{1\top} \\ \mathbf{l}^{2\top} \\ \mathbf{l}^{3\top} \end{bmatrix} = 0 \tag{2.34}$$

ここで，行列を転置しても同様に行列式はゼロになるという行列式の性質から式 (2.34) は以下のように書き換えることができる

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{l}^{1\top} \\ \mathbf{l}^{2\top} \\ \mathbf{l}^{3\top} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{l}^1 & \mathbf{l}^2 & \mathbf{l}^3 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.35}$$

さらに，行列式は 3 つのベクトルが作る平行六面体の体積に等しいことから，式 (2.35) はベクトルの外積と内積を用いて以下のように書き換えることができる．

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{l}^1 & \mathbf{l}^2 & \mathbf{l}^3 \end{bmatrix} = (\mathbf{l}^1 \times \mathbf{l}^2) \cdot \mathbf{l}^3 = 0 \tag{2.36}$$

さらに，第 1.1.3 節，第 1.1.4 節の内積と外積のテンソル表記を用いることにより，この幾何学的拘束はテンソルを用いて以下のように表すことができる．

$$\epsilon^{ijk} l_i^1 l_j^2 l_k^3 = 0 \tag{2.37}$$

このように 2 次元平面上において 3 直線が交差するという幾何学的拘束は行列式やテンソルを用いて表すことができる．

次に，3 次元空間における幾何学的拘束について考える．3 次元空間における基本的な拘束の要素は，2 次元平面の直線を 1 次元拡張した平面である．ここで，複数の平面における幾何学的拘束について考える．3 次元空間中では，2 枚の平面は 1 つの直線で交差する．また，3 枚の平面は必ず 1 点で交差する．一方で，図 2.5 に示すように一般に 4 枚の平面が 1 点で交差することはない．そのため，この「4 平面の交差」が 3 次元空間中の幾何学的拘束となる．以降では 2 次元平面のときと同様，3 次元空間中における点と平面のベクトルについて説明し，幾何学的拘束について詳しく述べる．

今，図 2.3 (b) に示すような 3 次元空間中の点と平面の関係は，点の斉次座標 $\mathbf{X} = [X^1, X^2, X^3, X^4]^\top$ と平面の斉次座標 $\mathbf{S} = [S_1, S_2, S_3, S_4]^\top$ を用いて以下のように表せる．

$$\mathbf{S}^\top \mathbf{X} = 0 \tag{2.38}$$

ここで，2 次元平面のときと同様，式 (2.7) のように，式 (2.27) 中に 4×4 行列 $\mathbf{H}_{4\times4}$ とその逆変換 $\mathbf{H}_{4\times4}^{-1}$ を挿入すると式 (2.38) は以下のように書き表すことができる．

$$\mathbf{S}^\top \mathbf{H}_{4\times4} \mathbf{H}_{4\times4}^{-1} \mathbf{X} = 0 \tag{2.39}$$

式 (2.39) において $\mathbf{S}^\top \mathbf{H}_{4\times4}$ に注目すると，このベクトルは平面 $\mathbf{S}$ に座標変換 $\mathbf{H}_{4\times4}$ を行ったベクトルであることを意味している．一方，$\mathbf{H}_{4\times4}^{-1}\mathbf{X}$ に注目すると，このベクトルは点 $\mathbf{X}$ に対して座標変換 $\mathbf{H}_{4\times4}$ の逆の変換にあたる $\mathbf{H}_{4\times4}^{-1}$ を行ったベクトルであることが分かる．すなわち，点 $\mathbf{X}$ は反変ベクトルであり，平面 $\mathbf{S}$ は共変ベクトルであることが分かる．従って，テンソル表記をすると，点は上付き添え字を用いて X^i と表し，直線は下付き添え字を用いて S_i と表すため，式 (2.38) は以下のように表せる．

$$X^i S_i = 0 \tag{2.40}$$

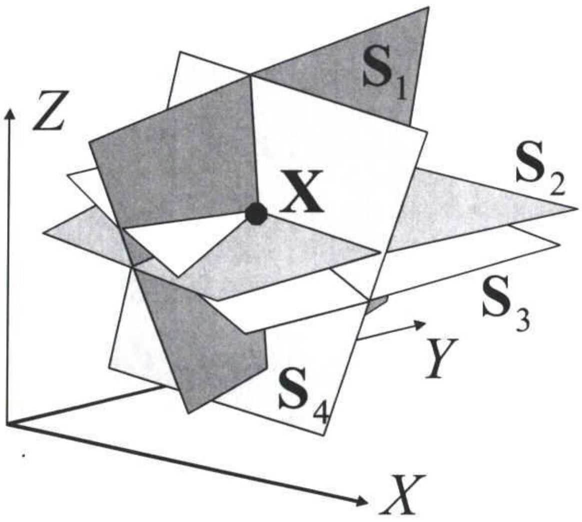


図 2.5 3 次元空間中の幾何学的拘束

このように点と平面はそれぞれ反変ベクトル，共変ベクトルであることが分かる．また，それらの「点が平面上に存在する」あるいは「平面が点を通る」という関係は式 (2.38) のように表すことができることが分かる．

今，3 次元平面上で先に述べたようなベクトル間にどのような拘束が存在するかを考えよう．図 2.5 に示すように，4 平面 $\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^2, \mathbf{S}^3, \mathbf{S}^4$ が 1 点 $\mathbf{X}$ で交差しているとする．このとき，これら点と平面の関係は式 (2.38) より，以下のように表すことができる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^{1\top} \\ \mathbf{S}^{2\top} \\ \mathbf{S}^{3\top} \\ \mathbf{S}^{4\top} \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{2.41}$$

式 (2.41) は $\mathbf{X}$ に関する方程式であり，4 平面の交点が $\mathbf{X}$ であることから，この方程式はゼロベクトルでない解 $\mathbf{X}$ を持つ．従って，このとき式 (2.41) の左辺の 4×4 行列の行列式を取ると，その行列式は以下のようににゼロになる．

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{1\top} \\ \mathbf{S}^{2\top} \\ \mathbf{S}^{3\top} \\ \mathbf{S}^{4\top} \end{bmatrix} = 0 \tag{2.42}$$

2 次元平面のときと同様，式 (2.42) は以下のように書き換えることができる．

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{S}^1 & \mathbf{S}^2 & \mathbf{S}^3 & \mathbf{S}^4 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.43}$$

この幾何学的拘束はテンソルを用いて以下のように表すことができる.

$$\epsilon^{ijkl} S_i^1 S_j^2 S_k^3 S_l^4 = 0 \tag{2.44}$$

このように3次元空間中において4平面が交差するという幾何学的拘束は行列式やテンソルを用いて表すことができる．このような3次元空間における幾何学的拘束は3次元空間中における複数のカメラ間の関係を表す多視点幾何を考える場合には非常に重要な拘束になる．以降ではまず，多視点幾何の代数的な解析を行い，多視点幾何拘束式を導出する．さらに，代数的な解析のもとで得られた多視点幾何拘束が幾何学的には4平面の交差により表現できることを説明していく.

2.2 多視点幾何の一般特性

本節では, 従来の多視点幾何についての基本的な理論に関して, 本論文を理解する上で必要となる事柄を中心に説明する. 従来の多視点幾何はエピポーラ幾何がそうであるように，当初は幾何学的な考察のもとに研究が行われてきた．幾何学的な解析は直感的に理解しやすい半面，カメラの数が増えるに従って一般の視点数を扱う多視点幾何には拡張しづらい．このような理由から近年では多視点幾何は代数的な解析により研究が行われるようになった．そこで，本節ではまずカメラが複数存在する場合の代数的な解析による多視点幾何拘束について述べることにする.

今, 空間中に N 台の射影カメラが存在し, 空間中の点 $\mathbf{X} = [X^1, X^2, X^3, X^4]^\top$ がこれら N 台のカメラに投影されている場合を考える. このとき, i 番目のカメラのカメラ行列を $\mathbf{P}_i$ とし, i 番目のカメラにおける $\mathbf{X}$ の投影像を $\mathbf{x}_i = [x_i^1, x_i^2, x_i^3]^\top (i = 1, \ldots, N)$ とすると, N 台のカメラへの投影は以下のように表すことができる.

$$\lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{X} \tag{2.45}$$

ここで λ_i は, それぞれの投影像の定数倍の不定性を表すスカラーである. またカメラ行列 $\mathbf{P}$ は次式で表される 3×4 行列である.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

式 (2.45) において, 式 (2.46) に示すようなカメラが N 台存在するとき，形状に関するパラメータである $\mathbf{X}$ および λ_i とそれ以外とを分離して整理すると, 式 (2.45) は以下のように

記述し直すことができる.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{x}_2 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x}_3 & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathbf{P}_N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{x}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ -\lambda_3 \\ \vdots \\ -\lambda_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

ここで式 (2.47) の一番左の $(3N) \times (N+4)$ 行列を $\mathbf{M}$, 中央の $N+4$ 次元ベクトルを $\mathbf{Y}$ とすると, 式 (2.47) は以下のように書き換えることができる.

$$\mathbf{MY} = \mathbf{0} \tag{2.48}$$

行列 $\mathbf{M}$ は $(3N) \times (N+4)$ 行列であるが, 式 (2.48) がゼロベクトルではない解 $\mathbf{Y}$ を持つことから, 行列 $\mathbf{M}$ の階数は常に以下の条件を満たす.

$$\mathrm{rank}\mathbf{M} < N+4 \tag{2.49}$$

すなわち, 行列 $\mathbf{M}$ から $(N+4) \times (N+4)$ の部分行列 $\mathbf{M}'$ を取り出すと, 次に示す通り, どの部分行列 $\mathbf{M}'$ もその行列式は 0 となる.

$$\det \mathbf{M}' = 0 \tag{2.50}$$

この時, 式 (2.50) で表される拘束が N 視点幾何の拘束である. この拘束は, 幾何学的には, 複数のカメラにおいて視点と投影像とを結ぶ直線を伸ばした時に, これらの直線が 3 次元空間中において互いに 1 点で交わることを表している. これらは, 2 視点幾何の場合にはエピポーラ拘束あるいは bilinear 拘束, 3 視点幾何の場合には trilinear 拘束, 4 視点幾何の場合には quadrilinear 拘束と呼ばれ, またこれらを総称して multilinear 拘束と呼ぶ.

N 視点幾何において, 行列 $\mathbf{M}$ の $3N$ 行から行列 $\mathbf{M}'$ の $N+4$ 行を選ぶ選び方は, 一般に一通りではないため複数の multilinear 拘束の式が得られる. しかしあるカメラ行列から 1 行のみを選ぶと, そのカメラの要素は単純にスケール項となってしまい意味をなさない. 従って N 視点幾何に関する有効な拘束を得るためには, N 個のカメラ行列 $\mathbf{P}_i (i = 1, \ldots, N)$ のいずれからも 2 行以上ずつ選ばなければならない. すなわち, N 視点幾何において有効な $(N+4) \times (N+4)$ 行列 $\mathbf{M}'$ を得るためには, 以下に示す条件を満たす必要がある.

$$2N \leq N+4 \tag{2.51}$$

式 (2.51) より, 視点 N には以下のような条件があることになる.

$$N \leq 4 \tag{2.52}$$

以上より, $N \geq 5$ では有効な multilinear 拘束が得られず, multilinear 拘束は 4 視点幾何までしか存在しないことが分かる.

ここで，多視点幾何の自由度について考えてみる．一般に N 個の射影カメラが存在する場合, これらの画像が持つ自由度は $11N-15$ しか存在しない．これは, N 台の射影カメラがカメラ行列 $\mathbf{P}$ で表される通りそれぞれ 11 自由度を持つが, これら N 台のカメラが 15 自由度の同一射影空間中に存在するという拘束条件があるためである．従って, 2 視点幾何は 7 自由度, 3 視点幾何は 18 自由度, 4 視点幾何は 29 自由度を持つことが分かる．

このような代数的な解析ではその幾何学的意味は見えづらい．しかしながら，多視点幾何を統一的に扱えるため，近年ではこのような代数的解析により多視点幾何の様々な性質が次々と明らかにされた．以降では，2 視点から 4 視点までそれぞれの視点数における代数的な解析についてさらに詳しく説明する．

2.3 2 視点幾何

2 台のカメラが存在するとき，これらのカメラのカメラ行列をそれぞれ $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ とする．ある 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ のこれらのカメラにおける投影像を $\mathbf{x} = [x^1, x^2, x^3]^\top$, $\mathbf{x}' = [x'^1, x'^2, x'^3]^\top$ とすると，式 (2.50) より以下に示す 6×6 行列の行列式が 0 となることが分かる．

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 & x^1 & 0 \\ \mathbf{P}^2 & x^2 & 0 \\ \mathbf{P}^3 & x^3 & 0 \\ \mathbf{P}'^1 & 0 & x'^1 \\ \mathbf{P}'^2 & 0 & x'^2 \\ \mathbf{P}'^3 & 0 & x'^3 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.53}$$

ここで, $\mathbf{P}^i$ はカメラ行列 $\mathbf{P}$ の第 i 行目を表し, x^i は $\mathbf{x}$ の第 i 要素を表す．式 (2.53) を展開して整理しなおすと, 以下に示すよく知られたエピポーラ方程式が得られる．

$$x^i x'^j \mathcal{F}_{ji} = 0 \tag{2.54}$$

ここで, $\mathcal{F}_{ji}$ は fundamental 行列の j 行 i 列の要素を表す．このような fundametal 行列のテンソル表記を $\mathcal{F}_{ji}$ を bifocal tensor と呼ぶ．式 (2.53) を式 (2.54) と表したことから, $\mathcal{F}_{ji}$ と 2 つのカメラ行列 $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ との間には, 以下の関係があることが分かる．

$$\mathcal{F}_{ji} = \epsilon_{ipq}\epsilon_{jrs} \det \begin{bmatrix} \mathbf{P}^p \\ \mathbf{P}^q \\ \mathbf{P}'^r \\ \mathbf{P}'^s \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

この bifocal tensor は式 (2.55) から明らかなように，2 台のカメラのカメラ行列のみから成るため，2 台間の相対的な位置・姿勢の関係を表している．bifocal tensor からは 2 台カメラのカメラ行列が得られることから，bifocal tensor を求めることは，2 台カメラを射影的に校正することに等しい．

bifocal tensor はカメラ行列が与えられている場合には式 (2.55) から, また画像中の対応点が得られている場合には式 (2.54) の拘束を用いて求めることができる. 今, テンソル $\mathcal{F}$ の各要素を並べたベクトル $\mathbf{f} = [\mathcal{F}_{11}, \ldots, \mathcal{F}_{33}]^\top$ を考える. このとき, $\mathbf{f}$ と画像中の対応点 $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ との間には以下の関係式が成り立つ.

$$\mathbf{M}\mathbf{f} = 0 \tag{2.56}$$

ここで, $\mathbf{M}$ は次のような形をしている.

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & \cdots & \mathbf{Z}_8\end{bmatrix}^\top \qquad (2.57)\\ \mathbf{Z}_n &= \begin{bmatrix}m_n^1 m_n'^1 & m_n^2 m_n'^1 & m_n^3 m_n'^1 & m_n^1 m_n'^2 & m_n^2 m_n'^2 & m_n^3 m_n'^2 & m_n^1 m_n'^3 & m_n^2 m_n'^3 & m_n^3 m_n'^3\end{bmatrix}^\top\end{aligned}$$

2 視点幾何の自由度は 7 自由度であるが, 定数倍の不定性を除いた bifocal tensor の未知数は 8 である. 従って, bifocal tensor は 8 本以上の拘束式から線形に計算することが可能であるので, $\mathbf{M}$ は 8 点以上の n 点の対応点から構成されている. 式 (2.56) において, $\|\mathbf{f}\| = 1$ なる条件のもとでの最小二乗解 $\mathbf{f}$ は行列 $\mathbf{M}^\top\mathbf{M}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルとして求まる.

一方で, 式 (2.54) はエピポーラ方程式と呼ばれ, 行列表記を用いて以下のように表される.

$$\mathbf{x}'^\top \mathbf{F}\mathbf{x} = 0 \tag{2.58}$$

式 (2.58) は 2 台カメラに投影された画像間の対応関係を表す方程式として広く用いられている. 2 視点幾何 (エピポーラ幾何) の内容については次のような解説書及び文献が参考になるであろう [12, 2, 1, 27, 53, 70, 14].

2.4 3視点幾何

次に, 3 台のカメラが存在する場合について説明する. これら 3 台のカメラのカメラ行列をそれぞれ $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{P}''$ とし, ある 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ のこれらのカメラにおける投影像を $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}''$ とすると, 式 (2.50) より以下の式が得られる.

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{P}^1 & x^1 & 0 & 0\\ \mathbf{P}^2 & x^2 & 0 & 0\\ \mathbf{P}^3 & x^3 & 0 & 0\\ \mathbf{P}'^1 & 0 & x'^1 & 0\\ \mathbf{P}'^2 & 0 & x'^2 & 0\\ \mathbf{P}''^1 & 0 & 0 & x''^1\\ \mathbf{P}''^2 & 0 & 0 & x''^2\end{bmatrix} = 0 \tag{2.59}$$

式 (2.59) では, $\mathbf{P}', \mathbf{P}''$ に関しては, 第 1, 第 2 行を取り出しているが, 同様に第 2, 第 3 行や, 第 1, 第 3 行を用いることもできるので, $\mathbf{P}'$ および $\mathbf{P}''$ からの行の取り方にはそれぞれ 3 通

りの場合が存在する．従って式 (2.59) のような行列式の条件は合計 9 通り考えることができる．これらの式を展開して整理し直すと, 以下に示す trilinear 拘束が得られる.

$$x^i x'^j x''^k \epsilon_{jqu} \epsilon_{krv} \mathcal{T}_i^{qr} = 0_{uv} \tag{2.60}$$

このとき, $\mathcal{T}_i^{qr}$ は $3 \times 3 \times 3$ の 3 階のテンソルであり, trifocal tensor と呼ばれる.

2 視点幾何とは異なり，trifocal tensor は点だけでなく直線の関係が存在する．以下に 3 視点における点と直線の対応関係および直線同士の対応関係を表す拘束を示す.

$$x^i x'^j l''_r \epsilon_{jqu} \mathcal{T}_i^{qr} = 0_u \tag{2.61}$$

$$x^i l'_q l''_r \mathcal{T}_i^{qr} = 0 \tag{2.62}$$

$$l_p l'_q l''_r \epsilon^{piw} \mathcal{T}_i^{qr} = 0^w \tag{2.63}$$

ここで l_i は直線 $\mathbf{l}$ の斉次座標の第 i 要素を表す．また，式 (2.59) と式 (2.60) より, trifocal tensor はカメラ行列を用いて以下のように表せることが分かる.

$$\mathcal{T}_i^{qr} = \epsilon_{ilm} \det \begin{bmatrix} \mathbf{P}^l \\ \mathbf{P}^m \\ \mathbf{P}'^q \\ \mathbf{P}''^r \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

この trifocal tensor は式 (2.64) から明らかなように，3 台のカメラのカメラ行列のみから成るため，3 台間の相対的な位置・姿勢の関係を表している．trifocal tensor からは 3 台カメラのカメラ行列が得られることから，trifocal tensor を求めることは，3 台カメラを射影的に校正することに等しい.

trifocal tensor はカメラ行列が与えられている場合には式 (2.64) から, また画像中の対応点が得られている場合には式 (2.60) の拘束を用いて求めることができる．今, テンソル $\mathcal{T}$ の各要素を並べたベクトル $\mathbf{t} = [\mathcal{T}_1^{11}, \ldots, \mathcal{T}_3^{33}]^\top$ を考える．このとき, $\mathbf{t}$ と画像中の対応点 $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}''$ との間には以下の関係式が成り立つ.

$$\mathbf{M}\mathbf{t} = 0 \tag{2.65}$$

bifocal tensor のときとは異なり, $\mathbf{M}$ は $9n \times 27$ の行列である．ここで, n は対応点の数を表している．3 視点幾何の自由度は 18 自由度であるが, 定数倍の不定性を除いた trifocal tensor の未知数は 26 である．一方, 式 (2.60) に示す trilinear 拘束には 9 つの式があるが, この内で線形独立なのは 4 つのみである．従って, trifocal tensor を線形に計算する場合, 最低 7 点の対応点を用いて式 (2.65) を解くことにより, $\mathbf{t}$ は $\mathbf{M}^\top\mathbf{M}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルとして求まる.

3 視点幾何は，当初はこのような代数的な解析ではなく，エピポーラ幾何を組み合わせて考えられてきた [8, 9]．その後，Spetsakis ら [54] により，3 台カメラ間ではエピポーラ幾何以上の拘束が得られることが示された．Spetsakis らは校正済みカメラではあるが，trilinear

拘束の性質を初めて3次元復元に利用した．このtrilinear拘束はShashuaら[49, 50]により深く解析が行われ，3視点幾何がエピポーラ幾何の組み合わせではなくtrifocal tensorにより表現されるようになった．一方で，Hartley[20]は射影幾何をもとに3視点幾何を構築し，未校正な射影カメラによるtrilinear拘束を示した．先に述べた拘束式がこれにあたる．

2.5　4視点幾何

次に, 4台のカメラが存在する場合について述べる．4台のカメラのカメラ行列をそれぞれ$\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$, $\mathbf{P}'''$とし, ある3次元空間中の点$\mathbf{X}$のこれらのカメラへの投影像を$\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$, $\mathbf{x}'''$とすると, 式(2.50)より以下の式が得られる．

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 & x^1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{P}^2 & x^2 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{P}'^1 & 0 & x'^1 & 0 & 0 \\ \mathbf{P}'^2 & 0 & x'^2 & 0 & 0 \\ \mathbf{P}''^1 & 0 & 0 & x''^1 & 0 \\ \mathbf{P}''^2 & 0 & 0 & x''^2 & 0 \\ \mathbf{P}'''^1 & 0 & 0 & 0 & x'''^1 \\ \mathbf{P}'''^2 & 0 & 0 & 0 & x'''^2 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.66}$$

式(2.66)では, それぞれのカメラ行列の第1, 第2行に関する式を取り出して用いているが, 第2, 第3行, 又は第1, 第3行を用いることもできるので, 式(2.66)に示すような拘束式の合計は$3^4 = 81$通り考えることができる．これらの式を展開して整理すると, 以下に示すquadrilinear拘束が得られる．

$$x^i x'^j x''^k x'''^l \epsilon_{ipw}\epsilon_{jqx}\epsilon_{kry}\epsilon_{lsz} Q^{pqrs} = 0_{wxyz} \tag{2.67}$$

このとき, Q^{pqrs}は$3\times3\times3\times3$の4階テンソルであり, quadrifocal tensorと呼ぶ．quadrifocal tensorはtrifocal tensorと同様に, 点だけでなく直線の関係が存在する．以下に4視点における点と直線の対応関係および直線同士の対応関係を表す拘束を示す．

$$\begin{aligned} x^i x'^j x''^k l'''_s \epsilon_{ipw}\epsilon_{jqx}\epsilon_{kry} Q^{pqrs} &= 0_{wxy} && (2.68) \\ x^i x'^j l''_r l'''_s \epsilon_{ipw}\epsilon_{jqx} Q^{pqrs} &= 0_{wx} && (2.69) \\ x^i l'_q l''_r l'''_s \epsilon_{ipw} Q^{pqrs} &= 0_w && (2.70) \\ l_p l'_q l''_r l'''_s Q^{pqrs} &= 0 && (2.71) \end{aligned}$$

但し, 4直線に関する拘束式(2.71)は, 画像中の4つの直線が3次元空間中の同一直線$\mathbf{L}$の投影像でなくとも, $\mathbf{L}$上の同一点$\mathbf{X}$が画像中の4直線に投影されていさえすれば成り立つことに注意が必要である．

式 (2.66) および式 (2.67) より, quadrifocal tensor はカメラ行列を用いて以下のように表される.

$$\mathcal{Q}^{pqrs} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{P}^p \\ \mathbf{P}^q \\ \mathbf{P}'^r \\ \mathbf{P}''^s \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

bifocal tensor や trifocal tensor と同様に, quadrifocal tensor はカメラ行列が与えられている場合には式 (2.72) から, また画像中の対応点が得られている場合には式 (2.67) の拘束を用いて求めることができる. 今, テンソル $\mathcal{Q}$ の各要素を並べたベクトル $\mathbf{q} = [\mathcal{Q}^{1111}, \ldots, \mathcal{Q}^{3333}]^\top$ を考える. このとき, $\mathbf{q}$ と画像中の対応点 $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$, $\mathbf{x}'''$ との間には以下の関係式が成り立つ.

$$\mathbf{M}\mathbf{q} = 0 \tag{2.73}$$

$\mathbf{M}$ は $16n \times 81$ の行列である. ここで, n は対応点の数を表している. 4 視点幾何の自由度は 29 自由度であるが, 定数倍の不定性を除いた quadrifocal tensor の未知数は 80 である. 一方, 式 (2.67) に示す quadrilinear 拘束には 81 本の式があるが, この内で線形独立なのは 16 本のみである. さらに複数の対応点から式 (2.67) の拘束を得ると, これらの間には従属関係が生ずるため, n 個の対応点から得られる線形独立な式は $16n - {}_nC_2$ 個となる. 従って, quadrifocal tensor を線形に計算する場合, 最低 6 点の対応点を用いて式 (2.73) を解くことにより, $\mathbf{q}$ は $\mathbf{M}^\top\mathbf{M}$ の最小固有値に対応する固有ベクトルとして求まる.

2.6 4 平面の交差

これまでに述べたような代数的な解析により, 近年多視点幾何の様々な性質が明らかにされた. このような代数的な解析に対して本節では, 第 2.1.5 節で述べた幾何学的拘束を用いて多視点幾何を導出することを考える.

第 2.1.5 節で述べた幾何学的拘束は 2 次元空間中における「3 直線の交差」と 3 次元空間における「4 平面の交差」であった. 多視点幾何は 3 次元空間中におけるそれぞれのカメラの相対的な位置・姿勢を表すものであるため, その拘束は 3 次元空間における拘束である「4 平面の交差」である. 従って, 以降では multifocal tensor を「4 平面の交差」により表現する方法について詳しく説明する.

2.6.1 カメラによる射影と逆射影

これから 3 次元空間における拘束である「4 平面の交差」を用いて多視点幾何を表現するが, カメラが複数存在する場合に得られている情報は 2 次元情報である. そのため, この 2 次元画像中の点のみでは, 3 次元空間中の拘束である平面を表現することはできない.

しかしながら，このような 2 次元画像と 3 次元空間の関係は式 (2.45) の投影 (射影) により表されていた．ここでは，この射影の関係式を用いて空間中の平面を表すことにする．

今，3 次元空間中に点 $\mathbf{X}$ が存在し，この 3 次元点をカメラ $\mathbf{P}$ で投影した投影点を $\mathbf{x}$ であるとすると，これらの関係は以下のように表すことができる．

$$\mathbf{x}_i \sim \mathbf{P}\mathbf{X} \tag{2.74}$$

但し，$\sim$ は定数倍を除いて等しいことを示す．また，$\mathbf{P}$ は 3×4 行列である．ここで，画像中で点 $\mathbf{x}$ を通る直線 $\mathbf{l}$ を考える．直線 $\mathbf{l}$ は点 $\mathbf{x}$ を通ることから以下の関係式が成り立つ．

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{x} = 0 \tag{2.75}$$

また，式 (2.74) を (2.75) に代入して整理すると，以下の式が得られる．

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{P}\mathbf{X} = 0 \tag{2.76}$$

ここで，式 (2.77) の左辺において点 $\mathbf{X}$ 以外の部分に注目し，

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}^\top \mathbf{l} \tag{2.77}$$

とおくと，式 (2.77) は $\mathbf{S}^\top \mathbf{X} = 0$ と表せることから，式 (2.38) で示した 3 次元空間における点と平面の関係式と考えることができる．従って，$\mathbf{S}$ は 3 次元空間中において点 $\mathbf{X}$ を通る平面であることが分かる．これらのことから，式 (2.77) は画像中の直線 $\mathbf{l}$ から 3 次元空間中の平面 $\mathbf{S}$ へ投影の逆の操作をしていることが分かる．投影は式 (2.74) のように 3 次元から 2 次元へ情報を落として，次元を減少させる操作である．それに対して，投影像をもとの空間に引き戻すことを逆射影 (back projection) と呼ぶ．この逆射影では投影される前の情報は一意には決定できないものの，点に対する一定の情報持つ．そのため，これらの平面を用いて，空間中の点を決定することができる．ここで，直線の逆射影は投影の逆の操作であるものの，$\mathbf{P}^{-1}$ ではなく $\mathbf{P}^\top$ で表されることに注意が必要である．

2.6.2 quadrifocal tensor

まず quadrifocal tensor の導出から説明する．今, 図 2.6 のように 4 台のカメラが存在するとし, 4 台のカメラのカメラ行列をそれぞれ $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{P}'', \mathbf{P}'''$ とする．また，ある 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ のこれらのカメラにおける投影像をそれぞれ $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}'''$ とし, 4 台のカメラにこれらの点を通る任意の直線 $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$ が得られているとする．このとき，図 2.6 に示すように 4 直線 $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$ を逆射影して得られる 4 つの平面 $\mathbf{S}, \mathbf{S}', \mathbf{S}'', \mathbf{S}'''$ は空間中の点 $\mathbf{X}$ で交差する．すなわち，この場合には第 2.1.5 節で述べたように，$\mathbf{S}, \mathbf{S}', \mathbf{S}'', \mathbf{S}'''$ に関して以下の線形拘束が成り立つ．

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S}' & \mathbf{S}'' & \mathbf{S}''' \end{bmatrix} = 0 \tag{2.78}$$

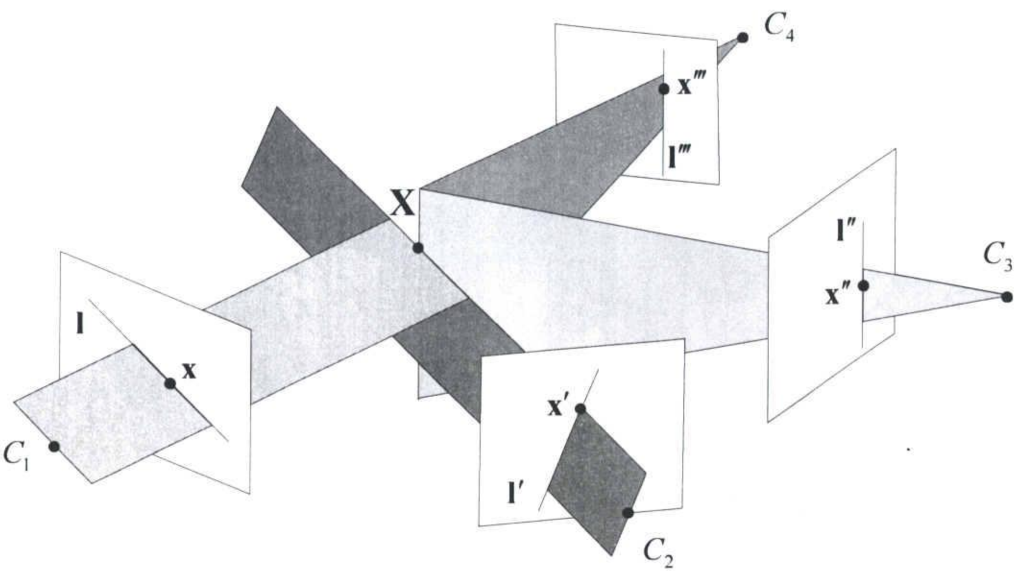


図 2.6 4 視点における 4 直線の関係

また，画像中の直線 $\mathbf{l}$ を逆射影した平面 $\mathbf{S}$ は式 (2.77) のように表せることから，式 (2.78) のように書き換えることができる．

$$\det \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{P}^\top \mathbf{l} & \mathbf{P}'^\top \mathbf{l}' & \mathbf{P}''^\top \mathbf{l}'' & \mathbf{P}'''^\top \mathbf{l}''' \end{array} \right] = 0 \tag{2.79}$$

式 (2.79) はテンソル表記を用いて表すと以下のように書き表すことができる．

$$\epsilon^{ijkl} P_i^p l_p P_j'^q l_q' P_k''^r l_r'' P_l'''^s l_s''' = 0 \tag{2.80}$$

テンソルの積では各項の順番を入れ替えても結果は変わらないことから，式 (2.80) は以下のように書き換えることができる．

$$l_p l_q' l_r'' l_s''' \epsilon^{ijkl} P_i^p P_j'^q P_k''^r P_l'''^s = 0 \quad . \tag{2.81}$$

ここで，

$$\mathcal{Q}^{pqrs} = \epsilon^{ijkl} P_i^p P_j'^q P_k''^r P_l'''^s \tag{2.82}$$

とおくと，式 (2.81) は以下のように書き改めることができる．

$$l_p l_q' l_r'' l_s''' \mathcal{Q}^{pqrs} = 0 \tag{2.83}$$

このとき, 式 (2.83) は式 (2.71) と一致しており，4 つの画像中の 4 直線における quadrilinear 拘束式であることが分かる．

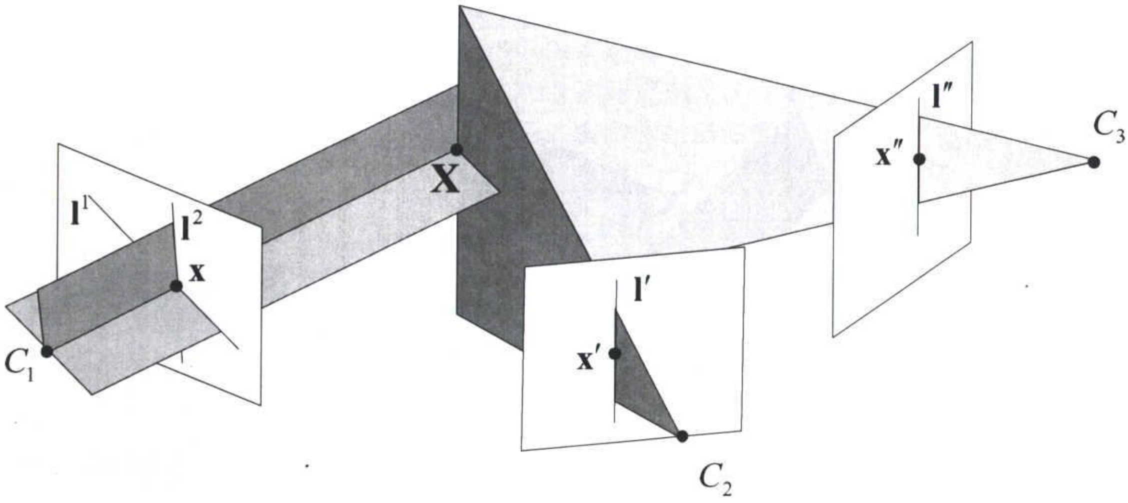


図 2.7 3 視点における 4 直線の関係

2.6.3 trifocal tensor

次に, 空間中の 4 枚の平面を用いて trifocal tensor を導出する. 今, 図 2.7 のように 3 台のカメラが存在するとし, これら 3 台のカメラのカメラ行列を $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$ とする. ある 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ のこれらのカメラにおける投影像をそれぞれ $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ とし, カメラ行列 $\mathbf{P}'$, $\mathbf{P}''$ の 2 台のカメラに $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ を通る任意の直線 $\mathbf{l}'$, $\mathbf{l}''$ が得られているとする. またカメラ行列 $\mathbf{P}$ のカメラに $\mathbf{x}$ を通る任意の直線 $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{l}^2$ が得られているとする. これら 4 本の直線 $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{l}^2$, $\mathbf{l}'$, $\mathbf{l}''$ から逆射影された平面 $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}''$ が図 2.7 のように 3 次元空間中の 1 点 $\mathbf{X}$ で交わるためには, 以下に示す条件を満たす必要がある.

$$\det\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{S}^1 & \mathbf{S}^2 & \mathbf{S}' & \mathbf{S}'' \end{array}\right] = 0 \tag{2.84}$$

これらの 4 平面 $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}''$ は画像中の 4 直線 $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{l}^2$, $\mathbf{l}'$, $\mathbf{l}''$ を逆射影したものであったので, 式 (2.84) は以下のように書き換えることができる.

$$\det\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{P}^\top\mathbf{l}^1 & \mathbf{P}^\top\mathbf{l}^2 & \mathbf{P}'^\top\mathbf{l}' & \mathbf{P}''^\top\mathbf{l}'' \end{array}\right] = 0 \tag{2.85}$$

4 視点幾何と同様にこの式をテンソル表記して整理すると, 以下に示すような 4 直線に関する拘束式が得られる.

$$l^1_p l^2_q l'_r l''_s \epsilon^{abcd} P^p_a P^q_b P'^r_c P''^s_d = 0 \tag{2.86}$$

式 (2.86) においてカメラ $\mathbf{P}$ の画像中の直線 $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{l}^2$ に注目すると, これらの直線は点 $\mathbf{x}$ で交差する. ここで, 2 本の直線の交差は外積を用いて以下のように表すことができる.

$$x^i = \epsilon^{ipq} l^1_p l^2_q \tag{2.87}$$

従って, 式 (2.86) にスカラー $\epsilon^{ipq}\epsilon_{ipq}$ をかけると, 以下に示すようにまとめることができる.

$$x^i l'_r l''_s \epsilon_{ipq} \epsilon^{abcd} P^p_a P^q_b P'^r_c P''^s_d = 0 \tag{2.88}$$

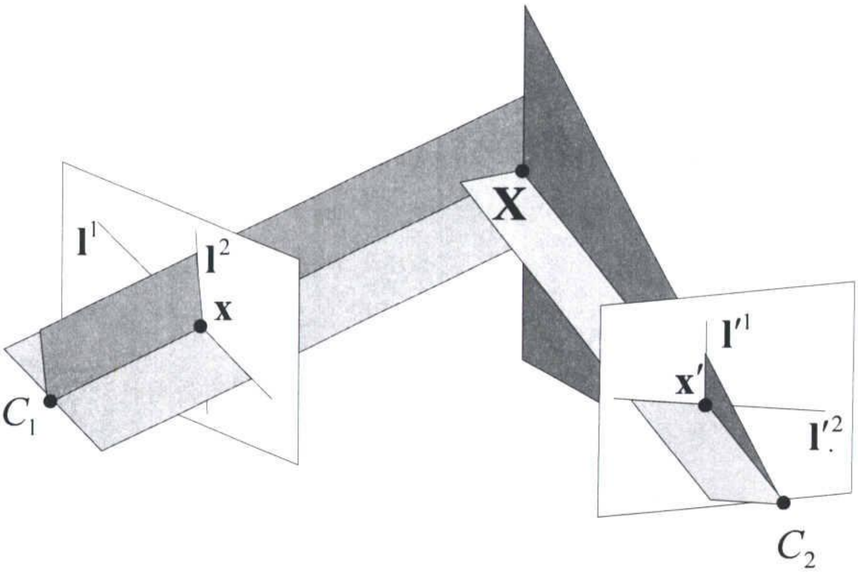


図 2.8 2 視点における 4 直線の関係

ここで，点および直線以外の部分を以下のようにおくことにする．

$$\mathcal{T}_i^{rs} = \epsilon_{ipq}\epsilon^{abcd}P_a^pP_b^qP_c'^rP_d''^s \tag{2.89}$$

すると，以下のような 3 つのカメラ画像中の点と直線と直線との間で成り立つ拘束式が得られる．

$$x^il_r'l_s''\mathcal{T}_i^{rs} = 0 \tag{2.90}$$

このとき, 式 (2.90) は trifocal tensor における式 (2.62) の関係と一致していることが分かる．

2.6.4 bifocal tensor

次に, 空間中の 4 枚の平面を用いて bifocal tensor を導出する．今, 図 2.8 のように 2 台のカメラが存在するとし, これら 2 台のカメラのカメラ行列を $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ とする．ある 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ のこれらのカメラにおける投影像をそれぞれ $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ とし, カメラ行列 $\mathbf{P}$ のカメラに $\mathbf{x}$ を通る任意の 2 直線 $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{l}^2$ が, カメラ行列 $\mathbf{P}'$ のカメラに $\mathbf{x}'$ を通る任意の 2 直線 $\mathbf{l}'^1$, $\mathbf{l}'^2$ が得られているとする．これら 4 本の直線 $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{l}^2$, $\mathbf{l}'^1$, $\mathbf{l}'^2$ から逆射影された平面 $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}'^1$, $\mathbf{S}'^2$ が図 2.8 のように 3 次元空間中の 1 点 $\mathbf{X}$ で交わるためには, 以下に示す条件を満たす必要がある．

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{S}^1 & \mathbf{S}^2 & \mathbf{S}'^1 & \mathbf{S}'^2 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.91}$$

これらの 4 平面 $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{S}'^1$, $\mathbf{S}'^2$ は画像中の 4 直線 $\mathbf{l}^1$, $\mathbf{l}^2$, $\mathbf{l}'^1$, $\mathbf{l}'^2$ を逆射影したものであったので，式 (2.91) は以下のように書き換えることができる．

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{P}^\top\mathbf{l}^1 & \mathbf{P}^\top\mathbf{l}^2 & \mathbf{P}'^\top\mathbf{l}'^1 & \mathbf{P}'^\top\mathbf{l}'^2 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.92}$$

先と同様にこの式をテンソル表記して整理すると，以下に示すような4直線に関する式が得られる．

$$l_p^1 l_q^2 l_r'^1 l_s'^2 \epsilon^{abcd} P_a^p P_b^q P_c'^r P_d'^s = 0 \tag{2.93}$$

ここで，3視点のときと同様，2直線の交差を考えると，画像中の直線 $\mathbf{l}^1$ と直線 $\mathbf{l}^2$ は点 $\mathbf{x}$ で交差し，画像中の直線 $\mathbf{l}'^1$ と直線 $\mathbf{l}'^2$ は点 $\mathbf{x}'$ で交差することから，以下の式が成り立つ．

$$x^i = \epsilon^{ipq} l_p^1 l_q^2 \tag{2.94}$$

$$x'^k = \epsilon^{krs} l_r'^1 l_s'^2 \tag{2.95}$$

式 (2.95) より，式 (2.93) にスカラー $\epsilon^{ipq}\epsilon_{ipq}$，$\epsilon^{krs}\epsilon_{krs}$ をかけることにより，以下のように書き換えることができる．

$$x^i x'^k \epsilon_{ipq} \epsilon_{krs} \epsilon^{abcd} P_a^p P_b^q P_c'^r P_d''^s = 0 \tag{2.96}$$

ここで，点以外の部分を以下のようにおくことにする．

$$\mathcal{F}_{ki} = \epsilon_{ipq} \epsilon_{krs} \epsilon^{abcd} P_a^p P_b^q P_c'^r P_d''^s \tag{2.97}$$

すると，以下のような2つのカメラ画像中の対応点の間で成り立つ拘束式が得られる．

$$x^i x'^k \mathcal{F}_{ki} = 0 \tag{2.98}$$

このとき, 式 (2.98) は bifocal tensor における式 (2.54) の関係と一致していることが分かる．

以上より, 多視点幾何における基本的な幾何学的特性は, 空間中の4枚の平面の交差によって表されていることが分かる．次章以降では，この多視点幾何理論を一般の次元に拡張した多視点幾何理論について説明する．

第3章

高次元空間から画像空間への投影に基づく多視点幾何

前章では従来の多視点幾何について述べた．従来の多視点幾何の研究では，3次元空間から2次元画像への投影を考えていた．この結果, 従来の多視点幾何を求める際に, 十分な数の対応点が全てのカメラで得られている必要があり，基本的には静止した物体を静止したカメラで投影した場合に成り立つ多視点幾何であった．

本章では，3次元空間よりも高い次元の空間を考え，このような高次元空間から画像への投影を考えることで，運動するカメラにより運動する物体を観測した場合において成り立つ多視点幾何を定義する．さらに，このような多視点幾何を用いることで運動するレンジセンサから得られたレンジデータの歪みを補正する方法を提案する．特に，カメラモデルとして，アフィンカメラを仮定した場合と，射影カメラを仮定した場合の2通りの方法を提案する．

3.1 4次元空間から3次元空間へのアフィン投影に関するエピポーラ幾何

本節では4次元空間から3次元空間へのアフィン投影に基づく多視点幾何について述べる．ここでは，特に2視点幾何について詳しく説明するとともに多視点幾何により形状を復元する手法について述べる．このようなアフィン投影を考えることにより, 3次元空間中において運動するカメラを, 4次元空間中の静止したカメラとして扱うことが可能となる. 本節で述べる多視点幾何は第3.2節において移動レンジセンサの歪んだ計測結果を補正する技術に応用する．

3.1.1 4次元空間から3次元空間へのアフィン投影

今, 4次元空間中の点から3次元空間中の点へのアフィン投影を行うアフィンカメラを考える．これは通常の3次元から2次元へのアフィンカメラを4次元から3次元の投影に

拡張したものなので，これを拡張アフィンカメラと呼ぶことにする．4 次元空間中の点を斉次座標を用いて $\mathbf{W} = [W^1, W^2, W^3, W^4, W^5]^\top$．と表し，この $\mathbf{W}$ が 3 次元の時空間中の点を斉次座標で表した $\mathbf{w} = [w^1, w^2, w^3, w^4]^\top$ へと投影されるとする．このとき $\mathbf{W}$ と $\mathbf{w}$ との関係は以下に記述する拡張アフィンカメラによる投影として表すことができる．

$$\mathbf{w} \sim \mathbf{QW} \tag{3.1}$$

$(\sim)$ は定数倍を除いて等しいという同値関係を表している．また，$\mathbf{Q}$ はカメラ行列であり，次のような 4×5 行列で表せる．

$$.\,\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

式 (3.2) より，拡張アフィンカメラ $\mathbf{Q}$ は 15 自由度であることがわかる．次節からは，この拡張アフィンカメラが複数台存在する場合における多視点幾何について考える．

3.1.2 4 次元空間から 3 次元空間へのアフィン投影に関するエピポーラ幾何

次に，2 台の拡張アフィンカメラによるエピポーラ幾何について詳しく述べる．今，4 次元空間中の点が N 点存在するとき，これらの点が式 (3.2) で定義される 2 台の拡張アフィンカメラに投影されているとする．2 台の拡張アフィンカメラが存在するとき，これらのカメラが成す 2 視点幾何は 10 自由度を持つ．これは，各拡張アフィンカメラは前節で述べた通り 15 自由度を持つが，これらのカメラが 20 自由度の同一の 4 次元アフィン空間中に存在するという拘束条件があるためである．一方，N 個の 4 次元空間中の点は $4N$ 自由度を持ち，N ペアの 3 次元空間中の対応点は $6N$ 自由度を持つ．そのため，3 次元画像中の対応点 N 点から 4 次元空間での全ての幾何情報を計算するためには以下に示す条件を満たす必要がある．

$$6N \geq 10 + 4N \tag{3.3}$$

式 (3.3) より，画像中に対応点が 5 点以上あれば拡張アフィンカメラの 2 視点幾何を決定できることがわかる．今，2 台の拡張アフィンカメラ行列をそれぞれ $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ とする．4 次元空間中の点 $\mathbf{W}$ の $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ による投影像を $\mathbf{w} = [w^1, w^2, w^3, w^4]^\top$, $\mathbf{w}' = [w'^1, w'^2, w'^3, w^4]^\top$ とすると，このとき 2 台のカメラの投影関係は式 (3.1) を展開して整理することにより，以

下のように表すことができる.

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{a}^1 & w^1 & 0 \\ \mathbf{a}^2 & w^2 & 0 \\ \mathbf{a}^3 & w^3 & 0 \\ \mathbf{a}^4 & w^4 & 0 \\ \hline \mathbf{b}^1 & 0 & w'^1 \\ \mathbf{b}^2 & 0 & w'^2 \\ \mathbf{b}^3 & 0 & w'^3 \\ \mathbf{b}^4 & 0 & w'^4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ k \\ k' \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

ここで $\mathbf{a}^i$ はカメラ行列 $\mathbf{Q}$ の i 行目 $(i=1,\ldots,4)$, $\mathbf{b}^i$ はカメラ行列 $\mathbf{Q}'$ の i 行目 $(i=1,\ldots,4)$ を表す. 式 (3.4) の左端の行列を $\mathbf{M}$ とすると, $\mathbf{M}$ は 8×7 の行列となる. また, この $\mathbf{M}$ の 7×7 の正方部分行列を $\mathbf{M}'$ とする. このとき, 式 (3.4) はゼロベクトルでない解を持つため, 行列 $\mathbf{M}'$ のランクは 6 以下となり, その行列式は 0 となる. $\mathbf{M}'$ を構成するには, 一つのカメラ行列から 4 行, もう一つのカメラから 3 行を取り出す場合が考えられる. この行列式 $\det \mathbf{M}' = 0$ を展開し, 整理しなおすと以下に示す拡張カメラに関する bilinear 拘束が得られる.

$$w^i\ w'^j \epsilon_{jpqr} \mathcal{F}_i^{pq} = 0_r \tag{3.5}$$

式 (3.5) では, どの添え字も通常の bilinear 拘束とは異なり 1 から 4 までの値を取る. $\mathcal{F}_i^{pq}$ は拡張カメラによる bifocal tensor であり, 次の式のように表すことができる.

$$\mathcal{F}_i^{pq} = \epsilon_{lmni} \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}^l \\ \mathbf{a}^m \\ \mathbf{a}^n \\ \mathbf{b}^p \\ \mathbf{b}^q \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

ここで, ϵ_{ijkl} は i,j,k,l から $1,2,3,4$ への置換が偶置換であれば 1, 奇置換であれば -1, それ以外であれば 0 の値を取るテンソルである. bifocal tensor $\mathcal{F}_i^{pq}$ は $4\times 4\times 4$ の 3 階のテンソルであり, 64 の要素を持つ. ここで拡張カメラが式 (3.2) に示すアフィンカメラである場合, $\mathcal{F}_i^{pq}$ 中の 34 の要素が 0 となる. またこの時, $\mathcal{F}_i^{12} = -\mathcal{F}_i^{21}$, $\mathcal{F}_i^{13} = -\mathcal{F}_i^{31}$, $\mathcal{F}_i^{23} = -\mathcal{F}_i^{32}$, $\mathcal{F}_4^{14} = -\mathcal{F}_4^{41}$, $\mathcal{F}_4^{24} = -\mathcal{F}_4^{42}$, $\mathcal{F}_4^{34} = -\mathcal{F}_4^{43}$ となるため, 定数倍の不定性を除いた $\mathcal{F}_i^{pq}$ の未知数は 14 となる. 一方, 式 (3.5) に示す bilinear 拘束からは 4 つの式が得られるが, この中で線形独立なものは 3 つである. これより, 画像中に対応点が 5 点があれば, 線形に $\mathcal{F}_i^{pq}$ を計算可能であることがわかる.

3.1.3 運動するカメラ間における多視点幾何

次に前節で述べた 4 次元空間から 3 次元空間への拡張アフィンカメラによる投影に関する多視点幾何が, 任意の並進運動を行うアフィンカメラ間の関係を記述できることを示

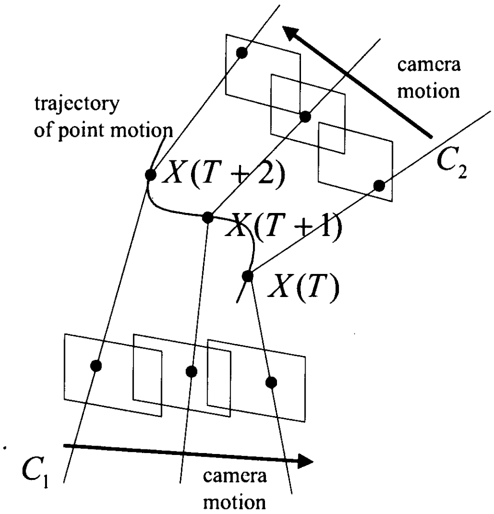


図 3.1 3 次元空間中を動く点とそれを投影する 2 つの並進アフィンカメラ

す.

今, 3 次元空間で点が運動しているとする. カメラが固定されている場合, 動画像中の運動点 1 点から従来の multifocal tensor を計算することができる. そのため, 計算した幾何を用いてカメラ間の相対位置の計算を行うことができる. これは, カメラの関係が変化しなければ, 時刻が異なる動画像中の運動点 1 点を同じ幾何を記述する対応点として扱えるためである. しかし, これらのカメラが独立に動くときには, 時刻毎でカメラの幾何関係は変化する. このため, 従来の多視点幾何では, 動画像中の運動点 1 点だけでは運動するカメラ間の幾何関係を計算することができなかった. これに対し, カメラの動きが図 3.1 に示すような並進のみであった場合, 拡張アフィンカメラの多視点幾何は動画像中の 1 点のみで計算可能であることを示す. 今, 図 3.1 のように実空間における 3 次元点 $\widetilde{\mathbf{X}} = [X, Y, Z]^\top$ が, X, Y, Z 軸において単位時間に $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ で並進移動するカメラに $\widetilde{\mathbf{x}} = [x, y]^\top$ として投影されているとすると, このとき $\widetilde{\mathbf{x}}$ と $\widetilde{\mathbf{X}}$ の間には以下に示すような関係が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(T) - T\Delta X \\ Y(T) - T\Delta Y \\ Z(T) - T\Delta Z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

また, 実空間での運動点は, 画像平面と時間がなす 3 次元時空間では, 点 $\widetilde{\mathbf{w}} = [x, y, t]^\top$ として観測される. 通常, サンプリング間隔はカメラ毎で異なるため, 投影後の時刻 t は, 元の時刻 T のアフィン変換と考えられる. 従って時刻 t は α, β を定数とすると, $t = \alpha T + \beta$ として表される. そのため, それぞれのカメラでサンプリング間隔が異なっていたとしても, その差は時刻のアフィン投影として記述することができる. また, 式 (3.7) は $\widetilde{\mathbf{X}}$ に対し

て時刻 T を加えた $\widetilde{\mathbf{W}}=[X,Y,Z,T]^\top$ を用いると, 以下のように変形することができる.

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \\ Z(T) \\ T \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -a_{11}\Delta X - a_{12}\Delta Y - a_{13}\Delta Z & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & -a_{21}\Delta X - a_{22}\Delta Y - a_{23}\Delta Z & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

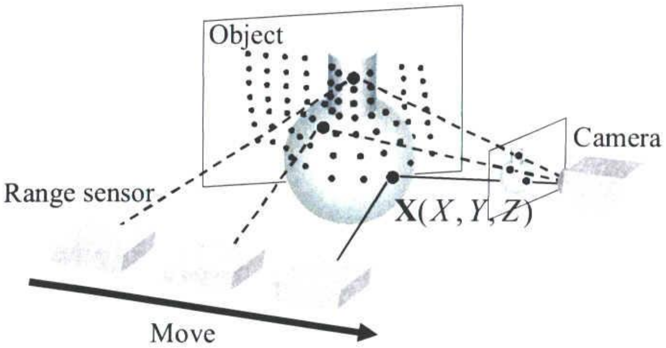
ここで, 並進運動はそれぞれのカメラにおいて等速であるため, $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ はそれぞれのカメラにおいて一定である. すなわち, 式 (3.9) のカメラ行列中の要素は全て定数となる. ただし運動の方向と大きさはそれぞれのカメラで任意で良いため, $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ の値はそれぞれのカメラで異なる. よって式 (3.8) より, 並進運動を行う複数のカメラによる非剛体運動点の投影は, 式 (3.1) に示す拡張アフィンカメラによる投影として表すことができることがわかる. また, 従来の多視点幾何では, 運動点 1 点のみからの計算が不可能であったのに対し, 拡張アフィンカメラによる多視点幾何は時間軸を持つため, 異なる時刻の点であっても, それらの点は全て同一の幾何を記述する対応点となる. そのため運動点 1 点が複数時刻で撮影されていれば, 拡張アフィンカメラ間の幾何学的関係を計算することができる.

3.2 移動レンジセンサの 3 次元データの補正

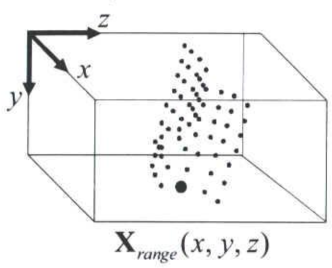
本節では前節までで述べた 4 次元空間から 3 次元空間への投影の元で成り立つ多視点幾何を用いることで, 移動レンジセンサの 3 次元データを補正する方法を提案する. 大規模な対象の三次元形状を計測する場合, 移動するレンジセンサによる計測は最も効果的な手法の一つである. time-of-flight 方式のレンジセンサでは, レーザーはラスタスキャンを行うため, 3 次元空間中では照射点 1 点が図 3.2(a) のように走査することになる. このとき, 図 3.2(a) のようにレンジセンサが移動した場合, 得られる 3 次元形状は計測処理中にレンジセンサが移動するため大きく歪んだものになる. 例えば, 図 3.5(b) の 3 次元物体を固定レンジセンサで計測したすると, 図 3.6(a) のような結果が得られるが, 移動レンジセンサで計測すると, 図 3.6(b) のように計測結果が歪む. 本節では, 第 3.1 節で述べた多視点幾何を用いることで, このような計測結果の歪みを補正する方法を提案する.

3.2.1 レンジセンサのスキャンとカメラ画像の関係

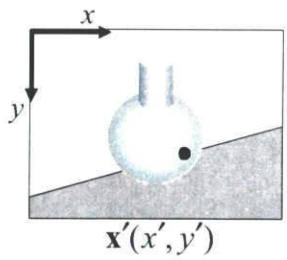
以降では, レンジセンサの他にカメラを 1 台用いて, 先に述べた 4 次元空間から 3 次元空間への投影に基づく多視点幾何により, この歪んだ形状を補正する手法について説明していく.



(a) 3D Scene



(b) Range image

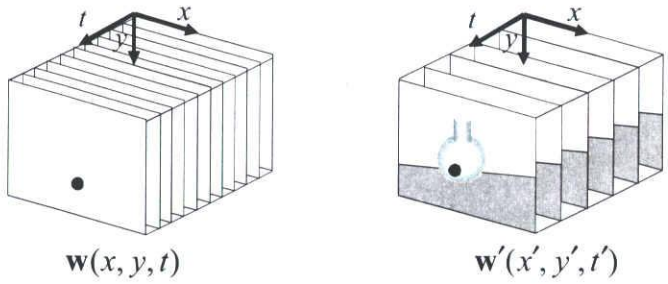


(c) Video image

図 3.2 移動レンジセンサ距離画像と固定カメラ画像

ここで，レーザーとカメラの間の対応点について考える．今，レンジセンサはラスタスキャン順にレーザーを照射し，距離画像の各ピクセルでの距離値を計測したときの時刻 t を記憶しておくことにする．同様にカメラもレーザー照射点を観測した時刻 t' を記憶しておく．しかし，通常これらレンジセンサとカメラのサンプリング間隔は異なっているため，同時刻のレーザー照射点 $\mathbf{X}$ をレンジセンサとカメラで観測したとしても，計測されたそれぞれの機器における時刻 t, t' は異なるものになる．また，レンジセンサはレーザーを照射する投光装置であるため，レンジセンサの距離画像とカメラ画像との対応点はレーザーの照射点 1 点となる．更に，レーザー照射点はラスタスキャンを行うため，対象物体が剛体であっても，照射点 $\mathbf{X}$ は物体の表面上を時刻毎に移動し，物体表面の照射点 $\mathbf{X}$ とレンジセンサ，カメラの幾何学的関係は時刻毎に常に変化する．それに対して、従来の多視点幾何は静止した点を静止したカメラで撮影するなどの物体とカメラの幾何学的関係が変化しないような静的な環境でしか扱うことができない．そのためこのように対応点 1 点のみが運動を行う場合，従来の多視点幾何を用いることはできない．

今，運動するスキャン型レンジセンサが計測対象にレーザを照射し，計測を行っているとする．そのとき計測対象物体の表面上のレーザ照射点は時刻とともにその位置が変わるため，3 次元空間中において運動点となる．本手法では，この運動点を 3 次元空間中の点ではなく，時刻 T を含めた 4 次元時空間中の 1 点として考える．ここで，図 3.2(b) のレンジ



(a) 3D Space-Time of Range image

(b) 3D Space-Time of Video image

図 3.3 レンジ画像とカメラ画像の 3 次元時空間

センサの距離画像 $\mathbf{X}_{range}$ 中の x, y 座標を取り出し，これを $\mathbf{x}$ とする．このとき，3 次元空間中の点を 4 次元時空間中の 1 点として考えたのと同様に $\mathbf{x}$ と図 3.2(c) のカメラ画像 $\mathbf{x}'$ も画像中の x, y 座標に時刻 t を加えた 3 次元時空間中の点として考える．ここで最初に述べたレンジセンサとカメラの計測時刻 t, t' を用いると，レンジセンサの照射点 $\mathbf{X}$ とその投影点 $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ は以下のような時空間中の点として考えることができる．

$$\widetilde{\mathbf{W}} = [X, Y, Z, T]^\top \tag{3.10}$$

$$\widetilde{\mathbf{w}} = [x, y, t]^\top \tag{3.11}$$

$$\widetilde{\mathbf{w}}' = [x', y', t']^\top \tag{3.12}$$

ただし，$(\tilde{\ })$ は非斉次座標，すなわち通常のユークリッド座標であることを示している．以降では，このように非斉次座標には $(\tilde{\ })$ を付け，斉次座標には何も付けずに表すことにする．

このように，レンジセンサの照射点とその投影像を時空間中の点と考えることで，これらの点から先ほどの bifocal tensor$\mathcal{F}_i^{pq}$ を計算することができる．以降では，このような $\mathcal{F}_i^{pq}$ により，形状を補正する手法について述べる．このとき，多視点幾何を用いて形状を復元する必要があるため，以降では拡張アフィンカメラにおける多視点幾何を用いたカメラ行列の復元手法について詳しく述べることにする．

3.2.2 拡張カメラ行列の復元

以下では前節までで求めた多視点幾何を用いたカメラ行列の復元手法について述べる．はじめに対応点 $\mathbf{w}, \mathbf{w}'_\pi$ とそのエピポーラ線の関係を用いて bifocal tensor$\mathcal{F}_i^{pq}$ から 4×4 のホモグラフィー行列 $\mathbf{H}_\pi$ を導出し，次に multilinear 拘束式からエピポール $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ を導出する．次に $\mathbf{H}_\pi$ と $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ より拡張カメラ行列を復元する．

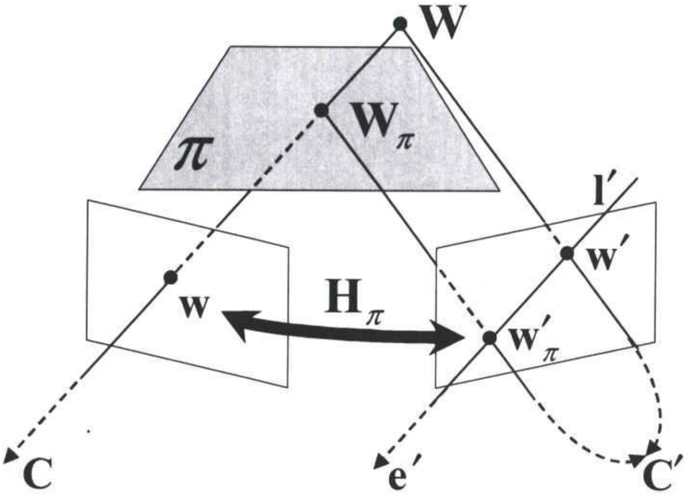


図 3.4 3 次元空間における平面を介した点の変換．本研究ではこの図を 1 次元拡張した 4 次元空間における超平面を介した点の変換を考える．

(1) $\mathcal{F}_i^{pq}$ からのホモグラフィー $\mathbf{H}_\pi$ の導出

ある画像中の点からもう一方の画像中のエピポーラ線への変換は 2 通りの方法で導出することができる．第 1 の方法は，点 $\mathbf{w}$ が $\mathbf{w}'_\pi$ に変換された場合，必ずエピポーラ線 $\mathbf{l}'$ 上に乗るということを用いる．第 2 の方法は，エピポーラ線 $\mathbf{l}'$ は対応点 $\mathbf{w}'_\pi$ とエピポール $\mathbf{e}'$ を結んだものであるということを用いる．

今，図 3.4 に示すように 4 次元空間中において 2 つのカメラ視点のどちらの視点とも交差しない 3 次元超平面 π を考える．そして，第 1 カメラと対応点 $\mathbf{w}$ を結ぶ線がこの超平面 π と $\mathbf{W}_\pi$ で交差するとする．点 $\mathbf{W}_\pi$ は第 2 カメラ画像に点 $\mathbf{w}'_\pi$ として投影される．これは点 $\mathbf{w}$ から点 $\mathbf{w}'_\pi$ への超平面 π を介したホモグラフィー $\mathbf{H}_\pi$ と考えることができる．そのため，第 2 カメラの画像点 $\mathbf{w}'_\pi$ は第 1 カメラの画像点 $\mathbf{w}$ と 4×4 のホモグラフィー行列 $\mathbf{H}_\pi$ を用いて $\mathbf{w}'_\pi = \mathbf{H}_\pi \mathbf{w}$ と表すことができる．この関係はテンソル記法を用いて以下のように表すことができる．

$$w'^{l}_{\pi} = H_{\pi}{}^{l}_{i} w^{i} \tag{3.13}$$

また，$\mathbf{W}_\pi$ は $\mathbf{w}$ に対応する視線ベクトル上にあるため，$\mathbf{w}'_\pi$ は対応するエピポーラ線 $\mathbf{l}'$ 上に存在する．従って，エピポーラ線 $\mathbf{l}'$ は点 $\mathbf{w}'_\pi$ とエピポール $\mathbf{e}'$ を通る直線であると解釈することができ，次式が成り立つ．

$$l'_{jr} = \epsilon_{jklr}\, e'^{k}\, w'^{\,l}_{\pi} \tag{3.14}$$

また，エピポーラ線 $\mathbf{l}'$ は点 $\mathbf{w}$ に対応する点の集合であるから次式が成り立つ．

$$l'_{jr} = \epsilon_{jpqr} \mathcal{F}_i^{pq}\, w^{i} \tag{3.15}$$

従って, 式 (3.13), 式 (3.14) および式 (3.15) より点 $\mathbf{w}$ と点 $\mathbf{w}'_\pi$ 間のホモグラフィー $H_{\pi}{}_i^l$ が以下のように $\mathcal{F}_i^{pq}$ を用いて表せることがわかる.

$$H_{\pi}{}_i^l = \epsilon^{jklr}\epsilon_{jpqr}\ e'_k\mathcal{F}_i^{pq} \tag{3.16}$$

(2) $\mathcal{F}_i^{pq}$ からのエピポール e, e′ の復元

次に $\mathcal{F}_i^{pq}$ からエピポール $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ を計算する方法について述べる. 式 (3.5) において, 第 2 画像中のどのような点 $\mathbf{w}'$ に対しても式 (3.5) が成り立つような第 2 画像中の点 $\mathbf{w}$ を考えると, これは第 1 画像中のエピポール $\mathbf{e}$ に他ならない. 従って, 第 1 画像中のエピポール $\mathbf{e}$ と bifocal tensor$\mathcal{F}_i^{pq}$ との間には以下の式が成り立つことがわかる.

$$e^i\mathcal{F}_i^{pq} = 0^{pq} \tag{3.17}$$

同様に考えれば, 第 2 画像中のエピポール $\mathbf{e}'$ と $\mathcal{F}_i^{pq}$ との間には次式の関係が成り立つことがわかる.

$$e'^j\epsilon_{jpqr}\mathcal{F}_i^{pq} = 0_{ri} \tag{3.18}$$

従って, 式 (3.17), (3.18) を用いることで bifocal tensor$\mathcal{F}_i^{pq}$ からエピポール $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ を計算することができる.

(3) $\mathcal{F}_i^{pq}$ からのカメラ行列 Q, Q′ の復元

次に $\mathcal{F}_i^{pq}$ からカメラ行列 $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ を復元する方法について説明する. 拡張アフィン投影で得られた画像のみの相対的な関係からなるため bifocal tenosr はアフィン変換の不定性を持つ. このことは bifocal tensor から計算されるカメラ行列が 4 次元アフィン変換の不定性を残した復元となることを示している. 2 視点からの復元の場合, 不定性を残しているため, 第 1 カメラを $\mathbf{Q}_p = [\mathbf{I} \mid \mathbf{0}]$ とおいた場合, 5.1 節で求めた $\mathbf{H}_\pi$ と 5.2 節で求めた $\mathbf{e}'$ を用いてそれぞれのカメラ行列は以下のように表すことができる.

$$\mathbf{Q}_p = [\mathbf{I} \mid \mathbf{0}] \tag{3.19}$$

$$\mathbf{Q}'_p = [\mathbf{H}_\pi \mid \mathbf{e}'] \tag{3.20}$$

ここで計算した拡張カメラ行列は 4 次元アフィン変換の不定性を残した復元となる. さらに, 本稿で定義した拡張投影は 4 次元時空間から 3 次元時空間への投影であるため, Z 軸方向の情報が失われ, X 軸, Y 軸, T 軸の情報は保存される. そのため, 4 次元時空間から 3 次元時空間へのアフィン投影は以下のように表すことができる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

一方，式(3.19)，(3.20)のカメラから復元を行った場合，次式の投影に基づいて $[X,Y,T,1,Z]^\top$ が復元されることから，復元結果は式(3.21)の投影に基づく復元結果 $[X,Y,Z,T,1]^\top$ とは異なることがわかる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ T \\ 1 \\ Z \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

そのため，$[X,Y,T,1,Z]^\top$ を $[X,Y,Z,T,1]^\top$ に変換する以下のホモグラフィー $\mathbf{H}$ を考える.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ T \\ 1 \\ Z \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

ここで，$\mathbf{H}$ は以下に示す 5×5 行列である.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

このホモグラフィー $\mathbf{H}$ を用いることにより拡張アフィンカメラのカメラ行列 $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ が以下の通り得られる.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_p \mathbf{H}^{-1} \tag{3.25}$$
$$\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}'_p \mathbf{H}^{-1} \tag{3.26}$$

このようにして求めた $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ を用いることにより，復元や形状補正を行うことができる.

3.2.3 レンジセンサからの歪んだ形状の補正

次に bifocal tensor から計算したカメラ行列 $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ を用いてレンジデータの形状を補正する手法について述べる.

本論文ではレンジセンサは計測処理中に移動することを仮定している, そのためレンジセンサの動きにより得られる形状は歪んだものになる. それにも関わらず, 提案した手法を用いることによりレンジセンサとカメラの拡張カメラ行列を復元することができる. 式(3.9)に示したように拡張カメラ行列はレンジセンサの移動量 $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ を含んでいる

ため，拡張カメラ行列から $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ を計算することができる．ただし，$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ に関して2つの拘束式しか得られないため，レンジセンサの移動の方向のみを計算することができる．これに対してレンジセンサの移動の大きさ $\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$ が既知であれば，$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ を不定性なく求めることができる．このように運動を計算した上で，前節で導出した拡張アフィンカメラ行列を用いて4次元空間中の点 $\mathbf{W} = [X, Y, Z, T, 1]^\top$ を復元する．ここで復元した $\mathbf{W}$ は正確な運動の情報を持つカメラ行列により復元された点であるため，復元結果はレンジセンサが運動していたとしても歪みのない正しい形状となる．このようにしてレンジセンサの運動が計算できれば，移動するレンジセンサから得られた3次元形状を正確に補正することができる．

3.2.4 bifocal tensorによるレンジセンサとカメラ間の対応点推定

本節では，bifocal tensor を用いてレンジセンサとカメラ間の対応点を推定する手法について説明する．第3.1.3節で述べたとおり，提案する多視点幾何を用いればサンプリング間隔が異なる場合でも，対応さえ取れていればカメラとレンジセンサの間の幾何学的な関係を求めることができる．しかし，通常レンジセンサとカメラの間ではテクスチャのような対応関係を求める手がかりを得ることはできない．そこで，本節では拡張多視点幾何における幾何学的整合性を用いてレンジセンサとカメラ間において対応点推定を行う方法を述べる．

今，サンプリング間隔が異なり，対応が未知な点 $\mathbf{w}$ と $\mathbf{w}'$ が得られているとする．このとき，投影像の時刻 t, t' は，元の時刻 T のアフィン変換であるため，未知の定数 α，β，α'，β' を用いて，$t = \alpha T + \beta$，$t' = \alpha' T + \beta'$ と表される．本論文では，正しい幾何学的な対応関係を得るために，式(3.15)のエピポーラ線 $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ と対応点 $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ の距離を用いる．ここで，N 組の対応点に関するエピポーラ線 $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ と対応点 $\mathbf{w}, \mathbf{w}'$ の距離を次式のように表すことにする．

$$E = \frac{1}{N}\Sigma_{i=1}^{N}\left\{d(w^i, l_i)^2 + d(w'^i, l'_i)^2\right\} \tag{3.27}$$

今，α_s, β_s を定数とし，以下のようなアフィン変換を考える．．

$$t'_s = \alpha_s t' + \beta_s \tag{3.28}$$

このとき，式(3.28)のように t' にアフィン変換をした時刻 t'_s と t の間で対応点を作成し，bifocal tensor 及びエピポーラ線を計算する．従来のエピポーラ幾何と同様に，拡張多視点幾何においても，対応点はその点に対応するエピポーラ線上に存在する．そのため，もし画像ノイズがなく，幾何学的に正しい対応が得られた場合には，式(3.27)の対応点とエピポーラ線の距離 E はゼロになる．このことを用いて，対応点の推定を行う．今，α_s, β_s は未知であるため，α_s,β_s を変化させて，距離 E を計算する．この距離 E が最小となる α_s, β_s のとき，幾何学的に最も対応が取れている点の組が得られていると考えることができる．そのため，このときの t_s と t からレンジセンサとカメラ間の対応点を決定する．

3.3 実験結果

本節では前節までに提案した手法を用いて実画像実験等を行った結果を示す．まず，提案法により移動するレンジセンサのデータが補正できることを示す．次に，シミュレーション実験によりレンジデータ補正精度と安定性を示す．

3.3.1 形状補正実験

まず，実画像を用いて移動するレンジセンサとカメラの間の拡張アフィンカメラに関する bifocal tensor を計算し，形状補正を行った結果を示す．今回の実験においてレンジセンサはカメラ (SONY DFW-VF500) とプロジェクタ (NEC LT20) を用いて作成した．図 3.5(a) は実験で用いた移動レンジセンサ，カメラ，計測対象の配置である．レンジセンサの移動には，電動ステージ (オリエンタルモーター EZS6DO85M-A) を用いた．図 3.5(b) は計測対象の形状を示している．カメラ $\mathbf{C}_c$ は固定されており，レンジセンサ $\mathbf{C}_r$ は計測中に矢印の方向へ移動する．また，図 3.6(a)，(b) はそれぞれ固定されたレンジセンサと移動するレンジセンサによる計測結果である．固定レンジセンサと移動レンジセンサの初期位置は同じである．このような移動レンジセンサで得られた 3 次元形状はセンサが運動しているため，図 3.6(b) に示す通り歪んだものになる．図 3.7 は固定カメラによってレンジセンサの照射点を撮影したものである．本実験では図 3.6(b) と図 3.7 の計測結果からそれぞれ時空間画像を作成した．図 3.8 (a), (b) は移動するレンジセンサによる時空間画像と固定カメラによる時空間画像である．拡張 bifocal tensor$\mathcal{F}_i^{pq}$ を計算するために用いた対応点 5 点を図 3.8 (a), (b) の黒点 (大) で示す．これらの対応点を用いて $\mathcal{F}_i^{pq}$ を計算し，その後，第 3.2.2 節に示した手法で拡張カメラ行列を計算した．更に拡張カメラ行列を用いてレンジセンサの移動量を計算し，歪んだ 3 次元形状を補正した．提案法により形状補正を行った結果を図 3.9(b) に示す．一方，図 3.9(a) は形状補正を行わなかった場合の 3 次元形状を示している．図 3.9(a) が大きく歪んでいるのに対して，図 3.9(b) の形状は図 3.5(b) の計測対象の形状にほぼ一致していることがわかる．この補正結果と固定レンジセンサで得られた形状を重ね合わせたものを図 3.10(a) に示す．また，その断面図を図 3.10(b) に示す．両図において，固定レンジセンサの計測結果は灰色の点，移動レンジセンサの計測結果は黒色の点で示してある．図 3.10(a)，(b) において計測結果が概ね一致していることから，提案法では運動するレンジセンサの運動を多視点幾何により計算可能であり，移動レンジセンサの計測形状を正しく補正できることがわかる．

3.3.2 シミュレーション実験

次に，シミュレーション実験により，提案法の精度や安定性を評価した結果を示す．図 3.11 は本シミュレーション実験における移動レンジセンサ，カメラ，対象物体の配置である．レンジセンサは $\mathbf{C}_r$ から $\mathbf{C}'_r$ に計測中に移動する．また，図 3.12(a)，(b) はそれぞれレンジセンサとカメラにおける時空間画像である．図 3.12(a)，(b) より，レンジセンサと

カメラ間でサンプリング間隔は異なっていることがわかる．次節以降では，この環境下で行った実験結果を示す．

(1) 精度評価

まず，提案法の精度評価を行った結果を示す．画像に標準偏差 1pixel のガウスノイズを印加し，ランダムに選んだ対応点を用いて求めた bifocal tensor から形状補正し，真の形状との平均距離を計算した．図 3.13 は対応点数を変えた場合における補正形状と真の形状との距離を示したグラフである．図 3.13 より，対応点数が増えるに従って，補正形状と真の形状との距離が小さくなっていることがわかる．この図より明らかなように，必要最低点数より多くの対応点を用いることで，精度が向上していることがわかる．また，本研究では時空間画像を用いているため，撮影時刻を増やすことで，対応点数を簡単に増やすことができる．

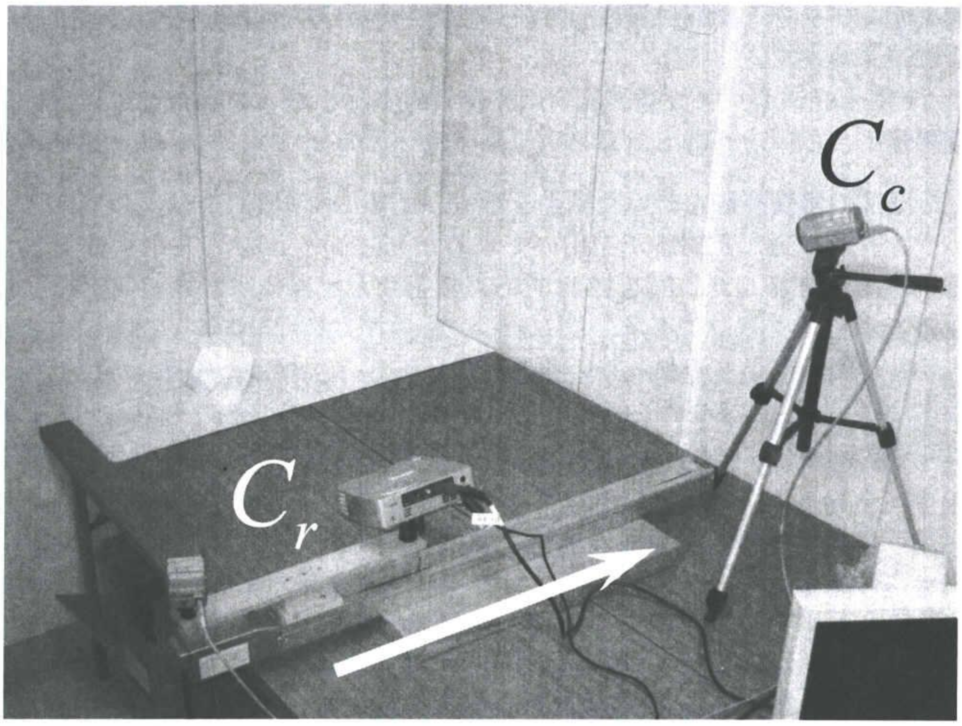
次に，カメラから計測対象までの距離を変化させた場合の計測精度への影響について実験を行った結果を示す．計測対象までの距離を変化させ，対応点 5 点を用いて bifocal tensor を計算し，形状補正を行った．図 3.14 はカメラから計測対象までの距離と計測精度の関係を示したグラフである．横軸は対象形状の奥行きとカメラから計測対象までの距離の比である．図 3.14 より，距離が大きくなるに従って，補正形状と真の形状との距離が小さくなっていることがわかる．これは本提案法において，アフィンカメラモデルを仮定しているためである．アフィンカメラモデルは透視カメラモデルの近似であり，カメラから物体の距離が十分大きい場合においては良い近似を与える．図 3.14 において，距離が大きくなるに従って誤差が減少するのはこのためである．

(2) 安定性評価

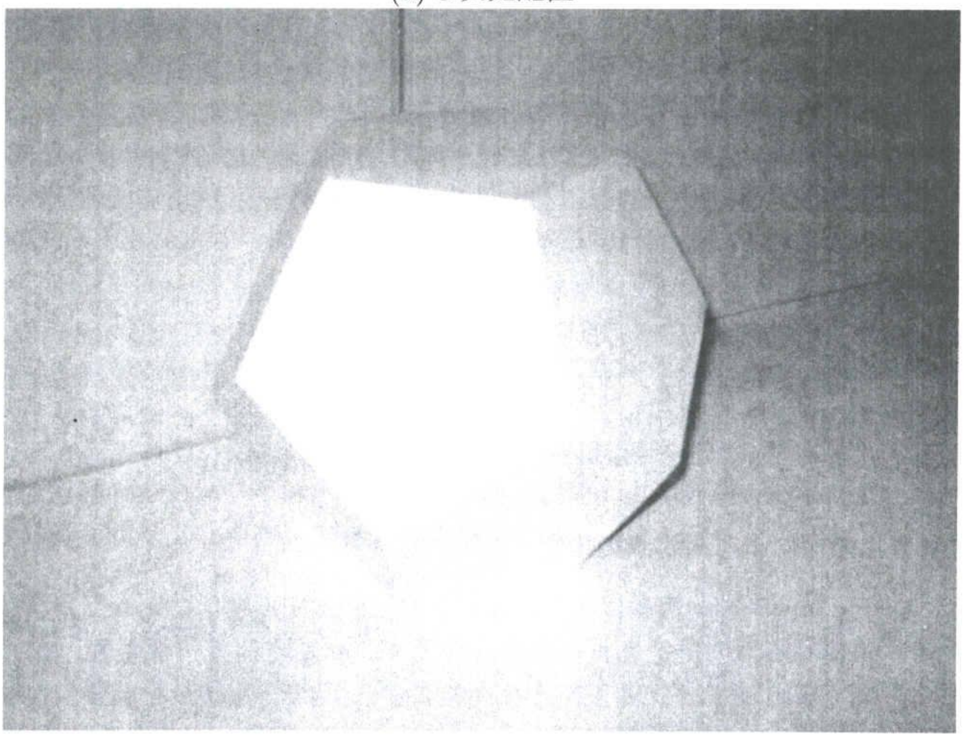
次に，移動レンジセンサを用いた形状補正の安定性について実験を行った結果を示す．画像に標準偏差 1pixel のガウスノイズを印加し，ランダムに選んだ対応点を用いて求めた bifocal tensor から形状補正し，3σ の不確定領域の体積を計算した．図 3.15 は対応点数と不確定領域の体積の関係を示したグラフである．図 3.15 より，対応点数が増えるに従って，不確定領域の体積が小さくなっていることがわかる．この図より明らかなように，必要最低点数より多くの対応点を用いることで，安定性も向上していることがわかる．

(3) 拡張多視点幾何による対応点の推定

最後に，シミュレーション実験により，提案した拡張多視点幾何により，レンジ画像とカメラ画像の間の対応点の推定を行った結果を示す．初期時刻を一致させ，式 (3.28) の β_s を固定し，α_s を変化させたときの対応点とエピポーラ線の距離 E を計算した結果を図 3.16 に示す．ここで，α_s の真値は 10 である．図 3.16 より，$\alpha_s = 10$ のときに最小であり，サンプリング間隔が異なり，対応が未知な画像から α_s を推定でき，この結果，対応点が推定できることがわかる．

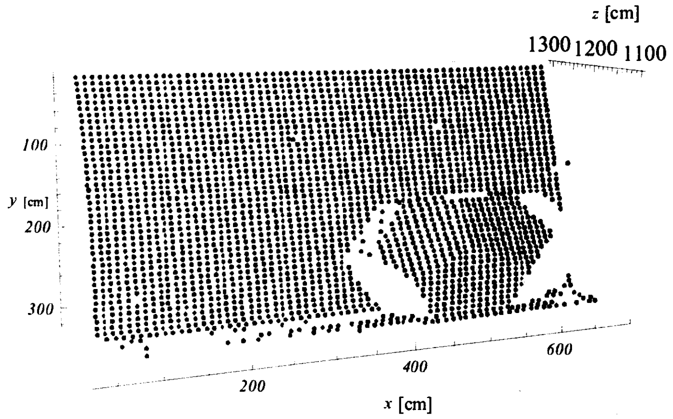


(a) 3 次元配置

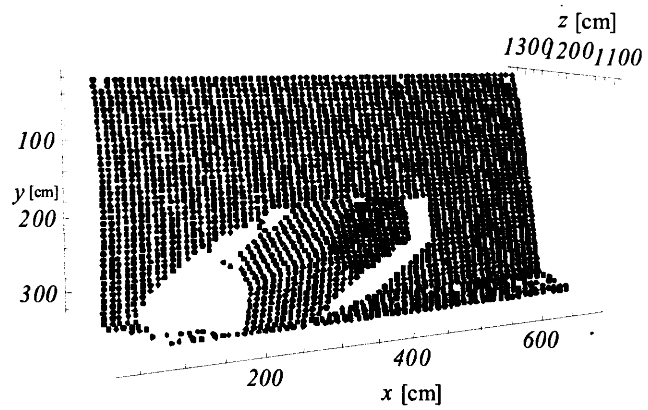


(b) 計測対象物体

図 3.5 実験環境 (3 次元空間中で並進運動するレンジセンサと固定カメラ) 図 (a) 中の $\mathbf{C}_r$ レンジセンサ, $\mathbf{C}_c$ はカメラを示す. 図 (b) は計測対象を示す.



(a) 固定レンジセンサの計測結果



(b) 移動レンジセンサの計測結果

図 3.6 固定レンジセンサと移動レンジセンサによる計測結果 (灰色：固定レンジセンサ，黒色：移動レンジセンサ)

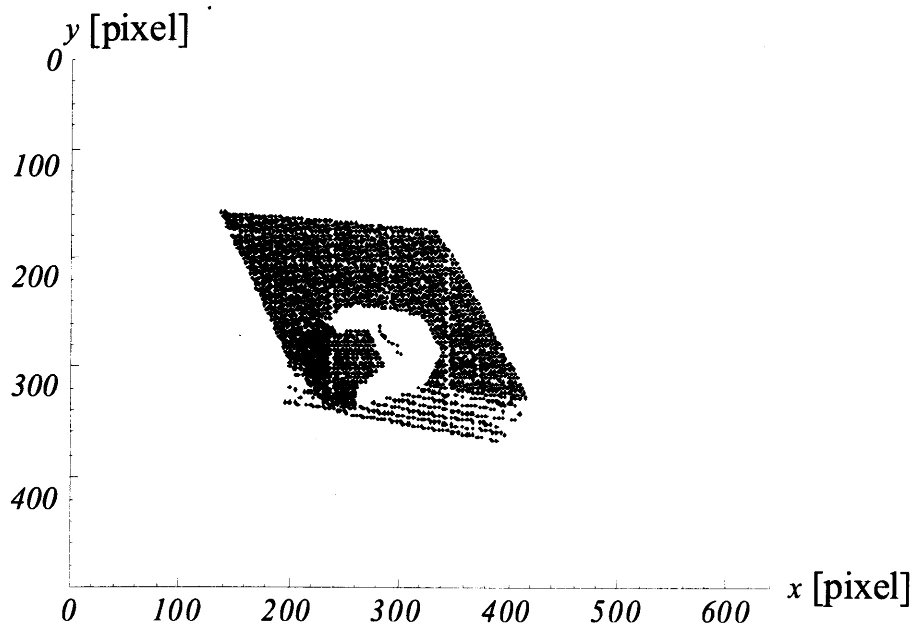
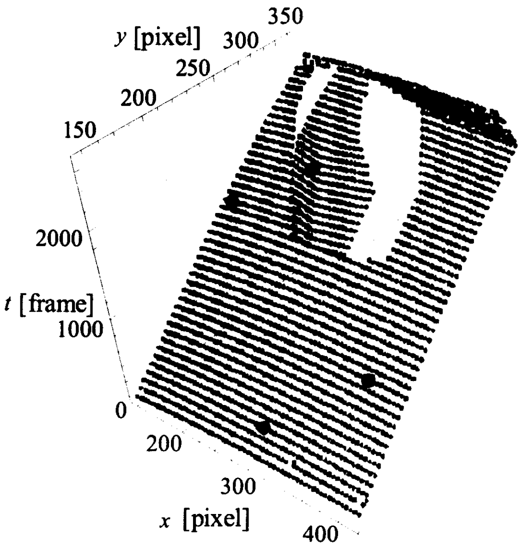
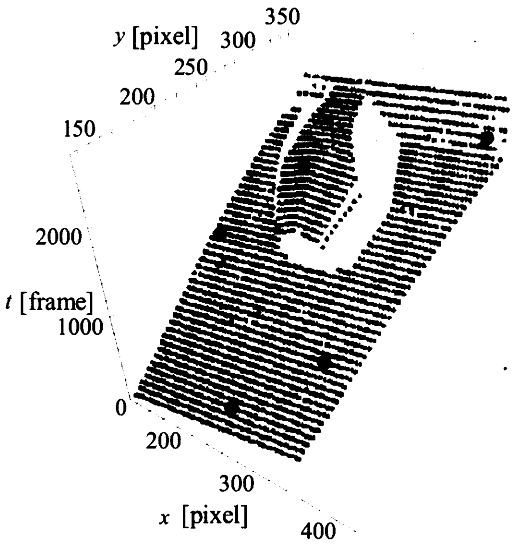


図 3.7 固定カメラによる計測結果

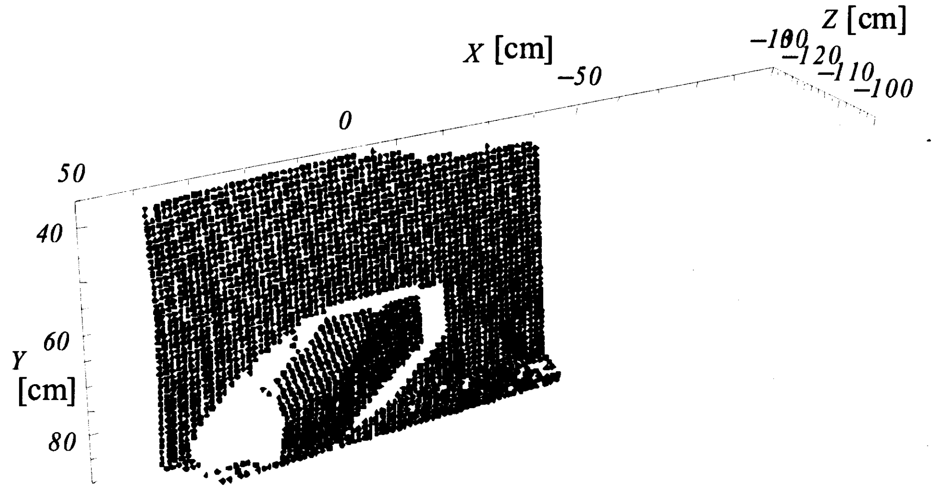


(a) レンジセンサ C_r による 3 次元時空間画像

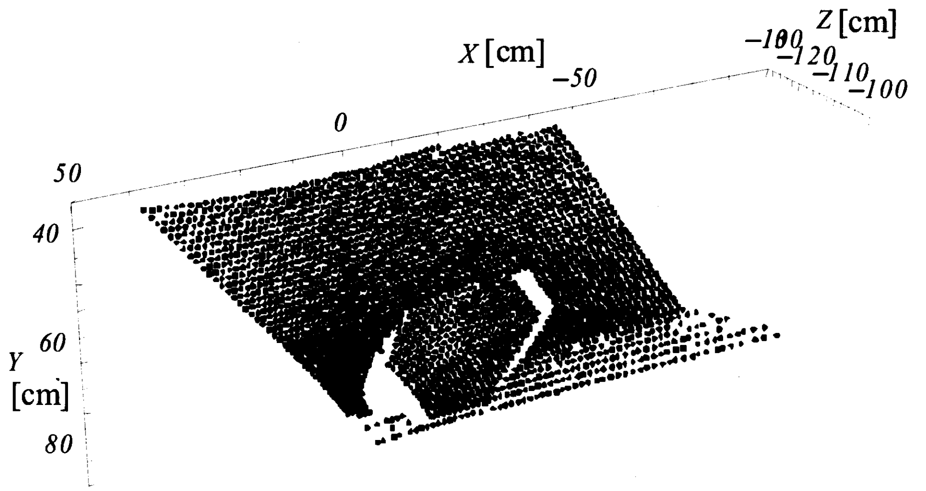


(b) カメラ C_c による 3 次元時空間画像

図 3.8 移動レンジセンサとカメラの時空間画像

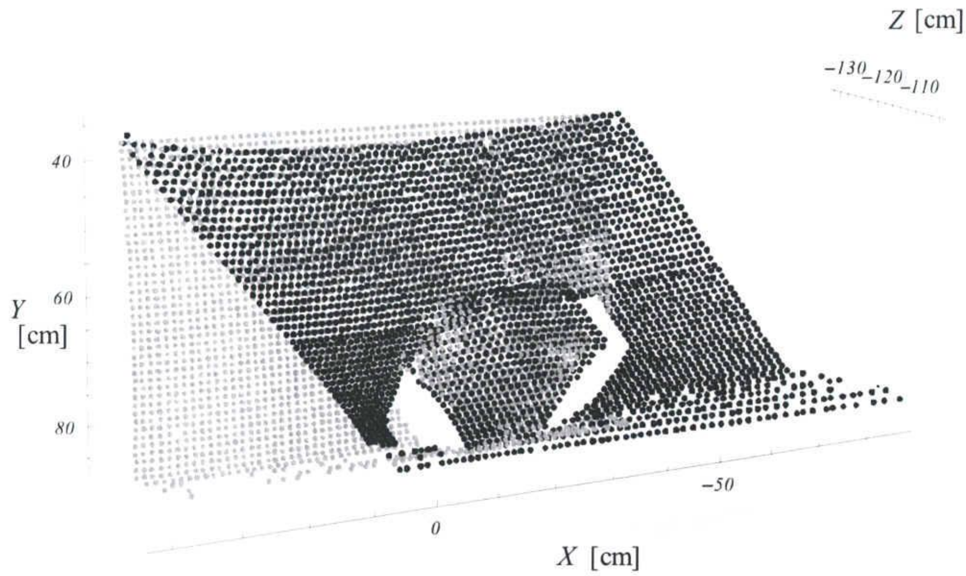


(a) 補正なし 3 次元形状

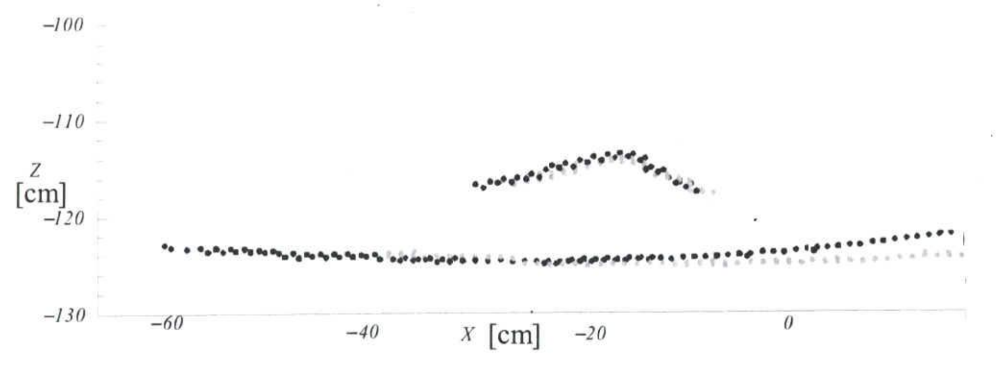


(b) 提案法による補正形状

図 3.9 移動レンジセンサの形状補正結果



(a) 提案法による補正結果 (黒色) と
固定レンジセンサの計測結果 (灰色)



(b) 提案法による補正結果 (黒色) と
固定レンジセンサの計測結果の断面図 (灰色)

図 3.10 補正形状の安定性

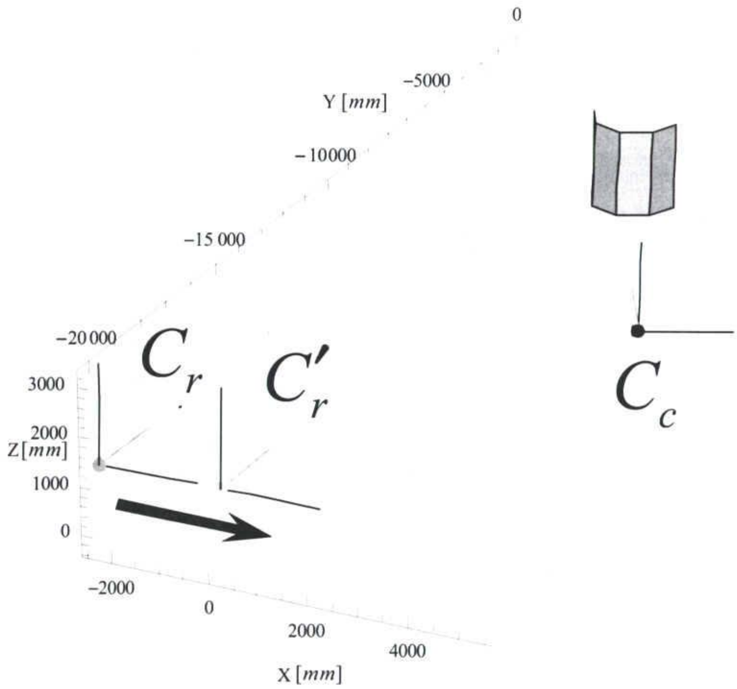
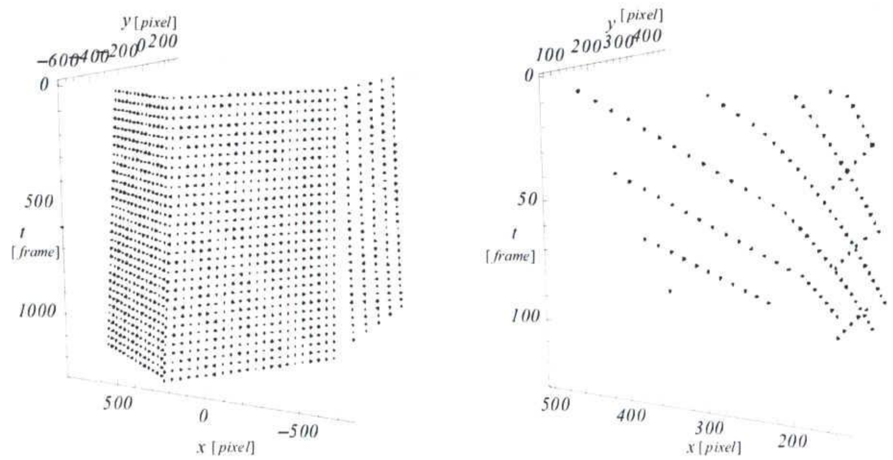


図 3.11 シミュレーション実験環境



(a) レンジセンサによる
3次元時空間画像

(b) カメラによる
3次元時空間画像

図 3.12 レンジ画像とカメラ画像の3次元時空間

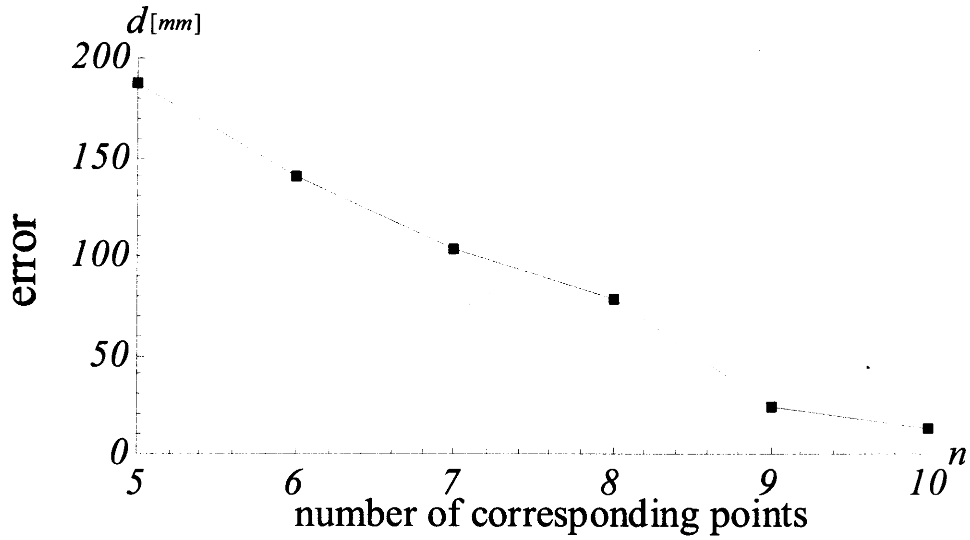


図 3.13 対応点数と補正形状の誤差の関係

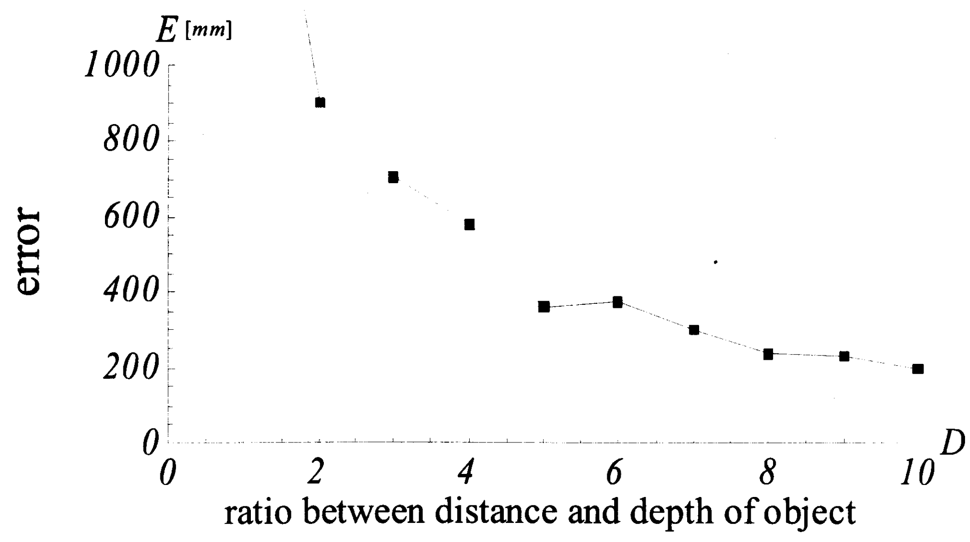


図 3.14 対象までの距離と補正形状の誤差の関係

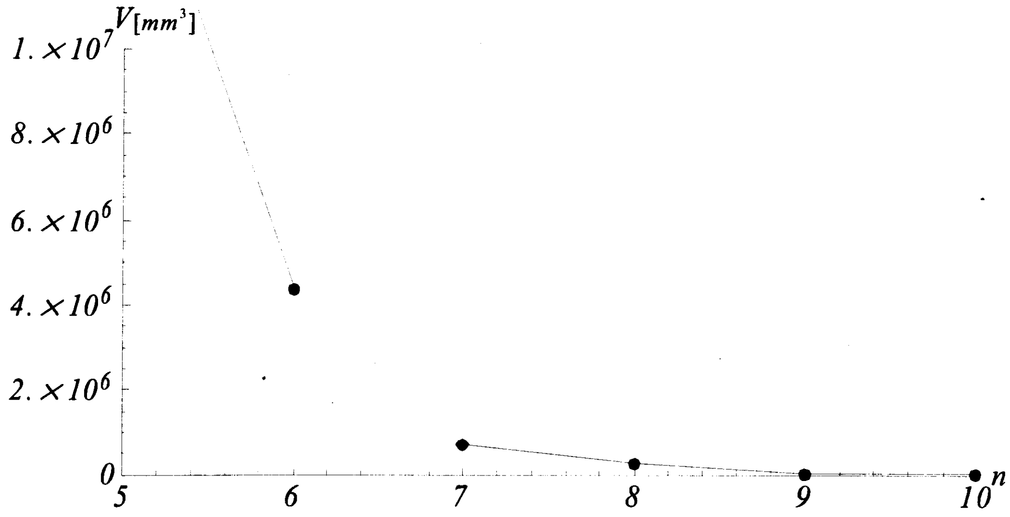


図 3.15 対応点数と補正形状の安定性の関係

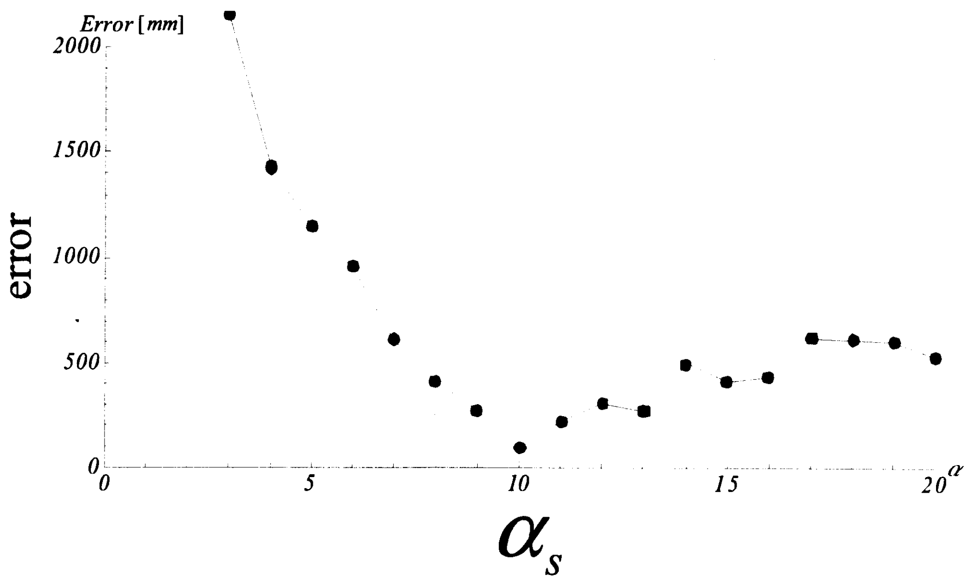


図 3.16 α_s を変化させたときの対応点とエピポーラ線の距離 E (真値：$\alpha_s = 10$)

3.4 4次元空間から2次元空間への投影に関する多視点幾何

次に，4次元空間から2次元空間への投影に基づく多視点幾何について述べる．ここでは，特に3視点幾何について詳しく説明するとともに多視点幾何により形状を復元する手法について述べる．本節で述べる多視点幾何は第3.5節において射影カメラに基づく移動レンジセンサの計測データ補正法に応用する．

3.4.1 4次元空間から2次元空間への投影

本節では, 4次元空間から2次元空間における投影に関するエピポーラ幾何について考える．前節と同様，4次元空間から2次元空間における投影を考えることにより, 3次元空間中において運動するカメラを, 4次元空間中の静止したカメラとして扱うことが可能となる．

今, 4次元空間中の点から2次元空間中の点への投影を行うカメラを考える．これは通常の3次元から2次元へのカメラを4次元から2次元の投影に拡張したものなので, これを拡張射影カメラと呼ぶことにする．4次元空間中の点を斉次座標を用いて $\mathbf{W} = [W^1, W^2, W^3, W^4, W^5]^\top$．と表し, この $\mathbf{W}$ が3次元の時空間中の点を斉次座標で表した $\mathbf{x} = [x^1, x^2, x^3]^\top$ へと投影されるとする．このとき $\mathbf{W}$ と $\mathbf{x}$ との関係は以下に記述する拡張射影カメラによる投影として表すことができる．

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{QW} \tag{3.29}$$

$(\sim)$ は定数倍を除いて等しいという同値関係を表している．また, $\mathbf{Q}$ はカメラ行列であり，次のような 3×5 行列で表せる．

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

式(3.30)より, 拡張射影カメラ $\mathbf{Q}$ は14自由度であることがわかる．次節からは, この拡張射影カメラが複数台存在する場合における多視点幾何について考える．

3.4.2 4次元空間から2次元空間への投影に関する多視点幾何

次に, 3台の拡張射影カメラによる3視点幾何について詳しく述べる．今, 4次元空間中の点が N 点存在するとき, これらの点が式(3.30)で定義される3台の拡張射影カメラに投影されているとする．3台の拡張射影カメラが存在するとき, これらのカメラが成す3視点幾何は18自由度を持つ．これは, 各拡張射影カメラは前節で述べた通り14自由度を持つが, これらのカメラが24自由度の同一の4次元射影空間中に存在するという拘束条件があるためである．一方，N 個の4次元空間中の点は $4N$ 自由度を持ち，N ペアの3次元

空間中の対応点は $6N$ 自由度を持つ．従って，2 次元画像中の対応点 N 点から 4 次元空間での全ての幾何情報を計算するためには以下に示す条件を満たす必要がある．

$$6N \geq 18 + 4N \tag{3.31}$$

このようにして，画像中に対応点 9 点があれば拡張射影カメラの 3 視点幾何を決定できることがわかる．今，3 台の拡張射影カメラ行列をそれぞれ $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{Q}''$ とする．4 次元空間中の点 $\mathbf{W}$ の $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}'$, $\mathbf{Q}''$ による投影像を $\mathbf{x} = [x^1, x^2, x^3]^\top$, $\mathbf{x}' = [x'^1, x'^2, x'^3]^\top$, $\mathbf{x}'' = [x''^1, x''^2, x''^3]^\top$ とすると，このとき 3 台のカメラの投影関係は式 (3.29) を展開して整理することにより，以下のように表すことができる．

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{a}^1 & x^1 & 0 & 0 \\ \mathbf{a}^2 & x^2 & 0 & 0 \\ \mathbf{a}^3 & x^3 & 0 & 0 \\ \hline \mathbf{b}^1 & 0 & x'^1 & 0 \\ \mathbf{b}^2 & 0 & x'^2 & 0 \\ \mathbf{b}^3 & 0 & x'^3 & 0 \\ \hline \mathbf{c}^1 & 0 & 0 & x''^1 \\ \mathbf{c}^2 & 0 & 0 & x''^2 \\ \mathbf{c}^3 & 0 & 0 & x''^3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ k \\ k' \\ k'' \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{3.32}$$

ここで $\mathbf{a}^i$ はカメラ行列 $\mathbf{Q}$ の i 行目 $(i = 1, \ldots, 3)$, $\mathbf{b}^i$ はカメラ行列 $\mathbf{Q}'$ の i 行目 $(i = 1, \ldots, 3)$, $\mathbf{c}^i$ はカメラ行列 $\mathbf{Q}''$ の i 行目 $(i = 1, \ldots, 3)$ を表す．式 (3.32) の左端の行列を $\mathbf{M}$ とすると，$\mathbf{M}$ は 9×8 の行列となる．また，この $\mathbf{M}$ の 8×8 の正方部分行列を $\mathbf{M}'$ とする．このとき，式 (3.32) はゼロベクトルでない解を持つため，行列 $\mathbf{M}'$ のランクは 7 以下となり，その行列式は 0 となる．$\mathbf{M}'$ を構成するには，2 つのカメラ行列から 3 行，残りのカメラから 2 行を取り出す場合が考えられる．この行列式 $\det \mathbf{M}' = 0$ を展開し，整理しなおすと以下に示す拡張カメラに関する trilinear 拘束が得られる．

$$x^i x'^j x''^k \epsilon_{krv} \mathcal{T}_{ij}^r = 0_v \tag{3.33}$$

式 (3.33) では，どの添え字も通常の trilinear 拘束と同様 1 から 3 までの値を取る．また，ϵ_{ijk} は従来の多視点幾何と同様，i, j, k から $1, 2, 3$ への置換が偶置換であれば 1，奇置換であれば -1，それ以外であれば 0 の値を取るテンソルである．$\mathcal{T}_{ij}^r$ は拡張カメラによる trifocal tensor であり，次の式のように表すことができる．

$$\mathcal{T}_{ij}^r = \epsilon_{ilm} \epsilon_{jqu} \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}^l \\ \mathbf{a}^m \\ \mathbf{b}^q \\ \mathbf{b}^u \\ \mathbf{c}^r \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

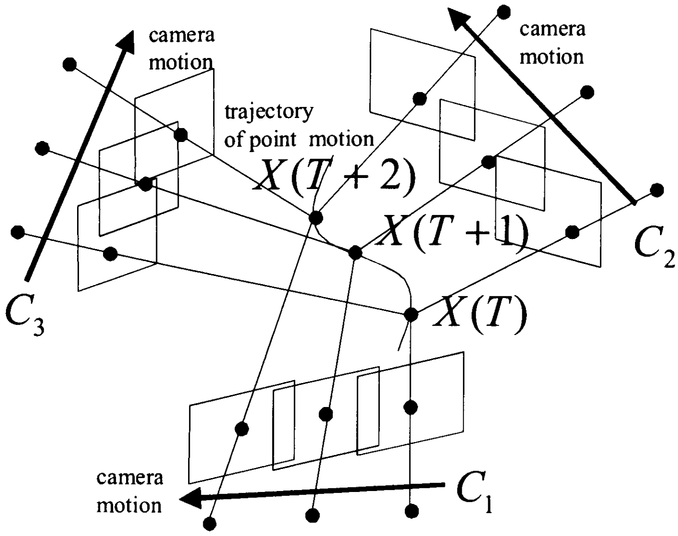


図 3.17 3 次元空間中を動く点とそれを投影する 3 つの並進カメラ

bifocal tensor $\mathcal{T}_{ij}^{r}$ は $3 \times 3 \times 3$ の 3 階のテンソルであり, 27 の要素を持つが, 定数倍の不定性を除いた $\mathcal{T}_{ij}^{r}$ の未知数は 26 となる. 一方, 式 (3.33) に示す trilinear 拘束からは 3 つの式が得られるが, この中で線形独立なものは 2 つである. これより, 画像中に対応点が 13 点があれば, 線形に $\mathcal{T}_{ij}^{r}$ を計算可能であることがわかる.

3.4.3 運動するカメラ間における多視点幾何

次に前節で述べた 4 次元空間から 2 次元空間への拡張射影カメラによる投影に関する多視点幾何が, 任意の並進運動を行うカメラ間の関係を記述できることを示す.

今, 3 次元空間で点とカメラがそれぞれ独立に運動しているとする. すると, 第 3.1.3 節で述べたように従来の多視点幾何では, 動画像中の運動点 1 点だけでは運動するカメラ間の幾何関係を計算することができなかった. これに対し, カメラの動きが図 3.17 に示すような並進のみであった場合, 拡張射影カメラの多視点幾何は動画像中の 1 点のみで計算可能であることを示す. 今, 図 3.17 のように実空間における 3 次元点 $\widetilde{\mathbf{X}} = [X, Y, Z]^\top$ が, X, Y, Z 軸において単位時間に $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ で並進移動するカメラに $\widetilde{\mathbf{x}} = [x, y]^\top$ として投影されているとすると, このとき $\widetilde{\mathbf{x}}$ と $\widetilde{\mathbf{X}}$ の間には以下に示すような関係が成り立つ.

$$\lambda \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(T) - T\Delta X \\ Y(T) - T\Delta Y \\ Z(T) - T\Delta Z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

ここで，式 (3.35) は $\widetilde{\mathbf{X}}$ に対して時刻 T を加えた $\widetilde{\mathbf{W}} = [X, Y, Z, T]^\top$ を用いると, 以下のように変形することができる.

$$\lambda \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \alpha_1 & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \alpha_2 & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \alpha_3 & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \\ Z(T) \\ T \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

ここで，式 (3.36) 中の α_1，α_2，α_2 はそれぞれ以下のように表すことができる.

$$\alpha_1 = -(p_{11}\Delta X + p_{12}\Delta Y + p_{13}\Delta Z) \tag{3.37}$$
$$\alpha_2 = -(p_{21}\Delta X + p_{22}\Delta Y + p_{23}\Delta Z) \tag{3.38}$$
$$\alpha_3 = -(p_{31}\Delta X + p_{32}\Delta Y + p_{33}\Delta Z) \tag{3.39}$$

今, 並進運動はそれぞれのカメラにおいて等速であるため, $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ はそれぞれのカメラにおいて一定である．すなわち, 式 (3.36) のカメラ行列中の要素は全て定数となる．ただし運動の方向と大きさはそれぞれのカメラで任意で良いため, $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ の値はそれぞれのカメラで異なる．よって式 (3.35) より, 並進運動を行う複数のカメラによる非剛体運動点の投影は, 式 (3.29) に示す拡張射影カメラによる投影として表すことができることがわかる．また, 従来の多視点幾何では，運動点 1 点のみからの計算が不可能であったのに対し，拡張アフィンカメラによる多視点幾何と同様，拡張射影カメラによる多視点幾何において異なる時刻の点であっても，それらの点は全て同一の幾何を記述する対応点となる．そのため運動点 1 点が複数時刻で撮影されていれば，拡張射影カメラ間の幾何学的関係を計算することができる.

3.5 移動レンジセンサの 3 次元データの補正

本節では前節までで述べた 4 次元空間から 2 次元空間への投影の元で成り立つ多視点幾何の応用例として，移動レンジセンサの 3 次元データ補正について詳しく説明する.

3.5.1 レンジセンサのスキャンとカメラ画像の関係

ここでは第 3.2 節と同様，4 次元空間から 2 次元空間への投影の元で成り立つ多視点幾何の応用例として，移動レンジセンサの 3 次元データ補正を示し，詳しく説明していく．ここで，レンジセンサは第 3.2 節と同様のものを考え，補正に用いるカメラが 2 台存在するとする．このとき，レンジセンサは time-of-flight 方式で対象までの距離を計測しているとすると，レーザーはラスタスキャンを行うため，3 次元空間中では照射点 1 点が図 3.18 のように走査することになる．そのため，計測処理中にレンジセンサが運動するため得られる 3 次元形状は大きく歪んだものになる．このような歪んだ形状を，4 次元空間から 2

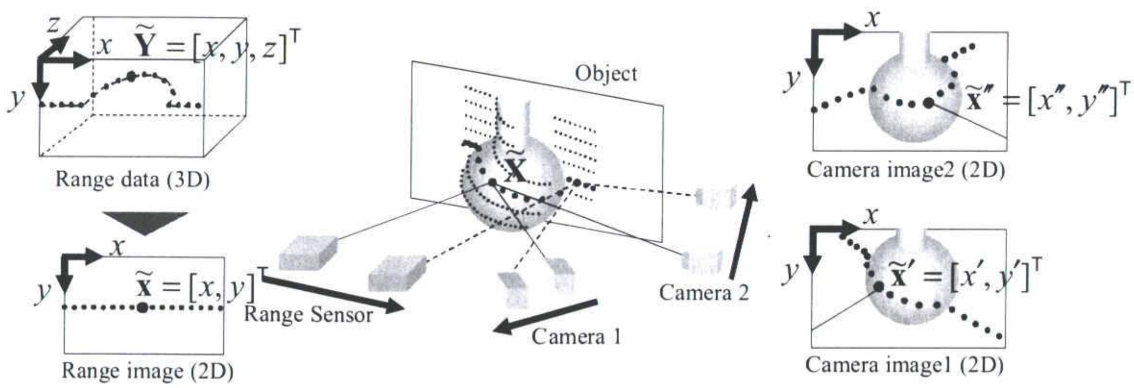


図 3.18 移動レンジセンサ画像とカメラ画像の関係

次元空間への投影に基づく多視点幾何により補正する場合，拡張アフィンカメラによる補正のときとはレンジセンサとカメラ画像の扱い方が異なる．拡張アフィンカメラによる多視点幾何では 4 次元空間から 3 次元空間への投影を考えていたため，レンジ画像やカメラ画像に時間軸を追加した．一方，拡張射影カメラによる多視点幾何では 4 次元空間から 2 次元空間への投影を考えているため，レンジセンサやカメラ画像を以下のように扱う．

今，図 3.18 のように 3 次元空間中におけるレーザー照射点を $\widetilde{\mathbf{X}} = [X, Y, Z]^\top$ とし，この $\widetilde{\mathbf{X}}$ の移動レンジセンサによる計測結果を $\widetilde{\mathbf{Y}} = [x, y, z]^\top$ とする．また，この照射点は 2 台のカメラにより，$\widetilde{\mathbf{x}}' = [x', y']^\top$，$\widetilde{\mathbf{x}}'' = [x'', y'']^\top$ として投影されているとする．このとき，拡張射影カメラによる多視点幾何を計算するために，レンジ画像を z の情報を除いた 2 次元点として扱う．

$$\widetilde{\mathbf{Y}} = [x, y, z]^\top \Rightarrow \widetilde{\mathbf{x}} = [x, y]^\top \tag{3.40}$$

すると，移動レンジセンサと 2 台のカメラで得られている画像は以下のようになる．

$$\widetilde{\mathbf{x}} = [x, y]^\top \tag{3.41}$$
$$\widetilde{\mathbf{x}}' = [x', y']^\top \tag{3.42}$$
$$\widetilde{\mathbf{x}}'' = [x'', y'']^\top \tag{3.43}$$

このような点と考えることで，これらの点から先に述べた trifocal tensor$\mathcal{T}_{ij}^r$ を計算することができる．以降では，このような $\mathcal{T}_{ij}^r$ により，形状を補正する手法について述べる．このとき，多視点幾何を用いて形状を復元する必要がある．ところが，4 次元空間から 2 次元空間への投影に基づく幾何学的特性は従来の多視点幾何の特性と大きく異なる．そのため，従来の多視点幾何と同様にはカメラ行列を復元することはできない．従って，以降では 4 次元空間から 2 次元空間への投影に基づく幾何学的特性について説明する．

3.5.2　4次元空間から2次元空間への投影に基づく幾何学的特性

(1) 4次元空間から2次元空間への投影に基づく幾何学的特性

本研究で考えている投影は，従来の3次元空間から2次元空間への投影や4次元空間から3次元空間への投影とは異なり，2次元分の情報を失うことになる．このような場合，カメラの復元で使用するエピポールやホモグラフィーの性質が従来の多視点幾何とは大きく異なる．そのため本節では，拡張投影を行った場合の幾何学的特性について詳しく説明する．また，ここでは「k次元空間からi次元空間への投影」を$\mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^i$と書くことにする．

拡張投影を行った場合の幾何学的特性を説明するには"*extensor*" の知識が必要になるため，ここで簡単に説明しておく．"*extensor* によると幾何学的性質を交差 ($\wedge$) や結合 ($\vee$) により表すことができる．

今，n次元のベクトルから成る空間$\mathcal{P}^n$において，k次元部分空間をstep(k)と呼ぶことにする．このとき，step(1)は点，step(2)は直線，step(3)は平面を表す．また，step(k)は超平面を表している．このとき，先に述べた"*extensor*"によると，$\mathcal{P}^n$におけるstep(k_1)とsteps(k_2)の交差 ($\wedge$) や結合 ($\vee$) は以下のように表すことができる．

$$\mathcal{P}^{k_1} \vee \mathcal{P}^{k_2} \quad : \quad k_1 + k2 \tag{3.44}$$

$$\mathcal{P}^{k_1} \wedge \mathcal{P}^{k_2} \quad : \quad k_1 + k2 - (n+1). \tag{3.45}$$

以降ではまず，式(3.44)，(3.45)を用いて，視点や視線ベクトルなど多視点幾何において基本的なベクトルが，$\mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^2$の場合に，従来とはどのように異なるのかについて詳しく説明する．また，これらの知識は拡張射影カメラの復元において非常に重要である．

(2) $\mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^2$におけるカメラ視点

始めに，$\mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^2$におけるカメラ視点について説明する．カメラ視点はカメラ行列の零空間であったため，$\mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^2$であることを考えると，視点は$3\times(k+1)$行列の零空間となる．また，このときの"*extensor*"はstep($k-2$)となる．従って，$\mathcal{P}^3 \rightarrow \mathcal{P}^2$ではstep(1)となり，視点は点となる．一方，$\mathcal{P}^4 \rightarrow \mathcal{P}^2$ではstep(2)となり，視点は従来と異なり直線となる．

(3) $\mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^2$における視線ベクトル

次に，$\mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^2$における視線ベクトルについて説明する．ここで，視線ベクトルは空間中の点と視点を結んだものであるから，$\mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^2$の場合には結合 ($\vee$) を用いてstep $((k-2)+1)$と表せる．従って，$\mathcal{P}^3 \rightarrow \mathcal{P}^2$ではstep(1+1=2)となり，視線ベクトルは直線となる．一方，$\mathcal{P}^4 \rightarrow \mathcal{P}^2$においてはstep (2+1=3)となり，視線ベクトルは従来の多視点幾何とは異なり平面となる．

(4) $\mathcal{P}^k \to \mathcal{P}^2$ における幾何学的拘束

ここでは，$\mathcal{P}^k \to \mathcal{P}^2$ における幾何学的拘束について考える．幾何学的拘束は複数の視線ベクトルの交差を基に考えることができる．$\mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^2$ における幾何学的拘束は"triangulation" としてよく知られている．今，$\mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^2$ について考えてみると，2 つの視線ベクトルが空間中に存在する場合，これらは通常交差することはない．"*extensor*"においても，step(2+2-4=0) となることから交差は定義されないことが分かる．このような通常交わることのないベクトルが空間中で交わることが幾何学的拘束となる．これは従来の 2 視点幾何の拘束にあたる．一方，$\mathcal{P}^4 \to \mathcal{P}^2$ について考えてみると，2 つの視線ベクトルは step(3+3-5=1) より点となり，必ずどこかで点として交差することになる．従って，$\mathcal{P}^4 \to \mathcal{P}^2$ では 2 台のカメラがあったとしても，それらの視線ベクトルからは幾何学的拘束は得られない．このことから，$\mathcal{P}^4 \to \mathcal{P}^2$ では 2 視点幾何は存在せず，3 視点幾何から存在することが分かる．

(5) $\mathcal{P}^k \to \mathcal{P}^2$ におけるエピポール

$\mathcal{P}^k \to \mathcal{P}^2$ におけるエピポールについて説明する．エピポールは 2 つの視点の結合 ($\vee$) と画像平面の交差と考えることができる．一方，エピポール $\mathbf{e}_{ab}$ はカメラ $\mathbf{Q}_b$ の視点をカメラ $\mathbf{Q}_a$ によって撮影したものとして以下のように表すことにする．

$$\mathbf{e}_{ab} = \mathbf{Q}_a \mathrm{null}(\mathbf{Q}_b) \tag{3.46}$$

ここで，$\mathbf{Q}_a$，$\mathbf{Q}_b$ は $\mathcal{P}^k \to \mathcal{P}^2$ におけるカメラ行列である．また，"null($\mathbf{Q}_b$)"は $\mathbf{Q}_b$ の零空間である．ここで，"*extensor*"により，エピポールがそれぞれの次元においてどのようなベクトルになるのか考える．$\mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^2$ において，視点の結合 ($\vee$) は step(1+1=2) となり，直線であることが分かる．また，このような直線と画像平面の交点がエピポールであった．従って，step(2+3-4=1) となり，$\mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^2$ においてエピポールは点となることが分かる．一方，$\mathcal{P}^4 \to \mathcal{P}^2$ においては，視点の結合 ($\vee$) は step(2+2=4) となり，超平面となる．そのため，直線と画像平面の交点は step(4+3-5=2) となり，$\mathcal{P}^4 \to \mathcal{P}^2$ におけるエピポールは直線となることが分かる．

以上より，$\mathcal{P}^4 \to \mathcal{P}^2$ では従来の多視点幾何とは幾何学的性質が大きく異なることが分かる．これらの $\mathcal{P}^k \to \mathcal{P}^2$ における幾何学的性質を表 3.1 に示す．以降では，これらの性質を用いて trifocal tensor $\mathcal{T}_{ij}^r$ からカメラ行列を復元する手法について説明する．まず，始めに $\mathcal{T}_{ij}^r$ による平面 π を介したホモグラフィー $\mathbf{H}_\pi$ を導出する方法について述べ，次に $\mathcal{T}_{ij}^r$ を用いてエピポール $\mathbf{e}_{ab}$ を導出する方法について述べる．

3.5.3 $\mathcal{T}_{ij}^r$ によるホモグラフィー $\mathbf{H}_\pi$ とエピポール $\mathbf{e}_{ab}$ の計算

(1) 平面 π を介した点の変換

本節では trifocal tensor $\mathcal{T}_{ij}^r$ からホモグラフィーを導出する手法について述べる．ここで，式 (3.33) の trilinear 拘束には，先に述べた点同士の関係以外にも，以下のような点と

表 3.1 $\mathcal{P}^k \rightarrow \mathcal{P}^2$ $(k=3,4)$ における幾何学的性質

	image ray	triangulation	epipole
$\mathcal{P}^4 \rightarrow \mathcal{P}^2$ (extended)	plane (2+1=3)	point (3+3-5=1)	line (4+3-5=2)
$\mathcal{P}^3 \rightarrow \mathcal{P}^2$ (traditional)	line (1+1=2)	not defined (2+2-4=0)	point (3+2-4=1)

直線の関係が存在する.

$$x^i x'^j l''_r \mathcal{T}_{ij}^r = 0 \tag{3.47}$$

ここで，共変と反変の関係を考えると，$x^i x'^j \mathcal{T}_{ij}^r$ は反変ベクトルであり，点となる.

今，この点を p''^r とすると，式 (3.47) より，点 p''^r は以下の関係を満たす.

$$p''^r l''_r = 0 \tag{3.48}$$

式 (3.48) は p''^r は第 3 画像中の直線 l''_r 上に存在していることを示す．今，$\mathbf{x}$，$\mathbf{x}'$ が対応点であるとき，p''^r は第 3 画像中の対応点 x''^r となる．従って，式 (3.47) は以下のように書き換えることができる.

$$x^i x'^j \mathcal{T}_{ij}^r = x''^r. \tag{3.49}$$

式 (3.49) について幾何学的な意味について考えてみる．今，視線ベクトルについて考えてみると，$\mathcal{P}^4 \rightarrow \mathcal{P}^2$ では従来の多視点幾何とは異なり，平面であった．また，このような 2 平面があった場合，3 次元空間とは異なり，直線ではなく必ず点として交わる．そのため，式 (3.49) における $x^i x'^j \mathcal{T}_{ij}^r$ により求まる $\mathbf{x}''$ はこのような点を投影したものとして考えることができる．ここで，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}''$ に注目し，それ以外の部分を $\mathbf{H}_{13}$ とすると，式 (3.49) は $\mathbf{x}'$ の視線ベクトルによる平面を介したホモグラフィーとして以下のように表すことができる.

$$x''^r = H_{13}{}_i^r x^i \tag{3.50}$$

$$H_{13}{}_i^r = x'^j \mathcal{T}_{ij}^r \tag{3.51}$$

ここで，H_{ab} は第 a カメラ画像から第 b カメラ画像への平面 π を介したホモグラフィーである．今，異なる 2 点 $\mathbf{x}'_1$, $\mathbf{x}'_2$ による異なる 2 枚の平面を介したホモグラフィー H_{13}, H'_{13} は以下のように表すことにする.

$$H_{13}{}_i^r = x'_1{}^j \mathcal{T}_{ij}^r \quad , \quad H'_{13}{}_i^r = x'_2{}^j \mathcal{T}_{ij}^r \tag{3.52}$$

以降では，この 2 つのホモグラフィーを用いてエピポールを計算する手法について述べる.

(2) エピポールの計算

次に，先に述べたホモグラフィーを用いて，エピポールを導出する手法について説明する．ここでは特に，カメラ $\mathbf{Q}_b$ の視点をカメラ $\mathbf{Q}_a$ に投影したエピポール $\mathbf{e}_{ab}$ について説明していく．第 3.5.2 節で述べたように，このようなエピポールは $\mathbf{e}_{ab} = \mathbf{Q}_a \mathrm{null}(\mathbf{Q}_b)$ と表すことができた．また， このときの"$\mathrm{null}(\mathbf{Q}_\mathrm{b})$"はカメラ行列 $\mathbf{Q}_b$ の零空間であり，視点を示していた．今，拡張射影カメラは 3×5 行列であるため，その零空間は直線となる．この直線を $\mathbf{Q}_a$ で撮影したものがエピポールであるため，$\mathbf{e}_{ab}$ は直線となる．以降では，このようなエピポール (直線) をホモグラフィーを用いて導出する．

先ほども述べたように，$\mathcal{P}^4 \to \mathcal{P}^2$ においてエピポールは直線となる．そのため，ここでは直線のホモグラフィーについて考えることにする．今，式 (3.51) のような第 a カメラ画像から第 b カメラ画像への点のホモグラフィーを $\mathbf{H}_{ab}$ とし，第 a カメラ画像，第 b カメラ画像中の直線をそれぞれ $\mathbf{l}_a$，$\mathbf{l}_b$ とすると，このような直線の変換は以下のように表すことができる．

$$\mathbf{l}_b = \mathbf{H}_{ab}^{-\top} \mathbf{l}_a. \tag{3.53}$$

エピポールは直線であったので式 (3.53) に代入すると，以下の式が得られる．

$$\mathbf{e}_{ba} = \mathbf{H}_{ab}^{-\top} \mathbf{e}_{ab} \tag{3.54}$$

$$\mathbf{e}_{ab} = \mathbf{H}_{ab}^{\top} \mathbf{e}_{ba}. \tag{3.55}$$

今，式 (3.52) のように，独立なホモグラフィーが 2 つ得られている場合を考え，そのホモグラフィーを $\mathbf{H}_{ab}$，$\mathbf{H'}_{ab}$ とする．このとき，これらのホモグラフィーは両方，式 (3.55) を満たす．従って，式 (3.55) に $\mathbf{H}_{ab}$，$\mathbf{H'}_{ab}$ を代入し，$\mathbf{e}_{ab}$ を消去すると，エピポール $\mathbf{e}_{ba}$ に関して以下のような式が得られる．

$$(\mathbf{H}_{ab}^{\top} + \lambda \mathbf{H'}_{ab}^{\top})\, \mathbf{e}_{ba} = \mathbf{0} \tag{3.56}$$

ここで，λ はゼロでないスカラーである．式 (3.56) において，$\mathbf{H}_{ab}^{\top}$ と $\mathbf{H'}_{ab}^{\top}$ の一般化固有ベクトルを計算することでエピポール $\mathbf{e}_{ba}$ を計算することができる．

3.5.4 $\mathcal{T}_{ij}^{r}$ からの拡張射影カメラ行列 $\mathbf{Q}_n$ $(n = 1, \ldots, 3)$ の復元

本節では，前節までで説明したホモグラフィーとエピポールを用いて，カメラ行列を復元する手法について述べる．これまで述べてきたホモグラフィーとエピポールは両方とも，trifocal tensor $\mathcal{T}_{ij}^{r}$ を用いて計算したものであった．このようなホモグラフィーとエピポールを用いてカメラ行列を構成する場合，$\mathcal{T}_{ij}^{r}$ は画像間の対応を表すものであるから，このような $\mathcal{T}_{ij}^{r}$ によるカメラ行列は 4 次元射影変換の不定性を残したものになる．ここで，第 1 カメラを $\mathbf{Q}_1 = [\mathbf{I} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0}]$ のようにおくと，式 (3.51), (3.56) より，第 n カメラは以下のように表すことができる．

$$\mathbf{Q}_n = [\mathbf{H}_{1n} \mid \mathbf{u} \mid \mathbf{u}'] \qquad (n = 2, 3) \tag{3.57}$$

ここで，$\mathbf{H}_{1n}$ は第 1 画像から第 n 画像へのホモグラフィーである．また，$\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ は第 n 画像中のエピポール $\mathbf{e}_{n1}$(直線) 上の 2 点である．以上のように，画像中の対応点から trifocal tensor $\mathcal{T}_{ij}^{r}$ を計算することができれば，4 次元空間中の点を射影変換の不定性を残して復元することができる．

3.5.5 レンジセンサからの歪んだ形状の補正

次に trifocal tensor から計算した拡張射影カメラ行列を用いてレンジデータを補正する手法について説明する．本研究において，レンジセンサは計測処理中に移動することを仮定している．そのため，レンジセンサの運動により得られる形状は歪んだものになる．それにも関わらず，提案した手法によりレンジセンサとカメラの拡張カメラ行列を計算することができる．この理由は第 3.2.3 節と同様，式 (3.36) に示す拡張カメラ行列がレンジセンサの移動量 ΔX, ΔY，ΔZ の情報を含んでいるためである．従って，このようなカメラ行列を復元することができれば，拡張カメラ行列から移動量 ΔX, ΔY，ΔZ を計算することができる．ただし，このときもレンジセンサの運動に関して方向のみ計算できる．これに対して，レンジセンサの移動の大きさ $\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$ が既知であれば，$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ を不定性なく求めることができる．このように運動を計算した上で，前節で導出した拡張射影カメラ行列を用いて 4 次元空間中の点 $\mathbf{W}$ を復元すると，$\mathbf{W}$ は正確な運動の情報を持つカメラ行列により復元された点であるため，復元結果はレンジセンサが運動していたとしても歪みのない正しい形状となる．このようにしてレンジセンサの運動が計算できれば, 移動するレンジセンサから得られた 3 次元形状を正確に補正することができる．

3.6 実験結果

本節では前節までに提案した手法を用いてシミュレーション実験を行った結果を示す．まず, 提案法により移動するレンジセンサのデータが補正できることを示す．次に, レンジデータ補正精度と安定性を示す．

3.6.1 形状補正実験

本節では，シミュレーション画像を用いて移動するレンジセンサとカメラの間の拡張射影カメラに関する trifocal tensor を計算し, 形状補正を行った結果を示す．図 3.19(a) は実験で用いた移動レンジセンサ, カメラ, 計測対象の配置である．カメラ $\mathbf{C}_{c1}$ は固定されており, レンジセンサ $\mathbf{C}_{r}$，$\mathbf{C}_{c2}$ は計測中に矢印の方向へ移動する．また, 図 3.19(b)，(c) はそれぞれ固定されたレンジセンサと移動するレンジセンサによる計測結果である．固定レンジセンサと移動レンジセンサの初期位置は同じである．このような移動レンジセンサで得られた 3 次元形状はセンサが運動しているため，図 3.19(b)，(c) に示す通り歪んだものになる．

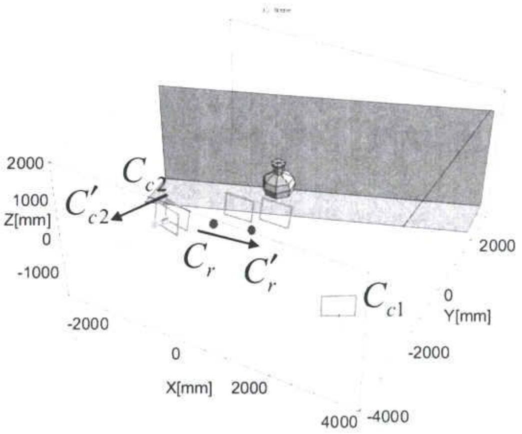
図 3.20 は移動レンジセンサと 2 台のカメラで得られた 2 次元データである．また，拡張 trifocal tensor$\mathcal{T}_{ij}^{r}$ を計算するために用いた対応点を図 3.20 (a), (b), (c) の灰点で示す．これらの対応点を用いて $\mathcal{T}_{ij}^{r}$ を計算し，その後，第 3.5.4 節に示した手法で拡張カメラ行列を計算した．更に拡張カメラ行列を用いてレンジセンサの移動量を計算し，歪んだ 3 次元形状を補正した．

提案法により形状補正を行った結果を図 3.21(b) に示す．一方，図 3.21(a) は形状補正を行わなかった場合の 3 次元形状を示している．ここで，図中のワイヤーフレームは計測対象物体の真値を示している．図 3.21(a) が大きく歪んでいるのに対して，図 3.21(b) の形状は図 3.19(b)，(c) の計測対象の形状に一致していることがわかる．以上のことから，提案法により移動するレンジセンサの形状を正しく補正できていることが分かる．

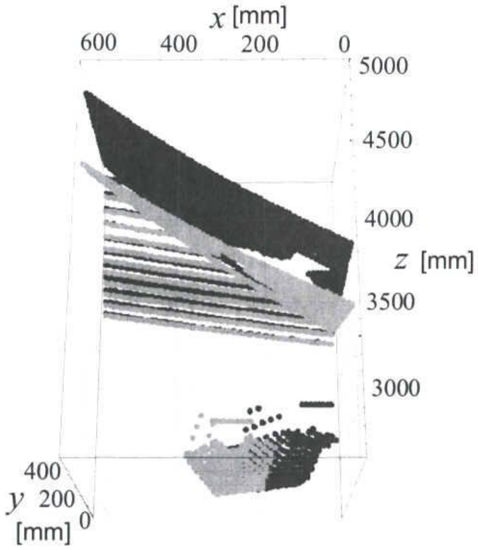
3.6.2 安定性評価

次に，移動レンジセンサを用いた形状補正の安定性について実験を行った結果を示す．図 3.20 (a), (b), (c) の画像に標準偏差 1pixel のガウスノイズを印加し，求めた trifocal tensor から形状補正した．そのときの補正結果の断面図を図 3.22 に示す．また，真値は灰色の点，提案法による補正結果は黒色の点で示してある．図 3.22 において，結果が概ね一致していることから，提案法ではノイズがある場合においても，運動するレンジセンサの運動を多視点幾何により計算可能であり，移動レンジセンサの計測形状を正しく補正できることがわかる．

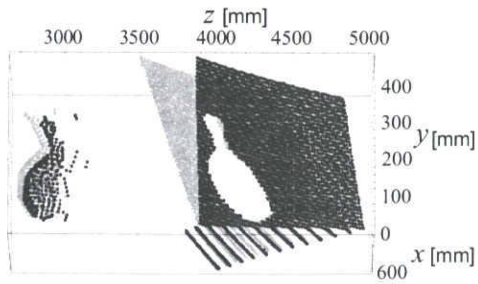
また，図 3.20 (a), (b), (c) の画像においてサンプル点を 7 点を取り出し，標準偏差 1pixel のガウスノイズを印加した．さらに，この 7 点に対して求めた trifocal tensor から形状補正を 100 回行い，3σ の不確定領域を計算した．この結果を図 3.23 に示す．図において，灰色の楕円は 3σ 不確定領域，黒色の点はサンプル点の真値を示す．3σ の不確定領域が十分小さいことから提案法はノイズがある場合でも安定に移動レンジセンサの計測形状を正しく補正できることがわかる．



(a) 3 次元配置

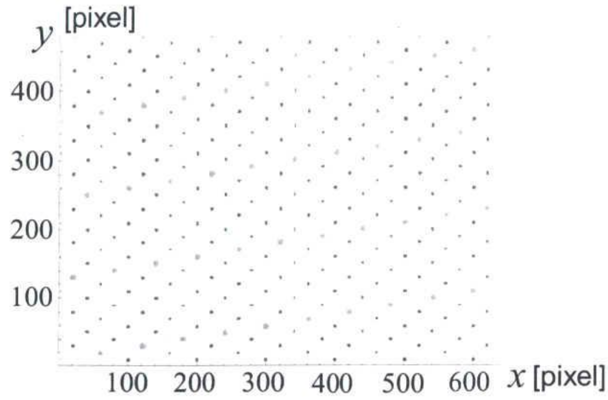


(b) 計測結果 (top view)

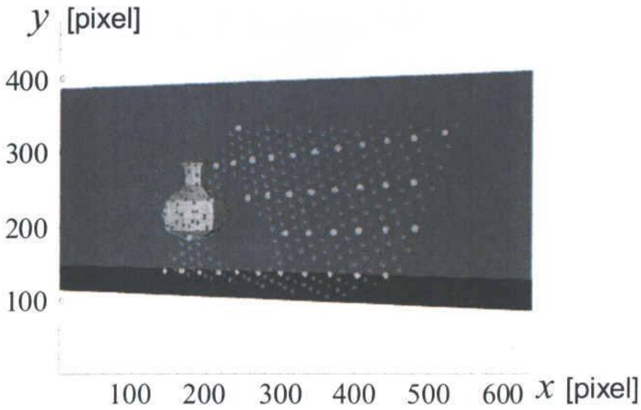


(c) 計測結果 (side view)

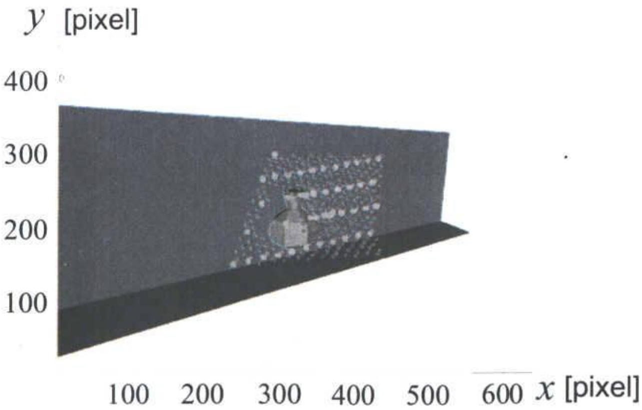
図 3.19 実験環境 (3 次元空間中で並進運動するレンジセンサと固定カメラ) と計測結果. 図 (a) 中の $\mathbf{C}_r$ レンジセンサ,$\mathbf{C}_{c1}$, $\mathbf{C}_{c2}$ はカメラを示す. また，レンジセンサは $\mathbf{C}_r$ から $\mathbf{C}'_r$ へ並進移動する. カメラ 1 は静止し，カメラ 2 は $\mathbf{C}_{c2}$ から $\mathbf{C}'_{c2}$ へ並進移動する. 図 (b) 中の黒点は移動レンジセンサの計測結果であり，灰点は静止したレンジセンサによる計測結果である.



(a) レンジセンサ $\mathbf{C}_r$ による 2 次元画像

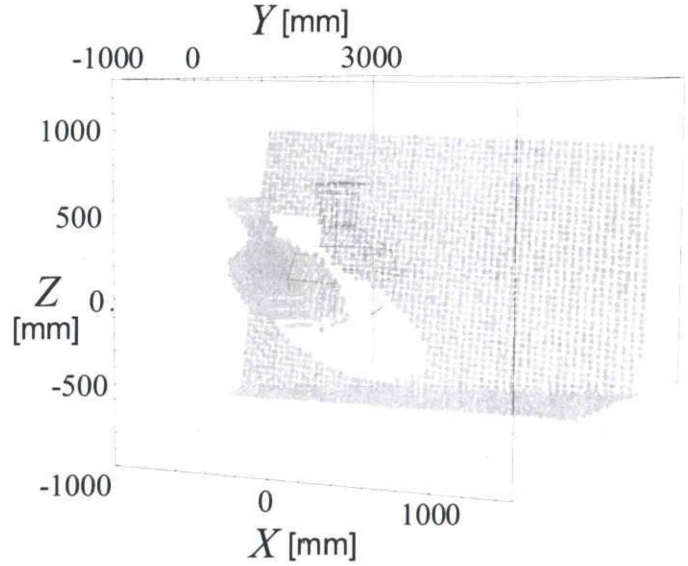


(b) カメラ $\mathbf{C}_{c1}$ による 2 次元画像

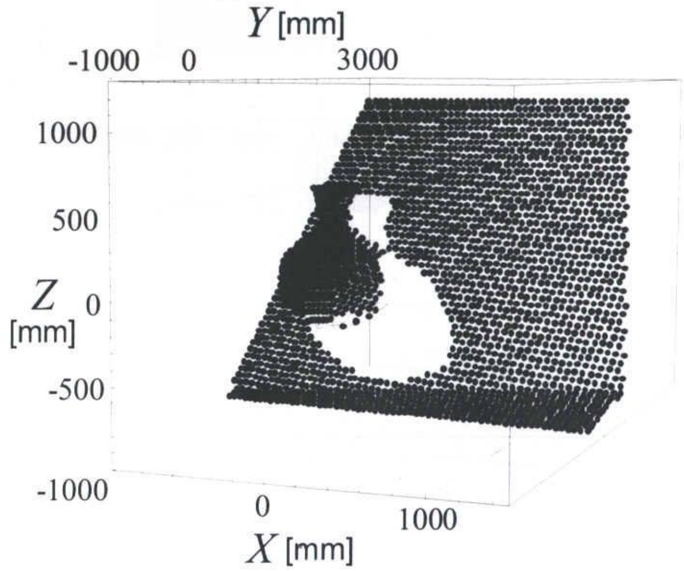


(c) カメラ $\mathbf{C}_{c2}$ による 2 次元画像

図 3.20 レンジセンサとカメラの 2 次元画像．黒点はレーザーが走査した全軌跡を示す．灰点は trifocal tensor の計算に用いた対応点である．

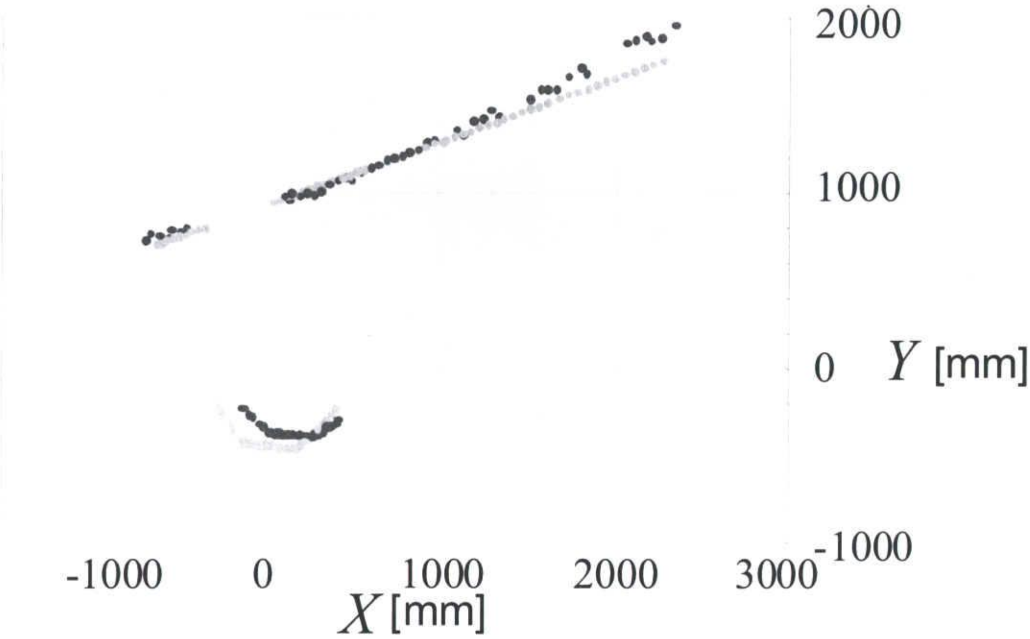


(a) 補正なし 3 次元形状



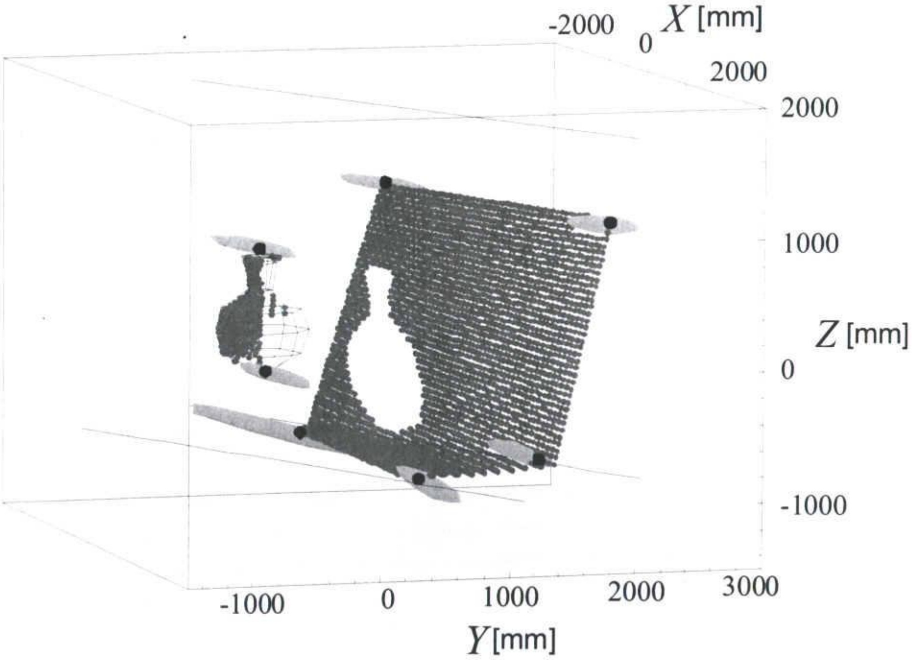
(b) 提案法による補正形状

図 3.21 移動レンジセンサの形状補正結果



補正結果の断面図
(黒：補正結果, 灰：真値)

図 3.22 移動レンジセンサの形状補正の安定性 1



(灰：3σ の不確定領域，黒：真値)

図 3.23 移動レンジセンサの形状補正の安定性 2

第4章

複合次元空間における多視点幾何

前章では，カメラとレンジセンサの間の多視点幾何を考える上で，どちらも2次元空間に投影するセンサとして考えた．しかし，実際にはレンジセンサは3次元データを得るセンサである．このように異なる種類のセンサ同士を組み合わせる場合には，センサ同士の計測データの次元が異なる場合が頻繁に生ずる．このように異なる次元のセンサ間では，従来の多視点幾何理論はもはや用いることはできない．そこで本章では，異なる次元のセンサが混在する場合における新たな多視点幾何の一般理論を導出する．ここで，互いに次元が異なる中心投影センサが複数存在する場合を「複合次元カメラ」と呼ぶことにする．複合次元カメラにおいては，様々な投影次元を考えなければならないことから，話を一般化し，k 次元空間から n 次元空間への投影 $(k \geq n)$ について考える．

まず，この一般化した投影の元で成り立つ多視点幾何について述べ，その後，一般化した多視点幾何の中から例を挙げて，詳しく解析を行っていく．

4.1 k 次元空間から n 次元空間への投影

まず，k 次元空間から n 次元空間への投影 $(k \geq n)$ について述べる．今，k 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ が n 次元空間中の点 $\mathbf{x}$ へと投影されたとする．このときの投影行列を $\mathbf{P}$ とすると $\mathbf{X}$ と $\mathbf{x}$ の関係は斉次座標を用いて以下のように表すことができる．

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{PX} \tag{4.1}$$

また，式(4.1)の投影は要素を陽にすると以下のように表すことができる．

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^{n+1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} p_{(1,1)} & p_{(1,2)} & \cdots & p_{(1,k+1)} \\ p_{(2,1)} & p_{(2,2)} & & p_{(2,k+1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{(n+1,1)} & p_{(n+1,2)} & \cdots & p_{(n+1,k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{k+1} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

ここで，カメラ行列の要素 $p_{(i,j)}$ は i 行 j 列の要素を示す．式(4.2)の投影は $k+1$ 次元のベクトルから $n+1$ 次元のベクトルへの投影であるため，このカメラ行列 $\mathbf{P}$ は $(n+1)\times(k+1)$

であり，$((k+1)\times(n+1)-1)$ 自由度を持つ．以降ではこのような一般化した投影の元で成り立つ多視点幾何について考えていく．

4.2 複合次元カメラに関する多視点幾何

次に，投影次元の異なる複数のカメラが混在する複合次元カメラに関する多視点幾何の性質を解析することにする．

4.2.1 複合次元カメラの組み合わせ

今，k 次元空間を考え，図 4.1 のように空間中に k 次元空間から 1 次元，2 次元，3 次元など異なる次元への投影を行うカメラが複数存在するとする．すると，k 次元空間においては最大 k 次元までの投影を考えることができるため，k 次元空間においては 1 次元から k 次元まで，k 種類のカメラが存在する．このときの複合次元カメラの組み合わせについて考えていく．

今，k 次元空間から i 次元空間への投影を行うカメラを $\mathbf{C}^i$ $(i=1,\cdots,k)$ と表すことにする．このとき，$\mathbf{C}^1$ は k 次元空間から 1 次元空間へ投影を行うカメラを表し，$\mathbf{C}^2$ は k 次元空間から 2 次元空間へ投影を行うカメラを表す．

k 次元空間中においてカメラ $\mathbf{C}^i$ が n_i 台存在するとすると，k 次元空間中には合計で以下に示す N 台のカメラが存在することになる．

$$N=\sum_{i=1}^{k} n_i \tag{4.3}$$

本稿では，このような k 種類のカメラよりなるカメラ群を以下に示すような k 次元ベクトル $\mathbf{n}$ で表すことにする．

$$\mathbf{n}=[n_1,n_2,\cdots,n_k]^\top \tag{4.4}$$

4.2.2 複合次元カメラの多視点幾何の自由度

次に，この N 台の複合次元カメラの N 視点幾何の自由度について考える．k 次元空間から i 次元空間へ投影を行うカメラは前節で述べた通り $(k+1)\times(i+1)-1$ 自由度を持つ．また，k 次元のホモグラフィーは $(k+1)\times(k+1)$ 行列で表され，このホモグラフィーは $(k+1)^2-1$ 自由度を持つ．そのため，これら N 台のカメラが同一の k 次元空間中に存在するときこれらの N 視点幾何の自由度 L は以下のように表すことができる．

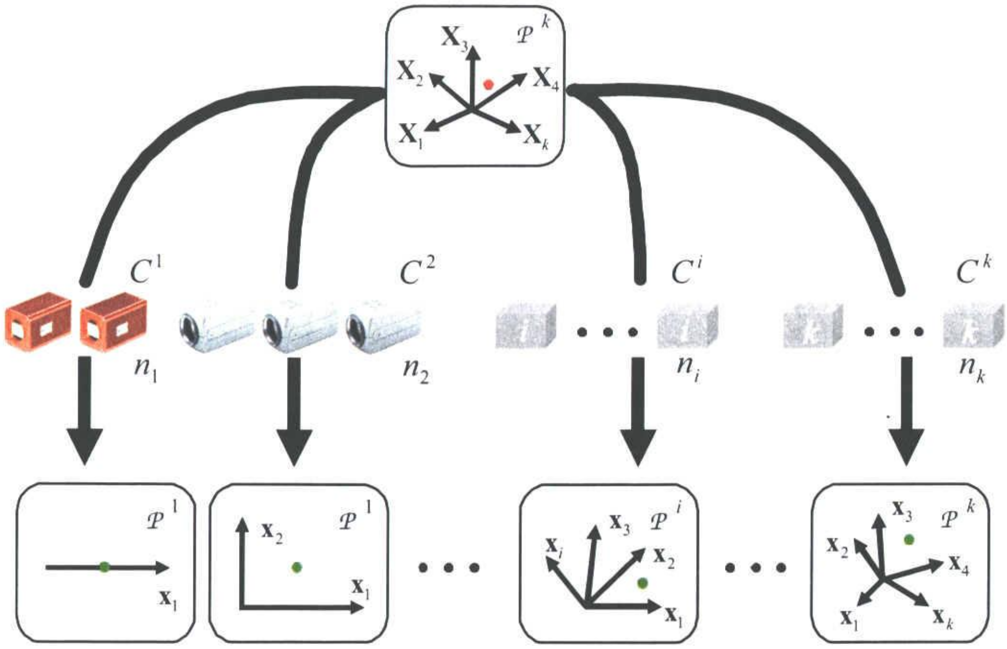


図 4.1 複合次元カメラによる k 次元空間からの投影

$$L = \sum_{i=1}^{k} n_i((k+1)(i+1)-1)-(k+1)^2+1 \tag{4.5}$$

$$= (k+1)(\mathbf{n}^\top \mathbf{i}-k)+kN-k \tag{4.6}$$

ここで，$\mathbf{i}=[1,2,\cdots,k]^\top$ であり，k 個の要素を持つベクトルである．

4.2.3 複合次元カメラの多視点幾何計算に必要な最小対応点数

前節では N 視点幾何の自由度について述べた．本節ではこの自由度を用いて，N 視点幾何の計算に必要な最小対応点数について考える．ここで，画像から得られる情報から空間の幾何情報を計算することを考えた場合，空間中の情報はカメラの配置だけではなく，そのとき用いた対応点の配置を含む．従って，N 視点幾何の自由度から最小対応点数を導くには，この幾何の自由度と幾何を決定する上で用いる画像中の対応点だけでなく，空間中に存在する対応点の自由度も含めて議論する必要がある．

今，k 次元空間中の点が M 点存在するとき，これらの点が式 (4.4) で定義される N 台のカメラに投影されているとする．このとき，カメラで得られる情報が空間中の全ての情報より多ければ，多視点幾何を計算することができる．ここで，それぞれの次元のカメラ

表 4.1 3 次元空間における複合次元カメラの多視点幾何の計算に必要な最小対応点数．ここで，画像から多視点幾何を計算するために必要な情報を十分得ることができないため，$\mathbf{n}^\top = [3,0,0]$, $[2,0,0]$, $[1,1,0]$ のカメラの組み合わせによる幾何拘束は存在しない．

4 Views		3 Views		2 Views	
$\mathbf{n}^\top$	#	$\mathbf{n}^\top$	#	$\mathbf{n}^\top$	#
[4,0,0]	13	[2,1,0]	10	[0,2,0]	7
[3,1,0]	9	[1,2,0]	7	[1,0,1]	7
[2,2,0]	7	[0,3,0]	6	[0,1,1]	6
[1,3,0]	7	[2,0,1]	7	[0,0,2]	5
[0,4,0]	6	[1,1,1]	6		
[3,0,1]	7	[0,2,1]	6		
[2,1,1]	7	[1,0,2]	6		
[1,2,1]	6	[0,1,2]	6		
[0,3,1]	6	[0,0,3]	5		
[2,0,2]	6				
[1,1,2]	6				
[0,2,2]	6				
[1,0,3]	6				
[0,1,3]	6				
[0,0,4]	5				

では M 個の点が投影されているため，画像からは $M\mathbf{n}^\top\mathbf{i}$ の情報が得られる．一方，k 次元空間中における N 台のカメラと M 個の点の幾何情報を全て計算するためには $L+kM$ の情報が必要となる．したがって，複合次元カメラにおいて画像から multifocal tensor を計算するには以下に示す条件を満たす必要がある．

$$M\mathbf{n}^\top\mathbf{i} \geq L + kM \tag{4.7}$$

式 (4.6) を式 (4.7) に代入することにより，複合次元カメラに関する多視点幾何を計算するためには以下の条件を満たす必要があることがわかる．

$$M \geq k + 1 + \frac{kN - k}{\mathbf{n}^\top\mathbf{i} - k} \tag{4.8}$$

式 (4.8) は，一般の複合次元カメラに関する多視点幾何の計算に必要な最小対応点数を表している．表 4.1 に，3 次元空間における全ての複合次元多視点幾何において，多視点幾何の計算に必要な最小対応点数を式 (4.8) ともとに計算した結果をまとめる．ここで，従来の bilinear 拘束，trilinear 拘束，quadrilinear 拘束は，それぞれこの表中において $\mathbf{n} = [0,2,0]^\top$，$\mathbf{n} = [0,3,0]^\top$，$\mathbf{n} = [0,4,0]^\top$ で表される．また，Sturm[55] が提案し

た多視点幾何の trilinear 拘束，quadrilinear 拘束は，それぞれこの表中の $\mathbf{n} = [0,2,1]^\top$，$\mathbf{n} = [0,3,1]^\top$ である．一方，Thirthala ら [64] が提案した多視点幾何は $\mathbf{n} = [2,1,0]^\top$ である．このように，これまでにコンピュータビジョン界において提案されてきた多視点幾何は，全て本稿で提案する複合次元多視点幾何に含まれており，この複合次元多視点幾何が全ての多視点幾何を包含する一般理論であることがわかる．

4.2.4 複合次元カメラ間の multilinear 拘束

次に，この N 台の複合次元カメラ間の multilinear 拘束について説明する．先に述べたように，k 次元空間を考え，この空間中に k 次元空間から i 次元空間への投影を行うカメラ $\mathbf{C}^i$ が k 種類存在するとする．このとき，式 (4.1) の投影式でどの次元における投影かを明確にするために，投影式を $\mathbf{x}_j^i \sim \mathbf{P}_j^i\mathbf{X}$ のように次元を示す添え字を付けて表すことにする．ここで，i は投影後の次元数を示し，$j\ (=1,\cdots,n_i)$ は i 次元への投影を行うカメラのカメラ番号を示す添え字である．

今，k 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ が N 台のカメラ $\mathbf{P}_j^i$ へ $\mathbf{x}_1^1,\mathbf{x}_2^1,\cdots,\mathbf{x}_j^i,\cdots$ と投影されたとする．すると，これら N 台のカメラへの投影関係は，それぞれの投影式を展開して整理することにより，以下のように表すことができる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^1 & \mathbf{x}_1^1 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \mathbf{P}_{n_1}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{x}_{n_1}^1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_1^2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{x}_1^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \mathbf{P}_{n_k}^k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{x}_{n_k}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \lambda_1^1 \\ \vdots \\ \lambda_{n_1}^1 \\ \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_{n_k}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

ここで，λ_j^i は定数倍の不定性を表す任意の実数である．式 (4.9) の左端の行列を $\mathbf{M}$ とすると，$\mathbf{M}$ は $(\mathbf{n}^\top\mathbf{i}+N)\times(k+N+1)$ 行列である．この行列 $\mathbf{M}$ の $(k+N+1)\times(k+N+1)$ の正方部分行列を $\mathbf{Q}$ とする．すると，式 (4.9) はゼロベクトルでない解を持つため，行列 $\mathbf{Q}$ のランクは $k+N$ 以下となり，その行列式は以下に示すように 0 となる．

$$\det\mathbf{Q} = 0 \tag{4.10}$$

式 (4.10) は複合次元カメラにおける multilinear 拘束である．$\mathbf{M}$ から $\mathbf{Q}$ を取り出すために，$k+N+1$ 行を選ぶ際に，N 視点幾何に関する有効な拘束を得るためには，N 個のカメラ行列のいずれからも少なくとも 2 行以上を選ばなければならない．すなわち，k 次元空間における N 視点幾何において有効な multilinear 拘束を得るためには，以下に示す条件を満たす必要がある．

$$k+N+1 \geq 2N \tag{4.11}$$

この式を整理すると以下の条件式が得られる.

$$N \leq k+1 \tag{4.12}$$

式(4.12)より，k次元空間では，最大$k+1$視点までのmultilinear拘束が存在することがわかる．ここで，従来の多視点幾何について考えてみると，従来の多視点幾何は3次元空間からの投影であるため，$k=3$となる．そのため，最大視点数は$k+1=4$となり，確かに従来の多視点幾何における最大視点数と一致していることがわかる．

4.2.5　$k+1$枚の超平面の交差

前節までで複合次元カメラにおける多視点幾何の代数的な解析について述べた．本節では，この多視点幾何の幾何学的な意味について説明する．第2.1.5節や第2.6節で述べたように，幾何学的拘束は2次元平面では「3直線の交差」，3次元空間では「4平面の交差」であった．これを現在考えているk次元空間に拡張すると，この空間における幾何学的拘束は「$k+1$枚の$k-1$次元超平面の交差」と考えることができる．従って，以降ではmultifocal tensorを「$k+1$枚の$k-1$次元超平面の交差」によって表現する方法について説明していく．

今，k次元空間において$k+1$台のカメラが存在しているとする．このとき，k次元空間からi次元空間への投影は以下のように表すことができた．

$$\mathbf{x}_j^i \sim \mathbf{P}_j^i \mathbf{X} \tag{4.13}$$

ここで，第4.2.4節と同様に，iは投影後の次元，jはカメラ番号を示す．このとき，i次元への投影像において以下のような関係を満たす$\mathbf{s}_j^i$を考える．

$$\mathbf{s}_j^{i\top} \mathbf{x}_j^i = 0 \tag{4.14}$$

ここで，$\mathbf{s}$は$\mathbf{x}$と双対な関係にある空間である．従って，$i=2$のときは$\mathbf{s}^2$は直線となり，$i=3$のときは$\mathbf{s}^3$は平面となる．さらに，式(4.13)を式(4.14)に代入すると以下の式が得られる．

$$\mathbf{s}_j^{i\top} \mathbf{P}_j^i \mathbf{X} = 0 \tag{4.15}$$

ここで，式(4.15)の左辺において点$\mathbf{X}$以外の部分について注目すると，$\mathbf{s}$を逆射影した超平面$\mathbf{S}$が得られる．

$$\mathbf{S}_j^i = \mathbf{P}_j^{i\top} \mathbf{s}_j^i \tag{4.16}$$

ここで，$\mathbf{s}_j^i$が投影像中の空間であるのに対し，$\mathbf{S}_j^i$は投影前のk次元空間における$k-1$次元超平面であることに注意が必要である．先に述べた通り，このような超平面がk次元空

間中に $k+1$ 枚存在するいう条件が，幾何学的拘束となる．そのため，幾何学的拘束は超平面 $\mathbf{S}_j^i$ を用いて以下のように表すことができる．

$$\det[\mathbf{S}_1^1 \quad \cdots \quad \mathbf{S}_{n_1}^1 \quad \cdots \quad \mathbf{S}_j^i \quad \cdots \quad \mathbf{S}_{n_k}^k] = 0 \tag{4.17}$$

また，式 (4.17) をテンソル表記を用いると以下のように書き換えることができる．

$$\epsilon^{p_1 \cdots p_{n_k}} S^1_{1\,p_1} \cdots S^1_{n_1\,p_{n_1}} \cdots S^i_{j\,p_j} \cdots S^k_{n_k\,p_{n_k}} = 0 \tag{4.18}$$

式 (4.18) は式 (4.16) より，カメラ行列を用いて整理すると，以下のように書き改めることができる．

$$s^1_{1\,q_1} \cdots s^1_{n_1\,q_{n_1}} \cdots s^i_{j\,q_j} \cdots s^k_{n_k\,q_{n_k}} \epsilon^{p_1 \cdots p_{n_k}} P^{1\,q_1}_{1\,p_1} \cdots P^{1\,q_{n_1}}_{n_1\,p_{n_1}} \cdots P^{i\,q_j}_{j\,p_j} \cdots P^{k\,q_{n_k}}_{n_k\,p_{n_k}} = 0 \tag{4.19}$$

式 (4.19) が k 次元空間における多視点幾何拘束である．ここで，投影像中の直線や平面と点との間にはそれぞれ以下のような関係がある．

$$s^1_i = \epsilon_{ij} x^{1\,j} \tag{4.20}$$

$$s^2_i = \epsilon_{ijk} x_1^{2\,j} x_2^{2\,k} \tag{4.21}$$

$$s^3_i = \epsilon_{ijkl} x_1^{3\,j} x_2^{3\,k} x_3^{3\,l} \tag{4.22}$$

$$\vdots$$

$$s^{r_1}_{n_1} = \epsilon_{r_2 r_3 \cdots r_k} x_1^{k\,r_1} x_2^{k\,r_2} x_3^{k\,r_3} \cdots x_k^{k\,r_k} \tag{4.23}$$

そのため，式 (4.20) から式 (4.23) を式 (4.19) に代入することで，投影像中の点に関する式に書き改めることができる．また，そのとき点や直線以外の部分をまとめてテンソルで表すと，これが複合次元における multifocal tensor となる．

以上のように投影を複合次元にすることで，多視点幾何を全ての次元に対応可能な一般化した形で表すことができた．次節以降では，複合次元カメラの多視点幾何拘束と multifocal tensor の例を示すとともに，その性質について詳しく解析を行っていく．

4.3 $\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何

まず，カメラの組み合わせが $\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ のとき，すなわち，3 次元空間中において，3 次元カメラが 0 台，2 次元カメラが 1 台，1 次元カメラが $(N-1)$ 台存在する場合の N 視点幾何について考える．

今，3 次元空間中の点を斉次座標で表した $\mathbf{X} = [X^1, X^2, X^3, X^4]^\top$ を考える．この $\mathbf{X}$ が 2 次元カメラ $\mathbf{C}^2$ と 1 次元カメラ $\mathbf{C}_i^1$ において，それぞれ $\mathbf{x} = [x^1, x^2, x^3]^\top$，$\mathbf{v}_i = [v_i^1, v_i^2]^\top$ として投影されるとする．このとき，$\mathbf{C}^2$ のカメラ行列を $\mathbf{P}^2$，$\mathbf{C}_i^1$ のカメラを $\mathbf{P}_i^1$ とすると，3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ と 2 次元空間中の点 $\mathbf{x}$，3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ と 1 次元空間中の点 $\mathbf{v}$ の関係はそれぞれ以下のように表すことができる．

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{P}^2 \mathbf{X} \tag{4.24}$$

$$\mathbf{v}_i \sim \mathbf{P}_i^1 \mathbf{X} \quad (i = 1, \cdots, N-1) \tag{4.25}$$

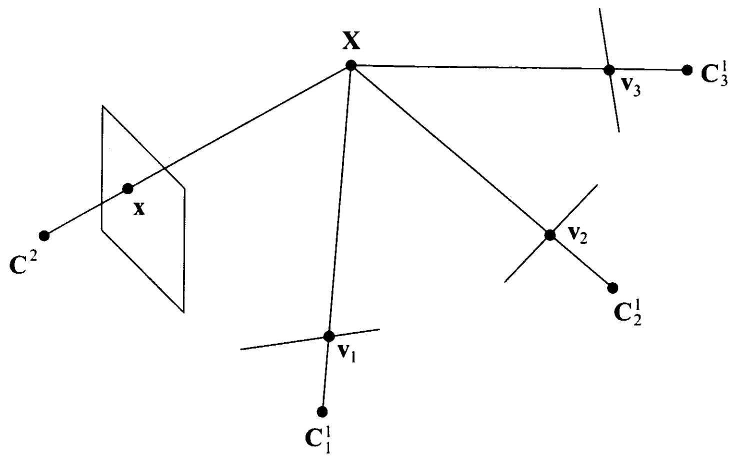


図 4.2 2 次元カメラ $\mathbf{C}^2$ と 1 次元カメラ $\mathbf{C}^1_i$ $(i=1,\cdots,N-1)$ 間の N 視点幾何

ここで，カメラ行列 $\mathbf{P}^2$ は 3×4 行列，カメラ行列 $\mathbf{P}^1_i$ は 2×4 行列である．これら N 台の複合次元カメラと 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ の関係は，式 (4.24) と式 (4.25) を展開して整理することにより，以下のように表すことができる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^2 & \mathbf{x} & & & \\ \mathbf{P}^1_1 & & \mathbf{v}_1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{P}^1_{N-1} & & & & \mathbf{v}_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \lambda_{\mathbf{x}} \\ \lambda_{\mathbf{v}_1} \\ \vdots \\ \lambda_{\mathbf{v}_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

ここで，λ は任意の実数であり，$\mathbf{X}$ と $\mathbf{x}$，$\mathbf{v}$ が同値関係であることを示している．このとき，式 (4.26) の一番左の行列を $\mathbf{M}$ とすると，$\mathbf{M}$ は $\{3+2(N-1)\}\times(N+4)$ 行列である．この行列 $\mathbf{M}$ から $(N+4)\times(N+4)$ の部分行列を取り出すと，次に示すような複合次元カメラに関する multilinear 拘束が得られる．

$$\det\mathbf{M}=0 \tag{4.27}$$

式 (4.27) を 3 視点，4 視点について展開することにより，以下に示す trilinear 拘束，quadrilinear 拘束がそれぞれ得られる．

$$x^i v_1^j v_2^k \epsilon_{jb}\epsilon_{kc}\mathcal{T}_i^{bc} = 0 \tag{4.28}$$

$$x^i v_1^j v_2^k v_3^l \epsilon_{iam}\epsilon_{jb}\epsilon_{kc}\epsilon_{ld}\mathcal{Q}^{abcd} = 0_m \tag{4.29}$$

式 (4.28) と式 (4.29) では，通常の multilinear 拘束とは異なり添え字 i，a，m は 1 から 3 までの値を取り，それ以外の添え字は 1 か 2 の値を取る．また，ϵ_{ijk} は $\{i,j,k\}$ から $\{1,2,3\}$ への変換が偶置換であれば，1，奇置換であれば -1，それ以外であれば 0 の値を取るテンソルであった．同様に ϵ_{ij} は $\{i,j\}$ から $\{1,2\}$ への変換が偶置換であれば，1，奇置換であれば -1，それ以外であれば 0 の値を取るテンソルである．

表 4.2 $\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ のときの，multifocal tensor の非線形・線形計算に必要な最小対応点数

views	tensor	elements	DOF	nonlinear	linear
3	$\mathcal{T}$	$3 \times 2 \times 2 = 12$	10	10	11
4	$\mathcal{Q}$	$3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$	17	9	12

trifocal tensor $\mathcal{T}_i^{bc}$ は $3\times2\times2$ の 3 階のテンソル，quadrifocal tensor $\mathcal{Q}^{abcd}$ は $3\times2\times2\times2$ の 4 階のテンソルであり，従来の multifocal tensor とは異なり，正方テンソルとはならないことがわかる．ここで，$\mathbf{n} = [1,1,0]^\top$ のとき，すなわち 2 次元カメラと 1 次元カメラがそれぞれ 1 台ずつ存在するとき，2 視点からでは全ての幾何情報を計算するための情報が足りないため，2 視点幾何は存在しない．また，従来の多視点幾何と同様の理由により 5 視点以上では線形幾何拘束は存在しない．

4.3.1 $\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何の線形計算に必要な最小対応点数

次に $\mathcal{T}_i^{bc}$，$\mathcal{Q}^{abcd}$ の線形計算について考える．$\mathcal{T}_i^{bc}$ は先ほど述べた通り，$3\times2\times2$ の 3 階テンソルであり，定数倍の不定性を除くと未知数は 11 である．一方，式 (4.28) に示す trilinear 拘束は，1 組の対応点に対し，1 本の拘束式を持つ．これより，画像中の対応点が 11 点あれば，線形に $\mathcal{T}_i^{bc}$ を計算可能であることがわかる．

同様に，$\mathcal{Q}^{abcd}$ は $3\times2\times2\times2$ の 4 階テンソルであり，定数倍の不定性を除くと未知数は 23 である．一方，式 (4.29) に示す quadrilinear 拘束には 3 本の式があるが，この中で線形独立なものは 2 本のみである．これより，画像中の対応点が 12 点あれば，線形に $\mathcal{Q}^{abcd}$ を計算可能であることがわかる．$\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ のときの multifocal tensor の計算に必要な最小対応点数を表 4.2 に示す．

これまでは，mulitifocal tensor の点同士の関係と最小対応点数について議論してきた．一方, $\mathcal{T}_i^{bc}$，$\mathcal{Q}^{abcd}$ に基づく multilinear 拘束には, 点同士の関係だけでなく点と直線との関係も存在する. 以下に 3 視点における点と直線の対応関係を表す trilinear 拘束を示す.

$$x^i v_1^j l''_c \epsilon_{jb} \mathcal{T}_i^{bc} = 0 \tag{4.30}$$

$$x^i l'_b l''_c \mathcal{T}_i^{bc} = 0 \tag{4.31}$$

$$l_r l'_b l''_c \epsilon^{ris} \mathcal{T}_i^{bc} = 0^s \tag{4.32}$$

同様に, 4 視点における点と直線の対応関係を表す quadrilinear 拘束を示す.

$$x^i v_1^j v_2^k l_d''' \epsilon_{iam}\epsilon_{jb}\epsilon_{kc}\mathcal{Q}^{abcd} = 0_m \tag{4.33}$$
$$x^i v_1^j l_c'' l_d''' \epsilon_{iam}\epsilon_{jb}\mathcal{Q}^{abcd} = 0_m \tag{4.34}$$
$$x^i l_b' l_c'' l_d''' \epsilon_{iam}\mathcal{Q}^{abcd} = 0_m \tag{4.35}$$
$$l_a l_b' l_c'' l_d''' \mathcal{Q}^{abcd} = 0 \tag{4.36}$$

これらの拘束式からも先ほどと同様，線形独立な式の本数を考えることにより，最小対応点数と最小対応線数を導出することができる.

4.3.2 $\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何の幾何学的特性

これまでに述べたような代数的な解析により, 多視点幾何の様々な性質が明らかになった．本節では，$\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何の幾何学的な意味を理解するために，$\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何を異なる方法で導き出し，詳しく説明する.

(1) 4 つの平面の交差

第 2 章の従来の多視点幾何で述べたように，3 次元空間中における基本的な幾何学的特性は 4 枚の平面の交差で表すことができた．また，このときの平面というのは，カメラ画像で得られている直線を逆射影した平面であった．この 4 枚の平面の交差という幾何学的拘束は，3 次元空間における幾何学的拘束であるため，カメラの次元とは関わりがない．従って，カメラが複合次元であったとしても，それらが 3 次元空間中に存在する場合は，4 平面の交差が基本的な幾何学的拘束となる．そのため以降では，従来の多視点幾何と同様に，4 平面の交差を用いて複合次元センサの組み合わせにおける幾何学的特性について詳しく説明していく.

まず，従来の多視点幾何と同様に quadrifocal tensor の導出から説明する．今，図 4.3 のように 2 次元カメラ 1 台と 1 次元カメラ 3 台が存在するとし，また，第 4.3.1 節と同様に，それぞれのカメラ行列を $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_2^1, \mathbf{P}_3^1$ とする．ここで 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ のこれらのカメラにおける投影像をそれぞれ $\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ とする．さらに，これらの投影点を通る直線 $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$ が得られているとする．このとき，図 4.3 に示すように 4 直線を逆射影して得られる 4 つの平面 $\mathbf{S}$，$\mathbf{S}'$，$\mathbf{S}''$，$\mathbf{S}'''$ は 3 次元空間中の 1 点 $\mathbf{X}$ で交差する．この関係は $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}'$，$\mathbf{S}''$，$\mathbf{S}'''$ を用いて以下のように表すことができる.

$$\det[\mathbf{S} \quad \mathbf{S}' \quad \mathbf{S}'' \quad \mathbf{S}'''] = 0 \tag{4.37}$$

一方，2 次元カメラにより直線 $\mathbf{l}$ を逆射影した平面 $\mathbf{S}$ と 1 次元カメラにより直線 $\mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$ を逆射影した平面 $\mathbf{S}'$，$\mathbf{S}''$，$\mathbf{S}'''$ は式 (4.16) のように表すことができた．従って，式 (4.37) は直線 $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$ とカメラ行列 $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}_1^1, \mathbf{P}_2^1, \mathbf{P}_3^1$ を用いることで以下のように表すことができる.

$$\det[\mathbf{P}^{2\top}\mathbf{l} \quad \mathbf{P}_1^{1\top}\mathbf{l}' \quad \mathbf{P}_2^{1\top}\mathbf{l}'' \quad \mathbf{P}_3^{1\top}\mathbf{l}'''] = 0 \tag{4.38}$$

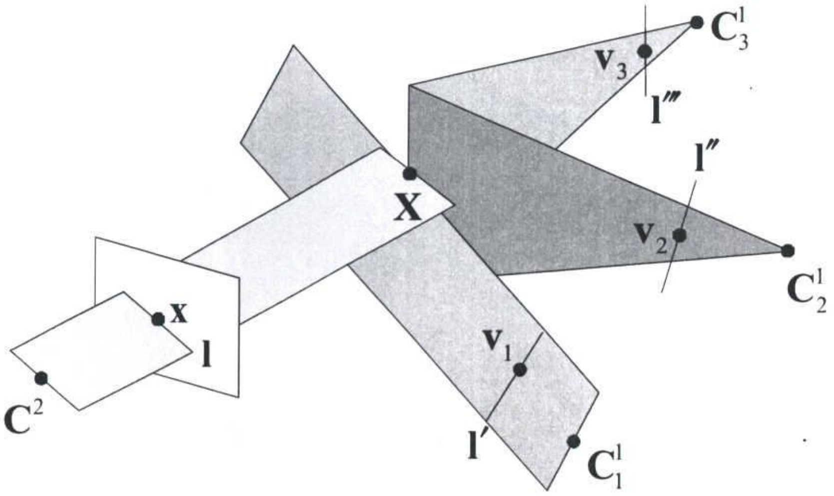


図 4.3 4 視点における 4 直線の関係

先と同様に式 (4.38) をテンソル表記すると，以下に示すような 4 直線に関する拘束式が得られる．

$$l_a l'_b l''_c l'''_d \epsilon^{ijkl} P^{2\,a}_{i} P^{1\,b}_{1\,j} P^{1\,c}_{2\,k} P^{1\,d}_{3\,l} = 0 \tag{4.39}$$

ここで，線以外の部分を以下のようにおく．

$$\mathcal{Q}^{abcd} = \epsilon^{ijkl} P^{2\,a}_{i} P^{1\,b}_{1\,j} P^{1\,c}_{2\,k} P^{1\,d}_{3\,l} \tag{4.40}$$

すると，式 (4.39) は以下のように書き換えることができる．

$$l_a l'_b l''_c l'''_d \mathcal{Q}^{abcd} = 0 \tag{4.41}$$

このとき，式 (4.41) は quadrifocal tensor における式 (4.36) と一致していることが分かる．

次に，3 次元空間中の 4 枚平面の交差を用いて，trifocal tensor を導出する．今，図 4.4 のように 2 次元カメラ 1 台と，1 次元カメラ 2 台が存在するとし，これらのカメラ行列を $\mathbf{P}^2, \mathbf{P}^1_1, \mathbf{P}^1_2$ とする．また，ある 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ のこれらのカメラによる投影像を $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ とする．さらに，1 次元カメラにおいては，この投影点を通る直線 $\mathbf{l}', \mathbf{l}''$ が得られているとし，また，2 次元カメラでは $\mathbf{x}$ を通る任意の直線 $\mathbf{l}^1, \mathbf{l}^2$ が得られているとする．これら 4 本の直線から逆射影された平面が図のように 3 次元空間中の 1 点で交わるためには，以下に示す条件を満たす必要がある．

$$\det[\mathbf{P}^{2\top}\mathbf{l}^1 \quad \mathbf{P}^{2\top}\mathbf{l}^2 \quad \mathbf{P}^{1\top}_1\mathbf{l}' \quad \mathbf{P}^{1\top}_2\mathbf{l}''] = 0 \tag{4.42}$$

式 (4.42) をテンソル表記すると，以下に示すような 4 直線に関する拘束式が得られる．

$$l^1_a l^2_d l'_b l''_c \epsilon^{pqrs} P^{2a}_{p} P^{2d}_{q} P^{1b}_{1r} P^{1c}_{2s} = 0 \tag{4.43}$$

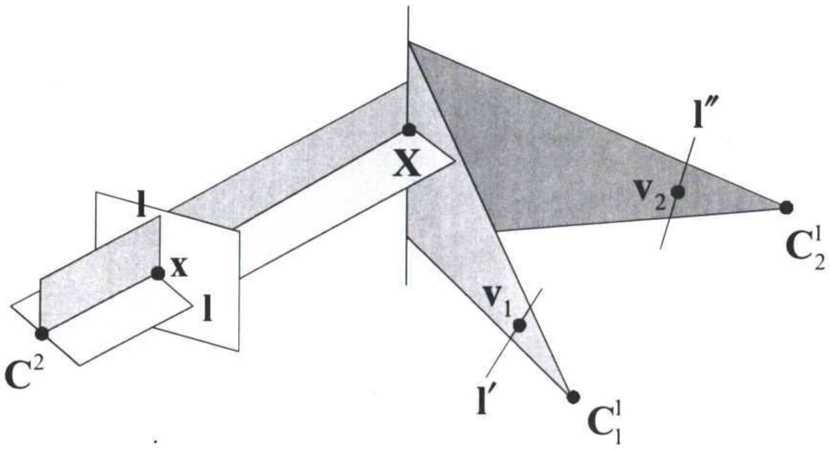


図 4.4 3 視点における 4 直線の関係

ここで，式 (4.43) にスカラー $\epsilon^{iad}\epsilon_{iad}$ をかけると，以下の式のようにまとめることができる.

$$(l_a^1 l_d^2 \epsilon^{iad}) l'_b l''_c \epsilon_{iad} \epsilon^{pqrs} P_p^{2a} P_q^{2d} P_{1r}^{1b} P_{2s}^{1c} = 0 \tag{4.44}$$

ここで，$l_a^1 l_d^2 \epsilon^{iad}$ は 2 本の直線 $\mathbf{l}^1, \mathbf{l}^2$ の外積であり，2 直線の交点 $\mathbf{x}$ を表す．従って，式 (4.44) は以下のように表すことができる.

$$x^i l'_b l''_c \epsilon_{iad} \epsilon^{pqrs} P_p^{2a} P_q^{2d} P_{1r}^{1b} P_{2s}^{1c} = 0 \tag{4.45}$$

ここで，点と線以外の部分を以下のようにおく.

$$\mathcal{T}_i^{bc} = \epsilon_{iad} \epsilon^{pqrs} P_p^{2a} P_q^{2d} P_{1r}^{1b} P_{2s}^{1c} \tag{4.46}$$

すると，式 (4.46) は以下のように書き換えることができる.

$$x^i l'_b l''_c \mathcal{T}_i^{bc} = 0 \tag{4.47}$$

このとき，式 (4.47) は trifocal tensor における式 (4.31) と一致していることが分かる．これらのことから，$\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何の幾何学的特性も，従来の多視点幾何と同様，4 つの平面の交差により表されることが分かる.

ここで，従来の多視点幾何のように 2 視点幾何について考えてみる．先に述べた通り，3 次元空間中の 1 点は，カメラ行列から逆射影した 4 枚の平面の交差により決定される．そのため，2 視点から 4 枚の平面を逆射影するには，一つのカメラ行列から 2 枚以上の平面を逆射影しなければならない．一方，第 2 節のカメラと平面の条件より，2 次元カメラでは 1 台のカメラから 3 枚以上の平面を逆射影することはできなかった．そのため，2 視点幾何を考えるためには，1 次元カメラ 1 台から 2 枚の平面を逆射影しなければならない.

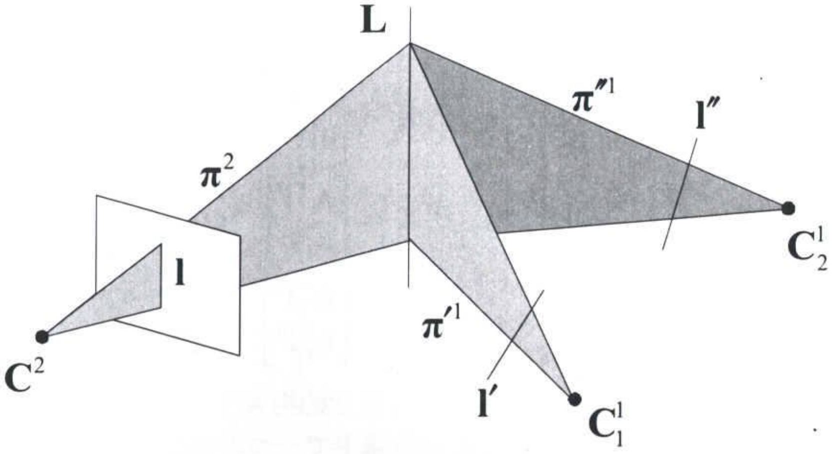


図 4.5 3次元空間中における直線とカメラ，ラインセンサで得られた投影直線における対応

ところが，1次元カメラは投影面が1次元であるため，画像中に異なる2本の直線を定義することはできない．従って，4枚の平面を定義するためには1次元カメラをもう1台用意する必要があり，$\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ における多視点幾何には2視点幾何は存在せず，3視点幾何から存在するということが分かる．

(2) 多視点幾何拘束と trifocal tensor

前節で，4次元空間での基本的な幾何拘束が3次元超平面の交差で表せることを述べた．今度は，幾何拘束をベクトルの条件から，より理解しやすい形で表現する．本節では，最小視点である3視点幾何と trifocal tensor を中心に述べる．尚，本節ではベクトルの内容を分かりやすくするために，前章まで用いてきたテンソル表記ではなく，行列表記を用いることにする．ここで，trifocal tensor $\mathcal{T}_i^{ce}$ のように3階以上のテンソルについては，要素を行列表記したものを組み合わせて $[\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3]$ のように書き表すことにする．そのため，$\mathbf{T}_i$ は 2×2 の行列となる．

第4.3.1節で述べたように3次元空間中の点 $\mathbf{X}$ が2次元カメラと1次元センサにそれぞれ $\mathbf{x}$，$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ として投影されているとする．また，このときのカメラ行列をそれぞれ，$\mathbf{P}^2 = [\,\mathbf{I} \mid \mathbf{0}\,]$，$\mathbf{P}^1_1 = [\,\mathbf{A} \mid \mathbf{a}_4\,], \mathbf{P}^1_2 = [\,\mathbf{B} \mid \mathbf{b}_4\,]$ とする．ここで，$\mathbf{P}^2$ は 3×4 行列，$\mathbf{P}^1_1, \mathbf{P}^1_2$ は 2×4 行列であり，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ は 2×3 行列，$\mathbf{a}_i$，$\mathbf{b}_i$ は 2×1 のベクトルとなる．

このような条件のもと，それぞれのカメラで得られる直線同士の対応について考える．このとき，2次元カメラ画像中の直線 $\mathbf{l}$ は 3×1 のベクトル，1次元カメラ画像中の直線 $\mathbf{l}'$，$\mathbf{l}''$ は 2×1 のベクトルである．また，図のように3直線が3次元空間中で交差する直線を $\mathbf{L}$ とする．

この3直線による幾何学的拘束は，図4.5をみて分かるようにこれら直線を逆射影した平面の交差である．今，それぞれのカメラから逆射影された平面を $\mathbf{\Pi}^2, \mathbf{\Pi}'^1, \mathbf{\Pi}''^1$ とおくと，

これらの平面は画像中の直線 $\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}''$ とカメラ行列を用いて，以下のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Pi}^2 &= \mathbf{P}_i^1\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathbf{l}\\0\end{bmatrix} && (4.48)\\
\mathbf{\Pi}'^1 &= \mathbf{P}_i^1\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}^\top\mathbf{l}'\\\mathbf{a}_4^\top\mathbf{l}'\end{bmatrix} && (4.49)\\
\mathbf{\Pi}''^1 &= \mathbf{P}_i^1\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}^\top\mathbf{l}''\\\mathbf{b}_4^\top\mathbf{l}''\end{bmatrix} && (4.50)
\end{aligned}
$$

これらの平面が交差する条件から3直線間の幾何学的拘束すなわち，trilinear 拘束を導出する．このように逆射影した3平面が3次元空間中で一つの直線として交わる場合，これらの平面は互いに線形独立ではない．従って，3平面による行列 $\mathbf{S} = [\mathbf{\Pi^2},\mathbf{\Pi'^1},\mathbf{\Pi''^1}]$ のランクは2となる．すなわち，2平面を用いて，残りの1平面を表すことができるため，このことを3平面のベクトルを用いると，$\mathbf{\Pi}^2 = \alpha\mathbf{\Pi}'^1 + \beta\mathbf{\Pi}''^1$ と表せる．ここで，それぞれの平面をカメラ行列で表すと，この従属関係は以下のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \begin{bmatrix}\mathbf{l} & \mathbf{A}^\top\mathbf{l}' & \mathbf{B}^\top\mathbf{l}''\\ 0 & \mathbf{a}_4^\top\mathbf{l}' & \mathbf{b}_4^\top\mathbf{l}''\end{bmatrix} && (4.51)\\
\mathbf{l} &= \alpha\mathbf{A}^\top\mathbf{l}' + \beta\mathbf{B}^\top\mathbf{l}'' && (4.52)\\
0 &= \alpha\mathbf{a}_4^\top\mathbf{l}' + \beta\mathbf{b}_4^\top\mathbf{l}'' && (4.53)
\end{aligned}
$$

式 (4.53) より α,β を求め，式 (4.52) に代入すると以下の式が得られる．

$$
\mathbf{l} = (\mathbf{b}_4^\top\mathbf{l}'')\mathbf{A}^\top\mathbf{l}' - (\mathbf{a}_4^\top\mathbf{l}')\mathbf{B}^\top\mathbf{l}'' \qquad (4.54)
$$

また，式 (4.55) を整理し，直線 $\mathbf{l}$ の要素 l_i により表すと以下のように表せる．

$$
l_i = \mathbf{l}'^\top(\mathbf{a}_i\mathbf{b}_4^\top)\mathbf{l}'' - \mathbf{l}'^\top(\mathbf{a}_4\mathbf{b}_i^\top)\mathbf{l}'' \qquad (4.55)
$$

ここで，$\mathbf{T}_i = \mathbf{a}_i\mathbf{b}_4^\top - \mathbf{a}_4\mathbf{b}_i^\top$ とおくと，以下のような3直線に関する trilinear 拘束が得られる．

$$
l_i = \mathbf{l}'^\top\mathbf{T}_i\mathbf{l}'' \qquad (4.56)
$$

また，式 (4.56) は trifocal tensor を行列により表記すると，以下のように表すことができる．

$$
\mathbf{l}^\top = \mathbf{l}'^\top[\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{T}_3]\mathbf{l}'' \;,\;\; (\mathbf{l}'^\top[\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{T}_3]\mathbf{l}'')[\mathbf{l}]_\times = \mathbf{0}^\top \qquad (4.57)
$$

この $\mathbf{T}_i$ は 2×2 行列となり従来の trifocal tensor とは行列の大きさは異なるものの，カメラ行列の要素からなる行列であるため，$[\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2,\mathbf{T}_3]$ は従来の trifocal tensor と同様，3台カメラ間の幾何学的な位置・姿勢の情報を持つ．また，式 (4.57) をテンソル表記すると，式 (4.32) の3直線間の拘束式と一致する．

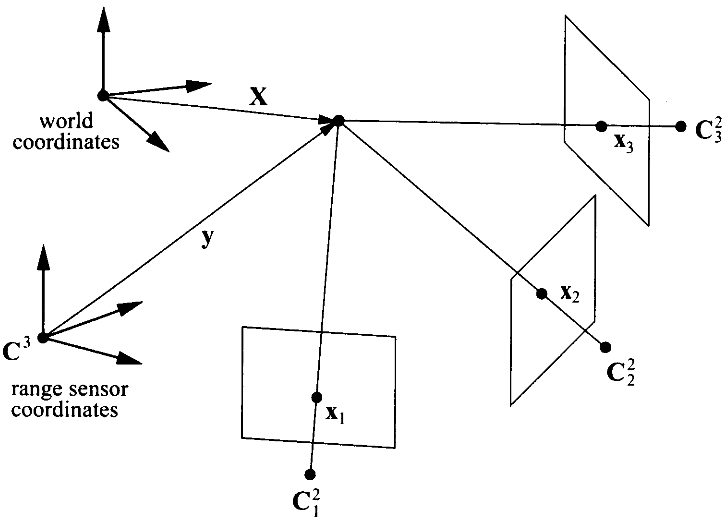


図 4.6 3 次元カメラ $\mathbf{C}^3$ と 2 次元カメラ $\mathbf{C}_i^2$ $(i=1,\cdots,N-1)$ 間の N 視点幾何

4.4　$\mathbf{n}=[0,N-1,1]^\top$ における N 視点幾何

次にカメラの組み合わせが $\mathbf{n}=[0,N-1,1]^\top$ のとき，すなわち，3 次元空間中において，3 次元カメラが 1 台，2 次元カメラが $N-1$ 台，1 次元カメラが 0 台存在する場合の N 視点幾何について考える．

今，3 次元空間中の点を斉次座標で表した $\mathbf{X}=[X^1,X^2,X^3,X^4]^\top$ を考え，この点 $\mathbf{X}$ が 3 次元カメラ $\mathbf{C}^3$ と 2 次元カメラ $\mathbf{C}_i^2(i=1,\cdots,N-1)$ において，それぞれ $\mathbf{y}=[y^1,y^2,y^3,y^4]^\top$，$\mathbf{x}_i=[x_i^1,x_i^2,x_i^3]^\top$ として投影されているとする．このとき，$\mathbf{C}^3$ のカメラ行列を $\mathbf{P}^3$，$\mathbf{C}_i^2$ のカメラ行列を $\mathbf{P}_i^2$ とすると，3 次元空間中の点 X と 3 次元空間中の点 y，3 次元空間中の点 X と 2 次元空間中の点 x との関係はそれぞれ以下のように表すことができる．

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{P}^3\mathbf{X} \tag{4.58}$$

$$\mathbf{x}_i \sim \mathbf{P}_i^2\mathbf{X} \quad (i=1,\cdots,N-1) \tag{4.59}$$

ここで，カメラ行列 $\mathbf{P}^3$ は 4×4 行列であり 15 自由度を持ち，カメラ行列 $\mathbf{P}_i^2$ は 3×4 行列であり 11 自由度を持つ．ここで，式 (4.10) で示した通り行列 $\mathbf{Q}$ を定義し，$\det\mathbf{Q}=0$ を展開することで以下のような運動する 3 次元レンジセンサとカメラ間の bilinear，trilinear，quadrilinear 拘束が得られる．

$$y^i x_1^j \epsilon_{jbp}\mathcal{B}_i^b = 0_p \tag{4.60}$$

$$y^i x_1^j x_2^k \epsilon_{iamn}\epsilon_{jbp}\epsilon_{kcq}\mathcal{T}^{ambc} = 0_{npq} \tag{4.61}$$

$$y^i x_1^j x_2^k x_3^l \epsilon_{iamn}\epsilon_{jbp}\epsilon_{kcq}\epsilon_{ldr}\mathcal{Q}^{abcd} = 0_{mnpqr} \tag{4.62}$$

式 (4.60)，(4.61)，(4.62) において，添え字 i,a，m，n はそれぞれ 1 から 4 までの値を取り，それ以外の添え字は 1 から 3 までの値を取る．また，ϵ_{ijkl} は $\{i,j,k,l\}$ から $\{1,2,3,4\}$

への変換が偶置換であれば 1，奇置換であれば-1，それ以外であれば，0 の値を取るテンソルである．

bifocal tensor $\mathcal{B}_i^b$ は 4×3 の 2 階のテンソル，trifocal tensor $\mathcal{T}^{ambc}$ は $4\times 4\times 3\times 3$ の 4 階のテンソル，quadrifocal tensor $\mathcal{Q}^{abcd}$ は $4\times 3\times 3\times 3$ の 4 回のテンソルであり，前節のテンソルと同様正方テンソルとはならない．また，式 (4.6) において $k=3$，$\mathbf{n}=[0,N-1,1]^\top$ のときに代入すると，N 視点幾何の自由度は $11N-11$ となる．従って，$\mathcal{B}_i^b$ は 11 自由度，$\mathcal{T}^{ambc}$ は 22 自由度，$\mathcal{Q}^{abcd}$ は 33 自由度であることがわかる．同様に，式 (4.8) に $k=3$，$\mathbf{n}=[0,N-1,1]^\top$ を代入した場合には，以下の $\mathcal{B}_i^b$，$\mathcal{T}^{ambc}$，$\mathcal{Q}^{abcd}$ の計算に必要な対応点数に関して以下の式が得られる．

$$M \geq \frac{11}{2} \tag{4.63}$$

式 (4.63) より，$\mathbf{n}=[0,N-1,1]^\top$ における多視点幾何は視点数に関わらず，対応点 6 点から計算可能であることがわかる．

4.4.1 $\mathbf{n}=[0,N-1,1]^\top$ における N 視点幾何の線形計算に必要な最小対応点数

次に，$\mathcal{B}_i^b$，$\mathcal{T}^{ambc}$，$\mathcal{Q}^{abcd}$ の線形計算について考える．$\mathcal{B}_i^b$ は先に述べた通り，4×3 の 2 解テンソルであり，定数倍の不定性を除くと，その未知数は 11 である．一方，式 (4.60) に示す bilinear 拘束は 1 組の対応点に対して 2 本の独立な拘束式を持つ．これより，画像中の対応点が 6 点あれば，線形に $\mathcal{B}_i^b$ を計算可能であることが分かる．

また，$\mathcal{T}^{ambc}$ は $4\times 4\times 3\times 3$ の 4 階テンソルであり，144 要素を持つが，その中の 36 要素が 0 であり，さらに 54 要素が線形従属な関係にある．そのため，要素数は 144 であるが，定数倍の不定性を除いた $\mathcal{T}^{ambc}$ の実際の未知数は 53 となる．一方，式 (4.61) より $\mathcal{T}^{ambc}$ に関して $4\times 3\times 3=36$ の拘束式が得られるが，その中で線形独立なものは 12 本のみである．さらに，複数の対応点から式 (4.61) の拘束を得た場合，これらの間には線形従属な関係が生じる．そのため，これらを差し引くと，画像中に M 点の対応点があるとき，式 (4.61) からは $12M-{}_MC_2$ の線形独立な式が得られる．これより，画像中の対応点が 6 点あれば，線形に $\mathcal{T}^{ambc}$ を計算可能であることが分かる．

同様に，$\mathcal{Q}^{abcd}$ は $4\times 3\times 3\times 3$ の 4 階テンソルであり，108 の要素を持つが，定数倍の不定性を除いた未知数は 107 である．一方，式 (4.62) に示す quadrilinear 拘束からは $\mathcal{Q}^{abcd}$ に関する $4\times 4\times 3\times 3\times 3=432$ 本の拘束式が得られるが，その中で線形独立なものは 24 本のみである．さらに，複数の対応点から式 (4.61) の拘束を得た場合，これらの間には線形従属な関係が生じる．そのため，これらを差し引くと，画像中に M 点の対応点があるとき，式 (4.62) からは $24M-2{}_MC_2$ の線形独立な式が得られる．これより，画像中の対応点が 6 点あれば，線形に $\mathcal{Q}^{abcd}$ を計算可能であることが分かる．

これらのことをまとめると $\mathbf{n}=[0,N-1,1]^\top$ における多視点幾何では非線形・線形に関わらず，また視点数によらず画像中の対応点 6 点から multifocal tensor を計算可能であ

表 4.3 $\mathbf{n} = [0, N-1, 1]^\top$ のときの，multifocal tensor の非線形・線形計算に必要な最小対応点数

views	tensor	elements	DOF	nonlinear	linear
2	$\mathcal{B}$	$4 \times 3 = 12$	11	6	6
3	$\mathcal{T}$	$4 \times 4 \times 3 \times 3 = 144$	22	6	6
4	$\mathcal{Q}$	$4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$	33	6	6

る．$\mathbf{n} = [0, N-1, 1]^\top$ のときの multifocal tensor の計算に必要な最小対応点数を表 4.3 に示す．

これまでは，mulitifocal tensor の点同士の関係と最小対応点数について議論してきた．一方, $\mathcal{B}_i^b$，$\mathcal{T}^{ambc}$，$\mathcal{Q}^{abcd}$ に基づく multilinear 拘束には, 点同士の関係だけでなく点と直線や点と直線と平面との関係も存在する．以下に 2 視点における点と直線および平面の対応関係を表す bilinear 拘束を示す．

$$y^i l'_b \mathcal{B}_i^b \;=\; 0 \tag{4.64}$$

ここで，$\mathbf{l}'$ は第 2 画像中の直線である．また，以下に 3 視点における点と直線および平面の対応関係を表す trilinear 拘束を示す．

$$\begin{aligned} y^i x_1^j l''_c \epsilon_{iamn} \epsilon_{jbp} \mathcal{T}^{ambc} &= 0_{np} && (4.65)\\ y^i l'_b l''_c \epsilon_{iamn} \mathcal{T}^{ambc} &= 0_n && (4.66)\\ p_a^1 p_m^2 l'_b l''_c \mathcal{T}^{ambc} &= 0 && (4.67) \end{aligned}$$

同様に, 4 視点における点と直線および平面の対応関係を表す quadrilinear 拘束を示す．

$$\begin{aligned} y^i x_1^j x_2^k l'''_d \epsilon_{iamn} \epsilon_{jbp} \epsilon_{kcq} \mathcal{Q}^{abcd} &= 0_{mnpq} && (4.68)\\ y^i x_1^j l''_c l'''_d \epsilon_{iamn} \epsilon_{jbp} \mathcal{Q}^{abcd} &= 0_{mnp} \;. && (4.69)\\ y^i l'_b l''_c l'''_d \epsilon_{iamn} \mathcal{Q}^{abcd} &= 0_{mn} && (4.70)\\ p_a l'_b l''_c l'''_d \mathcal{Q}^{abcd} &= 0 && (4.71) \end{aligned}$$

これらの拘束式からも先ほどと同様，線形独立な式の本数を考えることにより，最小対応点数と最小対応線数を導出することができる．

4.4.2 $\mathbf{n} = [0, N-1, 1]^\top$ における N 視点幾何の幾何学的特性

これまでに述べたような代数的な解析により, 多視点幾何の様々な性質が明らかになった．本節では，$\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ のときと同様，$\mathbf{n} = [0, N-1, 1]^\top$ における N 視点幾何の幾何学的な意味を理解するために，$\mathbf{n} = [0, N-1, 1]^\top$ における N 視点幾何を異なる方

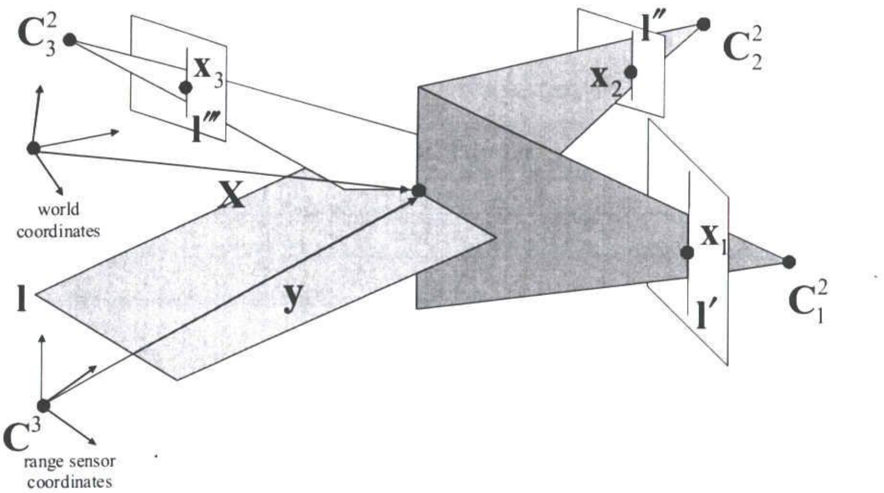


図 4.7 4 視点における 4 直線の関係

法で導き出し，詳しく説明する．第 2 章と第 4.3.2 節で述べたように，3 次元空間中における基本的な幾何学的特性は 4 枚の平面の交差で表すことができた．また，このときの平面というのは，それぞれのカメラから逆射影した平面であった．しかし，$\mathbf{n} = [0, N-1, 1]^\top$ における多視点幾何では従来の多視点幾何とは異なり，投影前の次元と投影後の次元が一致するセンサが存在する．このような場合においても，基本的な幾何学的特性は 4 枚の平面の交差であるものの，その平面はカメラから逆射影された平面ではない．本節では，このような次元を変化させないセンサと 4 平面の交差について詳しく説明するとともに，各視点における multifocal tensor を導出していく．

まず，従来の多視点幾何と同様に quadrifocal tensor の導出から説明する．今，図 4.7 のように 3 次元カメラ 1 台と 2 次元カメラ 3 台が存在するとし，第 4.3.2 節と同様に，それぞれのカメラ行列を $\mathbf{P}^3, \mathbf{P}_1^2, \mathbf{P}_2^2, \mathbf{P}_3^2$ とする．ここで 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ のこれらのカメラにおける投影像をそれぞれ $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ とする．このとき，3 次元カメラにおいては投影点 $\mathbf{y}$ を通る平面 $\mathbf{p}$ が，2 次元カメラにおいては投影点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ を通る直線 $\mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$ が得られているとする．すると，第 4.3.1 節と同様，直線 $\mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$ を逆射影してできる平面はカメラ行列を用いて，$\mathbf{P}_1^{2\top}\mathbf{l}'$，$\mathbf{P}_2^{2\top}\mathbf{l}''$，$\mathbf{P}_3^{2\top}\mathbf{l}'''$ と表すことができる．一方，3 次元カメラは 4×4 の正方行列であるため，$\mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}$ は逆射影にはならず射影変換となる．このように射影変換を行った場合には，単なる座標変換に過ぎないため次元は変化しない．従って，その変換結果は平面となる．このような変換における平面は一見，拘束にならないように思えるが，この平面はカメラの光学中心は通らないものの必ず空間中の点 $\mathbf{X}$ を通る．そのため，この平面との交差が 3 次元空間中で点を決定するための幾何学的拘束になる．従って，上に述べたような 4 平面による幾何学的拘束を考えると，3 次元カメラ $\mathbf{P}^3$ による平面 $\mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}$ と 2 次元カメラによる平面 $\mathbf{P}_1^{2\top}\mathbf{l}'$，$\mathbf{P}_2^{2\top}\mathbf{l}''$，$\mathbf{P}_3^{2\top}\mathbf{l}'''$ は以下の条件を満たす必要がある．

$$\det[\mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p} \quad \mathbf{P}_1^{2\top}\mathbf{l}' \quad \mathbf{P}_2^{2\top}\mathbf{l}'' \quad \mathbf{P}_3^{2\top}\mathbf{l}'''] = 0 \tag{4.72}$$

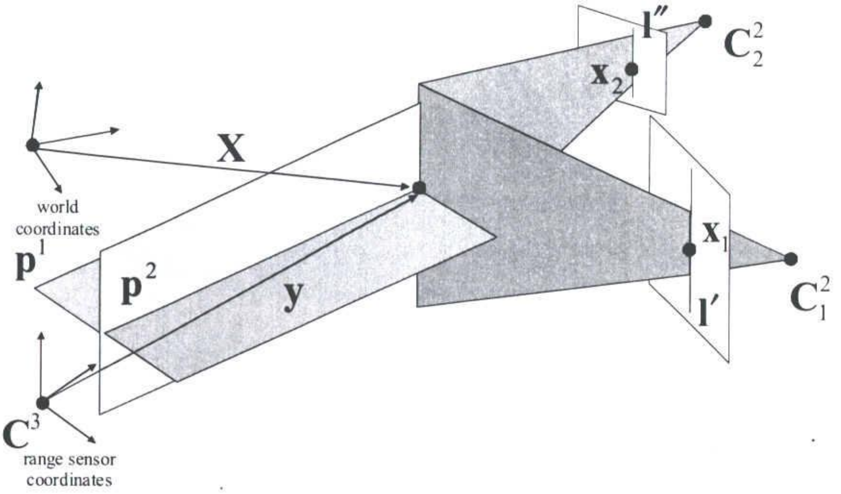


図 4.8 3 視点における 4 直線の関係

式 (4.72) をテンソル表記で表すと以下のようになる．

$$p_a l'_b l''_c l'''_d \epsilon^{ijkl} P_i^{3\,a} P_j^{2\,b} P_k^{2\,c} P_l^{2\,d} = 0 \tag{4.73}$$

式 (4.73) において，平面 $\mathbf{p}$ と直線 $\mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$ 以外の部分をまとめて以下のようにおく．

$$\mathcal{Q}^{abcd} = \epsilon^{ijkl} P_i^{3\,a} P_j^{2\,b} P_k^{2\,c} P_l^{2\,d} \tag{4.74}$$

すると，式 (4.73) は以下のように変形することができる．

$$p_a l'_b l''_c l'''_d \mathcal{Q}^{abcd} = 0 \tag{4.75}$$

このとき，式 (4.75) は quadrifocal tensor における式 (4.71) と一致していることが分かる．

次に，3 次元空間中の 4 枚平面の交差を用いて，trifocal tensor を導出する．今，図 4.8 のように 3 次元カメラ 1 台と，2 次元カメラ 2 台が存在するとし，これらのカメラ行列を $\mathbf{P}^3, \mathbf{P}_1^2, \mathbf{P}_2^2$ とする．また，ある 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ のこれらのカメラによる投影像を $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ とする．さらに，2 次元カメラにおいては，この投影点を通る直線 $\mathbf{l}', \mathbf{l}''$ が得られているとし，また，3 次元カメラでは $\mathbf{y}$ を通る任意の平面 $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2$ が得られているとする．このような直線を逆射影した平面と 3 次元カメラによる平面が図のように 3 次元空間中の 1 点で交わるためには，以下に示す条件を満たす必要がある．

$$\det[\mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^1 \quad \mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^2 \quad \mathbf{P}_1^{2\top}\mathbf{l}' \quad \mathbf{P}_2^{2\top}\mathbf{l}''] = 0 \tag{4.76}$$

式 (4.76) はテンソル表記を用いると以下のように表すことができる．

$$p_a^1 p_m^2 l_b l_c \epsilon^{ijkl} P_i^{3\,a} P_j^{2\,m} P_k^{2\,b} P_l^{2\,c} = 0 \tag{4.77}$$

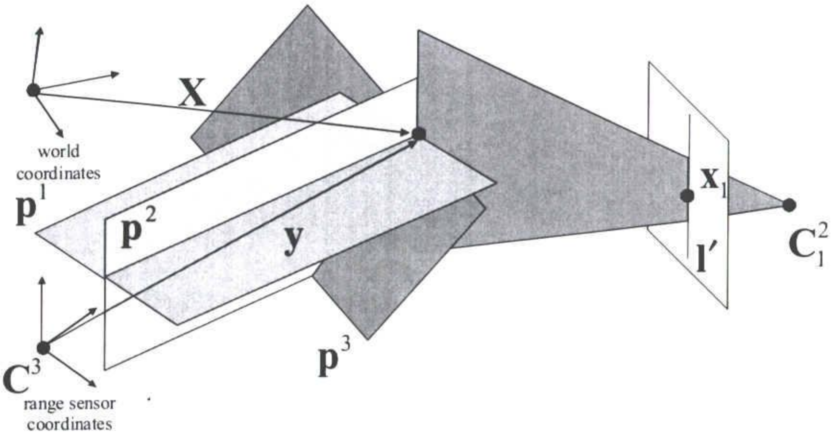


図 4.9 3 視点における 4 直線の関係

ここで，式 (4.77) に中の平面 $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{p}^2$ と直線 $\mathbf{l}'$, $\mathbf{l}''$ 以外の部分をまとめて以下のようにおく．

$$\mathcal{T}^{ambc} = \epsilon^{ijkl} P_i^{2\,a} P_j^{2\,m} P_k^{2\,b} P_l^{2\,c} \tag{4.78}$$

すると，式 (4.77) は以下のように変形することができる．

$$p_a^1 p_m^2 l_b l_c \mathcal{T}^{ambc} = 0 \tag{4.79}$$

このとき，式 (4.79) は trifocal tensor における式 (4.67) と一致していることが分かる．

最後に，3 次元空間中の 4 平面の交差を用いて bifocal tensor の導出について述べる．今，図 4.9 のように 3 次元カメラ 1 台と，2 次元カメラ 1 台が存在するとし，これらのカメラ行列を $\mathbf{P}^3, \mathbf{P}_1^2$ とする．また，ある 3 次元空間中の点 $\mathbf{X}$ のこれらのカメラによる投影像を $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1$ とする．さらに，2 次元カメラにおいては，この投影点を通る直線 $\mathbf{l}'$ が得られているとし，また，3 次元カメラでは $\mathbf{y}$ を通る任意の平面 $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{p}^3$ が得られているとする．このような直線を逆射影した平面と 3 次元カメラによる 3 平面が図のように 3 次元空間中の 1 点で交わるためには，以下に示す条件を満たす必要がある．

$$\det[\mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^1 \quad \mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^2 \quad \mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^3 \quad \mathbf{P}_1^{2\top}\mathbf{l}'] = 0 \tag{4.80}$$

式 (4.80) はテンソル表記を用いると以下のように表すことができる．

$$p_a^1 p_c^2 p_d^3 l_b' \epsilon^{pqrs} P_p^{3\,a} P_q^{2\,c} P_r^{2\,d} P_s^{2\,b} = 0 \tag{4.81}$$

ここで，式 (4.81) にスカラー $\epsilon^{iacd}\epsilon_{iacd}$ をかけ，以下の式ようにまとめる．

$$(p_a^1 p_c^2 p_d^3 \epsilon^{iacd}) l_b' \epsilon_{iacd} \epsilon^{pqrs} P_p^{3\,a} P_q^{2\,c} P_r^{2\,d} P_s^{2\,b} = 0 \tag{4.82}$$

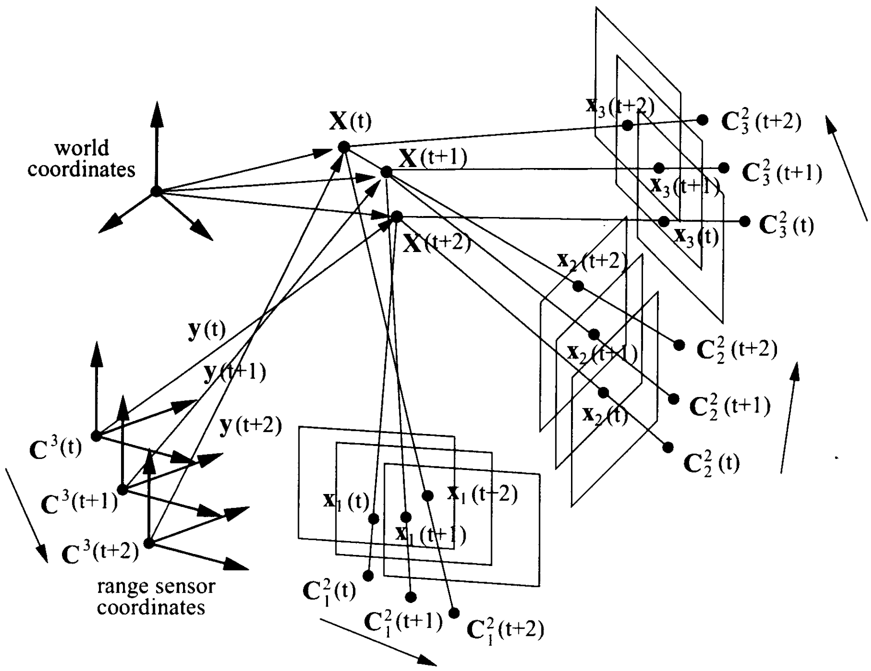


図 4.10 移動 3 次元レンジセンサ $\mathbf{C}^3$ と移動 2 次元カメラ $\mathbf{C}_i^2$ $(i = 1, \cdots, N-1)$ 間の N 視点幾何

このとき $p_a^1 p_c^2 p_d^3 \epsilon^{iacd}$ は 3 つの平面 $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{p}^3$ の外積であり，3 平面の交点 $\mathbf{y}$ を表す．従って，式 (4.82) は以下のように書き換えることができる．

$$y^i l'_b \epsilon_{iacd} \epsilon^{pqrs} P_p^{3\,a} P_q^{2\,c} P_r^{2\,d} P_s^{2\,b} = 0 \tag{4.83}$$

ここで，点 $\mathbf{y}$ と直線 $\mathbf{l}'$ 以外の部分をまとめて以下のようにおく．

$$\mathcal{B}_i^b = \epsilon_{iacd} \epsilon^{pqrs} P_p^{3\,a} P_q^{2\,c} P_r^{2\,d} P_s^{2\,b} \tag{4.84}$$

すると，式 (4.83) は以下のように書き換えることができる．

$$y^i l'_b \mathcal{B}_i^b = 0 \tag{4.85}$$

このとき，式 (4.85) は bifocal tensor における式 (4.64) と一致していることが分かる．これらのことから，$\mathbf{n} = [N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何の幾何学的特性も，従来の多視点幾何と同様，4 つの平面の交差により表されることが分かる．

4.5 $\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何

前章までで，静止したセンサやカメラが混在する場合の多視点幾何について述べた．本章では，このような複合次元カメラが独立に運動する場合の多視点幾何について述べる．

例として，図 4.10 に示すような 1 台の運動する 3 次元レンジセンサ $\mathbf{C}^3$ と $N-1$ 台の運動する 2 次元カメラ $\mathbf{C}_i^2$ $(i=1,\cdots,N-1)$ を考え、これら N 台のカメラとセンサの間に成り立つ多視点幾何について考える．このような運動するカメラとセンサ間の関係を記述するために，第 3 章と同様に，通常の 3 次元空間から 2 次元空間への投影ではなく，高次元空間からの投影を考える．ここでは特に 4 次元空間から 2 次元カメラや 3 次元センサへの投影に基づく多視点幾何について詳しく説明していくことにする．また，このような多視点幾何により，運動する 3 次元レンジセンサと運動する 2 次元カメラ間の関係が記述できることを示す．

今，3 次元空間中で運動する点 $\widetilde{\mathbf{X}}=[X,Y,Z]^\top$ を考える．この点 $\mathbf{X}$ が等速並進運動するカメラ $\mathbf{C}^2$ に $\widetilde{\mathbf{x}}=[x,y]^\top$ として投影されているとする．すると，この運動点 $\mathbf{X}$ は次のように画像面に投影される．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X-T\Delta X \\ Y-T\Delta Y \\ Z-T\Delta Z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.86}$$

ここで，T は時刻であり，ΔX，ΔY，ΔZ は，それぞれ X 方向，Y 方向，Z 方向のカメラの並進速度である．

今，$\widetilde{\mathbf{X}}=[X,Y,Z]^\top$ に対して時刻 T を加えた 4 次元空間を考えると，式 (4.86) は以下のように記述することができる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & -P_{11}\Delta X-P_{12}\Delta Y-P_{13}\Delta Z & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & -P_{21}\Delta X-P_{22}\Delta Y-P_{23}\Delta Z & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & -P_{31}\Delta X-P_{32}\Delta Y-P_{33}\Delta Z & P_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.87}$$

ここで，並進運動はカメラごとに異なるが，どのカメラも等速であるため，ΔX，ΔY，ΔZ はそれぞれのカメラにおいて一定である．すなわち，式 (4.87) における 3×5 のカメラ行列は未知ではあるが，パラメータは固定となる．よって，3 次元空間中で運動するカメラは 4 次元空間中においては静止カメラとして扱うことができる．

同様に，運動点 $\mathbf{X}$ を等速並進運動する 3 次元レンジセンサによって計測した結果が $\widetilde{\mathbf{y}}=[x,y,z]^\top$ であったとすると，点 $\mathbf{X}$ と点 $\mathbf{y}$ の関係は以下の通り 4 次元空間中の静止したレンジセンサへの投影として扱うことができる．

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & -P_{11}\Delta X - P_{12}\Delta Y - P_{13}\Delta Z & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & -P_{21}\Delta X - P_{22}\Delta Y - P_{23}\Delta Z & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & -P_{31}\Delta X - P_{32}\Delta Y - P_{33}\Delta Z & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & -P_{41}\Delta X - P_{42}\Delta Y - P_{43}\Delta Z & P_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.88}
$$

ここで ΔX，ΔY，ΔZ はレンジセンサの並進速度である。以上のように，運動するカメラやセンサは高次元空間では静止カメラや静止センサとして扱うことができるため，本来，静的なものしか扱えない多視点幾何で運動物体を扱うことができる．そのため，以降では運動するレンジセンサとカメラの間で成り立つ多視点幾何（$k=4$，$\mathbf{n}=[0,N-1,1,0]^\top$）について考える．

今，4 次元空間中の点を斉次座標で表した $\mathbf{W}=[W^1,W^2,W^3,W^4,W^5]^\top$ を考える．この $\mathbf{W}$ が並進運動する 3 次元レンジセンサ $\mathbf{C}^3$，2 次元カメラ $\mathbf{C}_i^2$ を用いて，それぞれ $\mathbf{y}=[y^1,y^2,y^3,y^4]^\top$，$\mathbf{x}=[x^1,x^2,x^3]^\top$ として投影されるとする．このとき，並進運動する 3 次元レンジセンサ $\mathbf{C}^3$ と 2 次元カメラ $\mathbf{C}_i^2$ による投影はそれぞれ以下のように表すことができる．

$$
\mathbf{y} \sim \mathbf{P}^3\mathbf{W} \tag{4.89}
$$

$$
\mathbf{x}_i \sim \mathbf{P}_i^2\mathbf{W} \quad (i=1,\cdots,N-1) \tag{4.90}
$$

ここで，$\mathbf{P}^3$ は 4×5 行列であり 19 自由度を持ち，$\mathbf{P}_i^2$ は 3×5 行列であり 14 自由度を持つ．

式 (4.10) で示した通り行列 $\mathbf{Q}$ を定義し，$\det\mathbf{Q}=0$ を展開することで以下のような運動する 3 次元レンジセンサとカメラ間の bilinear，trilinear，quadrilinear，quintilinear 拘束が得られる．

$$
y^i x_1^j \mathcal{B}_{ij} = 0 \tag{4.91}
$$

$$
y^i x_1^j x_2^k \epsilon_{jbr}\epsilon_{kcs}\mathcal{T}_i^{bc} = 0_{rs} \tag{4.92}
$$

$$
y^i x_1^j x_2^k x_3^l \epsilon_{iapq}\epsilon_{jbr}\epsilon_{kcs}\epsilon_{ldt}\mathcal{Q}^{apbcd} = 0_{qrst} \tag{4.93}
$$

$$
y^i x_1^j x_2^k x_3^l x_4^m \epsilon_{iapq}\epsilon_{jbr}\epsilon_{kcs}\epsilon_{ldt}\epsilon_{meu}\mathcal{R}^{abcde} = 0_{pqrstu} \tag{4.94}
$$

ここで quintilinear 拘束とは 5 視点幾何拘束のことである．$\mathcal{B}_{ij}$，$\mathcal{T}_i^{bc}$，$\mathcal{Q}^{apbcd}$，$\mathcal{R}^{abcde}$ はそれぞれ bilinear tensor，trilinear tensor，quadrilinear tensor，quintilinear tensor であり，カメラセンサ間の位置，姿勢，相対運動などの情報を含んでいる．通常の multilinear 拘束とは異なり，添え字 i,a,p,q は 1 から 4 までの値を取り，それ以外の添え字は 1 から 3 までの値を取る．従って，これらの multifocal tensor は従来の multifocal tensor とは異なり正方テンソルではない．これは，それぞれのセンサの次元が異なることに起因している．

表 4.4 $\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^\top$ のときの，multifocal tensor の非線形・線形計算に必要な最小対応点数

views	tensor	elements	DOF	nonlinear	linear
2	$\mathcal{B}$	$4 \times 3 = 12$	9	9	11
3	$\mathcal{T}$	$4 \times 3 \times 3 = 36$	23	8	9
4	$\mathcal{Q}$	$4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 432$	37	8	8
5	$\mathcal{R}$	$4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324$	51	8	8

4.5.1 $\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何の線形計算に必要な最小対応点数

本節では，$\mathcal{B}_{ij}$，$\mathcal{T}_i^{bc}$，$\mathcal{Q}^{apbcd}$，$\mathcal{R}^{abcde}$ の線形計算法について考える．$\mathcal{B}_{ij}$ は 4×3 の2階テンソルであり，定数倍の不定性を除いて未知数は11である．一方，式(4.91)に示すbilinear拘束は，1組の対応点に対し，1本の拘束式を持つ．これより，画像中の対応点が11点あれば，線形に $\mathcal{B}_{ij}$ を計算可能であることがわかる．

$\mathcal{T}_i^{bc}$ は $4 \times 3 \times 3$ の3階テンソルであり，36の要素を持つが，定数倍の不定性を除くと未知数は35となる．一方，式(4.92)に示すtrilinear拘束には $3 \times 3 = 9$ 本の式があるが，この中で線形独立なものは4本のみである．これより，画像中の対応点が9点あれば，線形に $\mathcal{T}_i^{bc}$ を計算可能であることがわかる．

$\mathcal{Q}^{apbcd}$ は $4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3$ の5階テンソルであり，432の要素を持つ．しかし，432要素中108要素が0であり，さらに $\mathcal{Q}^{apbcd}$ の要素間で依存関係が存在するため，定数倍の不定性を除いた未知数は161となる．一方，式(4.93)に示すquadrilinear拘束には $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$ 本の式があるが，この中で線形独立なものは24本のみである．さらに複数の対応点から式(4.93)の拘束を得た場合，これらの間には線形従属な関係が生じるため，これらを差し引くと，画像中に M 点の対応点があるとき，式(4.93)からは $24M -_M C_2$ 本の線形独立な式が得られる．これより，画像中の対応点が8点あれば，線形に $\mathcal{Q}^{apbcd}$ を計算可能であることがわかる．同様に，$\mathcal{R}^{abcde}$ は $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ の5階テンソルであり，324の要素を持つが，定数倍の不定性を除いた未知数は323である．一方，式(4.94)に示すquadrilinear拘束には $4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1296$ 本の式があるが，この中で線形独立なものは48本のみである．さらに複数の対応点から式(4.94)の拘束を得ると，これらの間には従属な関係が生じる．そのため，画像中に M 点の対応点があるとすると，式(4.94)からは $48M -_M C_2$ 本の線形独立な式が得られる．これより，画像中の対応点が8点あれば，線形に $\mathcal{R}^{abcde}$ を計算可能であることがわかる．$\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^\top$ のときのmultifocal tensorの計算に必要な最小対応点数を表4.4に示す．

これまでは，mulitifocal tensorの点同士の関係と最小対応点数について議論してきた．一方，$\mathcal{T}_i^{bc}$，$\mathcal{Q}^{apbcd}$，$\mathcal{R}^{abcde}$ に基づくmultilinear拘束には，点同士の関係だけでなく点と直

線との関係も存在する．以下に3視点における点と直線の対応関係を表す trilinear 拘束を示す．

$$
\begin{aligned}
y^i x_1^j l_c'' \epsilon_{jbr} \mathcal{T}_i^{bc} &= 0_r & (4.95)\\
y^i l_b' l_c'' \mathcal{T}_i^{bc} &= 0 & (4.96)
\end{aligned}
$$

次に，4視点における点と直線の対応関係を表す quadrilinear 拘束を示す．

$$
\begin{aligned}
y^i x_1^j x_2^k l_d''' \epsilon_{iapq} \epsilon_{jbr} \epsilon_{kcs} \mathcal{Q}^{apbcd} &= 0_{qrs} & (4.97)\\
y^i x_1^j l_c'' l_d''' \epsilon_{iapq} \epsilon_{jbr} \mathcal{Q}^{apbcd} &= 0_{qr} & (4.98)\\
y^i l_b' l_c'' l_d''' \epsilon_{iapq} \mathcal{Q}^{apbcd} &= 0_q & (4.99)\\
p_a^1 p_p^2 l_b' l_c'' l_d''' \mathcal{Q}^{apbcd} &= 0 & (4.100)
\end{aligned}
$$

次に，4視点における点と直線の対応関係を表す quintilinear 拘束を示す．

$$
\begin{aligned}
y^i x_1^j x_2^k x_3^l x_4^m \epsilon_{iapq} \epsilon_{jbr} \epsilon_{kcs} \epsilon_{ldt} \epsilon_{meu} \mathcal{R}^{abcde} &= 0_{pqrstu} & (4.101)\\
y^i x_1^j x_2^k x_3^l l_e'''' \epsilon_{iapq} \epsilon_{jbr} \epsilon_{kcs} \epsilon_{ldt} \mathcal{R}^{abcde} &= 0_{pqrst} & (4.102)\\
y^i x_1^j x_2^k l_d''' l_e'''' \epsilon_{iapq} \epsilon_{jbr} \epsilon_{kcs} \mathcal{R}^{abcde} &= 0_{pqrs} & (4.103)\\
y^i x_1^j l_c'' l_d''' l_e'''' \epsilon_{iapq} \epsilon_{jbr} \mathcal{R}^{abcde} &= 0_{pqr} & (4.104)\\
y^i l_b' l_c'' l_d''' l_e'''' \epsilon_{iapq} \mathcal{R}^{abcde} &= 0_{pq} & (4.105)\\
p_a l_b' l_c'' l_d''' l_e'''' \mathcal{R}^{abcde} &= 0 & (4.106)
\end{aligned}
$$

これらの拘束式からも先ほどと同様，線形独立な式の本数を考えることにより，最小対応点数と最小対応線数を導出することができる．

4.5.2 $\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何の幾何学的特性

前節までで，代数的な解析から $\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何の様々な性質を明らかになった．本節では $\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何の幾何学的な意味を理解するために，N 視点幾何を異なる方法で導き出し，詳しく説明する．

(1) 5つの3次元超平面の交差

第4.2.5節の超平面の交差で述べたように，k 次元空間中における基本的な幾何学的特性は $k+1$ 枚の超平面の交差で表すことができた．従って，4次元空間中における基本的な幾何学的特性は5枚の超平面の交差で表すことができる．また，このときの超平面というのは，カメラ画像で得られている直線や平面を逆射影したものであった．以降では，他の多視点幾何と同様に，平面の交差を用いて複合次元センサの組み合わせにおける幾何学的特性について詳しく説明していく．

まず，quintifocal tensor の導出から説明する．今，運動する3次元カメラ1台と運動する2次元カメラ4台が存在するとし，それぞれのカメラ行列を $\mathbf{P}^3, \mathbf{P}_1^2, \mathbf{P}_2^2, \mathbf{P}_3^2, \mathbf{P}_4^2$ とする．

ここで4次元空間中の点$\mathbf{W}$のこれらのカメラにおける投影像をそれぞれ$\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$とする．さらに，3次元カメラによる投影点$\mathbf{y}$を通る平面$\mathbf{p}$，2次元カメラの投影点$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$を通る直線$\mathbf{l}, \mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$が得られているとする．このとき，これらを逆射影して得られる5つの超平面$\mathbf{S}$，$\mathbf{S}'$，$\mathbf{S}''$，$\mathbf{S}'''$，$\mathbf{S}''''$は4次元空間中の1点$\mathbf{W}$で交差する．この関係は$\mathbf{S}$，$\mathbf{S}'$，$\mathbf{S}''$，$\mathbf{S}'''$，$\mathbf{S}''''$を用いて以下のように表すことができる．

$$\det[\mathbf{S} \quad \mathbf{S}' \quad \mathbf{S}'' \quad \mathbf{S}''' \quad \mathbf{S}''''] = 0 \tag{4.107}$$

一方，3次元カメラによる平面$\mathbf{p}$を逆射影した超平面$\mathbf{S}$と2次元カメラにより直線$\mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$を逆射影した平面$\mathbf{S}'$，$\mathbf{S}''$，$\mathbf{S}'''$は式(4.16)のように表すことができた．従って，式(4.107)は以下のように表すことができる．

$$\det[\mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p} \quad \mathbf{P}_1^{2\top}\mathbf{l}' \quad \mathbf{P}_2^{2\top}\mathbf{l}'' \quad \mathbf{P}_3^{2\top}\mathbf{l}''' \quad \mathbf{P}_4^{2\top}\mathbf{l}''''] = 0 \tag{4.108}$$

先と同様に式(4.108)をテンソル表記すると，以下に示すような平面と4直線に関する拘束式が得られる．

$$p_a l'_b l''_c l'''_d l''''_e \epsilon^{ijklm} P_i^{3\,a} P_{1\,j}^{2\,b} P_{2\,k}^{2\,c} P_{3\,l}^{2\,d} P_{4\,m}^{2\,e} = 0 \tag{4.109}$$

ここで，平面と線以外の部分をまとめて以下のようにおく．

$$\mathcal{R}^{abcd} = \epsilon^{ijklm} P_i^{3\,a} P_{1\,j}^{2\,b} P_{2\,k}^{2\,c} P_{3\,l}^{2\,d} P_{4\,m}^{2\,e} \tag{4.110}$$

すると，式(4.109)は以下のように書き換えることができる．

$$p_a l'_b l''_c l'''_d l''''_e \mathcal{R}^{abcde} = 0 \tag{4.111}$$

このとき，式(4.111)はquadrifocal tensorにおける式(4.106)と一致していることが分かる．

次に，quadrifocal tensorの導出から説明する．今，運動する3次元カメラ1台と運動する2次元カメラ3台が存在するとし，先ほどと同様に，それぞれのカメラ行列を$\mathbf{P}^3, \mathbf{P}_1^2, \mathbf{P}_2^2, \mathbf{P}_3^2$とする．ここで4次元空間中の点$\mathbf{W}$のこれらのカメラにおける投影像をそれぞれ$\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$とする．さらに，3次元カメラの投影点$\mathbf{y}$を通る任意の平面$\mathbf{p}^1$，$\mathbf{p}^2$と，2次元カメラの投影点$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$を通る直線$\mathbf{l}', \mathbf{l}'', \mathbf{l}'''$が得られているとする．このとき，これらを逆射影して得られる5つの平面が4次元空間中の1点$\mathbf{W}$で交差するためには以下に示す条件を満たす必要がある．

$$\det[\mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^1 \quad \mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^2 \quad \mathbf{P}_1^{2\top}\mathbf{l}' \quad \mathbf{P}_2^{2\top}\mathbf{l}'' \quad \mathbf{P}_3^{2\top}\mathbf{l}'''] = 0 \tag{4.112}$$

先と同様に式(4.112)をテンソル表記すると，以下に示すような平面と直線に関する拘束式が得られる．

$$p_a^1 p_p^2 l'_b l''_c l'''_d \epsilon^{ijklm} P_i^{3\,a} P_j^{3\,p} P_{1\,k}^{2\,b} P_{2\,l}^{2\,c} P_{3\,m}^{2\,d} = 0 \tag{4.113}$$

ここで，平面や線以外の部分をまとめて以下のようにおく．

$$\mathcal{Q}^{apbcd} = \epsilon^{ijklm} P^{3\,a}_{i} P^{3\,p}_{j} P^{2\,b}_{1\,k} P^{2\,c}_{2\,l} P^{2\,d}_{3\,m} \tag{4.114}$$

すると，式 (4.114) は以下のように書き換えることができる．

$$p^1_a p^2_p l'_b l''_c l'''_d \mathcal{Q}^{apbcd} = 0 \tag{4.115}$$

このとき，式 (4.115) は quadrifocal tensor における式 (4.100) と一致していることが分かる．

次に，4 次元空間中の 5 枚平面の交差を用いて，trifocal tensor を導出する．今，運動する 3 次元カメラ 1 台と運動する 2 次元カメラ 2 台が存在するとし，これらのカメラ行列を $\mathbf{P}^3, \mathbf{P}^2_1, \mathbf{P}^2_2$ とする．また，ある 4 次元空間中の点 $\mathbf{W}$ のこれらのカメラによる投影像を $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ とする．さらに，2 次元カメラにおいては，この投影点を通る直線 $\mathbf{l}', \mathbf{l}''$ が得られているとし，また，3 次元カメラでは $\mathbf{y}$ を通る任意の平面 $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \mathbf{p}^3$ が得られているとする．これらを逆射影した超平面が 4 次元空間中の 1 点 $\mathbf{W}$ で交わるためには，以下に示す条件を満たす必要がある．

$$\det[\mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^1 \quad \mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^2 \quad \mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^3 \quad \mathbf{P}^{2\top}_1\mathbf{l}' \quad \mathbf{P}^{2\top}_2\mathbf{l}''] = 0 \tag{4.116}$$

式 (4.116) をテンソル表記すると，以下に示すような平面と直線に関する拘束式が得られる．

$$p^1_a p^2_m p^3_n l'_b l''_c \epsilon^{pqrst} P^{3\,a}_{p} P^{3\,m}_{q} P^{3\,n}_{r} P^{2\,b}_{s} P^{2\,c}_{t} = 0 \tag{4.117}$$

ここで，式 (4.117) にスカラー $\epsilon^{iamn}\epsilon_{iamn}$ をかけると，以下の式のようにまとめることができる．

$$(p^1_a p^2_m p^3_n \epsilon^{iamn}) l'_b l''_c \epsilon_{iamn} \epsilon^{pqrst} P^{3\,a}_{p} P^{3\,m}_{q} P^{3\,n}_{r} P^{2\,b}_{s} P^{2\,c}_{t} = 0 \tag{4.118}$$

ここで，$p^1_a p^2_m p^3_n \epsilon^{iamn}$ は 3 枚の平面 $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \mathbf{p}^3$ の外積であり，3 平面の交点 $\mathbf{y}$ を表す．従って，式 (4.118) は以下のように表すことができる．

$$y^i l'_b l''_c \epsilon_{iamn} \epsilon^{pqrst} P^{3\,a}_{p} P^{3\,m}_{q} P^{3\,n}_{r} P^{2\,b}_{s} P^{2\,c}_{t} = 0 \tag{4.119}$$

ここで，点と線以外の部分をまとめて以下のようにおく．

$$\mathcal{T}^{bc}_{i} = \epsilon_{iamn} \epsilon^{pqrst} P^{3\,a}_{p} P^{3\,m}_{q} P^{3\,n}_{r} P^{2\,b}_{s} P^{2\,c}_{t} \tag{4.120}$$

すると，式 (4.119) は以下のように書き換えることができる．

$$y^i l'_b l''_c \mathcal{T}^{bc}_{i} = 0 \tag{4.121}$$

このとき，式 (4.121) は trifocal tensor における式 (4.96) と一致していることが分かる．

最後に，4 次元空間中の 5 枚平面の交差を用いて，bifocal tensor を導出する．今，運動する 3 次元カメラと運動する 2 次元カメラが 1 台ずつ存在するとし，これらのカメラ行列を $\mathbf{P}^3, \mathbf{P}_1^2$ とする．また，ある 4 次元空間中の点 $\mathbf{W}$ のこれらのカメラによる投影像を $\mathbf{y}, \mathbf{x}_1$ とする．さらに，2 次元カメラにおいては，この投影点を通る直線 $\mathbf{l}'^1, \mathbf{l}'^2$ が得られているとし，また，3 次元カメラでは $\mathbf{y}$ を通る任意の平面 $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \mathbf{p}^3$ が得られているとする．これらを逆射影した超平面が 4 次元空間中の 1 点 $\mathbf{W}$ で交わるためには，以下に示す条件を満たす必要がある．

$$\det[\mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^1 \quad \mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^2 \quad \mathbf{P}^{3\top}\mathbf{p}^3 \quad \mathbf{P}_1^{2\top}\mathbf{l}'^1 \quad \mathbf{P}_1^{2\top}\mathbf{l}'^2] = 0 \tag{4.122}$$

式 (4.122) をテンソル表記すると，以下に示すような平面と直線に関する拘束式が得られる．

$$p_a^1 p_b^2 p_c^3 l_d'^1 l_e'^2 \epsilon^{pqrst} P_p^{3\,a} P_q^{3\,b} P_r^{3\,c} P_{1\,s}^{2\,d} P_{1\,t}^{2\,e} = 0 \tag{4.123}$$

ここで，式 (4.123) にスカラー $\epsilon^{iabc}\epsilon_{iabc}$ と $\epsilon^{jde}\epsilon_{jde}$ をかけると，以下の式のようにまとめることができる．

$$(p_a^1 p_b^2 p_c^3 \epsilon^{iabc})(l_d'^1 l_e'^2 \epsilon^{jde})\epsilon_{iabc}\epsilon_{jde}\epsilon^{pqrst} P_p^{3\,a} P_q^{3\,b} P_r^{3\,c} P_{1\,s}^{2\,d} P_{1\,t}^{2\,e} = 0 \tag{4.124}$$

ここで，$p_a^1 p_b^2 p_c^3 \epsilon^{iabc}$ は 3 枚の平面 $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \mathbf{p}^3$ の外積であり，3 平面の交点 $\mathbf{y}$ を表す．一方，$l_d'^1 l_e'^2 \epsilon^{jde}$ は 2 本の直線 $\mathbf{l}'^1, \mathbf{l}'^2$ の外積であり，2 直線の交点 $\mathbf{x}_1$ を表す．従って，式 (4.124) は以下のように表すことができる．

$$y^i x_1^j \epsilon_{iabc}\epsilon_{jde}\epsilon^{pqrst} P_p^{3\,a} P_q^{3\,b} P_r^{3\,c} P_{1\,s}^{2\,d} P_{1\,t}^{2\,e} = 0 \tag{4.125}$$

ここで，点以外の部分をまとめて以下のようにおく．

$$\mathcal{B}_{ij} = \epsilon_{iabc}\epsilon_{jde}\epsilon^{pqrst} P_p^{3\,a} P_q^{3\,b} P_r^{3\,c} P_{1\,s}^{2\,d} P_{1\,t}^{2\,e} \tag{4.126}$$

すると，式 (4.125) は以下のように書き換えることができる．

$$y^i x_1^j \mathcal{B}_{ij} = 0 \tag{4.127}$$

このとき，式 (4.127) は bifocal tensor における式 (4.91) と一致していることが分かる．

これらのことから，$\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何の幾何学的特性は 5 つの超平面の交差により表されることが分かる．

(2) 多視点幾何拘束と bifocal tensor

先ほどまでで，4 次元空間での基本的な幾何拘束が 5 つの 3 次元超平面の交差で表せることを述べた．今度は，幾何拘束をベクトルの条件から，より理解しやすい形で表現する．本節では，2 視点幾何と bifocal tensor を中心に述べる．尚，本節ではベクトルの内

容を分かりやすくするために，前章まで用いてきたテンソル表記ではなく，行列表記を用いることにする．ここで，bifocal tensor $\mathcal{B}_{ij}$ を転置した $\mathcal{B}_{ji}$ を $\mathbf{B}$ と表す．そのため，$\mathbf{B}$ は 3×4 の行列となる．

第4.5節で述べたように4次元空間中の点 $\mathbf{W}$ が運動する3次元センサと運動する2次元センサにそれぞれ $\mathbf{y}$，$\mathbf{x}_1$ として投影されているとする．すると式(4.58)と式(4.59)より，この投影は斉次座標を用いて以下のように表すことができる．

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{P}^3\mathbf{W} \tag{4.128}$$

$$\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{P}_1^2\mathbf{W} \tag{4.129}$$

ここで，式(4.128)を解いて，$\mathbf{W}$ を求めることを考えてみる．$\mathbf{P}^3$ は 4×5 行列であるから，解 $\mathbf{W}$ は無限に存在するが，これらは $\mathbf{P}^3$ の一般化逆行列 $\mathbf{P}^{3-}$ を用いて以下のように表せる．

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}^{3-}\mathbf{y} + \alpha\mathbf{C} \tag{4.130}$$

ここで，α は任意の実数であり，行列 $\mathbf{P}^{3-}$，ベクトル $\mathbf{C}$ はそれぞれ以下の式を満たすような 5×4 行列と 5×1 ベクトルである．

$$\mathbf{P}^{3-} = \mathbf{P}^{3\top}(\mathbf{P}^3\mathbf{P}^{3\top})^{-1} \tag{4.131}$$

$$\mathbf{P}^3\mathbf{C} = \mathbf{0} \tag{4.132}$$

行列 $\mathbf{P}^3$ は 4×5 で $\mathbf{P}$ のランクが4であるから，その零空間は1次元である．また，$\mathbf{C}$ は常に原点に投影されるような点であるから，これは第1カメラの視点 $\mathbf{C}^3$ を表していることがわかる．また，式(4.129)，(4.130)より二つの視点における点 $\mathbf{y}$，$\mathbf{x}_1$ に関して以下のような関係があることがわかる．

$$\mathbf{x_1} \sim \mathbf{P}_1^2\mathbf{P}^{3-}\mathbf{y} + \alpha\mathbf{P}_1^2\mathbf{C}^3 \tag{4.133}$$

ここで $\mathbf{P}_1^2\mathbf{C}^3$ は第1カメラの視点を第2カメラに投影したものであるから，第2画像におけるエピポール $\mathbf{e}'$ を表す．また，式(4.133)は三つのベクトル $\mathbf{x_1}$，$\mathbf{P}_1^2\mathbf{P}^{3-}\mathbf{y}$，$\mathbf{e}'$ が同一平面上に存在することを表している．同一平面上に三つのベクトルが存在する場合，そのうちの任意の二つのベクトルの外積と残る一つの内積は0となる．従って，以下の式が成り立つ．

$$\mathbf{x_1}^\top[\mathbf{e}']_\times\mathbf{P}_1^2\mathbf{P}^{3-}\mathbf{y} = 0 \tag{4.134}$$

ここで，行列 $\mathbf{B}$ を

$$\mathbf{B} = [\mathbf{e}']_\times\mathbf{P}_1^2\mathbf{P}^{3-} \tag{4.135}$$

と置くと，式(4.134)は行列 $\mathbf{B}$ を用いて次のように表せる．

$$\mathbf{x_1}^\top\mathbf{B}\mathbf{y} = 0 \tag{4.136}$$

これが運動する3次元センサと運動する2次元センサが存在する場合における2視点幾何拘束式であり，式(4.91)と式(4.127)の2視点幾何拘束式と一致していることが分かる．

4.6 複合次元におけるカメラ行列の復元と N 次元復元

本節では，テンソルからカメラ行列を復元する手法について述べる．ここでは，まず一般の k 次元空間への復元を行うカメラ行列を計算する手法について述べ，その後，例として $\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^\top$ における N 視点幾何による形状復元について詳しく説明していく．

4.6.1 複合次元カメラからの N 次元復元

ここでは一般次元における復元について述べる．但し，本節では説明を分かりやすくするために，3 次元空間から 2 次元空間への投影に基づく復元について説明し，その後，一般次元に関するものに拡張していくことにする．

それではまず，3 次元空間から 2 次元空間へ投影に関する射影復元について詳しく説明する．今，3 次元空間中に点 $\mathbf{X}$ が存在し，カメラ $\mathbf{P}$，$\mathbf{P}'$ にそれぞれ $\mathbf{x}$，$\mathbf{x}'$ として投影されているとき，その関係は以下のように表すことができた．

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{P}\mathbf{X} \tag{4.137}$$

$$\mathbf{x}' \sim \mathbf{P}'\mathbf{X} \tag{4.138}$$

また，第 2 章で述べたように，これらの対応点の間には以下のようなエピポーラ方程式が成り立つ．

$$\mathbf{x}'^\top \mathbf{F}\mathbf{x} = 0 \tag{4.139}$$

ここで，$\mathbf{F}$ は Fundamental 行列である．このような Fundamental 行列 $\mathbf{F}$ を用いて，カメラ行列を復元する．今，式 (4.139) に注目すると，エピポーラ方程式は画像間の対応関係を表すものであった．一方，式 (4.137) と式 (4.138) の投影式において，$\mathbf{x} \sim \mathbf{P}\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}$ のように間に 3 次元射影変換 $\mathbf{H}$ とその逆変換を挿入したとしても，画像においてはその関係は変化しない．そのため，画像点 $\mathbf{x}$，$\mathbf{x}'$ はカメラ $\mathbf{P}$，$\mathbf{P}'$ と 3 次元点 $\mathbf{X}$ に対応していると同時に，カメラ $\mathbf{P}\mathbf{H}$，$\mathbf{P}'\mathbf{H}$ と 3 次元点 $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}$ に対応していることになる．従って，Fundamental 行列 $\mathbf{F}$ から 3 次元形状を復元した場合には，その結果には 3 次元射影変換の不定性が残ることになる．また，このような射影変換の不定性を残した復元を射影復元と呼ぶ．

また，[27] より Fundamental 行列 $\mathbf{F}$ を用いて射影復元を行う場合，射影不定性を持ったカメラ行列 $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{P}'_p$ は以下のように決定すればよいことが知られている．

$$\mathbf{P}_p = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.140}$$

$$\mathbf{P}'_p = \left[\begin{array}{c|c} [\mathbf{s}']_\times \mathbf{F} & \mathbf{e}' \end{array}\right] \tag{4.141}$$

$\mathbf{e}'$ は第 2 画像中のエピポールであり，カメラの並進にあたる，一方，$[\mathbf{s}']_\times \mathbf{F}$ はカメラの回転にあたる 3×3 行列のホモグラフィーである．ここで，$\mathbf{s}'$ は第 2 画像中の任意のベクトル

であり，$\mathbf{s}'$ にエピポール $\mathbf{e}'$ を代入すると最適であることが知られている．今，式 (4.141) の $[\mathbf{s}']_\times \mathbf{F}$ の部分に注目する．ホモグラフィー $[\mathbf{s}']_\times \mathbf{F}$ において，Fundamental 行列 $\mathbf{F}$ はテンソル表記を用いて以下のように表すことができた．

$$F_{ki} = \epsilon_{ipq}\epsilon_{krs}\epsilon^{abcd}P_a^p P_b^q P_c^{\prime r} P_d^{\prime s} \tag{4.142}$$

従って，ホモグラフィー $[\mathbf{s}']_\times \mathbf{F}$ を $\mathbf{H}^2$ とおくと，$\mathbf{H}^2$ はテンソル表記を用いて以下のように表すことができる．

$$H_i^{2\,l} = s'_m \epsilon^{klm}\epsilon_{ipq}\epsilon_{krs}\epsilon^{abcd}P_a^p P_b^q P_c^{\prime r} P_d^{\prime s} \tag{4.143}$$

今，式 (4.143) のようなテンソルによるホモグラフィーにより，第 1 画像中の点 $\mathbf{x}$ を変換するときの幾何学的な意味について考える．式 (4.143) に点 $\mathbf{x}$ のテンソル表記 x^i を掛けたものを考える．ここで，$\epsilon_{ipq}P_a^p P_b^q x^i$ に注目すると，これは点 $\mathbf{x}$ を通る 2 本の直線を逆射影した 2 枚の平面を表している．これら 2 枚の平面の交差は空間中で直線となる．従って，$\epsilon_{ipq}\epsilon^{abcd}P_a^p P_b^q x^i$ は 3 次元空間中の直線を表していることになる．3 次元空間における直線は，3 次元空間中の点や平面のように直接記述することができないため，空間中の 2 点を結んだものとして表現されていることに注意が必要である．

次に，直線を 2 点を結んだものと考えて，カメラ行列 $P_c^{\prime r} P_d^{\prime s}$ によりそれらを投影する．すると，3 次元空間中の直線は 2 次元画像中においても直線として投影されるため，その直線を $\mathbf{l}'_L$ とすると，$\mathbf{l}'_L$ は以下のように表すことができる．

$$l'_{L\,k} = \epsilon_{ipq}\epsilon_{krs}\epsilon^{abcd}P_a^p P_b^q P_c^{\prime r} P_d^{\prime s} x^i \tag{4.144}$$

さらに式 (4.144) の直線に $s'_m \epsilon^{klm}$ を掛けると以下に示す式が成り立つ．

$$x_L^{\prime l} = l'_{L\,k} s'_m \epsilon^{klm} \tag{4.145}$$

ここで，$\mathbf{x}'_L$ は画像中の 2 直線の交点を表している．そのため，式 (4.143) により画像中の点 $\mathbf{x}$ を変換した結果は画像中において点となることが分かる．しかし，このように変換した第 2 画像中の点 $\mathbf{x}'_L$ が点 $\mathbf{x}$ に対応する画像点 $\mathbf{x}'$ であるとは限らない．それは，第 2 画像中においてベクトル $\mathbf{s}'$ が任意であるためである．ところが，このようなホモグラフィーを用いても正しく復元を行うことができる．

今，図 4.11 のように空間中に任意のベクトル $\mathbf{s}'$ を逆射影した平面 π が存在するとする．ここで，先に述べたような画像中の点 $\mathbf{x}$ を逆射影した直線を考えた場合，その直線は必ずエピポーラ平面上に存在することになる．また，このときの直線を投影したものが $\mathbf{l}'_L$ であり，エピポーラ平面上の直線を投影しているため，これは点 $\mathbf{x}$ に対応するエピポーラ線となることが分かる．一方，$\mathbf{s}'$ と $\mathbf{l}'_L$ の交点 $\mathbf{x}'_L$ について考えると，点 $\mathbf{x}'_L$ は平面 π と直線の交点 $\mathbf{X}_\pi$ を投影したものであると考えることができるため，点 $\mathbf{x}'_L$ は $\mathbf{s}'$ がどのようなベクトルであっても，エピポーラ線上に存在することが分かる．そのため，このようなホモグラフィー $\mathbf{H}^2$ により変換された点 $\mathbf{x}'_L$ はエピポーラ方程式の関係を崩さない．従って，このホモグラフィー $\mathbf{H}^2$ をカメラ行列の要素とすることで正しく復元を行うことができる．

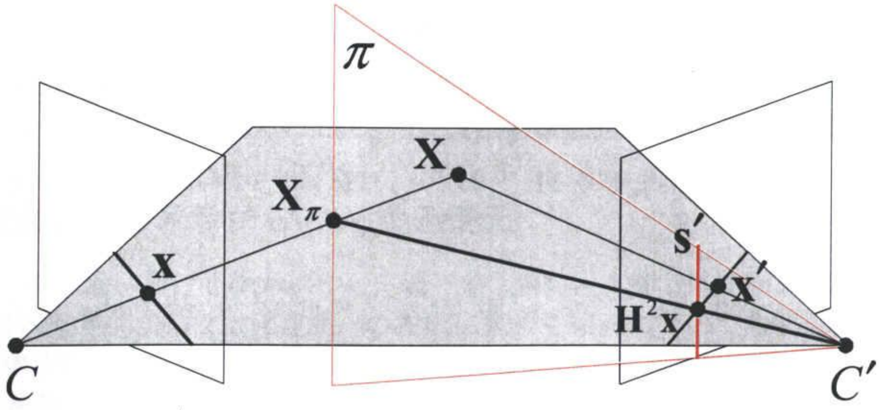


図 4.11 平面 π を介したホモグラフィー

次に，このホモグラフィーを複合次元に拡張することを考える．このとき，複合次元における多視点幾何も従来の多視点幾何と同様，カメラ行列の組み合わせにより表現できたため，式 (4.143) のホモグラフィーを一般の次元に拡張することで，複合次元におけるカメラ行列のホモグラフィーを導出することができる．今，例として，以下のような 2 台の複合次元カメラにおけるテンソル $\mathcal{M}$ があった場合に，それらの画像間におけるホモグラフィーについて考えいくことにする．

$$\mathcal{M}_{m_1 m_2} = \epsilon_{m_1 q_1 \cdots q_i} \epsilon_{m_2 s_1 \cdots s_j} \epsilon^{p_1 \cdots p_i r_1 \cdots r_j} P^{q_1}_{p_1} \cdots P^{q_i}_{p_i} P'^{s_1}_{r_1} \cdots P'^{s_j}_{r_j} \tag{4.146}$$

ここで，$\mathbf{P}$ は i 次元への投影を行うカメラを示し，$\mathbf{P}'$ は j 次元への投影を行うカメラ示している．今，投影像において i 次元から j 次元への変換を行うホモグラフィー $\mathbf{H}^j$ は，任意のベクトル $\mathbf{s}'$ を用いて以下のように表すことができる．

$$H^{j\,m_3}_{m_1} = s'_t \epsilon^{m_2 m_3 t} \mathcal{M}_{m_1 m_2} \tag{4.147}$$

ここで，先ほどまで説明してきた従来の多視点幾何とは異なり，投影像の次元がそれぞれのカメラで異なるため，ホモグラフィー $\mathbf{H}^j$ は正方行列になるとは限らない．

次にエピポールの導出について説明する．先ほどと同様，まず始めに 3 次元空間から 2 次元空間への投影に基づく 2 視点幾何を例に説明していく．エピポールはカメラの視点を投影したものであった．従って，今，null$(\mathbf{A})$ を $\mathbf{A}$ の零空間であるとすると，カメラ $\mathbf{P}'$ の視点をカメラ $\mathbf{P}$ で投影したエピポール $\mathbf{e}$ は以下のように表すことができる．

$$\mathbf{e} = \mathbf{P}\mathrm{null}(\mathbf{P}') \tag{4.148}$$

同様に，カメラ $\mathbf{P}$ の視点をカメラ $\mathbf{P}'$ で投影したエピポール $\mathbf{e}'$ は以下のように表すことができる．

$$\mathbf{e}' = \mathbf{P}\mathrm{null}(\mathbf{P}') \tag{4.149}$$

このようなエピポールは式(4.139)を変形した以下の式により，Fundamental行列の零空間として計算することができる．

$$\mathbf{Fe} = \mathbf{0} \tag{4.150}$$

$$\mathbf{F}^{\top}\mathbf{e}' = \mathbf{0} \tag{4.151}$$

このようにFundamental行列から計算したエピポールを式(4.141)に代入することにより，カメラ行列を復元することができた．

複合次元における多視点幾何においてもエピポールは式(4.148)，(4.149)と同様，カメラ行列の零空間の投影として以下のように表すことができる．

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{P}_i \mathrm{null}(\mathbf{P}_j) \tag{4.152}$$

ここで，投影前と投影後の次元が大きく異なる場合について考える．すると，カメラ行列$\mathbf{P}_j$の行数に対して，列の数が大きくなる．そのような場合にはその零空間であるnull($\mathbf{P}_j$)は点ではなく直線や平面，超平面になる．このようなカメラ視点を投影したものがエピポールであるから，式(4.152)のエピポール$\mathbf{e}_{ij}$は3次元空間から2次元空間への投影と異なり，点であるとは限らないことに注意が必要である．このような場合においても，式(4.150)や式(4.151)と同様テンソルの零空間を取ることにより，エピポールを計算することができる．

以上のことをまとめると，複合次元カメラにおける多視点幾何からの復元は第1カメラを基準とした場合，第2カメラ以降を以下のようにおくことで計算することができる．表すことができる．

$$\mathbf{P}_{pi} \;=\; \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{H}^i & \mathbf{v}_1^i & \cdots & \mathbf{v}_j^i \end{array}\right] \tag{4.153}$$

ここで，$\mathbf{H}^i$は多視点幾何によるi次元へのホモグラフィーを示し，$\mathbf{v}^i$はi次元カメラにおけるエピポールを構成するベクトルである．例えば，エピポールが直線の場合は$\mathbf{v}^i$はエピポール(直線)上の2点を示すベクトルとなり，エピポールが平面の場合は$\mathbf{v}^i$はエピポール(平面)上の3点を示すベクトルとなる．以降では，複合次元カメラによる復元を例を挙げて説明していく．

4.6.2 $\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^{\top}$における$N$視点幾何による形状復元

bifocal tensorによるカメラ行列の復元

本節では，前節までで述べた複合次元カメラにおける多視点幾何を用いたカメラ行列の復元手法を基に$\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^{\top}$における$N$視点幾何を用いたカメラ行列の復元手法について述べる．また，本節においてはカメラ行列の内容を分かりやすくするために，前章まで用いてきたテンソル表記ではなく，行列表記を用いることにする．trifocal tensor $\mathcal{T}_i^{bc}$のように3階以上のテンソルについては，要素を行列表記したものを組み合わせて$[\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}, \mathbf{T_3}, \mathbf{T_4}]$のように書き表すことにする．

まず，はじめに bifocal tensor からカメラ行列を復元する方法を説明する．カメラ行列を復元するために，bilinear 拘束式と投影式の関係を用いる．bilinear 拘束式と移動3次元レンジセンサ $\mathbf{C}^3$ と移動2次元カメラ $\mathbf{C}_1^2$ による投影は行列表記を用いると以下のように表すことができる．

$$\mathbf{y} \sim \mathbf{P}^3\mathbf{W} \tag{4.154}$$

$$\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{P}_1^2\mathbf{W} \tag{4.155}$$

$$\mathbf{x}_1^\top \mathbf{B}\mathbf{y} = 0 \tag{4.156}$$

式 (4.154), (4.155) を式 (4.156) に代入すると以下のように書き表すことができる．

$$\mathbf{W}^\top \mathbf{P}_1^{2\top} \mathbf{B}\mathbf{P}^3\mathbf{W} = 0 \tag{4.157}$$

ここで，これから復元を行う移動3次元レンジセンサと移動2次元カメラのカメラ行列について考える．今，移動3次元レンジセンサ $\mathbf{C}^3$ を基準カメラとし，そのカメラ行列を $\mathbf{P} = [\,\mathbf{I} \mid \mathbf{0}\,]$ とする．また，移動2次元カメラ $\mathbf{C}_1^2$ のカメラ行列を $\mathbf{P}' = [\,\mathbf{A} \mid \mathbf{a}\,]$ とする．ここで，$\mathbf{I}$ は 4×4 の単位行列，$\mathbf{0}$ は 4×1 のゼロベクトル，$\mathbf{A}$ は 3×4 の行列，$\mathbf{a}$ は 3×1 のベクトルである．カメラ行列の復元は，移動2次元カメラのカメラ行列 $\mathbf{P}'$ の要素 $\mathbf{A}$，$\mathbf{a}$ を求めることに相当する．このようにカメラ行列をおくと，基準カメラの光学中心がワールド座標の原点になるため $\mathbf{C}^3 = [0,0,0,0,1]^\top$ となる．また，基準カメラである移動3次元レンジセンサ $\mathbf{C}^3$ を移動2次元カメラ $\mathbf{C}_1^2$ で撮影した投影像がエピポールであるため，$\mathbf{a} = \mathbf{P}'\mathbf{C}^3 = \mathbf{e}'$ となる．このとき，$\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ を式 (4.157) の $\mathbf{P}^3, \mathbf{P}_1^2$ にそれぞれ代入してまとめると以下のようになる．

$$\mathbf{W}^\top \mathbf{P}'^\top \mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{W} = \mathbf{W}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{e}'^\top\mathbf{B} & 0 \end{bmatrix}^\top \mathbf{W} \tag{4.158}$$

今，$\mathbf{W}$ の非斉次座標を $\widetilde{\mathbf{W}}$ で表すと，$\mathbf{e}'^\top\mathbf{B} = \mathbf{0}$ であるため，式 (4.158) は以下のように表すことができる．

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}} & 1 \end{bmatrix}^\top \\ =\ & \widetilde{\mathbf{W}}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{B} \widetilde{\mathbf{W}} = 0 \end{aligned} \tag{4.159}$$

式 (4.159) において，$[\mathbf{u}]_\times = \mathbf{A}^\top\mathbf{B}$ とおく．ここで $[\mathbf{u}]_\times$ はベクトル $\mathbf{u}$ の歪対称行列であることを示す．$\widetilde{\mathbf{W}}$ と $\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$ はそれぞれゼロベクトルと零行列ではないため，式 (4.159) の右辺がゼロになるには，$\mathbf{u}$ が $\mathbf{X}$ と $\mathbf{A}^\top\mathbf{B}\mathbf{X}$ の両方と直交するようなベクトルである必要がある．そのため，式 (4.159) が成り立つためには $\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$ は 4×4 の歪対称行列でなければならない．すなわち，$\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$ が歪対称行列になるような $\mathbf{A}$ を求めることができれば，bilinear 拘束式を満たすようなカメラ行列を復元できる．

ここで，任意の3×3の歪対称行列$\mathbf{S} = [\mathbf{s}]_\times$を考え，$\mathbf{A} = \mathbf{SB}$とする．また，$\mathbf{B} = [\mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2}\ \mathbf{b_3}\ \mathbf{b_4}]$と書き表すと，$\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$は以下のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}^\top\mathbf{B} \\
= \;& \mathbf{B}^\top\mathbf{SB} \\
= \;& \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^\top\mathbf{Sb}_1 & \mathbf{b}_1^\top\mathbf{Sb}_2 & \mathbf{b}_1^\top\mathbf{Sb}_3 & \mathbf{b}_1^\top\mathbf{Sb}_4 \\ \mathbf{b}_2^\top\mathbf{Sb}_1 & \mathbf{b}_2^\top\mathbf{Sb}_2 & \mathbf{b}_2^\top\mathbf{Sb}_3 & \mathbf{b}_2^\top\mathbf{Sb}_4 \\ \mathbf{b}_3^\top\mathbf{Sb}_1 & \mathbf{b}_3^\top\mathbf{Sb}_2 & \mathbf{b}_3^\top\mathbf{Sb}_3 & \mathbf{b}_3^\top\mathbf{Sb}_4 \\ \mathbf{b}_4^\top\mathbf{Sb}_1 & \mathbf{b}_4^\top\mathbf{Sb}_2 & \mathbf{b}_4^\top\mathbf{Sb}_3 & \mathbf{b}_4^\top\mathbf{Sb}_4 \end{bmatrix} \\
= \;& \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{b}_2^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_1) & \mathbf{b}_1^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_3) & -\mathbf{b}_4^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_1) \\ \mathbf{b}_2^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_1) & 0 & -\mathbf{b}_3^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_2) & \mathbf{b}_2^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_4) \\ -\mathbf{b}_1^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_3) & \mathbf{b}_3^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_2) & 0 & -\mathbf{b}_4^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_3) \\ \mathbf{b}_4^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_1) & -\mathbf{b}_2^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_4) & \mathbf{b}_4^\top\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{b}_3) & 0 \end{bmatrix} \quad .
\end{aligned} \tag{4.160}$$

式(4.160)より，$\mathbf{A} = \mathbf{SB}$とおくことで，$\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$は歪対称行列となる．

次に，$\mathbf{S}$の条件について詳しく述べる．$\mathbf{S}$が任意の歪対称行列であるため，ベクトル$\mathbf{s}$はどのようなベクトルであっても，$\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$は歪対称行列となるため，式(4.159)を満たす．しかし，$\mathbf{s}$が$\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$, $\mathbf{b_4}$と同一超平面に存在する場合，式(4.160)の$\mathbf{A}^\top\mathbf{B}$は零行列となる．そのため，$\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$, $\mathbf{b_4}$と同一超平面に存在しないような$\mathbf{s}$を選ぶ必要がある．そのような条件を満たすためには，$\mathbf{s}$がどの$\mathbf{b}_i$ $(i = 1, \cdots, 4)$とも直交するようなベクトルであればよい．ここで，式(4.156)より，エピポール$\mathbf{e}'$に関する拘束を考える．

$$\mathbf{B}^\top\mathbf{e}' = \mathbf{0} \tag{4.161}$$

式(4.161)よりエピポール$\mathbf{e}'$はどの$\mathbf{b}_i$とも直交していることがわかる．そのため，ベクトル$\mathbf{s}$がエピポール$\mathbf{e}'$であれば，常に式(4.159)を満たす．そこで，$\mathbf{s}$にエピポール$\mathbf{e}'$を代入すると以下のようなカメラ行列を導出することができる．

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \mid \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.162}$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} [\mathbf{e}']_\times\mathbf{B} \mid \mathbf{e}' \end{bmatrix} \tag{4.163}$$

式(4.163)で求めたカメラ行列を用いることで，異なる次元のセンサで得られた画像から4次元空間中の点を計算することができる．ただし，ここで計算したカメラ行列は4次元射影変換の不定性を持つ．

trifocal tensorによるカメラ行列の復元

次に，trifocal tensorからカメラ行列を復元する手法について述べる．

また，第1カメラによる投影点$\mathbf{y}$から第2カメラによる投影点$\mathbf{x_1}$への変換を行う変換行列$\mathbf{H}_{12}$を考える．変換行列$\mathbf{H}_{12}$は3次元点を2次元点に変換するため，3×4行列であ

り，その変換は以下のように表せる．

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{H}_{12}\mathbf{y} \tag{4.164}$$

ここで，第2カメラ画像中のエピポーラ線 $\mathbf{l}'$ を考えると，$\mathbf{l}'$ はエピポール $\mathbf{e}'$ と画像中の対応点 $\mathbf{x}_1$ を通る直線であるため，$\mathbf{l}' = \mathbf{e}' \times \mathbf{x}_1 = [\mathbf{e}']_\times \mathbf{x}_1$ と表せる．一方，エピポーラ線 $\mathbf{l}'$ は $\mathbf{y}$ に対応する直線として，第1，2画像間の bifocal tensor $\mathbf{B}_{21}$ を用いて $\mathbf{l}' = \mathbf{B}_{21}\mathbf{y}$ と表せる．そのため，$\mathbf{l}' = [\mathbf{e}']_\times \mathbf{x}_1$ に式 (4.164) を代入すると，以下の関係式が得られる．

$$\mathbf{l}' = [\mathbf{e}']_\times \mathbf{H}_{12}\mathbf{y} \;\; = \;\; \mathbf{B}_{21}\mathbf{y} \tag{4.165}$$

式 (4.165) より，bifocal tensor $\mathbf{B}_{21}$ はエピポール $\mathbf{e}'$ と $\mathbf{H}_{12}$ を用いて，$\mathbf{B}_{21} \;= [\mathbf{e}']_\times \mathbf{H}_{12}$ のように表せる．これを bilinear 拘束式に代入すると以下の式が得られる．

$$\mathbf{x_1}^\top [\mathbf{e}']_\times \mathbf{H}_{12}\mathbf{y} = 0 \tag{4.166}$$

ここで，式 (4.134)，(4.166) を比較すると，第1カメラによる投影点 $\mathbf{y}$ から第2カメラによる投影点 $\mathbf{x_1}$ への変換を行う変換行列 $\mathbf{H}_{12}$ は以下のように表すことができる．

$$\mathbf{H}_{12} = \mathbf{P}_1^4 \mathbf{P}^{5-} \tag{4.167}$$

そのため，上で述べた $\mathbf{H}_{12}$ を trifocal tensor から導出することができれば，$\mathbf{H}_{12}$ とエピポール $\mathbf{e}'$ を用いて bifocal tensor $\mathbf{B}_{12}$ を計算することができる．

次に，trifocal tensor から式 (4.167) の $\mathbf{H}_{12}$ を導出する手法について述べる．本稿で提案した式 (4.92) の trilinear 拘束は3次元点と2次元点の対応点間の関係を示すものであるが，この trilinear 拘束は式 (4.92) の点同士の関係だけでなく，点と直線同士の関係や平面と直線同士の関係も存在する．$\mathbf{H}_{12}$ の導出には，点同士の関係ではなく，平面と直線同士の関係を用いる．$\mathbf{n} = [0, N-1, 1, 0]^\top$ の3視点における直線同士の関係を表す trilinear 拘束は以下のように表すことができる．

$$(p_a \epsilon^{aipq}) l'_b l''_c \mathcal{T}_i^{bc} \;\; = \;\; 0^{pq} \tag{4.168}$$

ここで p は $\mathbf{y}$ を通る平面，l'，l'' はそれぞれ $\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$ を通る直線を表す．また，式 (4.168) は行列表記を用いて表すと以下のように表すことができる．

$$\mathbf{l}'^\top [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_4] \mathbf{l}'' = \mathbf{p}^\top \tag{4.169}$$

今，式 (4.169) を用いて $\mathbf{H}_{12}$ を導出する．$\mathbf{C}^3$ による投影像 $\mathbf{y}$ と $\mathbf{C}_i^2$ による投影像 $\mathbf{x}_1$ の間の関係は式 (4.164) より $\mathbf{x}_1 = \mathbf{H}_{12}\mathbf{y}$ と表すことができる．一方，平面と直線の関係は $\mathbf{H}_{12}$ を用いて $\mathbf{l}'^\top \mathbf{H}_{12} = \mathbf{p}$ と表すことができる．そのため，式 (4.169) と平面と直線の関係より，$\mathbf{H}_{12}$ は trifocal tensor を用いて以下のように表すことができる．

$$\mathbf{H}_{12} = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_4] \mathbf{l}'' \tag{4.170}$$

この $\mathbf{H}_{12}$ は $\mathbf{l}''$ から逆射影した超平面と $\mathbf{y}$ から逆射影した平面との交差を考え，その交差した点を第2カメラで撮影したものが $\mathbf{x_1}$ となるという性質を持つ．そのため，第3視点の直線 $\mathbf{l}''$ による超平面を介した点の変換と考えることができる．

また，$\mathbf{B}_{21} = [\mathbf{e}']_\times \mathbf{H}_{12}$ より，bifocal tensor は trifocal tensor を用いて，以下のように表すことができる．

$$\mathbf{B}_{21} = [\mathbf{e}']_\times [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_4]\mathbf{l}'' \tag{4.171}$$

上に述べた通り，$\mathbf{H}_{12}$ は，$\mathbf{l}''$ から逆射影した超平面を介した点の変換である．この変換においては，超平面はどのようなものであっても成り立つため，任意のベクトル $\mathbf{l}''$ について式 (4.171) は成り立つ．しかし，直線 $\mathbf{l}''$ が $\mathbf{T}_i$ $(i = 1, \cdots, 4)$ の零空間になる場合，その $\mathbf{l}''$ はエピポール $\mathbf{e}''$ を通るエピポーラ線となる．このような場合には，$\mathbf{y}$ から逆射影した平面が $\mathbf{l}''$ から逆射影した超平面上に存在するため，$\mathbf{l}''$ による超平面を介したホモグラフィーが定義できなくなる．そのため，このような $\mathbf{l}''$ の選択を避けるためには，$\mathbf{T}_i$ $(i = 1, \cdots, 4)$ の零空間と直交するエピポール $\mathbf{e}''$ を選べばよい．従って，$\mathbf{l}''$ を $\mathbf{e}''$ と置き換えることにより，以下のように bifocal tensor を表すことができる．

$$\mathbf{B}_{21} = [\mathbf{e}']_\times [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_4]\mathbf{e}'' \tag{4.172}$$

この bifocal tensor を式 (4.163) のカメラ行列に代入することにより，以下のようなカメラ行列を導出することができる．

$$\mathbf{P}'_1 = \left[\; [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3, \mathbf{T}_4] \; \mathbf{e}'' \; \middle| \; \mathbf{e}' \; \right] \tag{4.173}$$

4.7 実験

本節では，これまでに述べた理論により実験を行った結果を示す．ここでは，特に2次元カメラと1次元センサによる実験結果と運動する3次元レンジセンサと2次元カメラによる実験結果を示す．

4.7.1 2次元カメラと1次元ラインセンサ

まず，2次元カメラと複数の1次元ラインセンサの組み合わせによる実験を行い，提案した多視点幾何により正しく異なるセンサ間での情報変換が行えることを示す．図4.12は今回の実験で用いたセンサの3次元配置である．$\mathbf{C}^1_1$，$\mathbf{C}^1_2$，$\mathbf{C}^1_3$ はラインセンサを表し，$\mathbf{C}^2$ はカメラを表す．尚，ここで扱う1次元カメラは図4.13に示すようなシリンドリカルレンズを用いて投影を行うセンサであるとする．シリンドリカルレンズは入射光に対して1軸方向のみ変化を与える．そのため，図4.13の赤線のように3次元空間中で異なる点から入射した光線が同一の平面 Π 上にある場合，それらの3次元点は1次元カメラ画像上では全て同じ点として投影される．また，ライン投光を行うセンサの照射点をカメラで撮影した場合も同様に1次元カメラと2次元カメラの組み合わせとして扱うことが出来

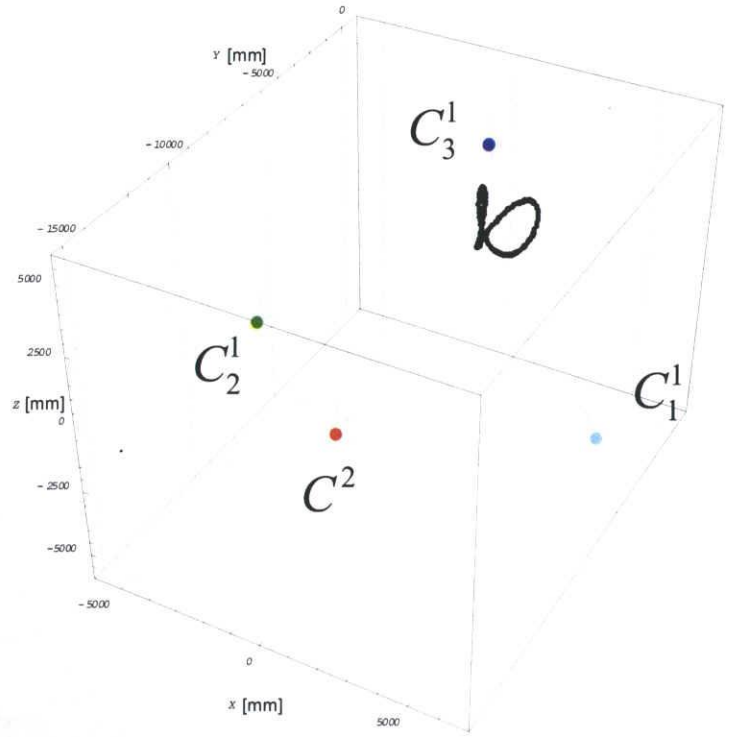


図 4.12 3 次元配置．曲線 (黒) は 3 次元空間中の運動点 $\mathbf{X}$ の軌跡を示す．$\mathbf{C}^2$ はカメラ，$\mathbf{C}_1^1$，$\mathbf{C}_2^1$，$\mathbf{C}_3^1$ はラインセンサである．

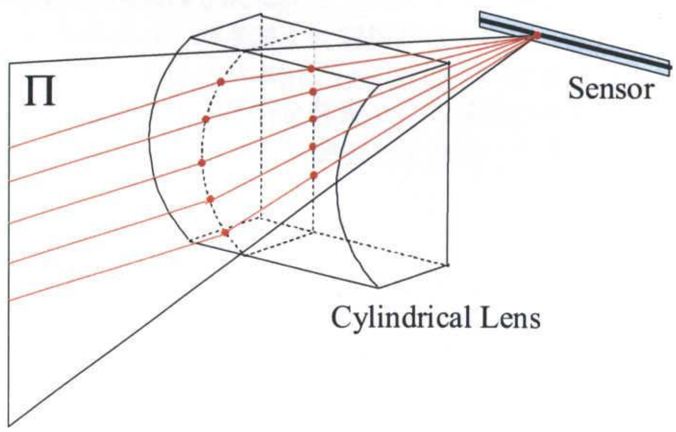


図 4.13 シリンドリカルレンズを用いた 1 次元カメラによる投影

る．ここで，図 4.14 (a)～(d) はそれぞれのセンサで得られた画像である．はじめに，$\mathbf{C}^2$，$\mathbf{C}_1^1$，$\mathbf{C}_2^1$ の画像中の対応点 (青) から trifocal tensor $\mathcal{T}_i^{bc}$ を計算し，この $\mathcal{T}_i^{bc}$ を用いて $\mathbf{C}_1^1$，$\mathbf{C}_2^1$ の画像軌跡から $\mathbf{C}^2$ のエピポーラ線を計算した．図 4.15 にエピポーラ線の計算結果を

示す．計算したエピポーラ線 (水色) が画像中の対応点 (赤) を通過していることから，$\mathcal{T}_i^{bc}$ が 2 次元カメラと 1 次元ラインセンサ間の関係を正しく記述できていることがわかる．

次に，図 4.14 (a)〜(d) の画像を用いて $\mathcal{Q}^{abcd}$ を計算し，求めた $\mathcal{Q}^{abcd}$ を用いて 3 つの 1 次元画像から 2 次元画像を生成する実験を行った．図 4.16 に画像生成結果を示す．生成した画像 (赤) が $\mathbf{C}^2$ で撮影された画像軌跡 (緑) 上にあることから，求めた $\mathcal{Q}^{abcd}$ によって画像軌跡が正しく生成されていることがわかる．以上より本稿で提案した複合次元多視点幾何により，異なるセンサ間の関係が記述できることがわかる．

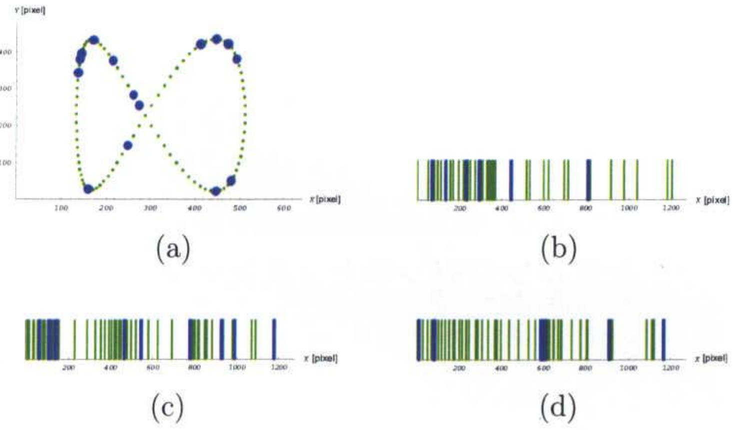


図 4.14 2 次元カメラと 1 次元ラインセンサの画像．(a) は 2 次元カメラで得られた画像，(b), (c), (d) は 1 次元ラインセンサで得られた画像である．また，緑色の点・線はそれぞれ運動点の投影像を示す．青色の点・線は幾何の計算に用いた対応点である．

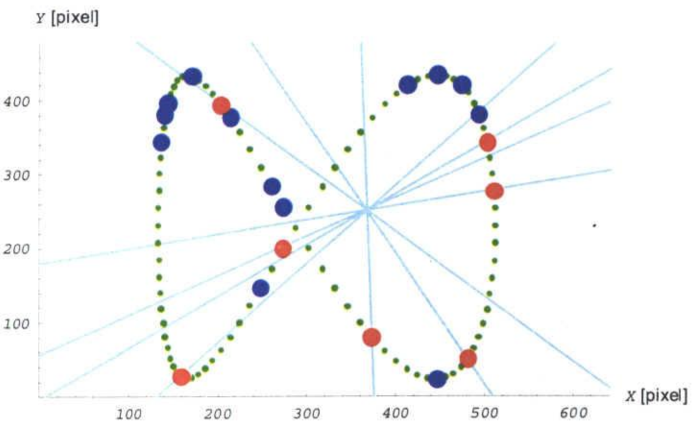


図 4.15 trifocal tensor と 1 次元画像から計算したエピポーラ線．青色の点は trifocal tensor の計算に用いた基底点であり，赤色の点はエピポーラ線に対応する点である．エピポーラ線が全てこの対応点を通過していることから，正しく trifocal tensor を計算できていることが分かる．

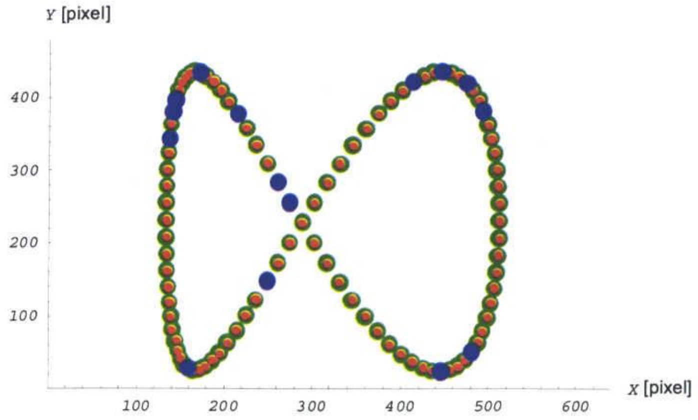


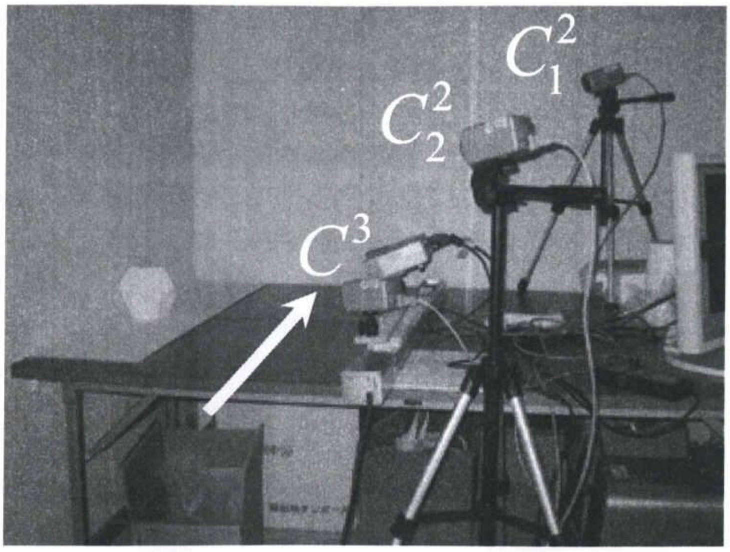
図 4.16 quadrifocal tensor と 1 次元画像から生成された 2 次元画像点．緑色がカメラに投影された画像軌跡であり，赤色の点が画像軌跡の生成結果である．

4.7.2 運動する 3 次元レンジセンサと 2 次元カメラ

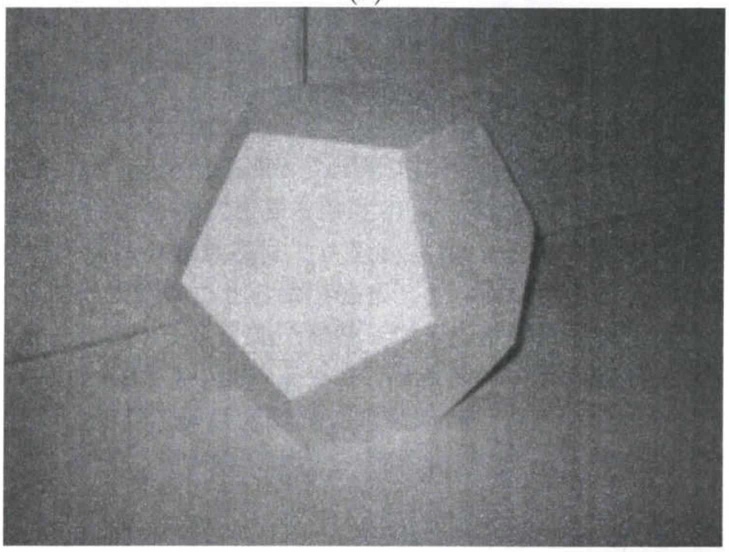
(1) 実画像実験

本実験では，運動する 3 次元レンジセンサと 2 次元カメラによる実験結果を示す．4.5 章で示したように，運動する 3 次元レンジセンサと 2 次元カメラ間の多視点幾何は，4 次元空間から 3 次元空間への投影と 4 次元空間から 2 次元空間への投影の組み合わせによって考えることができる．実験では，3 次元計測中にレンジセンサを並進運動させた．図 4.17 に本実験における計測システムの様子を示す．図 4.17(a) の $\mathbf{C}^3$ はレンジセンサを示し，センサは矢印の方向に運動する．$\mathbf{C}_1^2$，$\mathbf{C}_2^2$ は 2 次元カメラである．図 4.17(b) は計測対象の 3 次元物体である．図 4.18 (a) は並進運動するレンジセンサで計測された，この物体の 3 次元形状である．また，このレンジセンサにより照射された物体表面上の照射点をカメラで観測した．図 4.18 (b)，(c) の点 (灰色) はレーザー照射点のカメラ $\mathbf{C}_1^2$，$\mathbf{C}_2^2$ における投影像であり，図 4.18 (a)，(b)，(c) の黒色の点は trifocal tensor の計算に用いた対応点である．これら対応点から計算した trifocal tensor を用いて，レンジセンサの 3 次元データを $\mathbf{C}_1^2$ の 2 次元画像に変換した．図 4.19 の灰色の点はレーザー照射点のカメラ $\mathbf{C}_1^2$ による投影像であり，黒色の点が trifocal tensor を用いて変換された点である．図 4.19 より，投影像と変換した点が一致していることがわかる．このことから，提案した多視点幾何により，レンジセンサが計測中に運動しているにも関わらず，正しく 3 次元データを 2 次元画像に変換できていることが分かる．次に， trifocal tensor と 2 次元画像を用いて 3 次元データを生成する実験を行った．図 4.20 の黒色の点は trifocal tensor と 2 次元画像により生成した 3 次元点である．図 4.20 と図 4.18 (a) より，提案した多視点幾何により，2 次元画像の点を正しく 3 次元データに変換できていることが分かる．これらの性質は点の変換によるテクスチャマッピングなどに利用することができる．

最後に， trifocal tensor を用いてカメラ行列を復元し，3 次元データと 2 次元画像を用いて，4 次元点を復元した．本実験では，正しい形状を固定レンジセンサで計測した 3 次



(a)



(b)

図 4.17 3 次元配置．3 次元物体が，運動するレンジセンサ $\mathbf{C}^3$ と複数のカメラ $\mathbf{C}_1^2$, $\mathbf{C}_2^2$ で撮影されている．$\mathbf{C}^3$ は矢印の方向に運動する．(b) は対象物体の形状である．

元点とし，復元した 4 次元点から 3 次元データを抜き出し，比較を行った．形状を比較するために，内部パラメータは既知とし，また運動方向は未知であるが，運動の大きさは既知であるとして，スケールと運動の大きさの不定性を取り除いた．図 4.21 の灰色の点は固定レンジセンサによる計測結果であり，黒色の点は trifocal tensor でカメラを復元し，移動レンジセンサのデータを補正した結果である．灰色点と黒色点がほぼ一致していることから，提案した多視点幾何により，正しくデータの歪み補正が行えることが分かる．以上の通り，本章で導出した複合次元多視点幾何を用いれば，異なる次元のセンサ間におい

て情報変換や情報統合が可能となる．

(2) シミュレーション実験

次に，シミュレーション実験により，提案法の精度や安定性を評価した結果を示す．図4.22は本シミュレーション実験における移動レンジセンサ，カメラ，対象物体の配置である．レンジセンサは$\mathbf{C}_r$から$\mathbf{C}'_r$に計測中に移動する．また，図4.23(a)，(b)はそれぞれレンジセンサとカメラにおける時空間画像である．図4.23(a)，(b)より，それぞれのセンサで得られる投影像の次元は異なっている．この画像を用いて，bifocal tensorを計算した．その後，計算したbifocal tensorを用いてカメラ行列を復元し，3次元データと2次元画像を用いて，4次元点を復元した．ここで，内部パラメータは既知とし，また運動方向は未知であるが，運動の大きさは既知であるとして，スケールと運動の大きさの不定性を取り除いた．このようにして不定性を取り除いた4次元点から3次元データを抜き出すことで移動レンジセンサのデータを補正した．次節以降では，このように形状補正行った場合の精度評価と安定性評価の結果を示す．

(i) 精度評価

まず，提案法の精度評価を行った結果を示す．画像に標準偏差1pixelのガウスノイズを印加し，ランダムに選んだ対応点を用いて求めたbifocal tensorから形状補正し，真の形状との平均距離を計算した．図4.24は対応点数を変えた場合における補正形状と真の形状との距離を示したグラフである．図4.24より，対応点数が増えるに従って，補正形状と真の形状との距離が小さくなっていることがわかる．この図より明らかなように，必要最低点数より多くの対応点を用いることで，精度が向上していることがわかる．また，本提案法では4次元時空間を考えているため，3次元空間中においてある時刻に対応点が1点しか得られない場合であっても，時刻が異なれば別の対応点として扱うことが出来る．従って，撮影時刻を増やすことで，対応点数を簡単に増やすことができる．

(ii) 安定性評価

次に，移動レンジセンサを用いた形状補正の安定性について実験を行った結果を示す．画像に標準偏差1pixelのガウスノイズを印加し，ランダムに選んだ対応点を用いて求めたbifocal tensorから形状補正し，3σの不確定領域の楕円体の体積を計算した．図4.25は対応点数と不確定領域の楕円体の体積の関係を示したグラフである．図4.25より，対応点数が増えるに従って，楕円体の体積が小さくなっていることがわかる．この図より明らかなように，必要最低点数より多くの対応点を用いることで，安定性も向上していることがわかる．

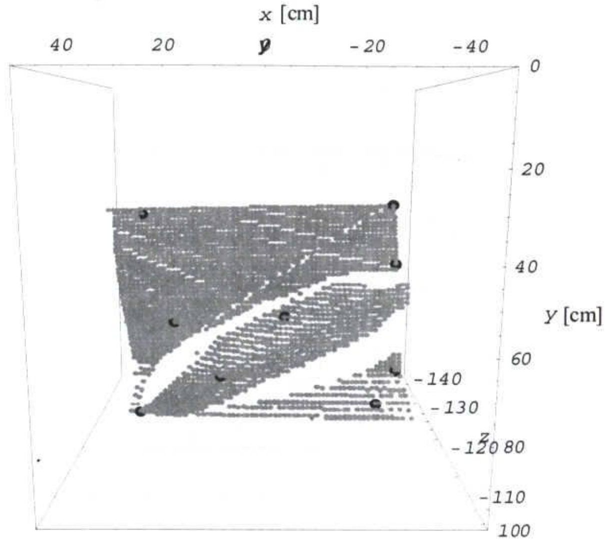
(iii) 計算量評価

最後に，移動レンジセンサとカメラにおける多視点幾何の計算時間について実験を行った結果を示す．画像中からランダムに最小対応点数である 11 点を取り出し，bifocal tensor を 100 回計算し，平均計算時間を計算した．本実験では 2 次元画像間における bifocal tensor について同様の計算を行い比較対象とした．尚，評価には，CPU Intel Core 2 Duo, 2.00GHz の計算機を用い，計算ソフトは Mathematica 6.0 を使用した．結果を表 4.5 に示す．

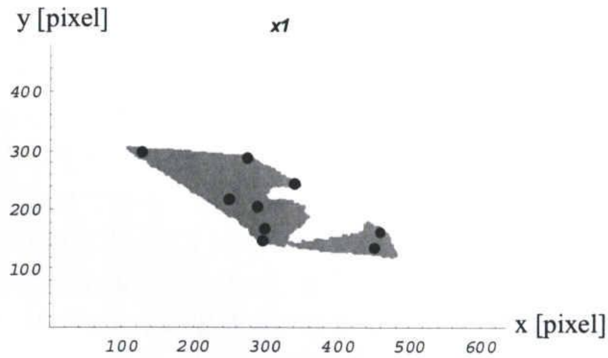
表 4.5 より明らかなように，提案した 2 視点幾何と従来の 2 視点幾何との間で計算時間に大きな差はない．これは，これらの多視点幾何の拘束式と要素数に大きな違いがないためであると考えられる．また，従来の多視点幾何はリアルタイムの計算が可能であることから，拡張現実感など常に幾何関係を計算する必要がある分野へ応用されている．これと同様に，提案した多視点幾何もリアルタイムの計算が可能であり，常に幾何計算が必要な場合においても十分適用可能であると考えられる．

表 4.5 視点数と計算時間の関係

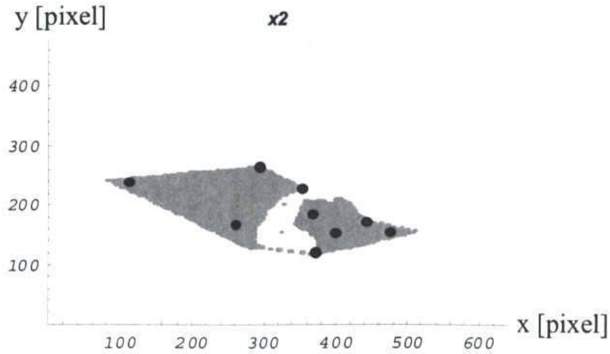
	提案法	従来法
計算時間 [ms]	6.13	5.54



(a)



(b)



(c)

図 4.18 レンジデータとカメラ画像. (a) 中の灰色の点はレンジセンサによる計測結果であり, (b), (c) 中の灰色の点はレーザー照射点をカメラで投影した点である. 黒色の点は trifocal tensor の計算に用いた対応点を示す.

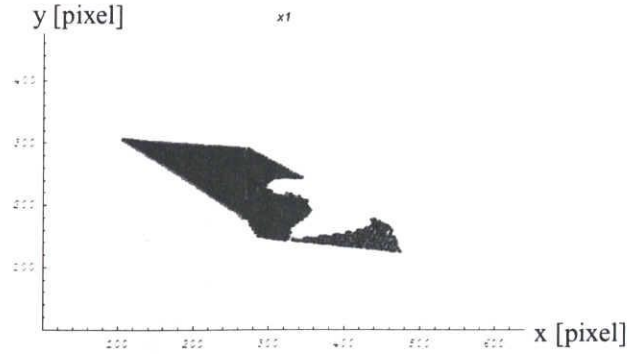


図 4.19 trifocal tensor とレンジデータによるカメラ画像への変換．灰色の点はレーザー照射点のカメラ $\mathbf{C}_1^2$ による投影像であり，黒色の点は trifocal tensor を用いて変換された点である．

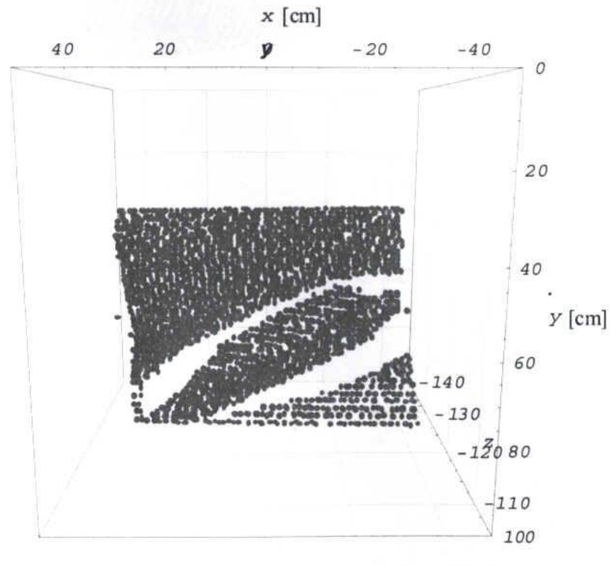


図 4.20 trifocal tensor と 2 次元画像による 3 次元データへの変換．黒色の点は trifocal tensor と 2 次元画像により生成した 3 次元データである．

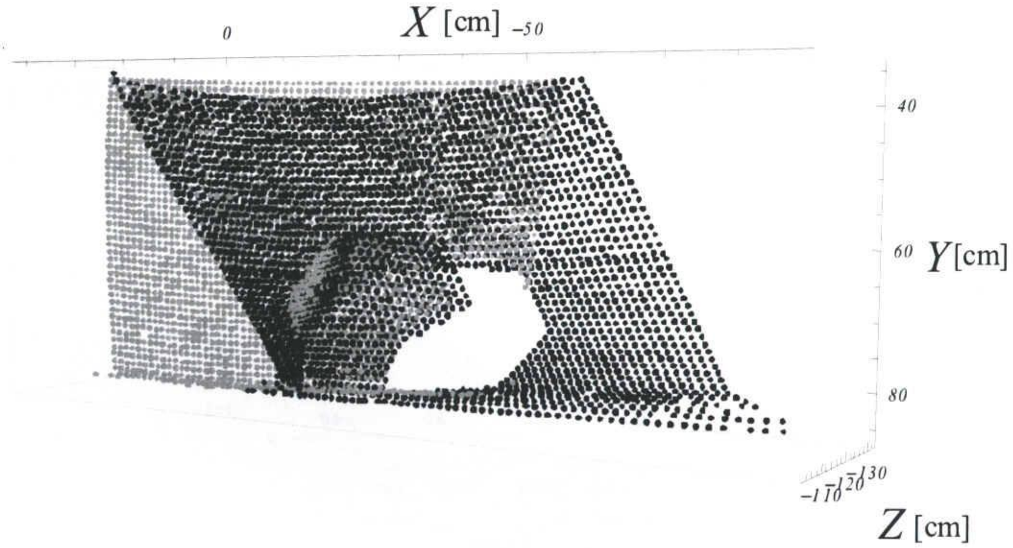


図 4.21 trifocal tensor による形状復元．灰色の点は固定レンジセンサによる計測結果であり，黒色の点は trifocal tensor でカメラを復元し，移動レンジセンサのデータを補正した結果である．

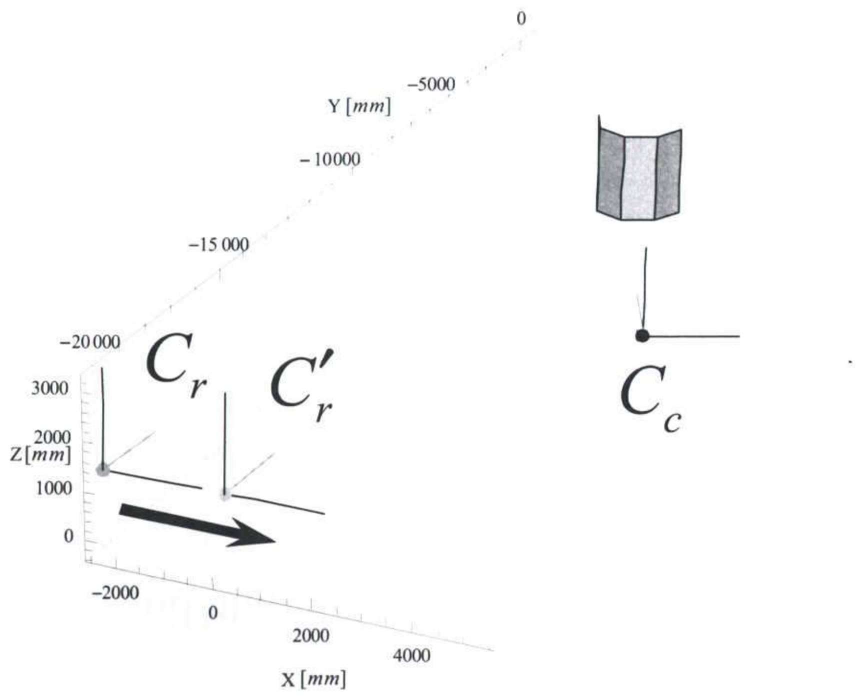
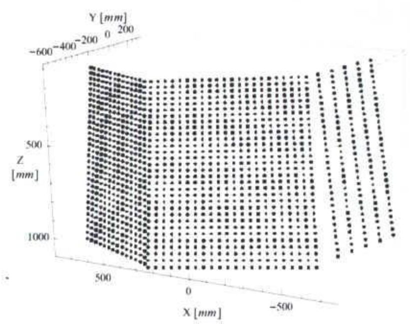
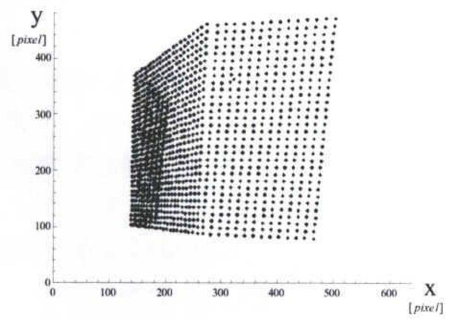


図 4.22 シミュレーション実験環境



(a) $\mathbf{C}_r$ によるレンジデータ



(b) $\mathbf{C}_c$ によるカメラ画像

図 4.23 移動レンジセンサにより得られた計測データとカメラ画像

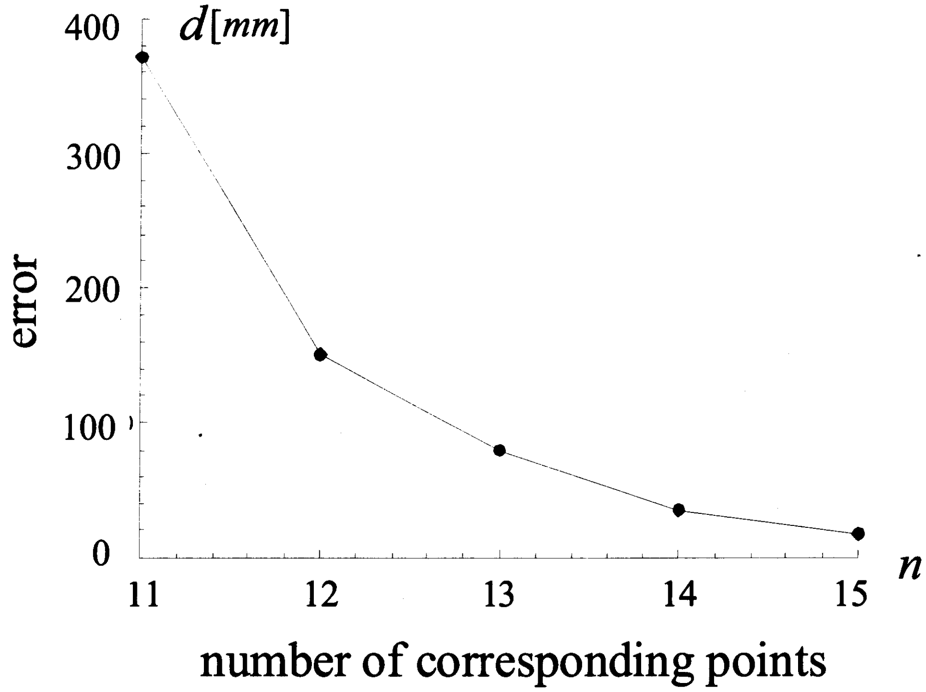


図 4.24 対応点数と補正形状の誤差の関係

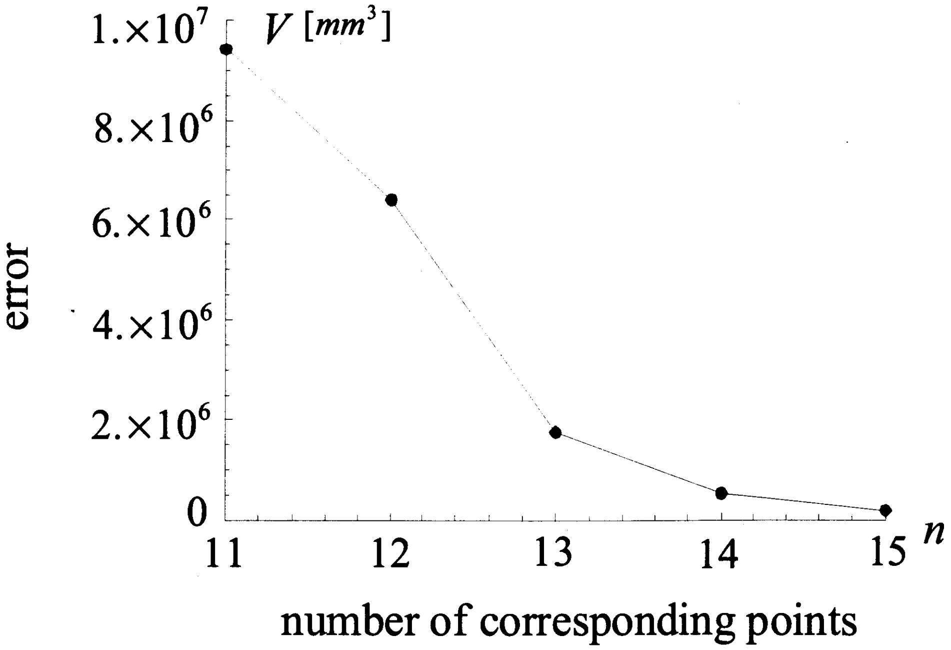


図 4.25 対応点数と補正形状の安定性の関係

第5章

結論

本研究では，現在広く応用されている多視点幾何理論を拡張し，全ての次元のセンサを自由に組み合わせて使用することができる新たな多視点幾何理論を提案した．

従来のコンピュータビジョン及び多視点幾何理論の研究はともに長い歴史を持つものである．画像からの形状復元や物体認識・人物認識に至るまで，画像から周囲の環境情報を得る様々な技術が開発されるとともに，それらは拡張現実感やITS(自動車高度知能化)へ応用されるなど高度な発展を遂げてきた．人が環境情報の多くを視覚上情報から得ているように，人の視覚を実現することを目標とするコンピュータビジョンにおいて，ロボットの目とも言うべきカメラが果たす役割は大きい．このようなロボットの目がより広い分野へ応用されるとともに，この多視点幾何理論はより自由な環境で利用可能となることが求められている．しかしながら，従来の多視点幾何において，カメラは3次元空間から2次元画像へ投影を行うことを前提にされてきたため，このような3次元空間から2次元画像への投影に基づく多視点幾何では，多視点幾何を計算するためにはこれら対応点とカメラの関係が固定であるという大きな制約があった．そのため，カメラが移動しながら，対応点が運動する場合には多視点幾何を計算することはできないなど，従来の多視点幾何は，基本的には静止したカメラで静止した物体を撮影した場合に成り立つ多視点幾何であった．このような課題に対して本研究では，このような制約を取り除き，運動するカメラで非剛体運動を撮影した場合に成り立つ多視点幾何を提案した．

第3章においては，3次元よりも高い次元を考え，このような高次元空間から画像への投影を考えることで，運動するカメラにより，運動する物体を観測した場合において成り立つ多視点幾何拘束が存在することを明らかにした．さらに，この拡張多視点幾何からカメラの運動が復元可能であることを利用し，移動するレンジセンサから得られる歪んだ3次元データを補正する手法を提案した．まず，ラスタスキャンを行うレンジセンサの距離画像を時空間や画像として扱うことができることを示し，カメラ画像との間で高次元多視点幾何が成り立つことを示した．このように高次元空間の多視点幾何が成り立つことで，従来，レンジセンサの形状補正で問題となっていたトラッキングが1点で済むため，非常に容易になる．一方で，通常レンジセンサとカメラ画像の間の対応はカメラ同士の場合と異なり困難となる．そこで本論文では，この問題を解決するために，得られたサンプ

ル点の時刻のアフィン変換を考えることで，これらの対応を安定に計算する手法をを提案し，レンジセンサとカメラの撮影周期が異なる場合にも適用可能であることを示した．最後に，多視点幾何からカメラパラメータを計算し，形状の補正が可能であることを示した．本手法ではレンジセンサの運動の大きさが既知である必要があるが，運動の方向は未知で良いため，物理センサにより計測し，これらの運動パラメータを用いる従来法と比較して，センサ校正の手間やセンサ誤差の影響を受けない．更にレンジセンサのみが移動する場合だけでなく，カメラが運動した場合にも適用可能であるため広い範囲での応用が可能であると考えられる．

一方で，センサネットワークの研究の進展に伴い，カメラ画像のみならず様々な種類のセンサ（例えばラインセンサ，カメラ，レンジセンサ等）の情報を統合的に用いるセンサフュージョンに基づくシステムが重要となりつつある．しかし，従来の多視点幾何は，複数のカメラが互いに同じ種類である場合，すなわち投影像が同じ次元を持つ場合に限定されており，異なる種類のセンサ間の関係を記述することはできなかった．

そこで第4章では，一般の異なる種類のセンサを組み合わせた場合において成り立つ新たな多視点幾何を提案した．これまでの多視点幾何では3次元空間から2次元画像への投影を仮定していたのに対し，本論文では一般のk次元空間中から次元の異なるセンサへの投影を考えることにより，全ての次元のセンサと，その組み合わせにおいて成り立つ多視点幾何の一般理論を構築した．次に，複合次元センサの組み合わせの例を挙げ，多視点幾何拘束の詳細を示した．また，新たに提案した多視点幾何から形状復元を行う手法について詳細を示した．さらに，この新しい多視点幾何を応用することで，異なる次元のセンサ間において情報変換や形状復元が可能であることを示した．

最後に，本論文で提案した多視点幾何は，1次元ラインセンサ，2次元カメラ，3次元レンジセンサなどの次元の異なるセンサ間の幾何学的関係を記述できるとともに，センサの運動も可能である．このため，これらの異なる種類のカメラやセンサが同時に用いられる様々なシステムにおいて，センサ間の校正やセンサ間の情報変換に用いることができる．例えば，第4.5節に示したように移動レンジセンサとカメラ間で情報変換が可能であることから，移動レンジセンサの形状に対してカメラ画像を用いてテクスチャマッピングに応用可能であると考えられる．一方，ラインセンサは通常，2次元カメラより高解像度であることから，ラインセンサの情報を変換することで2次元画像の高精細化への応用が可能であると考えられる．その他にも，上に示した例のようにセンサの特性の違いを利用することで，従来の画像同士の多視点幾何では用いることができなかった分野への幅広い応用が期待される．本論文において提案した多視点幾何は現時点で最も拡張された多視点幾何であり，近年，重要となりつつあるセンサフュージョンやセンサネットワークの新たな発展に大きく貢献するものである．

業績一覧

これらの研究の一部は以下の論文，国際学会及び国内シンポジウム等において掲載及び発表された．

学術論文

- Kazuki Kozuka, Cheng Wan and Jun Sato, "Rectification of 3D Data Obtained from Moving Range Sensor by Using Extended Projective Multiple View Geometry", International Journal of Automation and Computing, vol.5, No3, pages 268-275, Springer, 2008.[39]

- 小塚 和紀, 佐藤 淳, "多視点幾何による移動レンジセンサの三次元データ補正", 電子情報通信学会論文誌 Vol.J92-D, No.3, 2009.（採録決定, 掲載待ち）.

国際会議

- Kazuki Kozuka and Jun Sato, "Rectification of 3D Data Obtained from Moving Range Sensors by using Multiple View Geometry", Proc. International Conference on Image Analysis and Processing, pages 117-122, Modena Italia, 2007.[37]

- Cheng Wan, Kazuki Kozuka and Jun Sato, "Multiple View Geometry for Non-Rigid Motions Viewed from Translational Cameras", Proc. Asian Conference on Computer Vision, LNCS 4844, vol.2, pages 342- 352, Tokyo Japan, 2007.[66]

- Kazuki Kozuka, Cheng Wan and Jun Sato, "Rectification of 3D Data Obtained from Moving Range Sensor by using Multiple View Geometry under Projective Projections in Space-Time", International Workshop on Multi-Dimensional and Multi-View Image Processing, pages 81-87, Tokyo Japan, 2007.[38]

- Kazuki Kozuka and Jun Sato, "Multiple View Geometry for Mixed Dimensional Cameras", Proc. 3rd International Conference on Computer Vision Theory and Applications（VISAPP2008）, pages 1336-1341, Funchal Portugal, 2008.[40]

国内会議

- 小塚 和紀, 佐藤 淳, ”並進カメラによる非剛体運動の多視点幾何”, 画像の認識・理解シンポジウム（MIRU2006）, pages 700-705, 仙台, 2006 年 7 月. [3]
- 小塚 和紀, 佐藤 淳, ”多視点幾何による移動レンジセンサの 3 次元データ補正”, 画像の認識・理解シンポジウム（MIRU2007）, pages 1336-1341, 広島, 2007 年 7 月. [4]
- 小塚 和紀, 佐藤 淳, ”複合次元における多視点幾何”, 画像の認識・理解シンポジウム（MIRU2008）, pages 160-165, 軽井沢, 2008 年 7 月. [6]

謝辞

ここに一遍の博士論文をまとめることができました．研究を進めるにあたり，数々の方よりご厚情を賜りました．皆様方への感謝の気持ちを込め，ここに御礼の言葉を述べさせて頂きます．

本研究の過程において終始懇切なる御指導を賜り，本論文をまとめるにあたり，親身な御助言と力強い励ましを頂いた佐藤 淳教授に心より感謝を申し上げます．今後も一研究者として議論を交わして頂ければ幸いです．

また，本論文の審査をして頂くとともに本論文に対する有益な御意見を頂きました本研究科情報工学専攻北村 正教授および産業戦略工学専攻，梅崎 太造教授に御礼申し上げます．

本研究における議論・検討にあたり，御教示ならびに御激励を賜りました本谷 秀堅准教授，坂上 文彦助教に深謝申し上げます．

様々な御助言を頂いた足立 淳氏をはじめとする先輩諸氏，研究内容についてともに議論するなど，良き相談相手となって頂いた早川 和孝氏，研究活動をサポートしてくれた本研究室の後輩諸君及び関係者各位に感謝致します．

最後に，5年間の大学院生活を支え続けてくれた両親と平良 知香氏に感謝致します．

2008年12月

参考文献

[1] 佐藤淳．コンピュータビジョン－視覚の幾何学－．コロナ社，1999.

[2] 徐剛，辻三郎．3 次元ビジョン．共立出版，1998.

[3] 小塚 和紀, 佐藤 淳, "並進カメラによる非剛体運動の多視点幾何", 画像の認識・理解シンポジウム（MIRU2006）, pages 700-705, 仙台, 2006 年 7 月.

[4] 小塚 和紀, 佐藤 淳, "多視点幾何による移動レンジセンサの 3 次元データ補正", 画像の認識・理解シンポジウム（MIRU2007）, pages 1336-1341, 広島, 2007 年 7 月.

[5] 小塚 和紀, 佐藤 淳, "多視点幾何による移動レンジセンサの三次元データ補正", 電子情報通信学会論文誌 Vol.J92-D, No.3, 2009.（採録決定, 掲載待ち）.

[6] 小塚 和紀, 佐藤 淳, "複合次元における多視点幾何", 画像の認識・理解シンポジウム（MIRU2008）, pages 160-165, 軽井沢, 2008 年 7 月.

[7] K. Daniilidis and C. Geyer. Omnidirectional Vision: Theory and Algorithms. In *Proc. International Conference on Pattern Recognition*, pages 1089–1096, 2000.

[8] O. Faugeras and L. Robert. What can two images tell us about a third one ? In *Technical Report, INRIA-2018*, 1993.

[9] O. Faugeras and L. Robert. What can two images tell us about a third one ? In *Proc. 4th European Conference on Computer Vision*, Vol.1, pages 485–492, 1994.

[10] O. Faugeras and R. Keriven. Scale-space and affine curvature. In *Proc. Europe-China Workshop on Geometrical Modelling and Invariants for Computer Vision*, pages 17–24, 1995.

[11] O. Faugeras and B. Mourrain. On the geometry and algebra of the point and line correspondences between N images. In *Proc. 5th International Conference on Computer Vision*, pages 951–956, 1995.

[12] O. Faugeras and Q. Luong. *The Geometry of Multiple Images.* MIT Press, 2001.

[13] M. A. Fischler and R. C. Bolles. Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography. *Graphics and Image Processing*, 24(6): 381–395, 1981.

[14] D. Forsyth and J. Ponce. *Computer Vision*. Prentice Hall, 2003.

[15] C. Geyer and K. Daniilidis. Catadioptric Camera Calibration In *Proc. 7th International Conference on Computer Vision*, pages 398–404, 1999.

[16] C. Geyer and K. Daniilidis. Catadioptric Projective Geometry. In *International Journal of Computer Vision* , 45(3): 223–243, 2001.

[17] C. Geyer and K. Daniilidis. Properties of the Catadioptric Fundamental Matrix. In *Proc. 7th European Conference on Computer Vision* , pages 766–773, 2003.

[18] C. Geyer and K. Daniilidis. Mirrors in motion: Epipolar geometry and motion estimation. In *Proc. 9th International Conference on Computer Vision* , Vol.2, pages 140–154, 2002.

[19] M. D. Grossberg and S. K. Nayar. A General Imaging Model and a Method for Finding its Parameters. In *Proc. 8th International Conference on Computer Vision*, pages 108–115, 2001.

[20] R. Hartley. Lines and points in three views – an integrated approach. In *Image Understanding Workshop*, pages 1009–1016, 1994.

[21] R. Hartley. A linear method for reconstruction from lines and points. In *Proc. 5th International Conference on Computer Vision*, pages 882–887, Cambridge, Massachusetts, 1995.

[22] R. Hartley. Multilinear relationship between coordinates of corresponding image points and lines. In *Proc. International Workshop on Computer Vision and Applied Geometry*, 1995.

[23] R. Hartley. Minimising algebraic distance. In *Proc. Image Understanding Workshop*, pages 631–637, 1997.

[24] R. Hartley. In Defense of the Eight-Point Algorithm. In *Proc. Image Understanding Workshop*, pages 631–637, 1997. In *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(6): 580–593, 1997.

[25] R. Hartley. Computation of the quadrifocal tensor. In *Proc. 5th European Conference on Computer Vision*, pages 20–35, 1998.

[26] R. Hartley. Minimizing algebraic error in geometric estimation problems. In *Proc. 6th International Conference on Computer Vision*, pages 469–476, 1998.

[27] R. Hartley, and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[28] R. Hartley. Ambiguous configurations for 3 view projective reconstruction. In *Proc. 6th European Conference on Computer Vision*, pages 922–935, 2000.

[29] R. Hartley and F. Schaffalitzky. Reconstruction from projections using grassman tensors. In *Proc. 8th European Conference on Computer Vision*, volume 1, pages 363–375, 2004.

[30] K. Hayakawa and J. Sato. Multiple View Geometry, Multiple View Geometry in the Space-Time, In *Proc. 7th Asian Conference on Computer Vision*, volume 2, pages 437–446, 2006.

[31] A. Heyden and K. Astrom. Simplifications of multilinear forms for sequences of images. In *Image and Vision Computing* 15: 749–757, 1997.

[32] A. Heyden. A common framework for multiple view tensors. In *Proc. 5th European Conference on Computer Vision*, volume 1, pages 3–19, 1998.

[33] A. Heyden. Reduced multilinear constraints: theory and experiments. In *International Journal of Computer Vision*, 30(1): 5–26, 1998.

[34] A. Heyden. Tensorial properties of multiple view contraints. In *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 23: 169–202, 2000.

[35] H.C. Longuet-Higgins. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. In *Nature*, 293:133–135, 1981.

[36] R. Y. Tsai and T. S. Huang. Uniqueness and estimation of three-dimensional motion parameter of a rigid objects with curved surfaces. In *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(1) : 13–26, 1984.

[37] K. Kozuka and J. Sato. Rectification of 3D Data Obtained from Moving Range Sensors by using Multiple View Geometry. *Proc. International Conference on Image Analysis and Processing*, pages 117–122, 2007.

[38] K. Kozuka, C. Wan and J. Sato. Rectification of 3D Data Obtained from Moving Range Sensor by using Multiple View Geometry under Projective Projections in Space-Time. *International Workshop on Multi-Dimensional and Multi-View Image Processing*, pages 81–87, 2007.

[39] K. Kozuka, C. Wan and J. Sato. Rectification of 3D Data Obtained from Moving Range Sensor by Using Extended Projective Multiple View Geometry. *International Journal of Automation and Computing*, vol.5, No3, pages 268-275, Springer, 2008.

[40] K. Kozuka and J. Sato. Multiple View Geometry for Mixed Dimensional Cameras. *Proc. 3rd International Conference on Computer Vision Theory and Applications*, pages 1336–1341, 2008.

[41] S. J. Maybank. *Theory of reconstruction from Image Motion*. Springer-Verlag, 1993.

[42] S. J. Maybank. Ambiguity in Reconstruction from Images of Six Points. In *Proc. 6th International Conference on Computer Vision*, pages 703–708, 1998.

[43] P. R. S. Mendonca and R. Cipolla. Analysis and Computation of an Affine Trifocal Tensor. In *British Machine Vision Conference*, pages 125–133, 1998.

[44] T. Pajdla. Epipolar geometry of some non-classical cameras. In *Proc. Computer Vision Winter Workshop*, pages 223–233, 2001.

[45] T. Pajdla. Stereo with oblique cameras. In *International Journal of Computer Vision*, 47(1-3): 161–170, 2002.

[46] R. Pless. Discrete and differential two-view constraints for general imaging systems. In *Proc. 3rd Workshop on Omnidirectional Vision*, pages 53–59, 2002.

[47] J. Sato. Recovering multiple view geometry from mutual projections of multiple cameras. In *International Journal of Computer Vision*, Vol.66, No.2, pages 123–140, 2006.

[48] S. M. Seitz. The Space of All Stereo Images. In *Proc. 8th International Conference on Computer Vision*, pages 26–33, 2001.

[49] A. Shashua. Trilinearity in visual recognition by alignment. In *Proc. 4th European Conference on Computer Vision*, Vol.1, pages 479–484, 1994.

[50] A. Shashua and M. Werman. Trilinearity of three perspective views and its associated tensor. In *Proc. 5th International Conference on Computer Vision*, pages 920–925, 1995.

[51] A. Shashua and L. Wolf. On the structure and properties of the quadrifocal tensor. In *Proc. 6th European Conference on Computer Vision*, volume 1, pages 710–724, 2000.

[52] A. Shashua and L. Wolf. Homography tensors: On algebraic entities that represent three views of static or moving planar points. In *Proc. 6th European Conference on Computer Vision*, volume 1, pages 507–521, 2000.

[53] Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecka and S. Sastry. *An invitation to 3-D vision : from images to geometric models*. Springer, 2004.

[54] M. Spetsakis and J. Aloimonos. Structure from motion using line correspondences. In *International Journal of Computer Vision*, 4:171–183, 1990.

[55] P. Sturm. Mixing catadioptric and perspective cameras. In *Proc. Workshop on Omnidirectional Vision*, 2002.

[56] P. Sturm and S. Ramalingam. A Generic Concept for Camera Calibration. In *Proc. 8th European Conference on Computer Vision*, pages 1–13, 2004.

[57] P. Sturm. Multi-view geometry for general camera models. In *Proc. Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 206–212, 2005.

[58] O. Chum, T. Pajdla, and P. Sturm. The geometric error for homographies. In *Computer Vision and Image Understanding*, 97(1): 86–102, 2005.

[59] T. Svoboda and T. Pajdla. Epipolar geometry of panoramic cameras. In *Proc. 5th European Conference on Computer Vision*, pages 218–231, 1998.

[60] T. Svoboda and T. Pajdla. Epipolar geometry for central catadioptric cameras. In *International Journal of Computer Vision*, 49(1): 23–37, 2002.

[61] R. Swaminathan, M. D. Grossberg and S. K. Nayar. Caustics of Catadioptric Cameras. In *Proc. 8th International Conference on Computer Vision*, pages 2–9, 2001.

[62] R. Swaminathan, M. D. Grossberg and S. K. Nayar. Non-Single Viewpoint Catadioptric Cameras: Geometry and Analysis. In *International Journal of Computer Vision*, 66(3): 211–229, 2006.

[63] R. Swaminathan. Focus in Catadioptric Imaging Systems. In *Proc. 11th International Conference on Computer Vision*, pages 1–7, 2007.

[64] S. Thirthala and M. Pollefeys. Trifocal tensor for heterogeneous cameras. In *Proc. Workshop on Omnidirectional Vision*, 2005.

[65] B. Triggs. Matching constraints and the joint image. In *Proc. 5th International Conference on Computer Vision*, pages 338–343, 1995.

[66] C. Wan, K. Kozuka and J. Sato. Multiple View Geometry for Non-rigid Motions Viewed from Translational Cameras. In *Proc. 7th Asian Conference on Computer Vision*, volume 2, pages 342–352, 2007.

[67] Y. Wexler and A. Shashua. On the synthesis of dynamic scenes from reference views. In *Proc. Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1576–1581, 2000.

[68] Y. Wexler, A. W. Fitzgibbon and A. Zisserman. Learning epipolar geometry from image sequences. In *Proc. Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 209–216, 2003.

[69] L. Wolf and A. Shashua. On projection matrices $P^k \rightarrow P^2$, k = $3,\cdots,6$, and their applications in computer vision. In *Proc. 8th International Conference on Computer Vision*, volume 1, pages 412–419, 2001.

[70] G. Xu and Z. Zhang. *Epipolar geometry in stereo, motion and object recognition - A unified approach.* Kluwer Academic Publishers, 1996.