曲線の外的形状による
等長はめ込みの特徴付け

2009年

杉山　儀

名古屋工業大学博士論文
甲第684号（課程修了による）
平成21年3月23日授与

目 次

1 部分多様体

C^∞ 多様体 M の座標近傍 $(U_\alpha,\, x^i)$ 内の二つの異なる点 $p,\, q$ に対して，U_α 内の p から q への C^∞ 曲線 $C = \{x(t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ をとる．従って，$p = x(0)$ から $q = x(1)$ である．この曲線 C に沿った常微分方程式

$$\frac{dY^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}\left(x(t)\right) \frac{dx^j}{dt}(t) Y^k(t) = 0 \quad i = 1, \cdots, n \tag{1.1}$$

を考える．ただし $\Gamma^i_{jk}(x)$ は U_α 上の関数, $(dx^1(t)/dt, \cdots, dx^n(t)/dt)$ は曲線 C の $x(t)$ での接ベクトルであり, $Y^i(t)$ を t についての未知関数とする．この微分方程式は連立一階線形微分方程式であるから，初期値 $Y^i(0)$ を与えることで解 $Y^i(t)$ を求めることができる．従って，関数族 $\{\Gamma^i_{jk}\}$ を与えることが解を求めることになっている．そこで，各 U_α 上に関数族 $\{\Gamma^i_{jk}\}$ が与えられているとき，方程式 (1.1) が座標近傍 U_α 内という局所的ではなく多様体上の対象になるための条件を求めてみよう．$(U_\beta,\, y^a)$ を曲線 C を含む別の座標近傍として U_β では $\{\bar{\Gamma}^a_{bc}\}$ が与えられているとする．つまり，$C = \{x(t)\} = \{y(t)\}$ として，方程式 (1.1) は $(U_\beta,\, y^a)$ では

$$\frac{d\bar{Y}^a}{dt}(t) + \sum_{b,c} \bar{\Gamma}^a_{bc}\left(y(t)\right) \frac{dy^b}{dt}(t) \bar{Y}^c(t) = 0 \quad a = 1, \cdots, n \tag{1.2}$$

である．ここで

$$\bar{Y}^a(t) = \sum_k \frac{\partial y^a}{\partial x^k} Y^k(t), \quad \frac{dy^b}{dt}(t) = \sum_i \frac{\partial y^b}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}(t)$$

を方程式 (1.2) に代入すると

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^k \partial x^j} \frac{dx^j}{dt} Y^k + \sum_k \frac{\partial y^a}{\partial x^k} \frac{dY^k}{dt} + \sum_{b,c,i,k} \bar{\Gamma}^a_{bc} \frac{\partial y^b}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial y^c}{\partial x^k} Y^k = 0$$

となる．よって，方程式 (1.1) を用いると

$$\sum_{i,j,k} \left\{ \Gamma^i_{jk} \frac{\partial y^a}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{b,c} \bar{\Gamma}^a_{bc} \frac{\partial y^b}{\partial x^j} \frac{\partial y^c}{\partial x^k} \right) \right\} \frac{dx^j}{dt} Y^k = 0$$

を得る．よって，機構 $\{\Gamma^i_{jk}\}$ が曲線，すなわち dx^j/dt に関係しないことと，初期値はいろいろ変えて考えることから，結局

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_{a,b,c} \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \left(\bar{\Gamma}^a_{bc} \frac{\partial y^b}{\partial x^j} \frac{\partial y^c}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 y^a}{\partial x^j \partial x^k} \right) \tag{1.3}$$

が各 $U_\alpha \cap U_\beta$ で成り立てば機構 $\{\Gamma^i_{jk}\}$ は M 上の概念になる．この機構が**接続**とよばれるものである．

定義 1.1 C^∞ 多様体 M に**線形接続** (linear connection) $\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}\}$ が与えられているとは，各 (U_α, x^j) に n^3 個の関数 $\{\Gamma^i_{jk}\}$ が与えられていて，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ なるところでは式 (1.3) が成り立つことをいう．Γ^i_{jk} を**クリストフェルの記号**という．また初期値 $Y(0)$ に対する方程式 (1.1) の解 $Y(t)$ を**曲線 C に沿っての Γ に関する平行移動**という．

M に線形接続 Γ が与えられているとする．二つのベクトル場 $X, Y \in \mathfrak{X}M$ について座標近傍 (U_α, x^i) 上で $X = \sum_i X^i \partial/\partial x^i$, $Y = \sum_i Y^i \partial/\partial x^i$ として，$\nabla_X Y$ を

$$\nabla_X Y = \sum_i \left(\sum_j X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \sum_{jk} \Gamma^i_{jk} X^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.4}$$

と定義する．$\nabla_X Y$ は式 (1.3) より M 上のベクトル場となることがわかる．実際，二つの座標近傍 (U_α, x^i), (U_β, y^a) の共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta$ において

$$\frac{\partial}{\partial y^a} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

となるので，(U_β, y^α) に対する式 (1.4) の右辺は

$$\sum_a \left(\sum_b \bar{X}^b \frac{\partial \bar{Y}^a}{\partial y^b} + \sum_{bc} \bar{\Gamma}^a_{bc} \bar{X}^b \bar{Y}^c \right) \frac{\partial}{\partial y^a}$$

となり，座標系の取り方に依存しないことがわかる．これを **X による Y の共変微分** (covariant derivative) という．

命題 1.1 $\nabla : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$ は次の式を満たす.

i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

ii) $\nabla_{(X+Z)}Y = \nabla_X Y + \nabla_Z Y$,

iii) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y, \quad f \in C^\infty(M)$,

iv) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

命題 1.2 M 上に接続 Γ を与えることと，命題 1.1 の条件 i) $\sim$ iv) を満たす $\nabla : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$ を与えることとは同値である.

証明 座標近傍 (U_α, x^i) 上のベクトル場 $\partial/\partial x^i$ について

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_i \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^a}} \frac{\partial}{\partial y^b} = \sum_c \bar{\Gamma}^c_{ab} \frac{\partial}{\partial y^c} \tag{1.5}$$

で与えられる．よって $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ で

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_a \frac{\partial y^a}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^a}, \quad \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_b \frac{\partial y^b}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^b}$$

を式 (1.5) に代入すると

$$\begin{aligned}
\nabla_{\sum_a \frac{\partial y^a}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^a}} \sum_b \frac{\partial y^b}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^b} &= \sum_a \frac{\partial y^a}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^a}} \left(\sum_b \frac{\partial y^b}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^b} \right) \\
&= \sum_{ab} \frac{\partial y^a}{\partial x^j} \frac{\partial^2 y^b}{\partial y^a \partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^b} + \sum_{ab} \frac{\partial y^a}{\partial x^j}\frac{\partial y^b}{\partial x^k} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^a}} \frac{\partial}{\partial y^b} \\
&= \sum_{ac} \frac{\partial y^a}{\partial x^j} \frac{\partial^2 y^c}{\partial y^a \partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^c} + \sum_{ab} \frac{\partial y^a}{\partial x^j}\frac{\partial y^b}{\partial x^k} \sum_c \bar{\Gamma}^c_{ab} \frac{\partial}{\partial y^c} \\
&= \sum_i \Gamma^i_{jk} \sum_c \frac{\partial y^c}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^c}
\end{aligned}$$

となる．よって，接続の変換式 (1.3) を得る. $\square$

本節では線形接続をΓと∇の二通りの方法で導入したが，これから接続から多様体を大域的に考察するには∇の方が便利なため本稿ではこちらを採用する．

定義 1.2 双線形写像$g : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to C^\infty(M)$が次の二つの条件

i) $g(X,Y) = g(Y,X)$,

ii) すべてのベクトル場$X \in \mathfrak{X}M$に対して$g(X,X) \geq 0$となる．ただし$g(X,X) = 0$となるのは$X = 0$のときに限る

を満たすとき，gをMの**リーマン計量** (Riemannian metric) という．リーマン計量gは各点pの接空間T_pMに正値内積を定める．

多様体Mにリーマン計量gが与えられているとする．このとき，Mの線形接続が**計量的**であるとは$\nabla g = 0$，すなわちすべてのベクトル場X, Y, Zに対して

$$(\nabla_X g)(Y,Z) \equiv Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0 \tag{1.6}$$

となることである．恒等式(1.6)の条件は幾何学的な次の条件と同値である．pからqへの曲線τに沿う平行移動がgに関して等長的，すなわちすべてのu, $v \in T_pM$に対して

$$g(u,v) = g(\tau u, \tau v)$$

が成り立つ．

次に振率テンソル場が0，つまり

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \tag{1.7}$$

となるものが，一意的に存在することを述べる．その線形接続をgの**リーマン接続** (Riemannian connection) または **レビ・チビタ接続** (Levi-Civita connection) という．

定理 1.1 多様体M上のリーマン計量gに対し，計量的$(\nabla g = 0)$かつ振率テンソル場が0に等しい線形接続が一意的に存在する．

証明 計量的であることから，任意のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = Xg(Y, Z)$$
$$g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) = Yg(Z, X)$$
$$-g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = -Zg(X, Y)$$

の両辺を加えて，式 (1.7) を用いると

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\{&Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &+ g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y)\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

であるから，一意的に存在することが示された． □

定義 1.3 多様体 M から N への微分可能な写像 f は，M の各点 p での微分 $(f_*)_p$ が一対一である場合，**はめ込み**という．M から N へのはめこみ f が存在するとき，M を N の**はめ込まれた部分多様体** (immersed submanifold) という．特に f が一対一かつ，M から N の中の相対位相をもつ部分集合 $f(M)$ への写像 f が同相であるとき，f を**埋め込み** (embedding) といい，M を**埋め込まれた部分多様体** (embedded submanifold) という．なお，はめ込み $f : M \to N$ が存在すれば，M の次元 n と N の次元 m との間には $n \leq m$ という関係が成り立つ．

多様体 M は多様体 N の部分多様体とする．部分多様体 M 上のベクトル場 X に対して，N 上で定義されたベクトル場 $\widetilde{X}$ を M へ制限したものが X となっているとき，すなわち $\widetilde{X}\Big|_M = X$ であるとき，$\widetilde{X}$ を X の**拡張**という．

リーマン多様体 $(N, \tilde{g})$ の部分多様体 M 上の任意の接ベクトル $u, v \in TM$ に対して $g : TM \otimes TM \to \mathbb{R}$ を

$$g(u, v) = \tilde{g}(u, v)$$

と定めると M 上のリーマン計量になる．このリーマン計量 g を $\tilde{g}$ から誘導された M 上の**誘導計量** (induced metric) という．

局所的には $g=\sum_{ij} g_{ji}dx^j\otimes dx^i$, $\tilde{g}=\sum_{ab} g_{ba}dy^b\otimes dy^a$ より

$$g_{ji}=\sum_{ab} g_{ba}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\frac{\partial y^a}{\partial x^i}$$

と表すことができる.

点 $p\in M$ での任意の接ベクトル $v\in T_pM$ に対して, $\xi\in T_pN$ が $\tilde{g}(v,\xi)=0$ を満たすとき, p における N 内の一つの M の**法ベクトル** (normal vector) という. N 内の M の単位法ベクトル場を M 上の**法切断** (normal section) という.

N 内の M のすべての法ベクトルのベクトル束 (vector bundle) を $T^\perp M$ と表す. M へ制限した N の接バンドルは M の接バンドル TM と N 内の M の法バンドル $T^\perp M$ を直和したものである. すなわち

$$TN\mid_M=TM\oplus T^\perp M \tag{1.9}$$

となる.

N の部分多様体 M の余次元が 1, すなわち N の次元が (Mの次元) + 1 であり, かつ M, N が共に向き付け可能ならば, M 上の法切断 ξ を選ぶことができる. つまり法切断 ξ は任意の M のベクトル場 $X\in\mathfrak{X}M$ に対して

$$\tilde{g}(X,\xi)=0,\quad \tilde{g}(\xi,\xi)=1$$

を満たすベクトル場である. リーマン計量 $\tilde{g}$ に関する N 上のリーマン接続を $\widetilde{\nabla}$ と表す.

命題 1.3 ベクトル場 $X, Y\in\mathfrak{X}M$ に対して, $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ は X, Y を拡張したものとする. このとき $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$ は X, Y の拡張に依らず

$$[\widetilde{X},\widetilde{Y}]\Big|_M=[X,Y]$$

となる.

命題 1.4 M 上のベクトル場 X, Y の拡張となる $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ に対して, $(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})\Big|_M$ は X, Y の拡張に依らない.

そこで $(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})\Big|_M$ を $\widetilde{\nabla}_X Y$ と表す.

命題 1.5 $T\widetilde{M} = TM \oplus T^{\perp}M$ の直交分解より $\widetilde{\nabla}_X Y$ を

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla^*_X Y + \sigma(X, Y) \tag{1.10}$$

と表す. ここで $\sigma(X,Y)$ は M 上の法ベクトル場である.

(1) $\sigma : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \Gamma(T^{\perp}M)$ は対称かつ $C^{\infty}(M)-$ 双線形性をもつ. ただし $\Gamma(T^{\perp}M)$ は法バンドル $T^{\perp}M \to M$ の切断の集合を表す.

(2) $\nabla^*_X Y$ は M 上の g に関するリーマン接続 ∇ に一致する.

証明 M 上の関数 α, β に対して, その $\widetilde{M}$ への拡張を $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ と表すと $\tilde{\alpha}\widetilde{X}$, $\tilde{\beta}\widetilde{Y}$ はそれぞれ αX, $\beta Y \in \mathfrak{X}M$ の拡張になっており $\widetilde{X}\tilde{\beta}\,|_M = X\beta$ である. 従って

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\alpha X}\beta Y &= \left(\widetilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}\widetilde{X}}\tilde{\beta}\widetilde{Y}\right)\Big|_M = \left\{\tilde{\alpha}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\tilde{\beta}\widetilde{Y}\right\}\Big|_M = \left[\tilde{\alpha}\left\{(\widetilde{X}\tilde{\beta})\widetilde{Y} + \tilde{\beta}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})\right\}\right]\Big|_M \\
&= \{\alpha(X\beta)Y + \alpha\beta\nabla^*_X Y\} + \alpha\beta\sigma(X, Y)
\end{aligned}$$

となる. よって, 第四式の TM 成分と $T^{\perp}M$ 成分を調べると

$$\nabla^*_{\alpha X}(\beta Y) = \alpha(X\beta)Y + \alpha\beta\nabla^*_X Y,$$

$$\sigma(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta\sigma(X, Y) \tag{1.11}$$

を満たす. またベクトル場 X_1, X_2, Y_1, $Y_2 \in \mathfrak{X}M$ に対して拡張 $\widetilde{X}_1$, $\widetilde{X}_2$, $\widetilde{Y}_1$, $\widetilde{Y}_2 \in \mathfrak{X}\widetilde{M}$ を考えると

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{(X_1+X_2)}(Y_1 + Y_2) &= \left\{\widetilde{\nabla}_{(\widetilde{X_1}+\widetilde{X_2})}\left(\widetilde{Y}_1 + \widetilde{Y}_2\right)\right\}\Big|_M \\
&= \left(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}_1}\widetilde{Y}_1 + \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}_1}\widetilde{Y}_2 + \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}_2}\widetilde{Y}_1 + \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}_2}\widetilde{Y}_2\right)\Big|_M \\
&= \nabla^*_{X_1}Y_1 + \nabla^*_{X_1}Y_2 + \nabla^*_{X_2}Y_1 + \nabla^*_{X_2}Y_2 \\
&\quad + \sigma(X_1, Y_1) + \sigma(X_1, Y_2) + \sigma(Y_2, X_1) + \sigma(X_2, Y_2)
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\nabla^*_{(X_1+X_2)}(Y_1+Y_2) = \nabla^*_{X_1}Y_1 + \nabla^*_{X_1}Y_2 + \nabla^*_{X_2}Y_1 + \nabla^*_{X_2}Y_2$$

$$\sigma(X_1+X_2, Y_1+Y_2) = \sigma(X_1,Y_1) + \sigma(X_1,Y_2) + \sigma(Y_2,X_1) + \sigma(X_2,Y_2) \tag{1.12}$$

を満たす．従って $\nabla^* : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$ は命題 1.1 の条件を満たし，M 上の線形接続を与える．また $\sigma : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \Gamma(T^\perp M)$ は双線形性をもつ．リーマン接続 $\widetilde{\nabla}$ は捩率が 0 であることから，命題 1.3, 1.4 から

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - [\widetilde{X},\widetilde{Y}]\right\}\Big|_M \\ &= \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X - [X,Y] \\ &= \nabla^*_X Y + \sigma(X,Y) - \nabla^*_Y X - \sigma(Y,X) - [X,Y] \end{aligned}$$

となる．接成分と法成分を比べると

$$\nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X - [X,Y] = 0,$$

$$\sigma(X,Y) = \sigma(Y,X)$$

を満たす．これらの等式は，∇^* は捩率は 0 であり σ が対称性をもつことを示している．

M 上の任意のベクトル場 X, Y, Z に対して，それぞれの拡張を $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ とする．$\tilde{g}(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\Big|_M = g(Y,Z)$ であるから $\widetilde{X}\left(\tilde{g}(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\right)\Big|_M = X\left(g(Y,Z)\right)$ であり，リーマン接続 $\widetilde{\nabla}$ は計量的であることから

$$\begin{aligned} \nabla^*_X\left(g(Y,Z)\right) = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\left(\tilde{g}(\widetilde{Y},\widetilde{Z})\right)\Big|_M &= \left\{\tilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{Z}) + \tilde{g}(\widetilde{Y},\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z})\right\}\Big|_M \\ &= \tilde{g}(\nabla^*_X Y + \sigma(X,Y); Z) + \tilde{g}(Y, \nabla^*_X Z + \sigma(X,Z)) \\ &= \tilde{g}(\nabla^*_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \nabla^*_X Z) \\ &= g(\nabla^*_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z) \end{aligned}$$

である．これより，∇^* は誘導計量 g のリーマン接続であることがわかる．以下 ∇^* を ∇ と表す． □

上に命題 1.5 で述べた誘導計量のリーマン接続 ∇ を**誘導接続** (induced connection) といい，また σ を**第二基本形式** (second fundamental form) という．第二基本形式は $\sigma : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \Gamma(T^{\perp}M)$ と定義されたが，式 (1.11), (1.12) により $C^{\infty}(M)$− 双線形性をもつことから $\sigma : TM \oplus TM \to T^{\perp}M$ と考えることができる．

命題 1.6 M 上の法ベクトル場 ξ とベクトル場 X の $\widetilde{M}$ 上への拡張をそれぞれ $\tilde{\xi}$, $\tilde{X}$ と表す．このとき $(\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\xi})\big|_M$ は拡張に依らない．$(\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\xi})\big|_M$ を $\widetilde{\nabla}_X\xi$ と表すことにし $T\widetilde{M} = TM \oplus T^{\perp}M$ の直交分解により

$$\widetilde{\nabla}_X\xi = -A_{\xi}X + \nabla^{\perp}_X\xi \tag{1.13}$$

と表すと

i) $A_{\xi}X$ は ξ, X に関して双線形性をもち，$p \in M$ で $A_{\xi}X$ は ξ_p, X_p に依存する．

ii) $g(A_{\xi}X, Y) = \tilde{g}(\sigma(X, Y), \xi)$ が成り立つ．

証明 M 上の関数 α, β に対して

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\alpha X}\beta\xi &= \alpha\widetilde{\nabla}_X(\beta\xi)\\ &= \alpha\{(X\beta)\xi + \beta\widetilde{\nabla}_X\xi\}\\ &= \alpha(X\beta)\xi - \alpha\beta A_{\xi}X + \alpha\beta\nabla^{\perp}_X\xi\end{aligned}$$

となり，これより

$$A_{\beta\xi}(\alpha X) = \alpha\beta A_{\xi}X,\ \nabla^{\perp}_{\alpha X}(\beta\xi) = \alpha(X\beta)\xi + \alpha\beta\nabla^{\perp}_X\xi \tag{1.14}$$

であることがわかる．またベクトル場 X_1, $X_2 \in \mathfrak{X}M$ と法ベクトル場 ξ_1, $\xi_2 \in \Gamma(T^{\perp}M)$ に対して

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{(X_1+X_2)}(\xi_1+\xi_2) =&\widetilde{\nabla}_{X_1}\xi_1 + \widetilde{\nabla}_{X_1}\xi_2 + \widetilde{\nabla}_{X_2}\xi_1 + \widetilde{\nabla}_{X_2}\xi_2\\ =& - A_{\xi_1}X_1 - A_{\xi_1}X_2 - A_{\xi_2}X_1 - A_{\xi_2}X_2\\ &+ \nabla^{\perp}_{X_1}\xi_1 + \nabla^{\perp}_{X_1}\xi_2 + \nabla^{\perp}_{X_2}\xi_1 + \nabla^{\perp}_{X_2}\xi_2\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} A_{(\xi_1+\xi_2)}(X_1+X_2) &= A_{\xi_1}X_1 + A_{\xi_1}X_2 + A_{\xi_2}X_1 + A_{\xi_2}X_2, \\ \nabla^{\perp}_{(X_1+X_2)}(\xi_1+\xi_2) &= \nabla^{\perp}_{X_1}\xi_1 + \nabla^{\perp}_{X_1}\xi_2 + \nabla^{\perp}_{X_2}\xi_1 + \nabla^{\perp}_{X_2}\xi_2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

を満たす．$A_\xi X$ が ξ, X に関して双線形性をもつことを示している．特に $A_\xi X$ は ξ_p, X によって定まる．

Y を M 上のベクトル場とすると，直交性より $\tilde{g}(\nabla_X Y, \xi) = \tilde{g}(Y, \nabla^{\perp}_X \xi) = 0$ であるから

$$\begin{aligned} 0 = \widetilde{\nabla}_X\left(\tilde{g}(Y,\xi)\right) &= \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, \xi) + \tilde{g}(Y, \widetilde{\nabla}_X \xi) \\ &= \tilde{g}(\nabla_X Y + \sigma(X,Y), \xi) + \tilde{g}(Y, -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi) \\ &= \tilde{g}(\sigma(X,Y),\xi) - g(A_\xi X, Y) \end{aligned}$$

となる．つまり $g(A_\xi X, Y) = \tilde{g}(\sigma(X,Y),\xi)$ が成り立つ． □

命題 1.6 の A_ξ を ξ に関する**形作用素** (shape operator) という．

命題 1.7 $\nabla^{\perp}$ は $T^{\perp}M$ 上の誘導計量に関する N 内の M の法バンドル $T^{\perp}M$ の誘導接続である．

証明 式 (1.14), (1.15) より，$\nabla^{\perp}$ は $T^{\perp}M$ 上の線形接続を定義していることがわかる．法ベクトル場 ξ, $\eta \in \Gamma(T^{\perp}M)$ に対して

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi,\ \widetilde{\nabla}_X \eta = -A_\eta X + \nabla^{\perp}_X \eta$$

であるから，これより

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\nabla^{\perp}_X \xi, \eta) + \tilde{g}(\xi, \nabla^{\perp}_X \eta) &= \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X \xi, \eta) + \tilde{g}(\xi, \widetilde{\nabla}_X \eta) \\ &= \widetilde{\nabla}_X\left(\tilde{g}(\xi,\eta)\right) = X\left(\tilde{g}(\xi,\eta)\right) = \nabla^{\perp}_X(\tilde{g}(\xi,\eta)) \end{aligned}$$

となる．よって，接続 $\nabla^{\perp}$ は $\tilde{g}$ から誘導される法バンドル内のファイバー計量に対して計量的であることがわかる． □

なお $\nabla^{\perp}_X\xi = 0$ ならば，M 上の法ベクトル場 ξ は**法バンドル内で平行** (parallel in the normal bundle)，または単に**平行** (parallel) であるという．

式 (1.10) は**ガウスの公式** (formula of Gauss) といい，式 (1.13) を**ワインガルテンの公式** (formula of Weingarten) という．

ここで本稿に現れるいくつかの代表的な部分多様体について述べておく．第二基本形式 σ が消滅する，すなわち $\sigma = 0$ であるとき，部分多様体 M は N 内で**全測地的** (totally geiodesic) であるという．また，点 $p \in M$ において $\sigma_p : T_pM \times T_pM \to T_p^{\perp}M$ が 0 写像であるとき，M は点 p において N 内で測地的であるという．

第二基本形式 σ と点 $p \in M$ においての接空間 T_pM の正規直交基底 $e_1, \cdots, e_n$ に対して

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{n}\sum_i \sigma(e_i, e_i)$$

と定める．このベクトル場 $\mathfrak{h}$ を**平均曲率ベクトル** (mean curvature vector) という．平均曲率ベクトルのノルム $\|\mathfrak{h}\|$ を H と表し，これを**平均曲率** (mean curvature) という．平均曲率が各点で消滅する, すなわち $H = 0$ であるとき，M を**極小部分多様体** (minimal submanifold) であるという．また点 $p \in M$ において $\sigma = g \otimes \mathfrak{h}_p$ を満たすとき，M は点 p において N 内で**臍的** (umbilical) であるという．各点 p において臍的であるとき，M は N 内で**全臍的** (totally umbilical) であるという．M 上のベクトル場 X, Y に対して

$$\tilde{g}(\sigma(X, Y), \mathfrak{h}) = \lambda g(X, Y) \tag{1.16}$$

を満たすような M 上の関数 λ が存在するとき，M を **pseudoumbilcal 部分多様体**という．極小部分多様体が pseudoumbilcal 部分多様体となることは明らかであり，$\lambda = \tilde{g}(\mathfrak{h}, \mathfrak{h})$，式 (1.16) を満たす．全臍的部分多様体が全測地的であるための必要十分条件は極小であることである．

点 $p \in M$ で M の単位法ベクトル ξ に対して，形作用素 A_ξ は自己共役である，すなわち任意の接ベクトル v, $w \in T_pM$ に対して $g(A_\xi v, w) = g(v, A_\xi w)$ が成り立つことから，$A_\xi : T_pM \to T_pM$ の固有値は実数である．A_ξ の固有値を $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ としたとき

A_ξ の κ_i に対する固有ベクトル v_i で $\{v_1, \cdots, v_n\}$ が T_pM の正規直交基底となるものが存在する．このとき固有値 κ_i を**主曲率** (principal curvature)，固有ベクトル v_i を法方向 ξ の**主方向ベクトル** (principal direction) という．

リーマン多様体 N 上の任意のベクトル場 $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Z}$ に対して，曲率テンソル場 $\widetilde{R}$: $\mathfrak{X}N \times \mathfrak{X}N \times \mathfrak{X}N \to \mathfrak{X}N$ を

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z} \tag{1.17}$$

と与える．その部分多様体 M 上の任意のベクトル場を X, Y, Z をとると

$$\widetilde{R}(X, Y)Z = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \tag{1.18}$$

となる．ガウスの公式 (1.10) により

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X, Y)Z =& \widetilde{\nabla}_X \left(\nabla_Y Z + \sigma(Y, Z)\right) - \widetilde{\nabla}_Y.\left(\nabla_X Z + \sigma(X, Z)\right) \\
& - \left(\nabla_{[X,Y]}Z + \sigma([X, Y], Z)\right) \\
=& \nabla_X\nabla_Y Z + \sigma(X, \nabla_Y Z) + \widetilde{\nabla}_X\sigma(Y, Z) \\
& - \nabla_Y\nabla_X Z - \sigma(Y, \nabla_X Z) + \widetilde{\nabla}_Y\sigma(X, Z) \\
& - \nabla_{[X,Y]}Z - \sigma([X, Y], Z) \\
=& R(X, Y)Z + \sigma(X, \nabla_Y Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) - \sigma([X, Y], Z) \\
& + \widetilde{\nabla}_X\sigma(Y, Z) - \widetilde{\nabla}_Y\sigma(X, Z)
\end{aligned}$$

となる．ただし R は M 上の曲率テンソル場 $\mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$ である．M 上の正規直交法ベクトル場 $\xi_1, \cdots, \xi_{m-n}$ を用いて $\sigma(X, Y) = \sum_a \sigma^a(X, Y)\xi_a$ と表す．任意のベクトル場 X, Y, $Z \in \mathfrak{X}M$ に対して

$$(\nabla_X\sigma^a)(Y, Z) = X\sigma^a(Y, Z) - \sigma^a(\nabla_X Y, Z) - \sigma^a(\nabla_Y X, Z) \tag{1.19}$$

と定めると，ワインガルテンの公式 (1.13)，命題 1.6 により

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z =& R(X,Y)Z + \sum_a \sigma^a(X,\nabla_Y Z)\xi_a - \sum_a \sigma^a(Y,\nabla_X Z)\xi_a - \sum_a \sigma^a([X,Y],Z)\xi_a \\
&+ \sum_a X\left(\sigma^a(Y,Z)\right)\xi_a + \sum_a \sigma^a(Y,Z)\widetilde{\nabla}_X\xi_a - \sum_a Y\left(\sigma^a(X,Z)\right)\xi_a - \sum_a \sigma^a(X,Z)\widetilde{\nabla}_Y\xi_a \\
=& R(X,Y)Z + \sum_a \sigma^a(X,\nabla_Y Z)\xi_a - \sum_a \sigma^a(Y,\nabla_X Z)\xi_a - \sum_a \sigma^a([X,Y],Z)\xi_a \\
&+ \sum_a X\left(\sigma^a(Y,Z)\right)\xi_a + \sum_a \sigma^a(Y,Z)(-A_{\xi_a}X + \nabla^{\perp}_X\xi_a) \\
&- \sum_a Y\left(\sigma^a(X,Z)\right)\xi_a - \sum_a \sigma^a(X,Z)(-A_{\xi_a}Y + \nabla^{\perp}_Y\xi_a) \\
=& R(X,Y)Z + \sum_a \{(\nabla_X\sigma^a)(Y,Z) - (\nabla_Y\sigma^a)(X,Z)\}\xi_a \\
&- \sum_a \sigma^a(Y,Z)A_{\xi_a}X + \sum_a \sigma^a(Y,Z)\nabla^{\perp}_X\xi_a \\
&+ \sum_a \sigma^a(X,Z)A_{\xi_a}Y + \sum_a \sigma^a(X,Z)\nabla^{\perp}_Y\xi_a
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

を得る．これより，M 上の任意のベクトル場 W に対して

$$
\tilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) + \tilde{g}(\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)) - \tilde{g}(\sigma(X,W),\sigma(Y,Z))
\tag{1.21}
$$

となる．式 (1.20) により，$\widetilde{R}(X,Y)Z$ の法成分を

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} =& \sum_a \{\sigma^a(\nabla_X\sigma^a)(Y,Z) - \sigma^a(\nabla_Y\sigma^a)(X,Z)\}\xi_a \\
&+ \sum_a \sigma^a(Y,Z)\nabla^{\perp}_X\xi_a - \sum_a \sigma^a(X,Z)\nabla^{\perp}_Y\xi_a
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

と与えることができる．方程式 (1.21) を**ガウスの方程式** (equation of Gauss) といい，方程式 (1.22) を**コダッチの方程式** (equation of Codazzi) という．

第二基本形式 σ に対して，その共変微分を $\bar{\nabla}_X\sigma$ によって

$$
\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X\sigma)(Y,Z) &= \nabla^{\perp}_X\left(\sum_a \sigma^a(Y,Z)\xi_a\right) - \sum_a \left\{\sigma^a(\nabla_X Y, Z) + \sigma^a(Y,\nabla_X Z)\right\}\xi_a \\
&= \sum_a (\nabla_X\sigma^a)(Y,Z)\xi_a + \sum_a \sigma^a(Y,Z)\nabla^{\perp}_X\xi_a
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

と定める．この方程式より，コダッチの方程式は

$$
\left(\widetilde{R}(X,Y)Z\right)^{\perp} = \left(\bar{\nabla}_X\sigma\right)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y\sigma)(X,Z) \tag{1.24}
$$

と書き表すことができる．

次に，曲率テンソル場を用いて断面曲率を定義する．リーマン多様体 $(M,\, g)$ について，点 $p\in M$ の接空間 T_pM の二次元線形部分空間を π とする．この π を**平面** (plane) または**切り口** (plane section) という．π を張る一次独立なベクトル場 $X,\, Y$ をとるときシュワルツの不等式から $g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2>0$ となる．π に対する**断面曲率** (sectional curvature) $K(\pi)$ を

$$
K(\pi) = K(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}
$$

と定める．X,Y のとり方に依らないことは，別の一次独立なベクトル場 $\{X_1,\, Y_1\}$ をとり

$$
X_1 = aX + bY,\ Y_1 = cX + dY
$$

であるとすると，曲率テンソル場 R の三重線形性より $g(R(X_1,Y_1)Y_1,X_1) = (ad-bc)^2 g(R(X,Y)X,Y)$ となり $g(X_1,X_1)g(Y_1,Y_1)-g(X_1,Y_1)^2 = (ad-bc)^2\{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2\}$ であるから $K(X,Y) = K(X_1,Y_1)$ が成り立つ．また e_1,e_2 が π の正規直交ベクトル場であるならば

$$
K(\pi) = g(R(e_1,e_2)e_2,e_1)
$$

となる．T_pM の各 π について，$K(\pi)$ が一定値 K_p のとき (M,g) は点 p で**定曲率**であるという．更に，K_p が各点 p についても定数のとき (M,g) は**定曲率空間**，または**実空**

間形であるという．曲率テンソル場 R が 0 に等しいときは，断面曲率 $K(\pi)$ はすべての点のすべての π に対して 0 になる．逆に，$K(\pi)=0$ がすべての π に対して成り立てば R が 0 である．実空間形における基本定理として Schur の補題がある．

定理 1.2 (Schur の補題) M が三次元以上の連結なリーマン多様体とする．M の各点 p における任意の二次元部分空間に対して，断面曲率が定数 (点 p に依存してもよい) ならば，M の断面曲率は点 p にも依らず一定である．特に M が完備単連結であれば，M は実空間形となる．

命題 1.8 二次元以上の多様体 M が定曲率 c のリーマン多様体であるための必要十分条件は，任意の接ベクトル $u,\ v,\ w \in T_pM$ に対して

$$R(u,v)w = c\{g(v,w)u - g(u,v)w\}$$

が成り立つことである．

2 野水・矢野の定理

二次元以上の C^∞ リーマン多様体上の弧長で径数付けられた滑らかな曲線 γ が，ある定数 $\kappa(>0)$ と γ に沿った単位主法ベクトル場 Y_γ を用いて

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa Y_\gamma, \\ \nabla_{\dot\gamma}Y_\gamma = -\kappa\dot\gamma \end{cases} \tag{2.1}$$

を満たすとき**円**という．ただし $\nabla_{\dot\gamma}$ は γ に沿う共変微分を表す．このとき κ を γ の**測地曲率**といい，$1/\kappa$ を γ の**半径**という．計量 g で表したままだと式が見にくくなるため本節以降では特にことわらなければ $g(v,w)$ を $\langle v,w\rangle$ と表すことにする．

次に，円についていくつかの事実を述べる．

命題 2.1 弧長で径数付けられた曲線 γ について，γ が円ならば三階の微分方程式

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + \langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle\dot\gamma = 0 \tag{2.2}$$

を満たし，また逆に，γ が三階の微分方程式 (2.2) を満たすならば γ は測地線または円である．

証明 曲線 γ が円ならば，式 (2.1) によって

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa\nabla_{\dot\gamma}Y_\gamma = -\kappa^2\dot\gamma$$

であり

$$\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle = \kappa^2$$

であるため，微分方程式 (2.2) を満たす．

逆に，孤長で径数付けられた曲線 γ について，$\|\dot\gamma\| = 1$ から $\langle\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle = 0$ が得られる．従って γ が微分方程式 (2.2) を満たすならば

$$\frac{d}{ds}\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle = 2\langle\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle = -2\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle\langle\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle = 0$$

となり, $\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle$ は γ に沿って一定となる. そこで $\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|^2=\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle=0$ の場合, $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0$ であるから γ は測地線であり, 一方 $\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|^2\neq 0$ の場合は $\kappa=\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|$, $Y_\gamma=\dfrac{1}{\kappa}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ とおくと, Y_γ は $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\kappa Y_\gamma$ を満たすような γ に沿う単位ベクトル場となる. 一方, 微分方程式 (2.2) より

$$\nabla_{\dot\gamma}Y_\gamma=\frac{1}{\kappa}\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\frac{1}{\kappa}(-\kappa^2\dot\gamma)=-\kappa\dot\gamma$$

となり, γ は円となる. $\square$

等長はめ込み $f:M\to\widetilde{M}$ において, f は**全臍的かつ平行平均曲率ベクトル**をもつとき, リーマン部分多様体 M を **extrinsic sphere** という.

定理 2.1 (野水・矢野の定理 [22]) リーマン多様体 $\widetilde{M}$ とその部分多様体 M について, 次の二つの条件は同値である.

(1) M は $\widetilde{M}$ の extrinsic sphere である.

(2) M 上のすべての円は $\widetilde{M}$ 上の曲線としても円である.

extrinsic sphere になるための条件をもう少し細かく見ると, 次のように表現することができる.

定理 2.2 リーマン多様体 $\widetilde{M}$ のリーマン部分多様体 M がある. ある定数 $r(>0)$ に対して「M 上の半径 r のすべての円が $\widetilde{M}$ 上で円となるならば, M は $\widetilde{M}$ 内の extrinsic sphere である.」 逆に, 「M が $\widetilde{M}$ の extrinsic sphere であるならば, M 上のすべての円は $\widetilde{M}$ 上の曲線とみても円となる.」

$\widetilde{M}$ の部分多様体 M が extrinsic sphere であることを特徴付けるために, 定理 2.1 では M 上のすべての円が $\widetilde{M}$ でも円にみえることを仮定しているが, 定理 2.2 では, M 上のある測地曲率 κ の円についてのみを仮定している.

等長はめ込み $f: M \to \widetilde{M}$ について，M 上の弧長で径数付けられた滑らかな曲線 γ に対して，$\widetilde{M}$ 上の曲線 $f \circ \gamma$ を γ の**外的形状** (extrinsic shape) という．簡略化するため, しばしば外的形状 $f \circ \gamma$ を γ と略して表すこともある．

第二基本形式 σ の共変微分に関しては，前節の定義式 (1.23) により，それぞれ $TM \oplus TM^{\perp}$ の接続を用いて

$$(\bar{\nabla}_X \sigma)(Y, Z) = \nabla_X^{\perp}\big(\sigma(Y, Z)\big) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) \tag{2.3}$$

と定められる．

野水・矢野の定理は本研究の出発点になっていることから，ここであえて証明をつけておく．

定理 2.1(定理 2.2) の証明　条件 (2) が条件 (1) を導くことを証明する．M の各点 p において接空間 T_pM の任意の正規直交接ベクトルの組 $\{u, v\}$ をとる．曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ は, $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = u, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(0) = (1/r)v$ を満たす円とする．ただし ∇ は M 上の共変微分であり, $\dot{\gamma}(s)$ は点 $\gamma(s)$ での速度ベクトル場である．円であるから命題 2.1 より，γ は三階の微分方程式

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s) + \langle \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s), \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s)\rangle \dot{\gamma}(s) = 0 \tag{2.4}$$

を満たす．また仮定より，γ は $\widetilde{M}$ 上の曲線とみても円であるから，三階の微分方程式

$$\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s) + \langle \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s), \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s)\rangle \dot{\gamma}(s) = 0 \tag{2.5}$$

を満たす．ただし $\widetilde{\nabla}$ は $\widetilde{M}$ 上の共変微分とする．$\widetilde{M}$ 内の M の第二基本形式を σ と表すことによって, ガウスの公式 (1.10) より

$$\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s) = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s) + \sigma(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) \tag{2.6}$$

を満たし, ワインガルテンの公式 (1.13)，式 (2.6) より

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s) &= \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s)\right) + \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\left(\sigma(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))\right) \\
&= \nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s) + \sigma(\dot{\gamma}(s), \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s)) \\
&\qquad - A_{\sigma(\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(s))}\dot{\gamma}(s) + \nabla_{\dot{\gamma}}^{\perp}(\sigma(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)))
\end{aligned} \tag{2.7}$$

となる. このとき, 式 (2.6), (2.7) を式 (2.5) に代入し, 式 (2.4) より

$$\sigma(\dot\gamma(s), \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)) - A_{\sigma(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))}\dot\gamma(s) \\ + \nabla^{\perp}_{\dot\gamma}(\sigma(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))) + \langle\sigma(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s)),\sigma(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))\rangle\dot\gamma(s) = 0 \quad (2.8)$$

を満たす. この式 (2.8) を M の接成分と法成分に分解することにより

$$A_{\sigma(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))}\dot\gamma(s) = \langle\sigma(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s)),\sigma(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))\rangle\dot\gamma(s), \quad (2.9)$$

$$0 = \sigma(\dot\gamma(s), \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)) + \nabla^{\perp}_{\dot\gamma}(\sigma(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))) \quad (2.10)$$

を得る. 第二基本形式 σ の自然な共変微分 $\bar\nabla$ の式 (2.3) を用いると

$$(\bar\nabla_{\dot\gamma}\sigma)(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s)) = \nabla^{\perp}_{\dot\gamma}(\sigma(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))) - 2\sigma(\dot\gamma(s),\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s))$$

である. 式 (2.10) を

$$3\sigma(\dot\gamma(s),\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)) = -(\bar\nabla_{\dot\gamma}\sigma)(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))$$

と表すことができ, $s=0$ においては $\dot\gamma(0)=u$, $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) = \frac{1}{r}v$ であるから

$$\sigma(u,v) = -\frac{r}{3}(\bar\nabla_u\sigma)(u,u) \quad (2.11)$$

となる. この等式 (2.11) は任意の単位接ベクトル $u \in T_pM$ を与えたとき, u に直交している任意の単位主法ベクトル $v \in T_pM$ について成り立つ. 特に, v を $-v$ に入れ替えたとき, 式 (2.11) は

$$-\sigma(u,v) = \sigma(u,-v) = -\frac{r}{3}(\bar\nabla_u\sigma)(u,u) \quad (2.12)$$

となるので, 式 (2.11), (2.12) を比較すると, 直交する二つの任意の単位接ベクトル u, v に対して, $\sigma(u,v)=0$ となる. また, このことから式 (2.11) より

$$(\bar\nabla_u\sigma)(u,u) = 0 \quad (2.13)$$

を得る．任意の正規直交接ベクトルの組 (u,v) に対して $\sigma(u,v)=0$ となるから，正規直交接ベクトルの組 $\{(u+v)/\sqrt{2},(u-v)/\sqrt{2}\}$ に対して考えると

$$0=2\sigma((u+v)/\sqrt{2},(u-v)/\sqrt{2})=\sigma(u,u)-\sigma(v,v)$$

となり $\sigma(u,u)=\sigma(v,v)$ を得る．これより，平均曲率ベクトル場 $\mathfrak{h}$ は任意の単位接ベクトル $u\in T_pM$ について

$$\mathfrak{h}_p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma(e_i,e_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma(u,u)=\sigma(u,u)$$

である．u, v が直交すれば $\sigma(u,v)=0$ であるから，任意の接ベクトル $w_1,w_2\in T_pM$ に対して

$$\sigma(w_1,w_2)=\langle w_1,w_2\rangle\mathfrak{h}_p \tag{2.14}$$

が成り立つ．実際，正規直交基底 $\{e_i\}$ をとり，$w_1=\sum_{i=1}^{n}a^ie_i, w_2=\sum_{i=1}^{n}b^ie_i$ とすれば，σ の双線形性より

$$\begin{aligned}\sigma(w_1,w_2)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a^ib^j\sigma(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^{n}a^ib^i\sigma(e_i,e_i)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}a^ib^i\right)\mathfrak{h}_p=\langle w_1,w_2\rangle\mathfrak{h}_p\end{aligned}$$

となる．よって，全臍的であることがわかる．また，第二基本形式の共変微分式 (2.3) の双線形性，式 (2.13)，(2.14) より，任意のベクトル場 X, Y に対して

$$\begin{aligned}\nabla^{\perp}_X(\sigma(Y,Y))&=\left(\bar{\nabla}_X\sigma\right)(Y,Y)+2\sigma(\nabla_XY,Y)=2\sigma(\nabla_XY,Y),\\\nabla^{\perp}_X(\sigma(Y,Y))&=\nabla^{\perp}_X(\langle Y,Y\rangle\mathfrak{h})=\langle Y,Y\rangle\nabla^{\perp}_X\mathfrak{h}+2\langle\nabla_XY,Y\rangle\mathfrak{h}\\&=\langle Y,Y\rangle\nabla^{\perp}_X\mathfrak{h}+2\sigma(\nabla_XY,Y)\end{aligned}$$

となることから，$\nabla^{\perp}_X\mathfrak{h}=0$ である．つまり

$$(\nabla^{\perp}_u\mathfrak{h})_p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{\nabla}_u\sigma)(e_i,e_i)=0$$

であるから, 平行平均曲率ベクトルをもつ.

逆に, 条件 (1) が条件 (2) を導くことを証明する. M が extrinsic sphere であるとき, 任意の正規直交接ベクトルの組 (u, v) に対して

$$\sigma(u,v) = \langle u, v\rangle \mathfrak{h}_p = 0 \quad \text{かつ} \quad (\nabla^{\perp}_u \mathfrak{h})_p = 0$$

となる. 従って

$$\langle A_{\sigma(u,u)}u, v\rangle = \langle \sigma(u,u), \sigma(u,v)\rangle = 0$$

となるので

$$A_{\sigma(u,u)}u = \langle A_{\sigma(u,u)}u, u\rangle u = \|\sigma(u,u)\|^2 u$$

である. 式 (2.1), ワインガルテンの公式 (1.13) より, M 上の測地曲率 $\kappa(>0)$ の円 γ をとったとき, M の平均曲率を H と表すことで

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma &= \widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + \sigma(\dot\gamma, \dot\gamma)) \\
&= \widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}(\kappa Y_\gamma + \sigma(\dot\gamma, \dot\gamma)) \\
&= \kappa \widetilde{\nabla}_{\dot\gamma} Y_\gamma - A_{\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)}\dot\gamma \\
&= -(\kappa^2 + \|\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)\|^2)\dot\gamma \\
&= -(\kappa^2 + H^2)\dot\gamma
\end{aligned}$$

となる. ただし Y_γ は円 γ の速度ベクトル場 $\dot\gamma$ に対しての単位主法ベクトル場を表す. このように, $f \circ \gamma$ は測地曲率 $\sqrt{\kappa^2 + H^2}$ の円となることがわかる. □

3 曲線族

野水・矢野の定理において円が重要な役割を果たしたことから，本節ではリーマン多様体 M 上のある滑らかな曲線の族を定めることから始める．リーマン多様体 M 上の弧長で径数付けられた滑らかな曲線 γ について，正値関数 $\kappa_1, \cdots, \kappa_{d-1}$ と γ に沿った正規直交ベクトル場 $Y_1 = \dot\gamma, Y_2, \cdots, Y_d$ とがあり，連立微分方程式

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa_1 Y_2, \\ \nabla_{\dot\gamma}Y_2 = -\kappa_1\dot\gamma + \kappa_2 Y_3, \\ \nabla_{\dot\gamma}Y_3 = -\kappa_2 Y_2 + \kappa_3 Y_4, \\ \qquad \vdots \\ \nabla_{\dot\gamma}Y_{d-1} = -\kappa_{d-2}Y_{d-2} + \kappa_{d-1}Y_d, \\ \nabla_{\dot\gamma}Y_d = -\kappa_{d-1}Y_{d-1} \end{cases} \tag{3.1}$$

を満たすとき，γ は**真の位数 d のフレネ曲線** (Frenet curves of proper order d) という．また，$\kappa_1, \cdots, \kappa_{d-1}$ を γ の**測地曲率** (geodesic curvature)，$\{Y_1, \cdots, Y_d\}$ を γ の**フレネ標構** (Frenet frame) という．真の位数が d 以下のフレネ曲線を総称して位数 d のフレネ曲線という．なお, $\kappa_0 \equiv \kappa_d \equiv 0, Y_0 \equiv Y_{d+1} \equiv 0$ とすることで, 連立微分方程式 (3.1) は

$$\nabla_{\dot\gamma}Y_j = -\kappa_{j-1}Y_{j-1} + \kappa_j Y_{j+1} \quad j = 1, \cdots, d$$

と表現することもある．測地曲率を正定数とするとき，連立微分方程式

$$\nabla_{\dot\gamma}Y_j = -\kappa_{j-1}Y_{j-1} + \kappa_j Y_{j+1} \quad j = 1, \cdots, d$$

を満たすとき，**真の位数 d の螺線** (helix of proper order d) という．ただし，ここでも $\kappa_0 \equiv \kappa_d \equiv 0, Y_0 \equiv Y_{d+1} \equiv 0$ とする．真の位数 d 以下の螺線を総称して位数 d の螺線という．位数 d の螺線は位数 d のフレネ曲線の代表的な例であり，位数 1 の螺線は測地線のことである．真の位数 2 の螺線は円のことであり，微分方程式

$$\nabla_{\dot\gamma}Y_1 = \kappa Y_2,\ \nabla_{\dot\gamma}Y_2 = -\kappa Y_1,\ Y_1 = \dot\gamma$$

を満たす．なお，測地線を曲率 0 の円と考えることもある．

例 1 (ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における測地線，円，常螺線)

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の共変微分は通常の微分 (方向微分) を意味する．従って，以下のようになる．

(1) 点 $p \in \mathbb{R}^n$ で $v \in T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ を初期ベクトルとする測地線は

$$\gamma(s) = p + sv$$

である．

(2) 点 $p \in \mathbb{R}^n$ で $v \in T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ を初期ベクトル，$w \in T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ を初期主法ベクトルとする曲率 κ の円 γ．つまり $\dot\gamma(0) = v$, $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) = \kappa w$ とする円 γ は

$$\gamma(s) = p + \frac{1}{\kappa}w + \frac{1}{\kappa}(v \sin\kappa s - w\cos\kappa s)$$

である．

(3) 真の位数 3 の螺線 γ で

$$\gamma(0) = p,\ \dot\gamma(0) = v,\ \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) = \kappa_1 w,\ \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) = -\kappa_1^2 v + \kappa_1\kappa_2 u$$

を満たすものは

$$\begin{aligned}\gamma(s) = p &+ \frac{\kappa_1 w}{\kappa_1^2+\kappa_2^2} + \frac{\kappa_2^2 v + \kappa_1\kappa_2 u}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}s \\ &- \frac{\kappa_1 w}{\kappa_1^2+\kappa_2^2}\cos\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}s + \frac{\kappa_1^2 v - \kappa_1\kappa_2 u}{(\kappa_1^2+\kappa_2^2)^{3/2}}\sin\sqrt{\kappa_1^2+\kappa_2^2}s\end{aligned}$$

である．

例 2 (通常球面 S^n における測地線，円)

断面曲率 1 の球面 S^n は

$$S^n = \{p = (p_0, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_0^2 + p_1^2 + \cdots + p_n^2 = 1\}$$

としてユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ から誘導計量を導入したものである．

S^n の外向単位法ベクトルを ξ と表すと，$\mathbb{R}^n$ の位置ベクトルとの同一視により $\xi_p = p$ となる．

$$T_pS^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v\rangle = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong T_p\mathbb{R}^{n+1}$$

であるから，S^n 上の誘導接続 ∇ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の接続 $\widetilde{\nabla}$ を用いて

$$\nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y - \langle \widetilde{\nabla}_X Y, \xi\rangle\xi = \widetilde{\nabla}_X Y + \langle X, Y\rangle\xi$$

となる．実際，$\langle Y, \xi\rangle = 0$ より

$$0 = \widetilde{\nabla}_X\langle Y, \xi\rangle = \langle \widetilde{\nabla}_X Y, \xi\rangle + \langle Y, \widetilde{\nabla}_X \xi\rangle = \langle \widetilde{\nabla}_X Y, \xi\rangle + \langle Y, X\rangle$$

である．S^n 上の $\gamma(0) = p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, \dot{\gamma}(0) = v \in T_pS^n \subset T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ である測地線は

$$\gamma(s) = p\cos s + v\sin s$$

で与えられる．また

$$\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(0) = \kappa w \quad (w \in T_pS^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, \|w\| = 1)$$

である円は

$$\gamma(s) = \frac{\kappa^2 p + \kappa w}{\kappa^2+1} + \frac{v}{\sqrt{\kappa^2+1}}\sin\sqrt{\kappa^2+1}s + \frac{p - \kappa w}{\kappa^2+1}\cos\sqrt{\kappa^2+1}s$$

で与えられる．

例 3 (実双曲空間 $\mathbb{R}H^n$ における測地線，円)

断面曲率 -1 の実双曲空間 $\mathbb{R}H^n$ は

$$\mathbb{R}H^n = \{p = (p_0, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid -p_0^2 + p_1^2 + \cdots + p_n^2 = -1\}$$

としてユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ に

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

という二形式 $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ を与えた空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ から誘導される計量を導入したものである．$\mathbb{R}H^n$ の点 p を位置ベクトルとして ξ_p とする．$\mathbb{R}H^n$ に接するベクトル場を考える．

$$T_p\mathbb{R}H^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle\!\langle p, v\rangle\!\rangle = 0\}$$

であることから，$\mathbb{R}H^n$ 上の誘導接続 ∇ は $\mathbb{R}^{n+1}_1$ の接続 $\widetilde{\nabla}$ を用いて

$$\nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + \langle\!\langle \widetilde{\nabla}_X Y, \xi\rangle\!\rangle \xi = \widetilde{\nabla}_X Y - \langle\!\langle X, Y\rangle\!\rangle \xi$$

となる．実際，$\langle\!\langle \xi, \xi\rangle\!\rangle = -1$ であることと $\langle\!\langle Y, \xi\rangle\!\rangle = 0$ より

$$0 = \widetilde{\nabla}_X \langle\!\langle Y, \xi\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \widetilde{\nabla}_X Y, \xi\rangle\!\rangle + \langle\!\langle Y, \widetilde{\nabla}_X \xi\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \widetilde{\nabla}_X Y, \xi\rangle\!\rangle + \langle\!\langle Y, X\rangle\!\rangle$$

から得られる．

$\mathbb{R}H^n$ 上の $\gamma(0) = p \in \mathbb{R}H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}_1, \dot\gamma(0) = v \in T_p\mathbb{R}H^n \subset T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ $(\langle\!\langle v, v\rangle\!\rangle \geq 0)$ である測地線は

$$\gamma(s) = p\cosh s + v \sinh s$$

で与えられる．また

$$\gamma(0) = p, \dot\gamma(0) = v, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) = \kappa w \quad (w \in T_p\mathbb{R}H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, \langle\!\langle w, w\rangle\!\rangle = 1)$$

である円は

$$\gamma(s) = \begin{cases} \dfrac{\kappa^2 p + \kappa w}{\kappa^2 - 1} + \dfrac{v}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} \sin\sqrt{\kappa^2 - 1}s - \dfrac{p + \kappa w}{\kappa^2 - 1}\cos\sqrt{\kappa^2 - 1}s & \kappa > 1, \\ p + vs + \dfrac{1}{2}(\kappa w + p)s^2 & \kappa = 1, \\ -\dfrac{\kappa^2 p + \kappa w}{1 - \kappa^2} + \dfrac{v}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \sinh\sqrt{1 - \kappa^2}s + \dfrac{p + \kappa w}{1 - \kappa^2}\cosh\sqrt{1 - \kappa^2}s & 0 < \kappa < 1 \end{cases}$$

で与えられる．

例 1, 2, 3 に挙げたユークリッド空間，球面，実双曲空間を総称して実空間形という．実空間形においては，二つの螺線 γ_1, γ_2 が合同であるための必要十分条件は

i) (γ_1の真の位数) = (γ_2の真の位数),

ii) γ_1 の測地曲率 $\kappa_1^{(1)}, \cdots, \kappa_d^{(1)}$ と γ_2 の測地曲率 $\kappa_1^{(2)}, \cdots, \kappa_d^{(2)}$ について,
$\kappa_j^{(1)} = \kappa_j^{(2)}, \quad j = 1, \cdots, d$

が成り立つことである.

複素空間形についての合同条件について述べる.

$i < j$ に対して

$$\tau_{ij} = \langle Y_i, JY_j \rangle$$

を複素振率という．複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$，複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ では二つの螺旋 γ_1, γ_2 が合同であるための必要十分条件は

i) (γ_1の真の位数) = (γ_2の真の位数),

ii) γ_1 の測地曲率 $\kappa_1^{(1)}, \cdots, \kappa_d^{(1)}$ と γ_2 の測地曲率 $\kappa_1^{(2)}, \cdots, \kappa_d^{(2)}$ について,
$\kappa_j^{(1)} = \kappa_j^{(2)}, \quad j = 1, \cdots, d$

iii) ある t_0 があり，次のいずれかの条件が成り立つ.

(a) $\tau_{ij}^{(1)}(0) = \tau_{ij}^{(2)}(t_0)$ すべての i, j について成り立つ.

(b) $\tau_{ij}^{(1)}(0) = -\tau_{ij}^{(2)}(t_0)$ はすべての i, j について成り立つ.

複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ は実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2n}$ と同型であるため，一般の等長変換による合同性は実空間形の場合の合同条件となる．一般に複素ユークリッド空間と局所同型ではない複素多様体において，等長変換 φ は正則または反正則である，つまり

$$d\varphi \circ J = \pm J \circ d\varphi$$

を満たすことが知られている．複素ユークリッド空間においても正則または反正則な合同変換に限れば，複素空間形の場合の合同条件が成り立つ．なお，条件 iii) の (a) は正則等長変換による合同性を，(b) は反正則合同変換による合同性を示す.

次に，本稿の中心の対象である位数 2 の曲線，位数 2 の点について詳しく述べる．

位数 2 のフレネ曲線を更に一般化した概念として位数 2 の曲線がある．リーマン多様体 M 上の孤長で径数付けられた滑らかな曲線 γ が三階の微分方程式

$$\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|^2\left\{\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma+\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|^2\dot\gamma\right\}=\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \tag{3.2}$$

を満たすならば，γ を**位数 2 の曲線**という．孤長で径数付けられた滑らかな曲線 $\gamma : I \to M$ に対して，$s_0 \in I$ で γ に沿う法ベクトル $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ が $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s_0)=0$ となるとき，点 $\gamma(s_0)$ を γ の**変曲点** (inflection point) という．変曲点においては方程式 (3.2) を満たす．従って，変曲点以外の様子が重要である．

補題 3.1 (1) 位数 2 のフレネ曲線は位数 2 の曲線である．

(2) 位数 2 の曲線がすべての s に対して変曲点ではない，つまり $\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)\|>0$ を満たすならば，その曲線は測地曲率 $\kappa(s)=\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)\|$，フレネ標構 $\{\dot\gamma, Y_2=\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma/\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|\}$ を満たす真の位数 2 のフレネ曲線となる．

証明 (1) γ が測地線であるとき，微分方程式 (3.2) を満たす．γ が真の位数 2 のフレネ曲線であるとき

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)=\kappa(s)Y_2(s),\ \nabla_{\dot\gamma}Y_2(s)=-\kappa(s)\dot\gamma(s)$$

を満たし

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)=-\kappa'(s)\dot\gamma(s)-\kappa^2(s)\dot\gamma(s)$$

となり微分方程式 (3.2) を満たす．

(2) $\kappa(s)=\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)\|$ とおくと，$\kappa\kappa'=\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle$ となる．微分方程式 (3.2) より

$$\kappa^2\left(\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma+\kappa^2\dot\gamma\right)=\kappa\kappa'\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$$

となるから，ベクトル場 $Y_2=(1/\kappa)\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ は

$$\nabla_{\dot\gamma}Y_2=\frac{1}{\kappa^3}(\kappa^2\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma-\kappa\kappa'\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)=-\kappa\dot\gamma$$

となり，結果を得る． □

この補題により，位数 2 の曲線に対して正値関数 $\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|$ を測地曲率という．特にすべての測地線と円は微分方程式 (3.2) を満たし，位数 2 の曲線の多くの例があることがわかる．しかし，一般的に位数 2 の曲線は位数 2 のフレネ曲線ではない．事実，すべての平面曲線は位数 2 の曲線であるように，変曲点をもつ，つまり $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s_0)=0$ となる位数 2 の曲線が存在する．曲線が局所的にある二次元全測地的部分多様体に含まれるならば，その曲線を**平面曲線**という．

位数 2 の曲線について理解しづらい面があるので，少しクラスを絞って標構をもつ曲線を考える．変曲点においてフレネ標構に類する標構を利用できるように，広い意味で位数 2 のフレネ曲線について紹介する．孤長で径数付けられた滑らかな曲線 γ が $\dot\gamma$ に直交する γ に沿うベクトル場 Y と滑らかな関数 κ を用いて

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)=\kappa(s)Y(s), \\ \nabla_{\dot\gamma}Y(s)=-\kappa(s)\dot\gamma(s) \end{cases} \tag{3.3}$$

を満たすとき，**広い意味で位数 2 のフレネ曲線**という．ここでは測地曲率 κ を正と仮定しない．

例 4 パラメータ t を用いて

$$\gamma(t)=(t,\,t^3)$$

として表される三次曲線を孤長パラメータ s に取り替えた曲線を考える．点 $\gamma(0)$ の前後で曲がり方が変化し，$\gamma(0)$ は変曲点であり，この曲線は，広い意味で位数 2 のフレネ曲線であるが，位数 2 のフレネ曲線ではない．

曲線 γ が測地線ではなく広い意味で位数 2 のフレネ曲線であるとき，組 (κ, Y) は符号が決まる．つまり，(κ, Y) または $(-\kappa, -Y)$ が方程式 (3.3) を満たす．従って，変曲点をもたないならば，広い意味での位数 2 のフレネ曲線と位数 2 のフレネ曲線とは同じ概念である．すべての孤長で径数付けられた滑らかな平面曲線は 広い意味で位数 2 のフレネ曲線である．ユークリッド空間において広い意味で位数 2 のフレネ曲線は平面曲線である．補題 3.1 の証明は広い意味で位数 2 のフレネ曲線は，位数 2 の曲線であ

るが，その逆は成り立たないことを意味する．ユークリッド空間の平面曲線ではない位数 2 の曲線が存在することを，次の例でみる．

例 5 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の滑らかな曲線 γ を

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t,\, e^{-1/t^2},\, 0) & t < 0, \\ (0,\, 0,\, 0) & t = 0, \\ (t,\, 0,\, e^{-1/t^2}) & t > 0 \end{cases}$$

と定める．パラメータ t を孤長パラメータ s に取り替えるとき，$\gamma(s)$ は方程式 (3.3) を満たす．この例は平面曲線ではない $\mathbb{R}^3$ の位数 2 の曲線である．つまり，平面 $\mathbb{R}^2$ に含まれていない．この曲線は広い意味で位数 2 のフレネ曲線とはならない．$\ddot{\gamma}(0)(= \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(0)) = 0$ かつ原点で γ に沿うベクトル場 $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s)/\|\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(s)\|$ $(-\epsilon < s < 0,\, 0 < s < \epsilon)$ を滑らかに拡張することはできない．

位数 2 の曲線は変曲点において気をつけなければならない．例えば，方程式 (3.3) は分岐点をもつ．

例 6 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の滑らかな曲線 ρ を

$$\rho(t) = \begin{cases} (t,\, e^{-1/t^2},\, 0) & t < 0, \\ (t,\, 0,\, 0) & t \geq 0, \end{cases}$$

と定める．パラメータ t を孤長パラメータ s に取り替えるとき，$\rho(s)$ は方程式 (3.3) を満たす．例 5 の曲線 γ と比較すると (3.3) の解は原点で分岐することがわかる．曲線 ρ は広い意味で位数 2 のフレネ曲線であるような平面曲線である．

一方で，完備なリーマン多様体上で広い意味で位数 2 のフレネ曲線について，次の結果がある．各点 $p \in M$ における任意の正規直交接ベクトルの組 $\{u,\, v\} \in T_pM \times T_pM$ と滑らかな関数 $\kappa(s)$, $-\infty < s < \infty$ を与えると，初期条件 $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = u, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(0) = \kappa(0)v$ と曲率 κ をもつ広い意味で位数 2 のフレネ曲線が唯一つ存在する．

次に，位数 2 の点について述べる．孤長で径数付けられた滑らかな曲線 $\gamma : I \to M$ に対して，$\dot\gamma(s)$ と $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)$ とで生成される接空間 $T_{\gamma(s)}M$ の二次元以下の部分ベクトル空間 $Y_s^{(\gamma)}$ を考える．この空間の次元について，$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)$ は $\dot\gamma(s)$ に直交することから，γ の変曲点においては $\dim_{\mathbb{R}} Y_s^{(\gamma)} = 1$ であり変曲点でなければ $\dim_{\mathbb{R}} Y_s^{(\gamma)} = 2$ である．部分空間 $Y_s^{(\gamma)}$ の $T_{\gamma(s)}M$ における直交補空間 $(Y_s^{(\gamma)})^{\perp}$ を考えて，そこへの射影 $\mathrm{Proj}_s^{(\gamma)} : T_{\gamma(s)}M \to (Y_s^{(\gamma)})^{\perp}$ を定める．この射影を用いて，γ に沿ったベクトル場

$$Z_\gamma(s) = \mathrm{Proj}_s^{(\gamma)}(\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)$$

を定める．このベクトル場は滑らかであるとは限らないが $Z_\gamma(s_0) = 0$ であるとき，$\gamma(s_0)$ は γ の**位数 2 の点**であるという．変曲点ではなく，かつ位数 2 の点であるとき，$\gamma(s_0)$ は γ の**真の位数 2 の点**であるという．

滑らかな曲線 γ が変曲点をもたないとき, γ の正の測地曲率関数を $\kappa_\gamma = \|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|$, γ に沿う単位接ベクトル場 $\dot\gamma$ に直交する単位主法ベクトル場を $Y_\gamma = (1/\kappa_\gamma)\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ とおくことによって, γ は次の方程式

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa_\gamma Y_\gamma, \quad \nabla_{\dot\gamma}Y_\gamma = -\kappa_\gamma\dot\gamma + Z_\gamma$$

を満たす．この場合，Z_γ は γ に沿った滑らかなベクトル場になる．従って，位数 2 の点においては微分方程式 (3.2) を満たし，また曲線 γ の各点で真の位数 2, すなわち $\kappa_\gamma > 0$ かつ $Z_\gamma \equiv 0$ であるとき，γ は真の位数 2 のフレネ曲線である．

例 7 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲線 γ を

$$\gamma(t) = \left(\cos t,\ \sin t,\ te^{-1/t^2}\right)$$

と定める．この曲線のパラメータ t を孤長パラメータ s に取り替えると，原点で真の位数 2 である．

弧長で径数付けられた一つの滑らかな曲線 $\gamma : I \to M$ に対して，その γ の主法ベクトル $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s)$ が s_0 で $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(s_0) = 0$ となるならば，γ は点 $\gamma(s_0)$ で変曲点をもつ

という．変曲点をもたない弧長で径数付けられた曲線γに対して，正値関数κ_γを$\kappa_\gamma=\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|$とおき，かつ接ベクトル$\dot\gamma$に直交するような$\gamma$に沿った単位主法ベクトル場$Y_\gamma$を$Y_\gamma=(1/\kappa_\gamma)\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$とおくことによって，$\gamma$は

$$\begin{cases}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\kappa_\gamma Y_\gamma,\\ \nabla_{\dot\gamma}Y_\gamma=-\kappa_\gamma\dot\gamma+Z_\gamma\end{cases}$$

(ベクトル場Z_γは曲線γに沿うベクトル場であり，かつ$Z_\gamma\perp\{\dot\gamma,Y_\gamma\}$を満たす)のように表される．実際，$\dot\gamma$は単位ベクトルであるから

$$0=\frac{d}{dt}\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle=2\langle\dot\gamma,\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle=2\kappa_\gamma\langle\dot\gamma,Y\rangle$$

より，$\dot\gamma\perp Y$である．同様にYも単位ベクトルであるから，

$$0=\frac{d}{dt}\langle Y,Y\rangle=2\langle Y,\nabla_{\dot\gamma}Y\rangle,$$

$$0=\frac{d}{dt}\langle\dot\gamma,Y\rangle=\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,Y\rangle+\langle\dot\gamma,\nabla_{\dot\gamma}Y\rangle=\kappa_\gamma+\langle\dot\gamma,\nabla_{\dot\gamma}Y\rangle$$

となるので，$Y\perp\dot\gamma$であるから$Z_\gamma=\nabla_{\dot\gamma}Y+\kappa_\gamma\dot\gamma$とおけばよい．フレネ曲線に準じて正値関数$\kappa_\gamma$を$\gamma$の測地曲率という．ある$s_0$で$Z_\gamma(s_0)=0$となるとき，$\gamma$は点$\gamma(s_0)$で**真の位数 2** であるという．また曲線$\gamma$のすべての点で真の位数 2 であるとき，$Z_\gamma\equiv 0$となり，$\gamma$は測地曲率$\kappa_\gamma$をもつ真の位数 2 のフレネ曲線である．

4　全臍的な等長はめ込みと位数2の曲線

野水・矢野の定理をある意味で拡張したと考えることができる結果として，次に挙げる田辺氏による定理がある．

定理 4.1 (田辺 [37]) リーマン部分多様体 M のリーマン多様体 $\widetilde{M}$ への等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ について，M が $\widetilde{M}$ の全測地的部分多様体であるための必要十分条件は，一定でない滑らかな正値関数 $\kappa(s)$ で「M の測地曲率 κ をもつすべての真の位数2のフレネ曲線 $\gamma(s)$ は $\widetilde{M}$ の外的形状 $f \circ \gamma$ も位数2のフレネ曲線である」という条件を満たすものが存在することである．

定理 4.2 (田辺 [37]) リーマン部分多様体 M のリーマン多様体 $\widetilde{M}$ への等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ について，M が $\widetilde{M}$ の extrinsic sphere であるための必要十分条件は，滑らかな正値関数 $\kappa(s)$ で「M の測地曲率 κ をもつすべての真の位数2のフレネ曲線 $\gamma(s)$ は $\widetilde{M}$ の外的形状 $f \circ \gamma$ も位数2のフレネ曲線である」という条件を満たすものが存在することである．

定理4.2は野水・矢野の定理2.1の拡張になっているが正値関数 κ は幾何学的に意味があるわけではない．また，定理4.1の条件と定理4.2の条件とを比較したとき，曲線の大域的な考察が必要であるような印象を受ける．このような正値関数という形での拡張は筆者としては不自然であると思われる．ところで，野水・矢野の定理に始まり田辺の定理に至るまでは，部分多様体の各点において曲線の(局所的)挙動を考察するという立場に立っている．本研究では部分多様体の各点において曲線の各点ごとの(pointwize)な挙動とでも称すべき性質を考察する立場に立って考察し，田辺の結果を含む形で野水・矢野の定理の拡張をおこなうことにする．

次に，部分多様体上の滑らかな曲線の外的形状を考察する．

補題 4.1 等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ が与えられたとき，変曲点をもたない弧長で径数付けられた M 上の滑らかな曲線 γ に対し，その外的形状 $f \circ \gamma$ の測地曲率を $\tilde{\kappa}_\gamma$ と表す．すなわち $\tilde{\kappa}_\gamma = \|\widetilde{\nabla}_{(f\circ\gamma)'}(f\circ\gamma)'\|$ とおく．このとき

$$\tilde{\kappa}_\gamma^2 = \kappa_\gamma^2 + \|\sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\|^2 \tag{4.1}$$

を満たし, γ の外的形状 $f \circ \gamma$ は変曲点をもたない.

更に, それらの曲線は

$$(\tilde{\kappa}'_\gamma \kappa_\gamma - \tilde{\kappa}_\gamma \kappa'_\gamma) Y_\gamma + \tilde{\kappa}_\gamma^2 \widetilde{Z}_\gamma^T = \tilde{\kappa}_\gamma \big\{ (\tilde{\kappa}_\gamma^2 - \kappa_\gamma^2)\dot{\gamma} + \kappa_\gamma Z_\gamma - A_{\sigma(\dot{\gamma},\dot{\gamma})}\dot{\gamma} \big\}, \tag{4.2}$$

$$\tilde{\kappa}'_\gamma \sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \tilde{\kappa}_\gamma \big\{ 3\kappa_\gamma \sigma(\dot{\gamma}, Y_\gamma) + \big(\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} \sigma\big)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - \tilde{\kappa}_\gamma \widetilde{Z}_\gamma^\perp \big\} \tag{4.3}$$

を満たす．ただし $\widetilde{Z}_\gamma^T + \widetilde{Z}_\gamma^\perp$ は曲線 $f \circ \gamma$ に沿うベクトル場 $Z_{f\circ\gamma}$ を接成分, 法成分に分解したものである．特に

$$\tilde{\kappa}'_\gamma \kappa_\gamma = \tilde{\kappa}_\gamma \big\{ \kappa'_\gamma - \langle \sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}), \sigma(\dot{\gamma}, Y_\gamma) \rangle - \tilde{\kappa}_\gamma \langle \widetilde{Z}_\gamma^T, Y_\gamma \rangle \big\} \tag{4.4}$$

を満たしている.

証明　ガウスの公式 (1.10) から外的形状 $f \circ \gamma$ の共変微分が

$$\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + \sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \kappa_\gamma Y_\gamma + \sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$$

であるから，式 (4.1) が成り立つことがわかる．次に γ は変曲点をもたないことから，式 (4.1) より，$\tilde{\kappa}_\gamma \geq \kappa_\gamma > 0$ であることがわかり，結果として，外的形状 $f \circ \gamma$ は変曲点をもたない．単位法ベクトル場 $\widetilde{Y}_\gamma$ を

$$\widetilde{Y}_\gamma = Y_{f\circ\gamma} = (1/\tilde{\kappa}_\gamma)(\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) = (1/\tilde{\kappa}_\gamma)\big(\kappa_\gamma Y_\gamma + \sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\big), \quad \widetilde{Z}_\gamma = Z_{f\circ\gamma}$$

とおく．定義により $\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\widetilde{Y}_\gamma = -\tilde{\kappa}_\gamma\dot{\gamma} + \widetilde{Z}_\gamma$ であるから

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} &= \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\big(\tilde{\kappa}_\gamma \widetilde{Y}_\gamma\big) = \tilde{\kappa}'_\gamma \widetilde{Y}_\gamma + \tilde{\kappa}_\gamma \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\widetilde{Y}_\gamma \\ &= -\tilde{\kappa}_\gamma^2 \dot{\gamma} + \tilde{\kappa}_\gamma \widetilde{Z}_\gamma + \frac{\tilde{\kappa}'_\gamma \kappa_\gamma}{\tilde{\kappa}_\gamma} Y_\gamma + \frac{\tilde{\kappa}'_\gamma}{\tilde{\kappa}_\gamma} \sigma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

が成り立つ．一方，ガウスの公式 (1.10), ワインガルテンの公式 (1.13)，第二基本形式の共変微分の式 (2.3) より

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma &= \widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\big(\kappa_\gamma Y_\gamma + \sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)\big)\\
&= \kappa'_\gamma Y_\gamma + \kappa_\gamma \widetilde{\nabla}_{\dot\gamma} Y_\gamma + \widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\big(\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)\big)\\
&= \kappa'_\gamma Y_\gamma + \kappa_\gamma\left(\nabla_{\dot\gamma} Y_\gamma + \sigma(\dot\gamma, Y_\gamma)\right) - A_{\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)}\dot\gamma + \nabla^\perp_{\dot\gamma}(\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma))\\
&= \kappa'_\gamma Y_\gamma + \kappa_\gamma\left(-\kappa_\gamma\dot\gamma + Z_\gamma + \sigma(\dot\gamma, Y_\gamma)\right) \qquad (4.6)\\
&\qquad + A_{\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)}\dot\gamma + \big(\bar\nabla_{\dot\gamma}\sigma\big)(\dot\gamma,\dot\gamma) + 2\sigma(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\dot\gamma)\\
&= -\kappa_\gamma^2\dot\gamma + \kappa'_\gamma Y_\gamma + \kappa_\gamma Z_\gamma - A_{\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)}\dot\gamma\\
&\qquad + 3\kappa_\gamma\sigma(\dot\gamma, Y_\gamma) + \big(\bar\nabla_{\dot\gamma}\sigma\big)(\dot\gamma,\dot\gamma)
\end{aligned}$$

となる．それぞれ二つの等式 (4.5), (4.6) の接方向部分，主方向部分を比べると

$$\begin{aligned}
-\tilde\kappa_\gamma^2\dot\gamma + \tilde\kappa_\gamma \widetilde{Z}_\gamma^T + \frac{\tilde\kappa'_\gamma\kappa_\gamma}{\tilde\kappa_\gamma} Y_\gamma &= -\kappa_\gamma^2\dot\gamma + \kappa'_\gamma Y_\gamma + \kappa_\gamma Z_\gamma - A_{\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)}\dot\gamma,\\
\frac{\tilde\kappa'_\gamma}{\tilde\kappa_\gamma}\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma) + \tilde\kappa_\gamma \widetilde{Z}_\gamma^\perp &= 3\kappa_\gamma\sigma(\dot\gamma, Y_\gamma) + \big(\bar\nabla_{\dot\gamma}\sigma\big)(\dot\gamma,\dot\gamma)
\end{aligned}$$

となるので，式 (4.2), (4.3) を得る．そして，式 (4.2) の両辺と Y_γ との内積をとると

$$\tilde\kappa'_\gamma\kappa_\gamma - \tilde\kappa_\gamma\kappa'_\gamma + \tilde\kappa_\gamma^2\langle \widetilde{Z}_\gamma^T, Y_\gamma\rangle = -\tilde\kappa_\gamma\langle A_{\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)}\dot\gamma, Y_\gamma\rangle$$

となる．よって命題 1.6 より $\langle A_{\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)}\dot\gamma, Y_\gamma\rangle = \langle\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma), \sigma(\dot\gamma, Y_\gamma)\rangle$ だから，式 (4.4) を得る．
□

等長はめ込みを研究するためのアイデアとして，部分多様体の各点での任意の正規直交接ベクトルの組に対して，この組を初期ベクトルと初期加速度ベクトル方向とする曲線から定まる量が等長はめ込みにより，どのようになるかを調べることを提唱する．本節では部分多様体の臍点をこのアイデアに基づいて考察する．

等長はめ込み $f: M \to \widetilde{M}$ を M の点 p における正規直交接ベクトルの組 $(u,v) \in T_pM \times T_pM$ に対して，次の四つの条件を満たす弧長で径数付けられた滑らかな曲線族を $\mathcal{F}_f(u,v)$ と表す．

i) 変曲点をもたない,

ii) 初期接ベクトルは u である,

iii) 初期法ベクトルは v の正定数倍である,

iv) 外的形状 $f \circ \gamma$ は点 $f(p)$ で真の位数 2 である.

この曲線族 $\mathcal{F}_f(u,v)$ に属する曲線の原点における曲率の対数微分の集合を $\mathcal{A}_f(u,v)$ とおく. すなわち

$$\mathcal{A}_f(u,v) = \{\kappa'_\gamma(0)/\kappa_\gamma(0) \mid \gamma \in \mathcal{F}_f(u,v)\}(\subset \mathbb{R})$$

とおく.

定理 4.3 M の点 p_0 における任意の正規直交接ベクトルの組 $(u,v) \in T_{p_0}M \times T_{p_0}M$ に対して, $\mathcal{A}_f(u,v) \cap \mathcal{A}_f(u,-v) \neq \emptyset$ ならば, 等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ は点 p_0 において臍的である.

定理 4.3 の意味を明確にするために記号を用いずに表現し直すと次のようになる.

定理 4.4 リーマン部分多様体 M のリーマン多様体 $\widetilde{M}$ への等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ について, M の点 p_0 における任意の正規直交ベクトルの組 $(u,v) \in T_{p_0}M \times T_{p_0}M$ に対して, 次の四つの条件を満たす孤長で径数付けられた滑らかな二つの曲線 γ_1, γ_2 が存在するとき, f は点 p_0 において臍的である.

i) 変曲点をもたない,

ii) $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p_0, \dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0) = u,$
$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(0) = \kappa_{\gamma_1} v,\ \nabla_{\dot{\gamma}_2}\dot{\gamma}_2(0) = -\kappa_{\gamma_2} v,$

iii) 外的形状 $f \circ \gamma_1$, $f \circ \gamma_2$ が点 $f(p_0)$ で真の位数 2 である,

iv) $\kappa'_{\gamma_1}(0)/\kappa_{\gamma_1}(0) = \kappa'_{\gamma_2}(0)/\kappa_{\gamma_2}(0).$

証明 二つの曲線について，等式 (4.4) が成り立つので

$$\tilde{\kappa}'_{\gamma_i}\kappa_{\gamma_i} = \tilde{\kappa}_{\gamma_i}\Bigl\{\kappa'_{\gamma_i} - \langle\sigma(\dot{\gamma}_i,\dot{\gamma}_i),\sigma(\dot{\gamma}_i,Y_{\gamma_i})\rangle - \tilde{\kappa}_{\gamma_i}\langle\widetilde{Z}^T_{\gamma_i},Y_{\gamma_i}\rangle\Bigr\} \quad i=1,2$$

であるが，条件 iii) により，$\widetilde{Z}^T_{\gamma_i}=0$ であるから，条件 ii) も併せて用いると

$$\frac{\tilde{\kappa}'_{\gamma_1}(0)}{\tilde{\kappa}_{\gamma_1}(0)} = \frac{\kappa'_{\gamma_1}(0)}{\kappa_{\gamma_1}(0)} - \frac{1}{\kappa_{\gamma_1}(0)}\langle\sigma(u,u),\sigma(u,v)\rangle,$$
$$\frac{\tilde{\kappa}'_{\gamma_2}(0)}{\tilde{\kappa}_{\gamma_2}(0)} = \frac{\kappa'_{\gamma_2}(0)}{\kappa_{\gamma_2}(0)} + \frac{1}{\kappa_{\gamma_2}(0)}\langle\sigma(u,u),\sigma(u,v)\rangle$$

となる．等式 (4.3) についても同様に，条件 ii), iii) より

$$\frac{\tilde{\kappa}'_{\gamma_1}(0)}{\tilde{\kappa}_{\gamma_1}(0)}\sigma(u,u) = 3\kappa_{\gamma_1}(0)\sigma(u,v) + \bigl(\bar{\nabla}_u\sigma\bigr)(u,u),$$
$$\frac{\tilde{\kappa}'_{\gamma_2}(0)}{\tilde{\kappa}_{\gamma_2}(0)}\sigma(u,u) = -3\kappa_{\gamma_2}(0)\sigma(u,v) + \bigl(\bar{\nabla}_u\sigma\bigr)(u,u)$$

となる．これらの式より

$$\left\{\frac{\kappa'_{\gamma_1}(0)}{\kappa_{\gamma_1}(0)} - \frac{1}{\kappa_{\gamma_1}(0)}\langle\sigma(u,u),\sigma(u,v)\rangle\right\}\sigma(u,u) = 3\kappa_{\gamma_1}(0)\sigma(u,v) + \bigl(\bar{\nabla}_u\sigma\bigr)(u,u),$$
$$\left\{\frac{\kappa'_{\gamma_2}(0)}{\kappa_{\gamma_2}(0)} + \frac{1}{\kappa_{\gamma_2}(0)}\langle\sigma(u,u),\sigma(u,v)\rangle\right\}\sigma(u,u) = -3\kappa_{\gamma_2}(0)\sigma(u,v) + \bigl(\bar{\nabla}_u\sigma\bigr)(u,u)$$

が得られる．ここで条件 iv) より

$$\left\{\frac{1}{\kappa_{\gamma_1}(0)} + \frac{1}{\kappa_{\gamma_2}(0)}\right\}\langle\sigma(u,u),\sigma(u,v)\rangle\sigma(u,u) = -3\left(\kappa_{\gamma_1}(0)+\kappa_{\gamma_2}(0)\right)\sigma(u,v)$$

を得る．従って

$$3\kappa_{\gamma_1}(0)\kappa_{\gamma_2}(0)\sigma(u,v) + \langle\sigma(u,u),\sigma(u,v)\rangle\sigma(u,u) = 0 \tag{4.7}$$

となり，式 (4.7) の両辺と $\sigma(u,u)$ との内積をとると

$$\Bigl\{3\kappa_{\gamma_1}(0)\kappa_{\gamma_2}(0) + \|\sigma(u,u)\|^2\Bigr\}\langle\sigma(u,u),\sigma(u,v)\rangle = 0$$

となる．ここで $\kappa_{\gamma_1}(0)\kappa_{\gamma_2}(0) > 0$ であるから

$$\langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle = 0$$

となり，式 (4.7) へ代入することにより，$\kappa_{\gamma_1}(0)\kappa_{\gamma_2}(0) > 0$ であるから

$$\sigma(u,v) = 0$$

を得る．そして定理 2.1 の証明と同様に任意の接ベクトル $w_1, w_2 \in T_{p_0}M$ に対して

$$\sigma(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle \mathfrak{h}_{p_0} \tag{4.8}$$

が成り立つ．実際，$w_1 = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i, w_2 = \sum_{i=1}^{n} b^i e_i$ とすれば，σ の双線形性より

$$\begin{aligned} \sigma(w_1, w_2) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a^i b^j \sigma(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} a^i b^i \sigma(e_i, e_i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a^i b^i\right) \mathfrak{h}_{p_0} = \langle w_1, w_2 \rangle \mathfrak{h}_{p_0} \end{aligned}$$

となる．よって，f が点 p_0 において臍的であることがわかる． □

注意 正規直交接ベクトルの組 $(u,v) \in T_{p_0}M \times T_{p_0}M$ に対して，u と v の両方に直交する任意の接ベクトル $w \in T_pM$ において $\langle \sigma(u,u), \sigma(u,w) \rangle = 0$ と仮定する．曲線 $\gamma \in \mathcal{F}_f(u,v)$ に対して，式 (4.2) の両辺に Z_γ との内積をとると

$$\kappa_\gamma \|Z_\gamma\| = \langle \sigma(\dot\gamma, \dot\gamma), \sigma(\dot\gamma, Z_\gamma) \rangle$$

となり，$\kappa_\gamma > 0$ より $Z_\gamma = 0$ となる．よって，点 p_0 で真の位数 2 であることがわかる．つまり，isotropic 等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ を考えたとき，曲線 γ の外的形状 $f \circ \gamma$ が点 $f \circ \gamma(s_0)$ で真の位数 2 であるならば M 上の曲線としても点 $\gamma(s_0)$ で真の位数 2 となることがわかる．isotropic については第六，七節 (p.55 ∼) で詳しく述べる．

定理 4.3 を各点で考察した場合を述べる．

定理 4.5 M の各点 p における任意の正規直交接ベクトルの組 $(u,v)\in T_pM\times T_pM$ に対して，$\mathcal{A}_f(u,v)\cap\mathcal{A}_f(u,-v)\neq\emptyset$ ならば，等長はめ込み $f:M\to\widetilde{M}$ は全臍的となる．

この定理も改めて記号を用いない表記をすれば，以下のようになる．

定理 4.6 等長はめ込み $f:M\to\widetilde{M}$ について，M の各点 p における任意の正規直交ベクトルの組 $(u,v)\in T_pM\times T_pM$ に対して，次の四つの条件を満たす孤長で径数付けられた滑らかな二つの曲線 γ_1, γ_2 が存在するとき，f は全臍的である．

i) 変曲点をもたない，

ii) $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=p, \dot{\gamma_1}(0)=\dot{\gamma_2}(0)=u,$
$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0)=\kappa_{\gamma_1}v,\ \nabla_{\dot{\gamma_2}}\dot{\gamma_2}(0)=-\kappa_{\gamma_2}v,$

iii) 外的形状 $f\circ\gamma_1$, $f\circ\gamma_2$ が点 $f(p)$ で真の位数 2 である，

iv) $\kappa'_{\gamma_1}(0)/\kappa_{\gamma_1}(0)=\kappa'_{\gamma_2}(0)/\kappa_{\gamma_2}(0).$

ここで外的形状が真の位数 2 である曲線の曲率の対数微分が表す意味を考察しておく．

補題 4.2 M の点 p における任意の正規直交接ベクトルの組 $(u,v)\in T_pM\times T_pM$ に対して $\sigma(u,v)=0$ かつ $\mathcal{F}_f(u,v)\cup\mathcal{F}_f(u,-v)\neq\emptyset$ が成り立つとき，次の二つの条件 (1), (2) のいずれか一つの条件が成り立つ．

(1) $\sigma(u,u)=0.$

(2) 集合 $\mathcal{A}_f(u,v)\cup\mathcal{A}_f(u,-v)$ はただ一つの値から成る．

なお (1) の場合 $\mathcal{A}_f(u,v)=\mathbb{R}$ となる．

証明　任意の曲線 $\gamma\in\mathcal{F}_f(u,v)\cup\mathcal{F}_f(u,-v)$ に対して $\sigma(u,v)=0$ であるから，補題 4.1 の式 (4.3), (4.4) と第二基本形式の共変微分の定義式 (2.3) より

$$\begin{aligned}\kappa'_\gamma(0)\sigma(u,u)&=\kappa_\gamma(0)(\bar\nabla_u\sigma)(u,u)\\&=\kappa_\gamma(0)(\nabla^\perp_u\mathfrak{h})_p\end{aligned}\tag{4.9}$$

となる．従って，$\sigma(u,u) \neq 0$ ならば

$$\frac{\kappa_\gamma'(0)}{\kappa_\gamma(0)} = \frac{\langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u), \sigma(u,u)\rangle}{\|\sigma(u,u)\|^2}$$

となる．よって

$$\mathcal{A}_f(u,v) \cup \mathcal{A}_f(u,-v) = \left\{ \frac{\langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u), \sigma(u,u)\rangle}{\|\sigma(u,u)\|^2} \right\}$$

となり，ただ一つの値から成る．

また，$\sigma(u,u) = 0$ ならば $(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u) = 0$ となり，このとき $\dot{\beta}(0) = u$, $Y_\beta(0) = v$ であるような任意の真の位数 2 のフレネ曲線 β に対して，$u \perp v$ となる任意の v に対して $\sigma(u,v) = 0$ という条件を用いると，式 (4.6) によって

$$\widetilde{\nabla}_{\dot{\beta}}\widetilde{\nabla}_{\dot{\beta}}\dot{\beta}(0) = -\kappa_\beta^2(0)\dot{\beta}(0) + \kappa_\beta'(0)Y_\beta(0)$$

となる．従って，曲線 $f \circ \beta$ は点 $f(\beta(0))$ を真の位数 2 とする．任意の実数 λ に対して $\kappa_\beta = 1$, $\kappa_\beta' = \lambda$ となる真の位数 2 のフレネ曲線 β で $\beta'(0) = u$, $Y_\beta(0) = v$ となるものが存在するので $\mathcal{A}_f(u,v) = \mathbb{R}$ となる．それゆえ, 条件 (1), (2) は相異なる． □

ここで式 (4.9) について，幾何学的にどのようなことがいえるのかを考えてみる．

$$\frac{\kappa_\gamma'}{\kappa_\gamma}\mathfrak{h}_p = (\nabla_u^\perp \mathfrak{h})_p$$

より，平均曲率ベクトルを単位接ベクトル u 方向に共変微分したものがその平均曲率ベクトル自身の伸び率である $\kappa_\gamma'/\kappa_\gamma$ 倍を表している．また全臍的で $\sigma(u,u) \neq 0$ ならば

$$\frac{\kappa_\gamma'(0)}{\kappa_\gamma(0)} = \frac{\langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u), \sigma(u,u)\rangle}{\|\sigma(u,u)\|^2} = \frac{\langle(\nabla_u^\perp \mathfrak{h})_p, \mathfrak{h}_p\rangle}{\|\sigma(u,u)\|^2}$$

が成り立つ．従って，$\kappa_\gamma'(0)/\kappa_\gamma(0) = 0$ であることと $\mathfrak{h}$ が平行であることとは同値であり，野水・矢野の定理 2.1 を表していることがわかる．つまり

$$\mathcal{A}_f(u,v) \cap \mathcal{A}_f(u,-v) = \left\{ \frac{\langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u), \sigma(u,u)\rangle}{\|\sigma(u,u)\|^2} \right\} = \{0\}$$

である．従って定理 4.5 の条件の $\mathcal{A}_f(u,v) \cap \mathcal{A}_f(u,-v)$ が測地曲率が一定な円から得られるときに野水・矢野の定理 (定理 2.1) が導かれる．

系 4.1 リーマン多様体 $\widetilde{M}$ とその部分多様体 M においての等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ について，次の三つの条件はそれぞれ互いに同値である．

(1) M が $\widetilde{M}$ の extrinsic sphere である．

(2) M 上のすべての円は $\widetilde{M}$ 上でも円となる．

(3) M の各点 p における任意の正規直交接ベクトルの組 $(u, v) \in T_pM \times T_pM$ に対して，初期条件 $\dot{\gamma}(0) = u$，$Y_\gamma(0) = v$ であるような正の測地曲率をもつ円 γ で $\widetilde{M}$ 上でも点 $f(p)$ で真の位数 2 のフレネ曲線となる曲線 $f \circ \gamma$ が存在する．

注意 野水・矢野の定理 2.1 は，一つの値 κ を決めて，κ を測地曲率にもつ円を調べている．系 4.1 の条件 (3) では，特定の κ を指定せず，一点のみでの条件を与えている点が野水・矢野の定理 2.1，田辺の定理 4.2 と大きく異なる．

次に，系 4.1 の条件 (3) をわずかながら弱めた命題を記しておく．

命題 4.1 リーマン多様体 $\widetilde{M}$ とその部分多様体 M においての等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ について，M の各点 p における任意の正規直交接ベクトルの組 $(u, v) \in T_pM \times T_pM$ に対して，測地曲率 κ_γ が $\kappa'_\gamma(0) = 0$ という条件をもつ真の位数 2 のフレネ曲線 γ が $\widetilde{M}$ 上でも真の位数 2 のフレネ曲線 $f \circ \gamma$ となるならば，M が $\widetilde{M}$ の extrinsic sphere となる．

次に，単位接ベクトル $u \in T_pM$ に対して，曲線族を $\mathcal{F}_f(u)$ とおく．すなわち

$$\mathcal{F}_f(u) = \bigcup\{\mathcal{F}_f(u,v) \mid v \text{ は } u \text{ に直交する単位接ベクトル}\}$$

であり，この曲線族の曲線の曲率の対数微分の集合を $\mathcal{A}_f(u)$ とおく．すなわち

$$\mathcal{A}_f(u) = \left\{\frac{\kappa'_\gamma(0)}{\kappa_\gamma(0)} \mid \gamma \in \mathcal{F}_f(u)\right\} (\subset \mathbb{R})$$

である．

補題 4.2 の証明より

補題 4.3 等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ において，任意の単位接ベクトル $u \in T_pM$ に直交する任意の単位接ベクトル $v \in T_pM$ に対して，$\sigma(u,v) = 0$ かつ $\mathcal{F}_f(u) \neq \emptyset$ が成り立つとき，次の二つの条件 (1), (2) のいずれか一つの条件が成り立つ．

(1) $\sigma(u,u) = 0$.

(2) $\mathcal{A}_f(u) = \{\kappa'_\gamma(0)/\kappa_\gamma(0) \mid \gamma \in \mathcal{F}_f(u)\}$ はただ一つの値から成る．

ここでリーマン部分多様体 M の条件を点 p_0 で臍的であると仮定すると次の命題が得られる．

命題 4.2 点 $p_0 \in M$ において臍的である等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ について，次の三つの条件はそれぞれ互いに同値である．

(1) f は点 p_0 で測地的である．

(2) 任意の単位接ベクトル $u \in T_{p_0}M$ に対して，$\mathcal{A}_f(u)$ は少なくとも異なる二つの値を含む．

(3) 任意の単位接ベクトル $u \in T_{p_0}M$ に対して，$\mathcal{A}_f(u) = \mathbb{R}$ となる．

命題 4.2 を各点に拡張した場合を述べる．

系 4.2 全臍的部分多様体 M のリーマン多様体 $\widetilde{M}$ への等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ について, 次の三つの条件はそれぞれ互いに同値である.

(1) f は全測地的である.

(2) 任意の単位接ベクトル $u \in TM$ に対して, $\mathcal{A}_f(u)$ は少なくとも異なる二つの値を含む.

(3) 任意の単位接ベクトル $u \in TM$ に対して, $\mathcal{A}_f(u) = \mathbb{R}$ となる.

注意 点 $p \in M$ において臍的であるとき, ただ一つの値から成る集合

$$\mathcal{A}_f(u) = \left\{ \frac{\langle (\bar{\nabla}_u \sigma)(u,u), \sigma(u,u) \rangle}{\|\sigma(u,u)\|^2} \right\}$$

の特性は $u \in T_pM$ の選び方に依存するものではない. また命題 4.2, 系 4.2 では臍的であるという条件をつけたが, 定理 4.4 や定理 4.5 の $\mathcal{A}_f(u,v) \cap \mathcal{A}_f(u,-v)$ に関する条件に置き換えれば, 後で述べるが, $\mathcal{A}_f(u,v)$ に関する条件により測地的である性質を取り出すことができることを意味している.

これより, 田辺の結果 (定理 4.1, 4.2) の別証明を与える.

証明 正規直交接ベクトルの組 $(u,v) \in T_pM \times T_pM$ に対して, 測地曲率が $\kappa\,(>0)$ である真の位数 2 のフレネ曲線 $\gamma_{u,v}$ をとると, その曲線は定理 4.4 の四つの条件と同様な条件を満たすことから, M は全臍的かつ

$$\kappa'(s)\mathfrak{h}_{\gamma_{u,v}(s)} = \kappa(s)(\nabla^{\perp}_{\dot{\gamma}_{u,v}(s)}\mathfrak{h})_{\gamma_{u,v}(s)} \tag{4.10}$$

を満たす.

$\kappa'(0) \neq 0$ のとき, $\rho(s) = \gamma_{-u,v}(-s)$ となる真の位数 2 のフレネ曲線 ρ をとれば, ρ の外的形状 $f \circ \rho$ は真の位数 2 のフレネ曲線かつ $\kappa'_\rho(0) = -\kappa'(0)$, $\kappa_\rho(0) = \kappa(0)$ だから, $\mathcal{A}_f(u,v)$ は少なくとも異なる二つの値を含み, M が全測地的であることがわかる (定理 4.1).

$\kappa'(0)=0$ のとき，式 (4.10) から，すべての単位接ベクトル u に対して $(\nabla^{\perp}_{u}\mathfrak{h})_p=0$ だから，M は extrinsic sphere となることがわかる (定理 4.2).

この定理 4.1 のように κ は一定でないとすると，つまり，$\kappa'(s_0)\neq 0$ の点が存在するので $\mathfrak{h}_{\gamma_{u,v}(s_0)}=0$ となり，$(\nabla^{\perp}\mathfrak{h})_{\gamma_{u,v}(s_0)}=0$ であるから，全臍的である性質と併せて M は全測地的となることがわかる． □

定理 4.3 と命題 4.2 とを併せると次の命題が得られる．

命題 4.3 等長はめ込み $f:M\to\widetilde{M}$ が点 $p_0\in M$ において

(1) 任意の正規直交接ベクトルの組 $(u,v)\in T_{p_0}M\times T_{p_0}M$ に対して

$$\mathcal{A}_f(u,v)\cap\mathcal{A}_f(u,-v)\neq\emptyset$$

が成り立つ，

(2) $\mathcal{A}_f(u)$ が二つ以上の値を含む単位接ベクトル $u\in T_{p_0}M$ が存在する

という条件を満たせば点 p_0 で測地的である．

命題 4.3 より，f の様子を調べるには，$\mathcal{A}_f(u)$ がただ一つの値から成る場合において考察を行えば良いことがわかる．

定理 4.6 の曲線の四つの条件を満たす全臍的等長はめ込みを $f:M\to\widetilde{M}$ とおく．ある接ベクトル (結果的には全臍的であることから，任意の接ベクトル) $u\in T_pM$ に対して，$\mathcal{A}_f(u)$ が一つの値から成るすべての点 $p\in M$ 全体の集合を M_0 とおく．このとき補題 4.2 により，その集合は $\mathfrak{h}_x\neq 0$ を満たす点 p しか存在しないことがわかる．そこで $\{p\in M\mid \mathfrak{h}_p\neq 0\}$ となるような開集合 M_0 を考える．この集合を，f に関する M の non-totally geodesic part という．また $\mathfrak{h}_p=0$ を満たす点の集合 $M\setminus M_0$ を，totally geodesic part という．

M_0 上の一形式 ω を次のように定義する．

$$\omega(v)=\begin{cases}\|v\|\kappa'_{\gamma}(0)/\kappa_{\gamma}(0) & v\neq 0,\\ 0 & v-0.\end{cases}$$

ただし $\gamma \in \mathcal{F}_f(v/\|v\|)$ とする．ここで定めた ω が一形式になっていることを確かめておく．定義により $\lambda \geq 0$ であれば $\omega(\lambda v) = \lambda\omega(v)$ を満たす．また，$\gamma \in \mathcal{F}_f(u)$ ならば，$\rho(s) = \gamma(-s)$ で定義される曲線 ρ は $\mathcal{F}_f(-u)$ の要素であり，$\kappa'_\rho(0) = -\kappa'_\gamma(0)$ を満たす．従って，$\omega(-v) = -\omega(v)$ となる．

次に，任意の単位接ベクトル u に対して

$$a(u) = \frac{\langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u), \sigma(u,u)\rangle}{\|\sigma(u,u)\|^2} = \frac{\langle(\nabla^\perp_u\mathfrak{h})_p, \mathfrak{h}_p\rangle}{\|\sigma(u,u)\|^2}$$

とおくと，集合 $\mathcal{A}_f(u) = \{a(u)\}$ である．二つの単位接ベクトル $u, v \in T_pM$ が $u \perp v$ であるとき

$$\begin{aligned}
a\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) &= 2\sqrt{2}\frac{\langle(\nabla^\perp_{u+v}\mathfrak{h})_p, \mathfrak{h}_p\rangle}{\|\sigma(u+v, u+v)\|^2} \\
&= 2\sqrt{2}\frac{\langle(\nabla^\perp_u\mathfrak{h})_p, \mathfrak{h}_p\rangle + \langle(\nabla^\perp_v\mathfrak{h})_p, \mathfrak{h}_p\rangle}{\|\sigma(u,u) + 2\sigma(u,v) + \sigma(v,v)\|^2} \\
&= 2\sqrt{2}\frac{\langle(\nabla^\perp_u\mathfrak{h})_p, \mathfrak{h}_p\rangle + \langle(\nabla^\perp_v\mathfrak{h})_p, \mathfrak{h}_p\rangle}{\|2\sigma(u,u)\|^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(a(u) + a(v))
\end{aligned}$$

となるから，$\omega(u+v) = \omega(u) + \omega(v)$ を満たす．以上で $\omega : TM_0 \to \mathbb{R}$ は線形写像であることがわかり一形式である．

M_0 上で定義された一形式 ω を

$$\bar{\omega}_p = \begin{cases} \omega_p & p \in M_0, \\ 0 & p \in M \setminus M_0 \end{cases}$$

と定義することによって，一形式 ω を M 上の一形式 $\bar{\omega}$ に連続的に拡張する．補題 4.2 の証明により，任意の接ベクトル v に対して，$(\nabla^\perp_v\mathfrak{h})_p = \bar{\omega}(v)\mathfrak{h}_p$ を満たしている．これより，定理 4.3 を次のように書き直すことができる．

定理 4.7 等長はめ込み $f: M \to \widetilde{M}$ について，次の条件は互いに同値である．

(1) M は全臍的かつ任意の $v \in TM$ に対して，$(\nabla^{\perp}_{v}\mathfrak{h})_p = \bar{\omega}(v)\mathfrak{h}_p$ を満たすような一形式 $\bar{\omega}$ が存在する．

(2) 任意の正規直交ベクトルの組 (u, v) に対して，$\mathcal{A}_f(u,v) \cap \mathcal{A}_f(u,-v) \neq \emptyset$ である．

証明 条件 (2) から条件 (1) の証明と定理 4.3 の証明は同じであるから，逆である条件 (1) から条件 (2) の証明を行う．

正規直交ベクトルの組 (u, v) に対して，初期条件 $\dot{\gamma}(0) = u$, $Y_\gamma(0) = v$, $\kappa'_\gamma(0)/\kappa_\gamma(0) = \bar{\omega}(u)$ を満たす真の位数 2 のフレネ曲線 γ をとる． 全臍的であるから，単位接ベクトル $u \in T_pM$ に対して $\sigma(u,u) = \mathfrak{h}_p$ であり，$v \in T_pM$ が u に直交すれば，$\sigma(u,v) = 0$ となる．従って

$$
\begin{aligned}
(\nabla^{\perp}_{\dot{\gamma}}\mathfrak{h})_p &= \nabla^{\perp}_{\dot{\gamma}}\left(\sigma(\dot{\gamma},\dot{\gamma})\right) \\
&= \left(\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\sigma\right)(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) + 2\sigma(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma},\dot{\gamma})
\end{aligned}
$$

より

$$
(\nabla^{\perp}_{u}\mathfrak{h})_p = \left(\bar{\nabla}_{u}\sigma\right)(u,u)
$$

となる．よって，式 (4.6) より

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(0) &= \kappa_\gamma(0)v + \mathfrak{h}_p, \\
\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(0) &= -(\kappa^2_\gamma(0) + H^2_p)u + \kappa'_\gamma(0)v + (\nabla^{\perp}_{u}\mathfrak{h})_p \\
&= -(\kappa^2_\gamma(0) + H^2_p)u + \kappa'_\gamma(0)v + \frac{\kappa'(0)}{\kappa(0)}\mathfrak{h}_p
\end{aligned}
$$

となる．ただし $H_p = \|\mathfrak{h}_p\|$ は p での平均曲率である．

一方，$\widetilde{\kappa}^2_\gamma = \kappa^2_\gamma + H^2_\gamma$ から

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\kappa}'_\gamma(0)\widetilde{\kappa}_\gamma(0) &= \kappa'_\gamma(0)\kappa_\gamma(0) + \langle \mathfrak{h}_p, (\nabla^{\perp}_{u}\mathfrak{h})_p \rangle \\
&= \frac{\kappa'_\gamma(0)}{\kappa_\gamma(0)}\left(\kappa_\gamma(0)^2 + H^2_p\right) = \frac{\kappa'_\gamma(0)}{\kappa_\gamma(0)}\widetilde{\kappa}^2_\gamma(0)
\end{aligned}
$$

となる．これより

$$\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) = -\widetilde{\kappa}_\gamma(0)^2 u + \frac{\widetilde{\kappa}'_\gamma(0)}{\widetilde{\kappa}_\gamma(0)}\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma(0)$$

であるから，$f\circ\gamma$ は $f(p)$ で真の位数 2 となる．従って，$\gamma \in \mathcal{F}_f(u,v)$ である．ここでの考察は $v\,(\perp u)$ の選び方に依存していないことから

$$\mathcal{A}_f(u,v)\cap\mathcal{A}_f(u,-v) \ni \bar\omega(u)$$

であり，条件 (2) を満たす．　$\square$

注意　定理 4.7 の一形式 $\bar\omega$ について

$$\frac{1}{2}\nabla_v(H^2) = \frac{1}{2}\nabla^\perp_v\langle\mathfrak{h},\mathfrak{h}\rangle = \langle(\nabla^\perp_v\mathfrak{h})_p,\mathfrak{h}_p\rangle = \langle\bar\omega(v)\mathfrak{h}_p,\mathfrak{h}_p\rangle = \bar\omega(v)H_p^2$$

であるから， non-totally geodesic part M_0 上では $\bar\omega(v) = v(H)/H_p$ となる．

non-totally geodesic part M_0 上の一形式 ω の意味を知ることはたいへん興味深い．

計量を明確に表現するために，ここでは M の計量を g，$\widetilde{M}$ の計量を h と表し，定理 4.4 の四条件を満たす等長はめ込み $f:(M,g)\to(\widetilde{M},h)$ を考える．定理 4.4 により，f は全臍的である．M_0 上の滑らかな関数 φ を平均曲率 H を用いて $\varphi(p) = \log H_p$ と定義する．このとき $E(p) = e^{-\varphi(p)}\mathfrak{h}_p$ は滑らかな単位切断 $E\in\Gamma(T^\perp M|_{M_0})$ である．実際，$\|E(p)\| = e^{-\varphi(p)}\|\mathfrak{h}_p\| = 1$ となる．更に，任意の単位接ベクトル $u\in TM|_{M_0}$ に対して

$$(\nabla^\perp_u\mathfrak{h})_p = \omega(u)\mathfrak{h}_p = \frac{u(H)}{H_p}\mathfrak{h}_p$$

であるから

$$\begin{aligned}\nabla^\perp_u E &= -\frac{u(H)}{H_p}e^{-\varphi}\mathfrak{h}_p + e^{-\varphi(p)}(\nabla^\perp_u\mathfrak{h})_p \\ &= -\frac{\langle(\nabla^\perp_u\mathfrak{h})_p,\mathfrak{h}_p\rangle}{H_p}e^{-\varphi}\mathfrak{h}_p + e^{-\varphi(p)}(\nabla^\perp_u\mathfrak{h})_p = 0\end{aligned}$$

となり，M_0 上の E は平行であることがわかる．任意の単位ベクトル $u\in TM|_{M_0}$ に対して $\omega(u) = u(H)/H_p$ であるから，φ の定義により $u\varphi = \omega(u)$ を満たす，つまり，$\omega = d\varphi$ を満たしていることがわかる．$d\varphi = \omega$ を満たす関数 φ を f の平均曲率ベクトルの長さの変動関数という．

系 4.3 定理4.3の曲線の四条件を満たす等長はめ込み $f:(M,g)\to(\widetilde{M},h)$ について，non-totally geodesic part M_0 上のベクトル場 $(1/H)\mathfrak{h}$ は平行である．

Chen 氏 ([7]) に従い平均曲率ベクトルが単位平行ベクトル場 ξ を用いて $\mathfrak{h}=|H|\xi$ と表されるならば，その部分多様体は**平行な正規化された平均曲率ベクトルをもつ**という．系4.3 により non-totally geodesic part M_0 は平行な正規化された平均曲率ベクトルをもつことがわかる．なお Chen 氏 ([7]) により，$\mathbb{R}^n$ 内の平行な正規化された平均曲率をもつ曲面の分類が行われている．

ここで non-totally geodesic part を別の観点から眺めてみる．一般的に M 上の計量 g を，ある関数 φ をもつ共形な計量 $\widehat{g}=e^{2\varphi}g$ に替えると，$\widehat{g}$ に関するリーマン接続 $\widehat{\nabla}$ は M 上の任意のベクトル場 X,Y,Z に対して，式 (1.8) より

$$\widehat{\nabla}_XY=\nabla_XY+(X\varphi)Y+(Y\varphi)X-g(X,Y)\nabla\varphi$$

が成り立つ．

$f:(M,g)\to(\widetilde{M},h)$ が全臍的等長はめ込みであるとき，$\widetilde{M}$ 上の関数 φ を用いて，M, N の計量 g, h をそれぞれ共形な計量 $\widehat{h}=e^{2\varphi}h$, $\widehat{g}=e^{2(\varphi|_M)}g$ に替えると，$f:(M,\widehat{g})\to(\widetilde{M},\widehat{h})$ もまた全臍的である．f が埋め込みである場合に，$f(M_0)$ のあるチューブ $\widetilde{M_0}$ 上で $\widetilde{\nabla}\varphi=\nabla\varphi$ を満たすように f の平均曲率ベクトルの長さの変動関数 $\varphi:M_0\to\mathbb{R}$ を拡張することができる．M_0 と $\widetilde{M_0}$ 上の計量をそれぞれ共形な $\widehat{g}=e^{2\varphi}g|_{M_0}$, $\widehat{h}=e^{2\varphi}h|_{\widetilde{M_0}}$, である計量に替えることで，等長埋め込み $f|_{M_0}:(M_0,\widehat{g})\to(\widetilde{M_0},\widehat{h})$ の平均曲率ベクトルは $\widehat{\mathfrak{h}}=e^{-2\varphi}\mathfrak{h}$ より

$$\widehat{\nabla}^{\perp}_u\widehat{\mathfrak{h}}=\nabla^{\perp}_u\widehat{\mathfrak{h}}+(u\varphi)\widehat{\mathfrak{h}}=-(u\varphi)\widehat{\mathfrak{h}}+e^{-2\varphi}\nabla^{\perp}_u\mathfrak{h}=-(u\varphi)\widehat{\mathfrak{h}}+e^{-2\varphi}\omega(u)\mathfrak{h}=0$$

を満たす．つまり，$f:(M_0,\widehat{g})\to(\widetilde{M_0},\widehat{h})$ は平行な平均曲率ベクトルををもつ．従って，$(M_0,\widehat{g})$ は $(\widetilde{M_0},\widehat{h})$ の extrinsic sphere となることがわかる．

定理 4.8 定理4.3における曲線の外的形状の条件を満たす等長埋め込み $f:(M,g)\to(\widetilde{M},h)$ について，$(M_0,e^{2\varphi}g|_{M_0})$ が $(\widetilde{M_0},e^{2\varphi}h|_{\widetilde{M_0}})$ の extrinsic sphere となるような non-totally geodesic part $f(M_0)$ の回りにチューブ $\widetilde{M_0}$ が存在する．ただし φ は f の平均曲率ベクトルの長さの変動関数 φ である．

totally geodesic part $M\backslash M_0$ は例外な集合である．滑らかな曲線 γ に対して $\kappa'_\gamma(s)\mathfrak{h}_{\gamma(s)}=\kappa_\gamma(s)\big(\nabla^\perp_{\dot\gamma}\mathfrak{h}\big)_{\gamma(s)}$ が成り立つならば，$\gamma(s)\in M\setminus M_0$ ですべての正の整数 n に対して $\big((\nabla^\perp_{\dot\gamma})^n\mathfrak{h}\big)_{\gamma(s)}=0$ が成り立つ．従って，実解析的カテゴリーで考えて，$\bigcup_u\mathcal{F}(u)$ に属する実解析曲線 γ に沿って $\kappa'_{\gamma(s)}\mathfrak{h}_\gamma(s)=\kappa_\gamma(s)(\nabla^\perp_{\dot\gamma}\mathfrak{h})_{\gamma(s)}$ が成り立てば，集合 $M\setminus M_0=\{\,p\in M\mid\mathfrak{h}_p=0\,\}$ は M の開部分集合かつ閉部分集合である．よって，実解析的多様体 M の連結成分は，全測地的であるか，測地的な点をまったくもたないかのいずれかになる．

系 4.4 実解析的多様体 $(\widetilde{M},h)$ 内の実解析的部分多様体 (M,g) を与える実解析的等長はめ込み $f:M\to\widetilde{M}$ を考える．各点 $p\in M$ における任意の正規直交接ベクトルの組 $(u,v)\in T_pM\times T_pM$ に対して，次の三つの条件を満たす孤長で径数付けられた実解析的曲線 $\gamma_{u,v}:(-\epsilon_{u,v},\epsilon_{u,v})\to M$ が存在する．

i) $\gamma_{u,v}$ は変曲点をもたない，

ii) $\dot\gamma_{u,v}(0)=u$ かつ $\nabla_{\dot\gamma_{u,v}}\dot\gamma_{u,v}(0)=\kappa_{\gamma_{u,v}}(0)v$,

iii) $f\circ\gamma_{u,v}$ は $\widetilde{M}$ の位数2のフレネ曲線となる．

加えて，それらの曲線が任意の正規直交接ベクトルの組 (u,v) に対して

$$\kappa'_{\gamma_{u,v}}(0)\kappa_{\gamma_{u,-v}}(0)=\kappa_{\gamma_{u,v}}(0)\kappa'_{\gamma_{u,-v}}(0)$$

を満たすとき，M は全臍的部分多様体かつ正規化された平行な平均曲率ベクトルをもつ．M の連結成分は全測地的であるか，測地的な点をもたないかのどちらかである．更に，f が埋め込みのとき，計量を適当な共形変換をすると，$(M,\widehat{g})$ は $(\widetilde{M},\widehat{h})$ の extrinsic sphere となる．

5 ケーラー等長はめ込みと位数2の曲線

この節では，全測地的ケーラー等長はめ込みの位数2の点をもつ曲線による特徴付けを行う．

複素変数に関して C^ω 級である複素構造が定義された複素多様体を M とする．局所複素座標 (U, z_α) について

$$z_\alpha = x^\alpha + \sqrt{-1}y^\alpha$$

として局所実座標系 (x^α, y^α) を考えると，M は $2n$ 次元実 C^ω 多様体でもある．局所一形式として

$$dz^\alpha = dx^\alpha + \sqrt{-1}dy^\alpha,$$

$$d\bar{z}^\alpha = dx^\alpha - \sqrt{-1}dy^\alpha.$$

ただし $\bar{z}^\alpha$ は z^α の複素共役である．この双対局所ベクトル場として

$$\partial/\partial z^\alpha = (1/2)(\partial/\partial^\alpha x^\alpha - \sqrt{-1}\partial/\partial y^\alpha),$$

$$\partial/\partial \bar{z}^\alpha = (1/2)(\partial/\partial^\alpha x^\alpha + \sqrt{-1}\partial/\partial y^\alpha)$$

を得る．各 U での $(1,1)$ テンソル場 J を

$$J(\partial/\partial z^\alpha) = \sqrt{-1}\partial/\partial z^\alpha,$$

$$J(\partial/\partial \bar{z}^\alpha) = -\sqrt{-1}\partial/\partial \bar{z}^\alpha$$

によって定義すれば，J は U のとり方に依らず，M 上のテンソル場となる．(x^α, y^α) については

$$J(\partial/\partial x^\alpha) = \partial/\partial y^\alpha,\ J(\partial/\partial y^\alpha) = -\partial/\partial x^\alpha$$

であり，実ベクトル場は実ベクトル場に写されている．また $J^2 = -I$ を満たす．複素 n 次元 C^∞ 多様体 M で $(1,1)$ テンソル場 $J : TM \to TM$ で

$$J^2X = -X \quad (X \in \mathfrak{X}M)$$

を満たすものが存在するとき (M, J) を**概複素多様体**という．概複素構造 J が上のように複素多様体の複素構造から導かれているとき，この J は**積分可能**であるという．

概複素多様体 $(M.J)$ 上のリーマン計量 g で

$$g(JX,JY)=g(X,Y)$$

を満たすものを**概 Hermite 計量**といい，(M,J,g) を**概 Hermite 多様体**という．更に，$J^2=-I$ から

$$\Omega(X,Y)=g(X,JY)$$

によって定義される Ω は微分二形式となる．基本形式とよばれる Ω が閉微分形式のとき，概 Hermite 多様体 (M,J,g) を**概ケーラー多様体**という．

概ケーラー多様体が**ケーラー多様体**とは J が積分可能の場合をいう．このことはリーマン接続 ∇ について $\nabla J=0$ となることと同値である．

概 Hermite 多様体 (M,J,g) で $v\in T_pM$ が 0 ではないとき，v と Jv は T_pM の実二次元線形空間を定め，これより断面曲率 $K(v,Jv)=\langle R(v,Jv)Jv,X\rangle$ を**正則断面曲率**という．ケーラー多様体の例として第一節で述べた正則断面曲率が一定な複素射影空間，複素双曲空間がある．

孤長で径数付けられたケーラー多様体 (M,J) 上の滑らかな曲線 γ が正定数 κ を用いて，$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\kappa J\dot\gamma$ または $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=-\kappa J\dot\gamma$ を満たすとき，つまり速度ベクトルと主法線ベクトルとが複素部分空間を生成する円であるとき，この曲線を**ケーラー円**という．

ケーラー多様体 (M,J) はケーラー多様体 $(\widetilde{M},\tilde{J})$ のケーラー部分多様体であるとする．すなわち $f:M\to\widetilde{M}$ というケーラー等長はめ込み ($d\varphi\circ J=\tilde{J}\circ d\varphi$ を満たす等長はめ込み) が存在する．このとき

$$\sigma(X,JY)=\tilde{J}\sigma(X,Y)$$

が成り立つ．実際，ケーラーであるから

$$\sigma(X,JY)=\widetilde{\nabla}_X(\tilde{J}Y)-\nabla_X(JY)=\tilde{J}(\widetilde{\nabla}_XY)-J(\nabla_XY)=\tilde{J}\sigma(X,Y)$$

である．

全測地的ケーラーはめ込みはこのケーラー円を考察することで特徴付けることができる．

命題 5.1 ([38]) ケーラー等長はめ込みが全測地的であるための必要十分条件は，正定数 κ で「(M,J) 上の測地曲率 κ をもつケーラー円が $(\widetilde{M},J)$ 上でもケーラー円である」という条件を満たすものが存在することである．

この節では，テスト曲線を一般化することにしよう．そこでケーラー円の族の一般化として，一点がケーラーとなるような滑らかな曲線族を考察していく．(M,J) 上の滑らかな曲線 γ が一点 $p=\gamma(0)$ で真の位数 2 かつ $Y_\gamma(0)=J\dot{\gamma}(0)$ または $Y_\gamma(0)=-J\dot{\gamma}(0)$ を満たすとき, γ は点 p においてケーラー的であるという．変曲点をもたない滑らかな曲線のすべての点がケーラー的であるとき，すなわち $Z_\gamma\equiv 0$ かつ $Y_\gamma(0)\equiv J\dot{\gamma}$ または $Y_\gamma(0)\equiv -J\dot{\gamma}$ が成り立つとき，この曲線 γ を**真の位数 2 のケーラー・フレネ曲線**という．ケーラー円は定数曲率をもつ真の位数 2 のケーラー・フレネ曲線となる．

定理 5.1 ケーラー等長はめ込み $f:(M,J,g)\to(\widetilde{M},J,h)$ について，点 $p\in M$ において f が測地的であるための必要十分条件は，点 $p\in M$ における任意の単位接ベクトル $u\in T_pM$ に対して，次の三つの条件を満たす孤長で径数付けられた滑らかな二つの曲線 $\gamma_1,\gamma_2:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ が存在することである．

i) γ_1,γ_2 は変曲点をもたない,

ii) $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=p,\ \dot{\gamma}_1(0)=\dot{\gamma}_2(0)=u,\ Y_{\gamma_1}(0)=Ju,\ Y_{\gamma_2}(0)=-Ju,$

iii) $f\circ\gamma_1,\ f\circ\gamma_2$ は点 $f(p)\in\widetilde{M}$ で真の位数 2, すなわち $f\circ\gamma_1(0)=f\circ\gamma_2(0)$ でケーラー的である．

一点から各点へと拡張することで全測地的部分多様体を特徴付けることができる．

系 5.1 ケーラー等長はめ込み $f:(M,J,g)\to(\widetilde{M},J,h)$ について，M が全測地的部分多様体であるための必要十分条件は，M の各点 p における任意の単位接ベクトル $u\in T_pM$ に対して，次の三つの条件を満たす孤長で径数付けられた滑らかな二つの曲線 $\gamma_1,\gamma_2:(-\epsilon,\epsilon)\to M$ が存在することである．

i) γ_1, γ_2 は変曲点をもたない,

ii) $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, $\dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0) = u$, $Y_{\gamma_1}(0) = Ju$, $Y_{\gamma_2}(0) = -Ju$,

iii) $f \circ \gamma_1$, $f \circ \gamma_2$ は点 $f(p) \in \widetilde{M}$ で真の位数 2, すなわち $f \circ \gamma_1(0) = f \circ \gamma_2(0)$ でケーラー的である.

定理 5.1 の証明 f が点 p において測地的であるとき，点 $p \in M$ で真の位数 2 であり，$\dot\gamma(0) = u$, $Y_\gamma(0) = Ju$ を満たす曲線 γ を考えると

$$\begin{aligned}
\widetilde\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) &= \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) = \kappa_\gamma(0)Ju, \\
\widetilde\nabla_{\dot\gamma}\widetilde\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) &= \kappa'_\gamma(0)Ju + \kappa_\gamma(0)J\widetilde\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) \\
&= \kappa'_\gamma(0)Ju + \kappa_\gamma(0)J(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0)) \\
&= \left(\kappa'_\gamma(0) - \kappa^2(0)\right) Ju
\end{aligned}$$

となり，点 $f(p)$ で $f \circ \gamma$ が真の位数 2 である．すなわちケーラー的であることがわかる．点 p において真の位数 2 であり $\dot\gamma(0) = u$, $Y_\gamma(0) = -Ju$ を満たす曲線 γ の外的形状も同様に $f(p)$ でケーラー的であるから条件を満たす曲線が存在する.

逆に，三つの条件を満たす二つの曲線が存在するならば，補題 4.1 より

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde\kappa}_{\gamma_1}(0)\sigma(u,u) &= \widetilde\kappa_{\gamma_1}(0)\left\{3\kappa_{\gamma_1}(0)\sigma(u,Ju) + (\bar\nabla_u\sigma)(u,u)\right\}, \\
\dot{\widetilde\kappa}_{\gamma_2}(0)\sigma(u,u) &= \widetilde\kappa_{\gamma_2}(0)\left\{-3\kappa_{\gamma_2}(0)\sigma(u,Ju) + (\bar\nabla_u\sigma)(u,u)\right\}
\end{aligned}$$

である．f はケーラーはめ込みであるから，この二式より

$$\left\{\frac{\dot{\widetilde\kappa}_{\gamma_1}}{\widetilde\kappa_{\gamma_1}}(0) - \frac{\dot{\widetilde\kappa}_{\gamma_2}}{\widetilde\kappa_{\gamma_2}}(0)\right\}\sigma(u,u) = 3\left\{\kappa_{\gamma_1}(0) + \kappa_{\gamma_2}(0)\right\} J\sigma(u,u)$$

$\kappa_{\gamma_1}(0)$ と $\kappa_{\gamma_2}(0)$ が正であり，$\sigma(u,u)$ と $J\sigma(u,u)$ は互いに直交するから，$\sigma(u,u) = 0$ となる. u は任意の単位接ベクトルであるから, f は点 p において測地的である. □

注意 更に定理 5.1 の三つの条件を以下のように弱めることができる.

i) $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0) = u$,

ii) $Y_{\gamma_1}(0)$, $Y_{\gamma_2}(0)$ が Ju に平行である,

iii) $Y_{\gamma_1}(0) = Y_{\gamma_2}(0)$ のとき, $\kappa_{\gamma_1}(0) \neq \kappa_{\gamma_2}(0)$.

実際, $Y_{\gamma_1}(0) = Y_{\gamma_2}(0) = \pm Ju$ の場合でも定理 5.1 の証明によって

$$\left\{ \frac{\dot{\widetilde{\kappa}}_{\gamma_1}}{\widetilde{\kappa}_{\gamma_1}}(0) - \frac{\dot{\widetilde{\kappa}}_{\gamma_2}}{\widetilde{\kappa}_{\gamma_2}}(0) \right\} \sigma(u,u) = \pm 3 \left\{ \kappa_{\gamma_1}(0) - \kappa_{\gamma_2}(0) \right\} J\sigma(u,u)$$

となり, 条件 $\kappa_{\gamma_1}(0) \neq \kappa_{\gamma_2}(0)$ から $\sigma(u,u) = 0$ を得る.

定義 5.1 実 $4n$ 次元のリーマン多様体 (M,g) 上の四元数ケーラー構造 $\mathcal{J}$ とは, 接バンドル TM の自己準同型のバンドルの階数 3 の部分束で, 次の特性をもつものである.

i) 各点 $p \in M$ に対して, p の開近傍 G と次の条件を満たす $\mathcal{J}\,|_G$ の切断 J_1, J_2, J_3 が存在する.

  (a) 各 J_i は G 上のエルミート構造が入り, つまり $J_i^2 = -I$ かつ 任意のベクトル場 X, Y に対して $g(J_iX, Y) + g(X, J_iY) = 0$ を満たす.

  (b) $J_iJ_{i+1} = J_{i+2} = -J_{i+1}J_i \quad (i \bmod 3) \quad i = 1, 2, 3$ の関係をもつ.

ii) M 上の任意のベクトル場 X とバンドル $\mathcal{J}$ の切断 J に対して, $\nabla_X J$ は $\mathcal{J}$ の 切断となる. ただし ∇ はリーマン接続を表す.

定義 5.1 における $\{J_1, J_2, J_3\}$ を $\mathcal{J}$ の基本局所基底という. 基本局所基底に対して G 上の三つの一形式 q_1, q_2, q_3 で任意の局所ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}M$ について

$$\nabla_X J_i = q_{i+2}(X)J_{i+1} - q_{i+1}(X)J_{i+2} \quad (i \bmod 3) \quad i = 1, 2, 3 \tag{5.1}$$

が成り立つものが存在する.

このような四元数ケーラー構造をもつ実 $4n$ 次元のリーマン多様体 $(M, \mathcal{J}, g)$ を**四元数ケーラー多様体**という.

すべての四元数ケーラー等長はめ込みは全測地的であることが知られている ([1]). 実際，四元数ケーラーはめ込み $f:(M,\mathcal{J},g)\to(N,\mathcal{J},h)$ が与えられたとき，すなわち $d\varphi\circ J=J\circ d\varphi$ が任意の $J\in\mathcal{J}$ について成り立つとき，このはめ込みの第二基本形式を調べると，任意のベクトル場 $X\in\mathfrak{X}M$ に対して

$$\sigma(J_iX,J_iX)=-\sigma(X,X)\quad i=1,\,2,\,3$$

となることから，定義 5.1 より

$$\begin{aligned}-\sigma(X,X)&=\sigma(J_{i+2}X,J_{i+2}X)=\sigma(J_iJ_{i+1}X,J_iJ_{i+1}X)\\&=-\sigma(J_{i+1}X,J_{i+1}X)=\sigma(X,X)\quad(i\ mod\ 3)\ i=1,\,2,\,3\end{aligned}$$

となる．よって，任意のベクトル場 $X\in\mathfrak{X}M$ に対して，$\sigma(X,X)=0$ が成り立つことから，f は全測地的であることがわかる．このため定理 5.1 に対応する結果は存在しない．

6　実空間形への階数1の対称空間のはめ込み

この節では，実空間形に埋め込まれたケーラー多様体と四元数ケーラー多様体を位数2の曲線により考察する．一定断面曲率 c をもつ m 次元実空間形を $\mathbb{R}M^m(c)$ と表す．断面曲率は $c>0$, $c=0$, $c<0$ に応じて，$\mathbb{R}M^m(c)$ は m 次元球面 $S^m(c)$, m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$, 実双曲空間 $\mathbb{R}H^m(c)$ を表す．

等長はめ込み $f: M \to \widetilde{M}$ について，第二基本形式のノルム $\|\sigma(u,u)\|$ が単位接ベクトル $u \in T_pM$ の取り方に依存しないとき，O'Neill の意味で $p \in M$ で **isotropic** であるという．また，f が各点で isotropic であるとき，f は **isotropic はめ込み**であるという．isotropic はめ込みに対して，M の各点でのノルム $\|\sigma(u,u)\|$ の関数を λ_f とし，それを **isotropy 関数**という．この関数が一定であるとき，f は **constant isotropic** であるという．つまり，$\|\sigma(u,u)\|$ が点にも単位接ベクトルにも依らないということである．もちろん全臍的はめ込みならば isotropic である．しかし，$\dim(\widetilde{M}) \geq \dim(M)+2$ のときは，逆は成り立たない．また，holomorphic curve を複素一次元のケーラー等長はめ込みと考えると，任意の単位接ベクトル v, $Jv \in T_pM$ に対する平均曲率ベクトルのノルムが $\|\sigma(Jv,Jv)\| = \|-\sigma(v,v)\| = \|\sigma(v,v)\|$ であるから，holomorphic curve は isotropic である．

補題 6.1 T_pM 上の関数 $\varphi: T_pM \to \mathbb{R}$ を $\varphi(u) = \|\sigma(u,u)\|^2$ と定めると，φ の微分は

$$v(\varphi)_u = 4\langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle$$

によって与えられる．これより，f が点 p で isotropic であるための必要十分条件は，任意の正規直交接ベクトルの組 $(u,v) \in T_pM \times T_pM$ に対して $\langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle = 0$ となることである．

定理 6.1 複素次元 n の連結なケーラー多様体 M の実空間形 $\mathbb{R}M^{2n+k}(\tilde{c})$ への等長はめ込み $f : M \to \mathbb{R}M^{2n+k}(\tilde{c})$ を考える．M の各点 p における任意の単位接ベクトル $u \in T_pM$ に対して，次の四つの条件を満たす孤長で径数付けられた滑らかな二つの曲線 $\gamma_i : (-\epsilon, \epsilon) \to M,\ i = 1, 2$ が存在すると仮定する．

i) γ_i は変曲点をもたず，点 $p \in M$ でケーラー的である，

ii) $\gamma_i(0) = p,\ \dot{\gamma}_i(0) = u,\ Y_{\gamma_i}(0) = (-1)^{i-1}Ju,$

iii) $f \circ \gamma_i$ は点 $f(p) \in \mathbb{R}M^{2n+k}(\tilde{c})$ で真の位数 2 である，

iv) $\kappa'_{\gamma_1}(0)/\kappa_{\gamma_1}(0) = \kappa'_{\gamma_2}(0)/\kappa_{\gamma_2}(0).$

このとき，f は平行かつ constant isotropic で局所的に次のいずれかの一つの埋め込みに局所同型である．

(1) 全測地的はめ込み $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n+k}$,

(2) 全臍的はめ込み $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}H^{2n+k}(\tilde{c})$,

(3) 第一標準極小はめ込み

$$f_1 : \mathbb{C}P^n(c) \to S^{n^2+2n+1}((n+1)c/(2n))$$

と全臍的はめ込み

$$f_2 : S^{n^2+2n+1}((n+1)c/(2n)) \to \mathbb{R}M^{2n+k}(\tilde{c})$$

の合成である平行はめ込み $f_2 \circ f_1$．ただし $c \geq 2n\tilde{c}/(n+1)$ である．

証明 条件 i), ii), iii) より，式 (4.1), (4.2), (4.3) を用いると

$$\frac{\widetilde{\kappa}'_{\gamma_i}}{\widetilde{\kappa}_{\gamma_i}}(0)Y_{\gamma_i}(0) = \frac{\kappa'_{\gamma_i}}{\kappa_{\gamma_i}}(0)Y_{\gamma_i}(0) + \frac{1}{\kappa_{\gamma_i}(0)}\left(\|\sigma(u,u)\|^2 u - A_{\sigma(u,u)}u\right), \tag{6.1}$$

$$\frac{\widetilde{\kappa}'_{\gamma_i}}{\widetilde{\kappa}_{\gamma_i}}(0)\sigma(u,u) = (-1)^{i+1}3\kappa_{\gamma_i}(0)\sigma(u,Ju) + (\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u) \tag{6.2}$$

となる．式 (6.1) の両辺に $Y_{\gamma_i}(0)$ との内積をとると

$$\frac{\widetilde{\kappa}'_{\gamma_i}}{\widetilde{\kappa}_{\gamma_i}}(0) = \frac{\kappa'_{\gamma_i}}{\kappa_{\gamma_i}}(0) + \frac{(-1)^i}{\kappa_{\gamma_i}(0)}\langle\sigma(u,u),\sigma(u,Ju)\rangle \tag{6.3}$$

となり，式 (6.2) に代入すると

$$\left\{\frac{\kappa'_{\gamma_1}}{\kappa_{\gamma_1}}(0) - \frac{1}{\kappa_{\gamma_1}(0)}\langle\sigma(u,u),\sigma(u,Ju)\rangle\right\}\sigma(u,u) = 3\kappa_{\gamma_1}(0)\sigma(u,Ju) + (\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u),$$
$$\left\{\frac{\kappa'_{\gamma_2}}{\kappa_{\gamma_2}}(0) + \frac{1}{\kappa_{\gamma_2}(0)}\langle\sigma(u,u),\sigma(u,Ju)\rangle\right\}\sigma(u,u) = -3\kappa_{\gamma_2}(0)\sigma(u,Ju) + (\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u)$$

となる．条件 iv) によって

$$\left\{\frac{1}{\kappa_{\gamma_1}(0)} + \frac{1}{\kappa_{\gamma_2}(0)}\right\}\langle\sigma(u,u),\sigma(u,Ju)\rangle\sigma(u,u) = -3\{\kappa_{\gamma_1}(0)+\kappa_{\gamma_2}(0)\}\sigma(u,Ju)$$

となり

$$\langle\sigma(u,u),\sigma(u,Ju)\rangle\sigma(u,u) = -3\kappa_{\gamma_1}(0)\kappa_{\gamma_2}(0)\sigma(u,Ju) \tag{6.4}$$

となる．この式 (6.4) に $\sigma(u,u)$ との内積をとると

$$\left(3\kappa_{\gamma_1}(0)\kappa_{\gamma_2}(0) + \|\sigma(u,u)\|^2\right)\langle\sigma(u,u),\sigma(u,Ju)\rangle = 0$$

を得る．$\kappa_{\gamma_1}(0)\kappa_{\gamma_2}(0) > 0$ より $\langle\sigma(u,u),\sigma(u,Ju)\rangle = 0$ となり，式 (6.4) によって $\sigma(u,Ju) = 0$ となる．任意の単位接ベクトル $u, v \in T_pM$ に対して，u を $u+v$ と置き換えると

$$\begin{aligned} 0 =& \sigma(u+v, J(u+v)) = \sigma(u,Ju) + \sigma(u,Jv) + \sigma(v,Ju) + \sigma(v,Jv) \\ =& \sigma(Ju,v) + \sigma(u,Jv) \end{aligned}$$

となることから，$\sigma(u,Jv) = -\sigma(Ju,v)$ を得る．M 上の任意のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$(\bar{\nabla}_X\sigma)(Y,JZ) = -(\bar{\nabla}_X\sigma)(JY,Z)$$

が成り立つ．実際，ケーラー多様体であるから

$$\left(\bar{\nabla}_X\sigma\right)(Y,JZ) = \nabla^{\perp}_X\left(\sigma(Y,JZ)\right) - \sigma(\nabla_XY,JZ) - \sigma(Y,J\nabla_XZ)$$

である．ここで $\sigma(Y,JZ)=-\sigma(JY,Z)$ であることを利用すると

$$\begin{aligned}\left(\bar{\nabla}_X\sigma\right)(Y,JZ) &= -\nabla_X^{\perp}\left(\sigma(JY,Z)+\sigma(J\nabla_XY,Z)+\sigma(JY,\nabla_XZ)\right)\\ &= -(\bar{\nabla}_X\sigma)(JY,Z)\end{aligned}$$

となる．

一方で，$\mathbb{R}M^{2n+k}(c)$ は一定断面曲率をもつことから，命題 1.8 とコダッチの方程式 (1.24) より

$$(\bar{\nabla}_X\sigma)(Y,Z)-(\bar{\nabla}_Y\sigma)(X,Z)=(R^{\widetilde{M}}(X,Y)Z)^{\perp}=0$$

を得る．これより

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X\sigma)(Y,Z) &= (\bar{\nabla}_X\sigma)(JY,JZ)=(\bar{\nabla}_{JY}\sigma)(X,JZ)=-(\bar{\nabla}_{JY}\sigma)(JX,Z)\\ &= -(\bar{\nabla}_Z\sigma)(JX,JY)=-(\bar{\nabla}_z\sigma)(X,Y)=-(\bar{\nabla}_X\sigma)(Y,Z)\end{aligned}$$

となり，$(\bar{\nabla}_X\sigma)(Y,Z)=0$ を得るので，f は平行である．

最後に，f が constant isotropic であることを示す．$\langle\sigma(u,u),\sigma(u,Ju)\rangle=0$ だから，式 (6.3) によって，$\widetilde{\kappa}'_{\gamma_i}(0)/\widetilde{\kappa}_{\gamma_i}(0)=\kappa'_{\gamma_i}(0)/\kappa_{\gamma_i}(0)$ となり，式 (6.1) によって $A_{\sigma(u,u)}u=\|\sigma(u,u)\|^2u$ を得る．これより，各点 $p\in M$ での任意の正規直交ベクトルの組 $\{u,v\}\in T_pM$ に対して

$$\langle\sigma(u,u),\sigma(u,v)\rangle=\langle A_{\sigma(u,u)}u,v\rangle=0$$

を得るので，補題 6.1 より，f は各点で isotropic であることがわかる．f が constant isotropic であることを示すためには，M 上の孤長で径数付けられた任意の測地線 c をとる．f は平行であるから

$$\frac{d}{ds}\|\sigma(\dot{c},\dot{c})\|^2 = 2\langle(\bar{\nabla}_{\dot{c}}\sigma)(\dot{c},\dot{c}),\sigma(\dot{c},\dot{c})\rangle\pm4\langle\sigma(\bar{\nabla}_{\dot{c}}\dot{c},\dot{c}),\sigma(\dot{c},\dot{c})\rangle=0$$

となり，$\|\sigma(\dot{c},\dot{c})\|$ は測地線 $c=c(s)$ に沿って一定となる．M の連結性により，f が constant isotropic であることが得られる．以上のことから [11, 36] において分類された結果より，f は局所的にそれぞれ主張したはめ込みの一つに同型である． □

定理 6.2 複素次元nの連結なケーラー多様体Mの実空間形$\mathbb{R}M^{2n+k}(\tilde{c})$への等長はめ込み$f : M \to \mathbb{R}M^{2n+k}(\tilde{c})$について，$f$が全測地的はめ込み$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n+k}$に同型であるための必要十分条件は，各点$p \in M$における任意の単位接ベクトル$u \in T_pM$に対して，次の四つの条件を満たす孤長で径数付けられた滑らかな二つの曲線$\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \to M$が存在することである．

i) γ_1, γ_2は変曲点をもたず，点$p \in M$でケーラー的である，

ii) $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p,\ \dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0) = u,\ Y_{\gamma_1}(0) = Ju, Y_{\gamma_2}(0) = -Ju,$

iii) $f \circ \gamma_1,\ f \circ \gamma_2$ は点$f(p) \in \mathbb{R}M^{2n+k}(\tilde{c})$で真の位数 2 である，

iv) $\kappa'_{\gamma_1}(0)/\kappa_{\gamma_1}(0) = \kappa'_{\gamma_2}(0)/\kappa_{\gamma_2}(0) \neq 0.$

証明 四条件が等長はめ込みfを決定することを示せば十分である．定理6.1とその証明によって，fは平行かつ任意の接ベクトル$u \in TM$に対して，$\sigma(u, Ju) = 0$を満たす．式 (6.3) より，式 (6.2) は$\kappa'_{\gamma_1}(0)\sigma(u, u) = 0$となる．条件 iv) より，$\kappa'_{\gamma_1}(0) \neq 0$だから$\sigma(u, u) = 0$となり，$f$は全測地的となる． □

第二節と同様に，曲線族を考えることで，定理6.1と定理6.2を次のように書き直すことができる．

ケーラー多様体の等長はめ込みを$f : M \to \mathbb{R}M^{2n+k}(\tilde{c})$について，任意の単位接ベクトル$u \in T_pM$に対して, 次の四つの条件を満たす弧長で径数付けられた滑らかな曲線の曲線族を$\mathcal{F}^+(u)$, $\mathcal{F}^-(u)$と定める．

i) 変曲点をもたない，

ii) 初期接ベクトルはuである，

iii) 初期法ベクトルはJuまたは$-Ju$の正定数倍となる，

iv) 外的形状は点$f(p)$で真の位数 2 である．

ただし初期法ベクトル Ju または $-Ju$ に応じて $\mathcal{F}^+(u)$ または $\mathcal{F}^-(u)$ を定める.

この曲線の曲率の対数微分の集合を

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_u^+ &= \{\kappa_\gamma'(0)/\kappa_\gamma(0) \mid \gamma \in \mathcal{F}^+(u)\},\\ \mathcal{A}_u^- &= \{\kappa_\gamma'(0)/\kappa_\gamma(0) \mid \gamma \in \mathcal{F}^-(u)\}\end{aligned}$$

と表し, $\mathcal{A}_u = \mathcal{A}_u^+ \cap \mathcal{A}_u^-$ とおく.

命題 6.1 ケーラー多様体 M の実空間形 $\mathbb{R}M^{2n+k}(\tilde{c})$ への等長はめ込み $f : M \to \mathbb{R}M^{2n+k}(\tilde{c})$ について, 任意の単位接ベクトル $u \in T_pM$ に対して, $\mathcal{A}_u \neq \emptyset$ を仮定すると, 次のいずれかの条件が成り立つ.

(1) 任意の単位接ベクトル u に対して, $\mathcal{A}_u \neq \{0\}$ ならば, f は全測地的かつ $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n+k}$ に同型である. このとき, 任意の単位接ベクトル u に対して, $\mathcal{A}_u = \mathbb{R}$ を満たしている.

(2) $\mathcal{A}_u = \{0\}$ ならば, 定理 6.1 の (2) または (3) のはめ込みに同型となる.

これらの定理は実空間形への四元数ケーラー多様体の等長はめ込みに拡張することができる.

定理 6.3 四元数次元 n (≥ 2) である連結な四元数ケーラー多様体 $(M, \mathcal{J})$ の実空間形 $\mathbb{R}M^{4n+k}(\tilde{c})$ への等長はめ込み $f : M \to \mathbb{R}M^{4n+k}(\tilde{c})$ を考える. M の各点 p における任意の単位接ベクトル $u \in T_pM$ に対して, $\|J^{(i)}\| = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ となる線形独立な $J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)} \in \mathcal{J}_p$ と次の五つの条件を満たす孤長で径数付けられた滑らかな六つの曲線 γ_j $(1 \leq j \leq 6)$ が存在すると仮定する.

i) γ_j は点 p で真の位数 2 である,

ii) $\gamma_j(0) = p,\ \dot{\gamma}_j(0) = u,$

iii) $Y_{\gamma_i}(0) = J^{(i)}u,\ Y_{\gamma_{i+3}}(0) = -J^{(i)}u.$ ただし $1 \leq i \leq 3,$

iv) $f \circ \gamma_j$ は点 $f(p)$ で真の位数 2 である,

v) $\kappa'_{\gamma_i}(0)/\kappa_{\gamma_i}(0) = \kappa'_{\gamma_{i+3}}(0)/\kappa_{\gamma_{i+3}}(0)$. ただし $1 \leq i \leq 3$.

このとき，f は平行かつ constant isotropic で次のいずれかの一つの埋め込みに局所同型である.

(1) 全測地的はめ込み $\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{4n+k}$,

(2) 全臍的はめ込み $\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}H^{4n+k}(\tilde{c})$,

(3) 第一標準極小はめ込み

$$f_1 : \mathbb{H}P^n(c) \to S^{2n^2+3n-1}((n+1)c/(2n))$$

と全臍的はめ込み

$$f_2 : S^{2n^2+3n-1}((n+1)c/(2n)) \to \mathbb{R}M^{4n+k}(\tilde{c})$$

の合成である平行はめ込み $f_2 \circ f_1$. ただし $c \geq 2n\tilde{c}/(n+1)$ である.

証明 定理 6.1 の証明に沿って進めていくと，$\sigma(u, J^{(i)}u) = 0$ を得る．$\{J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}\}$ は $\mathcal{J}_p$ の基底だから，任意の $J \in \mathcal{J}_p$ に対して $\sigma(u, Ju) = 0$ となる．従って，f は平行であることがわかる ([15])．定理 6.1 の証明と同様に u を $u+v$ で置き換えることにより，$\sigma(u, Jv) = -\sigma(Ju, v)$ を得る．四元数ケーラー多様体であるから，式 (5.1) を用いると

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X\sigma)(Y, J_iZ) &= \nabla^\perp_X(\sigma(Y, J_iZ)) - \sigma(\nabla_XY, J_iZ) - \sigma(Y, \nabla_X(J_iZ)) \\
&= \nabla^\perp_X(\sigma(Y, J_iZ)) - \sigma(\nabla_XY, J_iZ) - \sigma(Y, J_i\nabla_XZ) \\
&\qquad - q_{i+2}(X)\sigma(Y, J_{i+1}Z) + q_{i+1}(X)\sigma(Y, J_{i+2}Z) \\
&= -\nabla^\perp_X(\sigma(J_iY, Z)) + \sigma(J_i\nabla_XY, Z) + \sigma(J_iY, \nabla_XZ) \\
&\qquad + q_{i+2}(X)\sigma(J_{i+1}Y, Z) - q_{i+1}(X)\sigma(J_{i+2}Y, Z) \\
&= -\nabla^\perp_X(\sigma(J_iY, Z)) + \sigma(\nabla_X(J_iY), Z) + \sigma(J_iY, \nabla_XZ) \\
&= -(\bar{\nabla}_X\sigma)(J_iY, Z)
\end{aligned}$$

より

$$\left(\bar{\nabla}_X\sigma\right)(Y, J_iZ) = -(\bar{\nabla}_X\sigma)(J_iY, Z) \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

が成り立つ．従って，$J \in \mathcal{J}$ について $\left(\bar{\nabla}_X\sigma\right)(Y, JZ) = -(\bar{\nabla}_X\sigma)(JY, Z)$ が成り立つ．よって，定理 6.1 の証明と同じ方法で $(\bar{\nabla}_X\sigma)(Y, Z) = 0$ を得るので，f は平行である．そして定理 6.1 と同様にして，f は constant isotropic となるので，f は仮定の一つの条件に局所的に同型である ([11, 36]). □

次に，定理 6.2 の証明に沿って進めていくと，ユークリッド空間への四元数ユークリッド空間の全測地的等長はめ込みを特徴付けることができる．

定理 6.4 四元数次元 $n\ (\geq 2)$ である連結な四元数ケーラー多様体 $(M, \mathcal{J})$ の実空間形 $\mathbb{R}M^{4n+k}(\tilde{c})$ への四元数ケーラーはめ込み $f : M \to \mathbb{R}M^{4n+k}(\tilde{c})$ を考える．f が全測地的はめ込み $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{4n+k}$ と同型であるための必要十分条件は，各点 $p \in M$ における任意の単位接ベクトル $u \in T_pM$ に対して，$\|J^{(i)}\| = 1\ (i = 1, 2, 3)$ であるような線形独立な $J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)} \in \mathcal{J}_p$ が存在し，次の四つの条件を満たす孤長で径数付けられた滑らかな六つの曲線 $\gamma_i : (-\epsilon, \epsilon) \to M\ (1 \leq i \leq 6)$ が存在することである．

i) γ_i は変曲点をもたず，点 p で真の位数 2 である,

ii) $\gamma_i(0) = p,\ \dot{\gamma}_i(0) = u,\ Y_{\gamma_i}(0) = J_iu,\ Y_{\gamma_{i+3}}(0) = -J_iu$. ただし $1 \leq i \leq 3$,

iii) $f \circ \gamma_i$ は点 $f(p)$ で真の位数 2 である,

iv) $\kappa'_{\gamma_i}(0)/\kappa_{\gamma_i}(0) = \kappa'_{\gamma_{i+3}}(0)/\kappa_{\gamma_{i+3}}(0)$. ただし $1 \leq i \leq 3$. 更に，ある i に対して $\kappa'_{\gamma_i}(0)/\kappa_{\gamma_i}(0)(= \kappa'_{\gamma_{i+3}}(0)/\kappa_{\gamma_{i+3}}(0)) \neq 0$.

ケーラー等長はめ込みの場合と同様に，定理 6.3, 6.4 を次のように書き直すことができる．四元数ケーラー多様体 M の等長はめ込み $f : M \to \mathbb{R}M^m(\tilde{c})$ について，任意の接ベクトル $u \in T_pM$ と $\|J\| = 1$ を満たす $J \in \mathcal{J}$ に対して，次の四つの条件を満たす孤長で径数付けられた滑らかな曲線族を $\mathcal{F}(u; J)$ と表す．

i) 変曲点をもたない,

ii) 初期接ベクトルは u である,

iii) 初期法ベクトルは Ju の正定数倍となる,

iv) 外的形状 $f \circ \gamma$ は点 $f(p)$ で真の位数 2 である.

この曲線の曲率の対数微分の集合を

$$\mathcal{A}_u = \bigcap_{J \in \mathcal{J},\ \|J\|=1} \left\{ \kappa'_\gamma(0)/\kappa_\gamma(0) \mid \gamma \in \mathcal{F}(u; J) \right\}$$

とおく．定理 6.3, 6.4, [2] の結果から，次の命題を得る.

命題 6.2 四元数ケーラー多様体 $(M, \mathcal{J})$ の等長はめ込みを $f : M \to \mathbb{R}M^m(\tilde{c})$ について，任意の単位接ベクトル $u \in TM$ に対して，$\mathcal{A}_u \neq \emptyset$ を仮定すると，次のいずれか一つの条件が成り立つ.

(1) $\mathcal{A}_u \neq \{0\}$ ならば，f は全測地的かつ $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{4n+k}$ に同型となる．このとき，$\mathcal{A}_u = \mathbb{R}$ となる.

(2) $\mathcal{A}_u = \{0\}$ ならば, f は全臍的はめ込み $\varphi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}H^{4n+k}(\tilde{c})$，または定理 6.3 の iii) に同型となる.

次に，ケーラー多様体や四元数ケーラー多様体の実空間形への等長はめ込みと同様に位数 2 の曲線を用いて実空間形内のケーリー射影平面の部分集合の等長はめ込みの特徴付けを行う．最大断面曲率 c のケーリー射影平面を $\mathbb{O}P^2(c)$ と表す．前節のケーラー多様体や四元数ケーラー多様体と異なり, ケーリー部分多様体が定義されていないことから，$\mathbb{O}P^2(c)$ の部分集合に制限して考察する．それゆえ，次のように曲線の本数を減らすことが可能となる.

定理 6.5 ケーリー射影平面 $\mathbb{O}P^2(c)$ の開部分集合 M から実空間形 $\mathbb{R}M^{16+k}(\tilde{c})$ への等長はめ込み $f : M \to \mathbb{R}M^{16+k}(\tilde{c})$ を考える. M の各点 p における任意の単位接ベクトル $u \in T_pM$ に対して, 主法線ベクトル $v \in T_pM$ が存在し, 次の四つの条件を満たす変曲点をもたない孤長で径数付けられた滑らかな三つの曲線 $\gamma_i : (\epsilon, -\epsilon) \to M$ $(i = 1, 2, 3)$ が存在すると仮定する.

i) $\gamma_i(0) = p,\ \dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0) = u,\ \dot{\gamma}_3(0) = -u,$

ii) $\nabla_{\dot{\gamma}_1}\dot{\gamma}_1(0) = \kappa_{\gamma_1}(0)v,\ \nabla_{\dot{\gamma}_2}\dot{\gamma}_2(0) = -\kappa_{\gamma_2}(0)v,\ \nabla_{\dot{\gamma}_3}\dot{\gamma}_3(0) = \kappa_{\gamma_3}(0)v,$

iii) $f \circ \gamma_i$ は点 $f(p)$ で真の位数 2 である,

iv) $\kappa'_{\gamma_1}(0)/\kappa_{\gamma_1}(0) = \kappa'_{\gamma_2}(0)/\kappa_{\gamma_2}(0) = \kappa'_{\gamma_3}(0)/\kappa_{\gamma_3}(0).$

このとき, はめ込み f は第一標準極小はめ込み

$$f_1 : \mathbb{O}P^2(c) \to S^{25}(3c/4)$$

と全臍的はめ込み

$$f_2 : S^{25}(3c/4) \to \mathbb{R}M^{16+k}(\tilde{c})$$

の合成である平行はめ込み $f_2 \circ f_1$ に局所同型となる. ただし $3c/4 \geq \tilde{c}$ である.

証明　条件ii) を満たし, 外的形状 $f\circ\gamma_i$ は点 $f(p)$ で真の位数2であるから, 式 (4.2), (4.3) は

$$\begin{aligned}(-1)^{i-1}&\kappa_{\gamma_i}(0)\widetilde{\kappa}'_{\gamma_i}(0)v - \widetilde{\kappa}_{\gamma_i}(0)^3u = \\ &\widetilde{\kappa}_{\gamma_i}(0)((-1)^{i-1}\kappa'_{\gamma_i}(0)v - \kappa_{\gamma_i}(0)^2u - A_{\sigma(u,u)}u + \kappa_{\gamma_i}(0)Z_{\gamma_i}(0)) \quad (i = 1, 2),\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{\gamma_3}(0)&\widetilde{\kappa}'_{\gamma_3}(0)v + \widetilde{\kappa}_{\gamma_3}(0)^3u = \\ &\widetilde{\kappa}_{\gamma_3}(0)(\kappa'_{\gamma_3}(0)v + \kappa_{\gamma_3}(0)^2u + A_{\sigma(u,u)}u + \kappa_{\gamma_3}(0)Z_{\gamma_3}(0)),\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\widetilde{\kappa}'_{\gamma_i}(0)\sigma(u,u) = \widetilde{\kappa}_{\gamma_i}(0)\{(-1)^{i-1}3\kappa_{\gamma_i}(0)\sigma(u,v) + (\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u)\} \quad (i = 1, 2), \tag{6.7}$$

$$\widetilde{\kappa}'_{\gamma_3}(0)\sigma(u,u) = \widetilde{\kappa}_{\gamma_3}(0)\{-3\kappa_{\gamma_3}(0)\sigma(u,v) - (\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u)\} \tag{6.8}$$

となる．式 (6.5), (6.6) の両辺に v との内積をとると，

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\kappa}'_{\gamma_i}(0)}{\widetilde{\kappa}_{\gamma_i}(0)} &= \frac{\kappa'_{\gamma_i}(0)}{\kappa_{\gamma_i}(0)} + (-1)^i \frac{1}{\kappa_{\gamma_i}(0)} \langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle \quad (i=1,2), & (6.9)\\ \frac{\widetilde{\kappa}'_{\gamma_3}(0)}{\widetilde{\kappa}_{\gamma_3}(0)} &= \frac{\kappa'_{\gamma_3}(0)}{\kappa_{\gamma_3}(0)} + \frac{1}{\kappa_{\gamma_3}(0)} \langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle & (6.10)\end{aligned}$$

が得られ，それぞれ式 (6.7), (6.8) に代入すると

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\kappa'_{\gamma_i}(0)}{\kappa_{\gamma_i}(0)} + (-1)^i \frac{1}{\kappa_{\gamma_i}(0)} \langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle\right\} \sigma(u,u) \\ &\qquad = +(-1)^{i-1} 3\kappa_{\gamma_i}(0)\sigma(u,v) + (\bar{\nabla}_u \sigma)(u,u) \quad (i=1,2),\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\kappa'_{\gamma_3}(0)}{\kappa_{\gamma_3}(0)} + \frac{1}{\kappa_{\gamma_3}(0)} \langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle\right\} \sigma(u,u) \\ &\qquad = -3\kappa_{\gamma_3}(0)\sigma(u,v) - (\bar{\nabla}_u \sigma)(u,u)\end{aligned} \tag{6.12}$$

を得る．γ_1, γ_2 に対する式 (6.11) の両辺の差をとると $\kappa'_{\gamma_1}(0)/\kappa_{\gamma_1}(0) = \kappa'_{\gamma_2}(0)/\kappa_{\gamma_2}(0)$ であるから

$$-\left\{\frac{1}{\kappa_{\gamma_1}(0)} + \frac{1}{\kappa_{\gamma_2}(0)}\right\} \langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle \sigma(u,u) = 3(\kappa_{\gamma_1}(0) + \kappa_{\gamma_2}(0))\sigma(u,v)$$

となり，$\kappa_{\gamma_1}(0) + \kappa_{\gamma_2}(0) > 0$ であるから

$$\langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle \sigma(u,u) = -3\kappa_{\gamma_1}(0)\kappa_{\gamma_2}(0)\sigma(u,v) \tag{6.13}$$

を得る．両辺に $\sigma(u,u)$ との内積をとると

$$\left(3\kappa_{\gamma_1}(0)\kappa_{\gamma_2}(0) + \|\sigma(u,u)\|^2\right) \langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle = 0$$

となる．$\kappa_{\gamma_1}(0)\kappa_{\gamma_2}(0) > 0$ だから $\langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle = 0$ となり，式 (6.13) により

$$\sigma(u,v) = 0$$

を得る．

γ_1, γ_3 に対する式 (6.11), (6.12) において $\sigma(u,v)=0$ を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\kappa'_{\gamma_1}(0)}{\kappa_{\gamma_1}(0)}\sigma(u,u) &= (\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u),\\ \frac{\kappa'_{\gamma_3}(0)}{\kappa_{\gamma_3}(0)}\sigma(u,u) &= -(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u).\end{aligned}$$

となり，$\kappa'_{\gamma_1}(0)/\kappa_{\gamma_1}(0)=\kappa'_{\gamma_3}(0)/\kappa_{\gamma_3}(0)$ であるから，$(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u)=0$ を得る．

任意の接ベクトル u, v, w に対して，u を $u+v$ に置き換えると，コダッチの方程式 (1.24) により $(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,v)=(\bar{\nabla}_u\sigma)(v,u)$，$(\bar{\nabla}_u\sigma)(v,v)=(\bar{\nabla}_v\sigma)(u,v)$ となり，

$$\begin{aligned}0 =&(\bar{\nabla}_{u+v}\sigma)(u+v,u+v)\\ =&(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,v)+(\bar{\nabla}_u\sigma)(v,u)+(\bar{\nabla}_u\sigma)(v,v)\\ &+(\bar{\nabla}_v\sigma)(u,u)+(\bar{\nabla}_v\sigma)(u,v)+(\bar{\nabla}_v\sigma)(v,u)\\ =&3(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,v)+3(\bar{\nabla}_v\sigma)(u,v)\\ =&(\bar{\nabla}_v\sigma)(u,u)+(\bar{\nabla}_u\sigma)(v,v).\end{aligned}$$

を得る．u を $u+w$ に置き換えると

$$\begin{aligned}0 &= (\bar{\nabla}_v\sigma)(u+w,u+w)+(\bar{\nabla}_{u+w}\sigma)(v,v)\\ &= (\bar{\nabla}_v\sigma)(u,u)+(\bar{\nabla}_v\sigma)(w,w)+2(\bar{\nabla}_v\sigma)(u,w)+(\bar{\nabla}_u\sigma)(v,v)+(\bar{\nabla}_w\sigma)(v,v)\\ &= 2(\bar{\nabla}_v\sigma)(u,w)\end{aligned}$$

となるので，$(\bar{\nabla}_v\sigma)(u,w)=0$ を得られ，f が平行となる．f が平行かつ M は $\mathbb{O}P^2(c)$ の部分集合により，証明を終える ([11, 36])．　□.

注意　各点 $p\in M$ で等長はめ込み $f: M\to \mathbb{R}M^{n+16}(\tilde{c})$ による外的形状 $f(p)$ が位数 2 である $M(\subset \mathbb{O}P^2(c))$ の部分集合 M 上の曲線を γ とする．f は平行であるから，式 (6.7) により，$u=\dot{\gamma}(0)$, $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(0)/\kappa_\gamma(0)$ に対して

$$\widetilde{\kappa}'_\gamma(0)\sigma(u,u)=3\widetilde{\kappa}_\gamma(0)\kappa_\gamma(0)\sigma(u,v)$$

となる．定理6.5の結果により，f は constant isotropic である ([36])．それゆえ，任意の正規直交接ベクトルの組 (u,v) に対して，$\langle\sigma(u,u),\sigma(u,v)\rangle=0$ を得られ，$\widetilde{\kappa}'_\gamma(0)=0$ または $\sigma(u,u)=0$ を得る．ある (結果的に任意の) 単位接ベクトル $u\in T_pM$ に対して，$\sigma(u,u)=0$ ならば，この点で測地的である．f は constant isotropic だから，f は全測地的である．しかし，多様体 M を全測地的多様体として実空間形内に埋め込むことはできないことが知られている．そこで矛盾が生じる． その結果，式 (6.9) より $\kappa'_\gamma(0)=0$ を得る．式 (6.5) より

$$\widetilde{\kappa}_\gamma(0)^2u=\kappa_\gamma(0)^2u+A_{\sigma(u,u)}u-\kappa_\gamma(0)Z_\gamma(0) \tag{6.14}$$

を得る．この式 (6.14) と $Z_\gamma(0)$ との内積をとると，isotropic より，$Z_\gamma(0)=0$ を得る．それゆえ，外的形状 $f\circ\gamma$ が各点で位数2であるならば，γ と $f\circ\gamma$ は円となる．$A_{\sigma(u,u)}u=\|\sigma(u,u)\|^2u$ だから，測地曲率 κ_γ の曲線 γ は式 (4.6) によって

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma&=\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma+\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma))=\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}(\kappa_\gamma Y_\gamma)+\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}(\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma))\\&=\kappa_\gamma\widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}Y_\gamma-A_{\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)}\dot\gamma=-\kappa_\gamma^2\dot\gamma-\|\sigma(\dot\gamma,\dot\gamma)\|^2\dot\gamma\\&=-(\kappa_\gamma^2+H^2)\dot\gamma\end{aligned}$$

を満たす．ただし H は M の平均曲率関数である．$f\circ\gamma$ は測地曲率 $\sqrt{\kappa_\gamma^2+H^2}$ の円である．

7 Isotropic はめ込みと曲線の曲率の対数微分

前節までは曲線が位数 2 であるという性質を保つはめ込みについて考察した．そこでは曲線の対数微分が重要な役割を果たしたので，本節では曲線の曲率の対数微分を保存するという性質を用いて isotropic はめ込みの特徴付けを行う．このとき，M 上の曲線 γ とその外的形状である $\widetilde{M}$ 上の曲線 $\tilde{\gamma}$ の曲率の対数微分を，それぞれ $\kappa'_\gamma/\kappa_\gamma = \ell_\gamma$, $\tilde{\kappa}'_\gamma/\tilde{\kappa}_\gamma = \tilde{\ell}_\gamma$ と表す．

定理 7.1 等長はめ込みを $f : M \to \widetilde{M}$ は isotropic であるとする．その isotropy 関数を λ_f と表す．

(1) 任意の単位接ベクトル $u \in TM$ に対して，初期接ベクトル $\dot{\gamma}(0) = u$ かつ曲線の曲率の対数微分が $\tilde{\ell}_\gamma(0) = \ell_\gamma(0)$ であるような変曲点をもたない滑らかな曲線 $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ が存在する．

(2) 点 $p \in M$ において f が測地的ではないならば，初期接ベクトルが $u \in T_pM$ である滑らかな曲線の曲率の対数微分が f によって保存されるための必要十分条件は，曲率の対数微分が $u(\lambda_f)/\lambda_f(p)$ に一致することである．

(3) 点 $p \in M$ において f が測地的であるならば，変曲点をもたないすべての曲線に対して，曲率の対数微分が f によって保存される．

証明 (1) は (2), (3) の結果である．初期値 $\gamma(0) = p \in M$ かつ初期接ベクトル $\dot{\gamma}(0) = u$ であるような滑らかな曲線 $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ をとる．式 (4.1) により $\tilde{\kappa}_\gamma^2 = \kappa_\gamma^2 + \lambda_f(\gamma)^2$ であるから，両辺を微分すると

$$\tilde{\kappa}'_\gamma \tilde{\kappa}_\gamma = \kappa'_\gamma \kappa_\gamma + \dot{\gamma}\big(\lambda_f\big)\lambda_f(\gamma)$$

を得る．

点 p で測地的であるとき，$\lambda_f(p) = 0$ であるから，$\tilde{\kappa}_\gamma(0) = \kappa_\gamma(0)$ かつ $\tilde{\kappa}'_\gamma(0)\tilde{\kappa}_\gamma(0) = \kappa'_\gamma(0)\kappa_\gamma(0)$ により，$\tilde{\ell}_\gamma(0) = \ell_\gamma(0)$ を得る．よって，点 p で f によってすべての曲線の曲率の対数微分は保存される．よって (3) を得る．

点 p で測地的ではないとき

$$\tilde{\ell}_\gamma(0)-\ell_\gamma(0)=\frac{\tilde{\kappa}'_\gamma(0)\tilde{\kappa}_\gamma(0)}{\tilde{\kappa}_\gamma(0)^2}-\frac{\kappa'_\gamma(0)}{\kappa_\gamma(0)}=\frac{\lambda_f(p)^2}{\kappa_\gamma(0)^2+\lambda_f(p)^2}\left(\frac{u\big(\lambda_f\big)}{\lambda_f(p)}-\frac{\kappa'_\gamma(0)}{\kappa_\gamma(0)}\right)$$

となる．$\tilde{\ell}_\gamma(0)=\ell_\gamma(0)$ であるための必要十分条件は，$\ell_\gamma(0)=u\big(\lambda_f\big)/\lambda_f(p)$ であり (2) を得る． □

等長はめ込み $f:M\to\widetilde{M}$ について，正規直交接ベクトル $u,v\in T_pM$ に対して, 次の条件を満たす滑らかな曲線族を $\mathcal{G}_f(u,v)$ と定める．

i) $\dot\gamma(0)=u,\ \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0)/\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0)\|=v$

ii) $\tilde{\ell}_\gamma(0)=\ell_\gamma(0)$

ただし曲線は原点を含む区間で定義されていて，原点に対応する点は変曲点ではないものとする．

曲率の対数微分の集合を

$$\mathcal{B}_f(u,v)=\big\{\ell_\gamma(0)\ \big|\ \gamma\in\mathcal{G}_f(u,v)\big\},$$
$$\mathcal{B}_f(u)=\bigcup\big\{\mathcal{B}_f(u,v)\ \big|\ v\in T_pM,\ v\perp u\big\}$$

とおく．f が isotropic であるとき, 定理 7.1 より任意の正規直交接ベクトルの組に対して，$\mathcal{B}_f(u,v)\neq\emptyset$ を満たし，点 p で測地的であれば，$\mathcal{B}_f(u,v)=\mathbb{R}$ を満たす．また，点 p で測地的ではないならば，$\mathcal{B}_f(u)$ は一つの値から成る．次にこの値が $u\big(\lambda_f\big)/\lambda_f(p)$ に一致することを述べる．

isotropic 等長はめ込みが曲率の対数微分を保存することを述べたが，次にこの逆である，曲率の対数微分を保存する等長はめ込みが isotropic であることを示す．

定理 7.2 等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ について，次の条件は点 $p \in M$ において互いに同値である.

(1) f は点 p で isotropic である.

(2) 任意の正規直交接ベクトルの組 $(u, v) \in T_pM \times T_pM$ に対して

$$\nabla_{\dot\gamma_1}\dot\gamma_1(0) \neq \nabla_{\dot\gamma_2}\dot\gamma_2(0),\ \ell_{\gamma_1}(0) = \ell_{\gamma_2}(0)$$

を満たす二つの滑らかな曲線 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}_f(u, v) \cup \mathcal{G}_f(u, -v)$ が存在する.

注意 定理 7.2 の条件 (2) について述べる.

(1) $\gamma_1 \in \mathcal{G}_f(u, v)$, $\gamma_2 \in \mathcal{G}_f(u, -v)$ の条件と, $\mathcal{B}_f(u, v) \cap \mathcal{B}_f(u, -v) \neq \emptyset$ は同値である.

(2) $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}_f(u, v)$ または $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}_f(u, -v)$ のとき, $\kappa_{\gamma_1}(0) \neq \kappa_{\gamma_2}(0)$ の条件が必要である.

命題 7.1 等長はめ込み $f : (M, g) \to (\widetilde{M}, h)$ が点 p において isotropic であるための必要十分条件は, 点 p における任意の正規直交接ベクトルの組 $(u, v) \in T_pM \times T_pM$ に対して $\mathcal{B}_f(u, v) \cap \mathcal{B}_f(u, -v) \neq \emptyset$ となることである.

補題 7.1 変曲点をもたない曲線 γ の曲率の対数微分と外的形状の曲率の対数微分は

$$\begin{aligned}\kappa_\gamma^2(\tilde\ell_\gamma - \ell_\gamma) + \tilde\ell_\gamma\|\sigma(\dot\gamma, \dot\gamma)\|^2 &= \widetilde{\kappa}_\gamma^2(\tilde\ell_\gamma - \ell_\gamma) + \ell_\gamma\|\sigma(\dot\gamma, \dot\gamma)\|^2 \\ &= \big\langle \big(\bar\nabla_{\dot\gamma}\sigma\big)(\dot\gamma, \dot\gamma), \sigma(\dot\gamma, \dot\gamma)\big\rangle + 2\big\langle \sigma\big(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma\big), \sigma(\dot\gamma, \dot\gamma)\big\rangle\end{aligned}$$

を満たす,

証明 式 (4.1) の両辺を微分すると

$$\tilde\kappa'_\gamma\tilde\kappa_\gamma = \kappa'_\gamma\kappa_\gamma + \langle(\bar\nabla_{\dot\gamma}\sigma)(\dot\gamma, \dot\gamma), \sigma(\dot\gamma, \dot\gamma)\rangle + 2\langle\sigma(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma), \sigma(\dot\gamma, \dot\gamma)\rangle \tag{7.1}$$

が得られ, $\kappa'_\gamma/\kappa_\gamma = \ell_\gamma$, $\tilde\kappa'_\gamma/\tilde\kappa_\gamma = \tilde\ell_\gamma$, 式 (4.1) を代入すると, 補題が得られる. □

系 7.1 等長はめ込み $f: M \to \widetilde{M}$ について，ある整数 $k(>0)$ と任意の正規直交接ベクトルの組 $(u,v) \in T_pM \times T_pM$ に対して，測地曲率 $\kappa_\gamma(0) = k$ をもつ滑らかな曲線 $\gamma \in \mathcal{G}_f(u,v)$ が存在する．特に，$\mathcal{B}_f(u,v) \neq \emptyset$ となる．

証明 補題 7.1 により，$\sigma(u,u) = 0$ であれば，$\kappa_\gamma^2(\tilde{\ell}_\gamma - \ell_\gamma) = 0$ となることから，$\dot{\gamma}(0) = u$, $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}(0)/\|\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\| = v$ となる任意の曲線 γ は $\gamma \in \mathcal{G}_f(u,v)$ である．従って，$\mathcal{B}_f(u,v) = \mathbb{R}$ となる．また，$\sigma(u,u) \neq 0$ であれば，$\tilde{\ell}_\gamma(0) = \ell_\gamma(0)$ となるための必要十分条件は

$$\ell_\gamma(0) = \frac{\langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u)\sigma(u,u)\rangle + 2k\langle\sigma(u,v),\sigma(u,u)\rangle}{\|\sigma(u,u)\|^2}$$

を満たすことである．このような曲線は存在するので，$\mathcal{G}_f(u,v) \neq \emptyset$ である．以上より

$$\mathcal{B}_f(u,v) = \begin{cases} \mathbb{R} & \sigma(u,u) = 0, \\ \left\{ \dfrac{\langle(\bar{\nabla}_u\sigma)(u,u)\sigma(u,u)\rangle + 2k\langle\sigma(u,v),\sigma(u,u)\rangle}{\|\sigma(u,u)\|^2} \right\} & \sigma(u,u) \neq 0 \end{cases}$$

であり，特に，$\mathcal{B}_f(u,v) \neq \emptyset$ である． □

従って，定理 7.2 の必要不可欠な仮定条件は $\ell_{\gamma_1}(0) = \ell_{\gamma_2}(0)$ であることがわかる．

定理 7.2 の証明 f が点 p で isotropic であるとき，任意の $u \in T_pM$ に対して補題 7.1 により，$\dot{\gamma}(0) = u$ となる任意の曲線 γ は

$$\tilde{\kappa}_\gamma^2(0)\big(\tilde{\ell}_\gamma(0) - \ell_\gamma(0)\big) + \ell_\gamma(0)\|\sigma(u,u)\|^2 = \big\langle\big(\bar{\nabla}_u\sigma\big)(u,u),\sigma(u,u)\big\rangle$$

を満たす．$\sigma(u,u) = 0$ ならば，任意の曲線 γ に対して，$\tilde{\ell}_\gamma(0) = \ell_\gamma(0)$ となる．$\sigma(u,u) \neq 0$ ならば

$$\ell_\gamma(0) = \big\langle\big(\bar{\nabla}_u\sigma\big)(u,u),\sigma(u,u)\big\rangle\|\sigma(u,u)\|^{-2}$$

となる任意の曲線 γ に対して $\tilde{\ell}_\gamma(0) = \ell_\gamma(0)$ となる．このように，条件 (2) が成り立つ．

一方で，条件 (2) が成り立つと仮定する．任意の正規直交接ベクトルの組 (u,v) に対して，二つの曲線 γ_1, γ_2 は仮定条件を満たしているとする．補題 7.1 の等式によって

$$\ell_{\gamma_i}(0)\,\|\sigma(u,u)\|^2 = \big\langle\big(\bar{\nabla}_u\sigma\big)(u,u),\sigma(u,u)\big\rangle \pm 2\kappa_{\gamma_i}(0)\,\langle\sigma(u,u),\sigma(u,v)\rangle \qquad i = 1,2$$

を満たす．ただし二つの符号は

$$\nabla_{\dot{\gamma}_i}\dot{\gamma}_i(0)/\|\nabla_{\dot{\gamma}_i}\dot{\gamma}_i(0)\| = \pm v$$

に応じて，正または負となる．$\nabla_{\dot{\gamma}_1}\dot{\gamma}_1(0) \neq \nabla_{\dot{\gamma}_2}\dot{\gamma}_2(0)$ であるから，$\langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle = 0$ となり，f は点 p で isotropic となる． $\square$

次に，等長はめ込みについて測地的であることを特徴付けることができる．

命題 7.2 等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ について，次の二つの条件は点 $p \in M$ において互いに同値である．

(1) f は点 p で測地的である．

(2) 任意の正規直交接ベクトルの組 $(u, v) \in T_pM \times T_pM$ に対して

i) $\ell_{\gamma_1}(0) = \ell_{\gamma_2}(0)$ を満たす二つの曲線 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}_f(u,v) \cup \mathcal{G}_f(u,-v)$ は

$$\nabla_{\dot{\gamma}_1}\dot{\gamma}_1(0) \neq \nabla_{\dot{\gamma}_2}\dot{\gamma}_2(0)$$

を満たす，

ii) $\mathcal{B}_f(u)$ は少なくとも二つの値を含む．

命題 7.2 の条件を強めると

命題 7.3 等長はめ込み $f : (M, g) \to (\widetilde{M}, h)$ が点 p において測地的であるための必要十分条件は，点 p における任意の正規直交接ベクトルの組 $(u, v) \in T_pM \times T_pM$ に対して

(1) $\mathcal{B}_f(u,v) \cap \mathcal{B}_f(u,-v) \neq \emptyset$,

(2) $\mathcal{B}_f(u)$ は複数の値を含む

を満たすことである．

命題 7.2 の証明 f が点 p で測地的であるならば，任意の接ベクトル $u \in T_pM$ に対して $\sigma(u,u) = 0$ だから，補題 7.1 により，$\gamma(0) = p, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0) \neq 0$ を満たす任意の曲線 γ に対して，$\tilde\ell_\gamma(0) = \ell_\gamma(0)$ が成り立つ．従って条件 (2) が成り立つ．

逆に，条件 (2) が成り立つならば，定理 7.2 により，f が点 p で isotropic であることがわかる．また定理 7.2 の証明により，任意の正規直交接ベクトルの組 $(u,v) \in T_pM \times T_pM$ に対して，$\langle \sigma(u,u), \sigma(u,v) \rangle = 0$ を得る．

系 7.1 により，$\mathcal{B}_f(u) \neq \emptyset$ だから，$\mathcal{B}_f(u)$ の異なる値 $\ell_{\gamma_3}(0), \ell_{\gamma_4}(0)$ をもつ二つの曲線 $\gamma_3, \gamma_4 \in \bigcup\{\mathcal{F}(u,v) \mid v \in T_pM,\ v \perp u\}$ をとることができる．

補題 7.1 より

$$\ell_{\gamma_3}(0)\, \|\sigma(u,u)\|^2 = \langle (\bar\nabla_u \sigma)(u,u), \sigma(u,u) \rangle = \ell_{\gamma_4}(0)\, \|\sigma(u,u)\|^2$$

となり，$\sigma(u,u) = 0$ が得られ，点 p で測地的となる． □

ここで前田氏が円の外形状により特徴付けた constant isotropic 等長はめ込みについて述べる ([14])．f が点 p で isotropic であるとする．γ が点 $\gamma(0)$ で $\dot\gamma(0) = u \in T_pM$ かつ $\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0)\| = k\,(>0)$ を満たし，その曲率の対数微分が 0 であるとき，従って，特に γ が $\dot\gamma(0) = u$ を満たす曲率 κ の円であるとき，補題 7.1 によって

$$\tilde\ell_\gamma(0) = \frac{\left\langle (\bar\nabla_u \sigma)(u,u), \sigma(u,u) \right\rangle}{\kappa^2 + \|\sigma(u,u)\|^2}$$

を満たす．従って，$\tilde\ell_\gamma(0) = 0$ ならば $\left\langle (\bar\nabla_u \sigma)(u,u), \sigma(u,u) \right\rangle = 0$ となり，$u(\lambda_f) = 0$ である．よって，次の系が得られる．

系 7.2 **([14])** リーマン多様体 $\widetilde{M}$ への連結なリーマン多様体 M の等長はめ込み $f : M \to \widetilde{M}$ が constant isotropic であるための必要十分条件は，各点 $p \in M$ で任意の正規直交接ベクトルの組 $(u,v) \in T_pM \times T_pM$ に対して，$\dot\gamma(0) = u, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0)/\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0)\| = v$ を満たす正の測地曲率をもつ円 γ が外的形状でも一定な測地曲率をもつことである．

このように，我々の結果は前田氏の constant isotropic 等長はめ込みの特徴付けの拡張になっていることがわかる．部分多様体が超曲面である場合は次のような系になる．

系 7.3 $\widetilde{M}$ の超曲面 M が全臍的であるための必要十分条件は，M の各点 p における任意の正規直交接ベクトルの組 (u,v) に対して $\mathcal{B}_f(u,v)\cap\mathcal{B}_f(u,-v)\neq\emptyset$ となることである.

系 7.4 $\widetilde{M}$ への連結な超曲面 M の等長はめ込み f について，f が extrinsic sphere であるための必要十分条件は，M の各点 p における任意の正規直交接ベクトルの組 (u,v) に対して M 上の曲線 γ が $\dot\gamma(0)=u$, $Y_\gamma(0)=v$ をもつような円で $\widetilde{M}$ の外的形状 $f\circ\gamma$ でも一定な測地曲率をもつことである.

注意 系 7.2, 7.4 における γ が円であり，外的形状 $f\circ\gamma$ が一定な測地曲率をもつという条件は $\tilde{\ell}(0)=\ell(0)=0$ を満たすような変曲点をもたない滑らかな曲線の一点の条件に弱めることができる.

命題 7.1, 7.3 は系 7.2 に対応させて $\mathcal{B}_f(u,v)$ と $\mathcal{B}_f(u,-v)$ との情報を述べているのでわかりにくくなっている面がある．そこで，はめ込みによって保たれる曲率の対数微分の量という観点で見直しをすると，次のようになる.

定理 7.3 等長はめ込み $f:M\to\widetilde{M}$ について

(1) f が点 $p\in M$ において isotropic であり, 測地的でないための必要十分条件は，任意の接ベクトル $u\in T_pM$ に対して，$\mathcal{B}_f(u)$ は一つの値から成る.

(2) f が点 $p\in M$ において測地的であるための必要十分条件は，ある T_pM の正規直交基底 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ で $\mathcal{B}_f(u_i,u_j)=\mathbb{R}$ $(i\neq j)$ を満たすものが存在する.

次に，ケーラー多様体に対して曲率の対数微分を保つはめ込みを考察する．ケーラー等長はめ込み $f:(M,J,g)\to(\widetilde{M},J,h)$ に対して

$$\mathcal{G}_f^c(u)=\mathcal{G}(u,Ju)\cup\mathcal{G}(u,-Ju),$$
$$\mathcal{B}_f^c(u)=\left\{\ell_\gamma(0)\;\middle|\;\gamma\in\mathcal{G}_f^c(u)\right\}$$

とおく．f の第二基本形式は $\sigma(u,Jv)=J\sigma(u,v)$ を満たし，$\langle\sigma(u,u),\sigma(u,Ju)\rangle=\langle\sigma(u,u),J\sigma(u,u)\rangle=0$ より，定理 7.3 は以下のようにいい替えられる.

定理 7.4 ケーラー等長はめ込み $f:(M,J,g)\to(\widetilde{M},J,h)$ が点 $p\in M$ において測地的であるための必要十分条件は，任意の単位接ベクトル $u\in T_pM$ に対して，$\mathcal{B}^c_f(u)$ が複数の値を含むことである．

従って，全測地的ケーラー等長はめ込みは以下のように特徴付けられる．

系 7.5 ケーラー等長はめ込み $f:(M,J,g)\to(\widetilde{M},J,h)$ が全測地的であるための必要十分条件は，任意の単位接ベクトル $u\in TM$ に対して，$\mathcal{B}^c_f(u)$ が複数の値を含むことである．

定理 7.4 の証明　f がケーラーはめ込みであるから，補題 7.1 より，$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma(0)//J\dot\gamma(0)$ を満たす任意の曲線 γ に対して，$\dot\gamma(0)=u$ とすると

$$\tilde\kappa_\gamma(\tilde\ell_\gamma(0)-\ell_\gamma(0))+\ell_\gamma\|\sigma(u,u)\|^2=\langle(\bar\nabla_u\sigma)(u,u),\sigma(u,u)\rangle$$

を満たす．特に，$\gamma\in\mathcal{G}^c_f(u)$ であれば

$$\ell_\gamma(0)\|\sigma(u,u)\|^2=\langle(\bar\nabla_u\sigma)(u,u),\sigma(u,u)\rangle$$

であるから，$\sigma(u,u)=0$ であることと $\mathcal{B}^c_f(u)$ が複数値とることは同値である．　□

注意　$\mathcal{B}^c_f(u)$ の条件に対して，各点 p で T_pM の $\mathbb{C}$ − 基底 $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ を調べれば十分であることがわかる．

命題 7.2 において $\sigma(u,u)=0$ であるための必要十分条件は，曲線の曲率の対数微分が保存される等長はめ込みの下で $\mathcal{B}_f(u)$ が少なくとも二つの値をとることであった．ここで $\mathcal{B}_f(u)$ が一つの値をとる場合において考察する．isotropic 等長はめ込みを $f:M\to\widetilde{M}$ とする．ある単位接ベクトル (結果的には isotropic であることから，任意の単位接ベクトル) $u\in T_pM$ に対して，$\mathcal{B}_f(u)$ が一つの値をとるような点 p の集合を M_f とおく．f の isotropy 関数 λ_f を用いると，定理 7.3 により，M_f は non-totally geodesic part $\{p\in M\mid\lambda_f(p)\neq0\}$ に一致する．

曲線$\gamma \in \mathcal{G}_f(u)$に対して，$M_f$上に一形式$\omega$を

$$\omega(v) = \begin{cases} \|v\|\ell_{\gamma_i}(0) & v \neq o, \\ 0 & v = 0 \end{cases}$$

と定める．$\gamma \in \mathcal{G}_f(u)$に対して，$\rho(t) = \gamma(-t)$によって与えられる曲線$\rho$が，$\mathcal{G}_f(-u)$に含まれることは明らかであり，その結果，$\omega$はwell-definedである．$M_f$上で$\bar{\omega} = \omega$，$M \setminus M_f$上を$\bar{\omega} = 0$と定義することにより，$\omega$を$M$上の一形式$\bar{\omega}$に拡張することができる．補題7.1により，任意の接ベクトル$v \in T_pM$に対して

$$\lambda_f(p)\bar{\omega}(v) - (\nabla_v\lambda_f)_p = 0$$

を得る．

命題 7.4 等長はめ込み$f : M \to \widetilde{M}$について，次の二つの条件が互いに同値である．

(1) 一形式ωをもつ各点$p \in M$における任意の接ベクトル$u \in T_pM$に対して，$\lambda_f(p)\bar{\omega}(v) - (\nabla_v\lambda_f)_p = 0$を満たすisotropy関数$\lambda_f$をもつ$f$はisotropicである．

(2) 各点$p \in M$における任意の正規直交接ベクトルの組$(u, v) \in T_pM \times T_pM$に対して，$\mathcal{B}_f(u, v) \cap \mathcal{B}_f(u, -v) \neq \emptyset$を満たす．

証明 上の議論と系7.2より条件(2)が条件(1)を導くことがわかる．ここで逆を示す：原点で測地曲率が$\omega(\dot{\gamma}(0))$であるような変曲点をもたない任意の滑らかな曲線γをとる．fは点$p = \gamma(0)$でisotropicであるから，補題7.1より

$$\begin{aligned} \kappa_\gamma^2(0)(\tilde{\ell}_\gamma(0) - \ell_\gamma(0)) &= -\tilde{\ell}(0)\dot{\lambda}_f^2(p) + (\lambda_f(p)(\nabla_{\dot{\gamma}}\lambda_f))_p \\ &= \lambda_f(p)(-\lambda_f(p)\omega(\dot{\gamma}(0)) + (\nabla_{\dot{\gamma}}\lambda_f))_p = 0 \end{aligned}$$

となる．$\dot{\gamma}(0)$に直交する任意の単位接ベクトルvに対して，$\omega(\dot{\gamma}(0)) \in \mathcal{B}_f(\dot{\gamma}(0), v)$を満たす． □

$\varphi = \log \lambda_f$ とおくと，$\lambda_f(p)\bar{\omega}(v) - (\nabla_v \lambda_f)_p = 0$ が成り立つことから，ω は M_f 上で $\omega = d\varphi$ であり，M_f 上の完全微分形式 ω となることがわかる．

f が埋め込みの場合，M_f の周りにチューブ $\widetilde{M}_f$ 上に滑らかに拡張した φ により，計量を M_f 上は $\hat{g} = e^{2\varphi}g$，$\widetilde{M}_f$ 上は $\hat{h} = e^{2\varphi}h$ とおきかえることで，等長はめ込み $f : (M_f, \hat{g}) \to (\widetilde{M}_f, \hat{h})$ は constant isotropic となる．

8 ベロネーゼ埋め込み

isotropic はめ込みでの条件を用いて，測地球上のある曲線の外的形状により実空間形の特徴付けを行うことができ，また [15, 28] の結果により，ベロネーゼ埋め込みの特徴付けを命題 7.1 の応用として得ることができる．

実空間形内の測地球面は半径が単射半径より小さいならば，extrinsic sphere となることが知られている．実空間形は [9] によって特徴付けられている．次元が二以上のリーマン多様体が局所的に実空間形に同型であるための必要十分条件は，十分小さな半径のすべての測地球面が臍的であることである．従って，系 7.2 を用いることで，次の定理を得られる．

定理 8.1 次元が二以上のリーマン多様体 M がある実空間形と局所同型であるための必要十分条件は，各点 $p \in M$ で十分小さな半径 r をもつすべての測地球 $S_r(p)$ に対して，任意の点 $q \in S_r(p)$ における任意の正規直交接ベクトルの組 (u, v) に対して

$$\mathcal{B}_f(u, v) \cap \mathcal{B}_f(u, -v) \neq \emptyset$$

を満たすことである．

一定正則断面曲率 c の複素 n 次元ケーラー多様体を $\mathbb{C}M^n(c)$ と表す．この多様体 $\mathbb{C}M^n(c)$ は，$c > 0$ の場合は複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ と，$c = 0$ の場合は複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ と，また $c < 0$ の場合は複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ とそれぞれ局所同型 (つまり，局所正則等長) となる．

同次座標を利用して

$$\mathbb{C}P^n(c) \ni [z_i]_{0 \leq i \leq n} \mapsto \left[\sqrt{k!/(k_0! \cdots k_n!)}\, z_0^{k_0} \cdots z_n^{k_n}\right]_{k_0 + \cdots + k_n = k} \in \mathbb{C}P^{m(k)}(kc)$$

ただし $m(k) = (n+k)!/(n!k!) - 1$, として与えられる正則断面曲率 c の複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ の複素射影空間へのケーラー等長はめ込み $f_k : \mathbb{C}P^n(c) \to \mathbb{C}P^{m(k)}(kc)$ を $\boldsymbol{k}$ **次ベロネーゼ埋め込み**という．これは一定な isotropy 関数 $\lambda_f \equiv c(k-1)/2$ の constant isotropic 埋め込みである．また，このはめ込みは充満である．つまり，像が全測地的部分多様体 $\mathbb{C}P^{m(k)-1}$ に含まれない．

ここで複素空間形の複素空間形へのケーラー等長はめ込みの定理を思い起こす．

定理 8.2 **([20])** 一定な正則断面曲率 c のケーラー多様体の一定な正則断面曲率 $\tilde{c}$ のケーラー多様体へのケーラー等長はめ込み $f:\mathbb{C}M^n(c)\to\mathbb{C}M^N(\tilde{c})$ について，次の条件が成り立つ．

(1) $\tilde{c}\leq 0$ のとき, はめ込み f は全測地的である．

(2) $\tilde{c}>0$ のとき, $c>0$ と $\tilde{c}=kc$ となるような正の整数 k が存在し，f は局所的にケーラー埋め込み

$$\iota\circ f_k:\mathbb{C}P^n(\tilde{c}/k)\xrightarrow{f_k}\mathbb{C}P^{m(k)}(\tilde{c})\xrightarrow{\iota}\mathbb{C}P^N(\tilde{c})$$

に同型となる．ただし f_k は k 次ベロネーゼ埋め込みであり ι は全測地的ケーラー埋め込みとする．

定理 8.3 **(Schur の補題・複素版)** M が複素二次元以上の連結なケーラー多様体とする．M の各点 p で T_pM の任意の複素一次元部分空間に対する正則断面曲率が定数ならば，M の正則断面曲率は点にも依らず一定である．特に，M が完備単連結であれば M は複素空間形となる．

定理 7.2，命題 7.1 とこれらの定理を用いることで, ある曲線の曲率の対数微分を保存する特性により，$n\geq 2$ のベロネーゼ埋め込みを特徴付けることができる．

前田氏 ([28]) により，円の外的形状によるベロネーゼ埋め込みの特徴付けが与えられているが，一定な測地曲率の円を考察する必要性はなく，滑らかな曲線の外的形状によってベロネーゼ埋め込みを特徴付ける．

定理 8.4 複素次元 $n\geq 2$ のケーラー多様体 M の一定な正則断面曲率 $\tilde{c}$ のケーラー多様体への全測地的ではないケーラー等長はめ込み $f:M\to\mathbb{C}M^N(\tilde{c})$ について，f が充満はめ込みであるとき，次の三つの条件は互いに同値である．

(1) ある正の整数kに関して$N = m(k)$となり, $\mathbb{C}M^N(\tilde{c})$は$\mathbb{C}P^{m(k)}(\tilde{c})$に局所同型(従って, $\tilde{c} > 0$)である. Mは$\mathbb{C}P^n(\tilde{c}/k)$に局所同型であり, fはk次ベロネーゼ埋め込みf_kに局所同型である.

(2) Mの任意の正規直交接ベクトルの組(u, v)に対して$\nabla_{\dot{\gamma}_1}\dot{\gamma}_1(0) \neq \nabla_{\dot{\gamma}_2}\dot{\gamma}_2(0)$を満たし, $\ell_{\gamma_1}(0) = \ell_{\gamma_2}(0)$となる二つの滑らかな曲線$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}_f(u, v) \cup \mathcal{G}_f(u, -v)$が存在する.

(3) Mの任意の正規直交接ベクトルの組(u, v)に対して, $\mathcal{B}_f(u, v) \cap \mathcal{B}_f(u, -v) \neq \emptyset$である.

証明 ベロネーゼ埋め込みf_kは全測地的ではないconstant isotropic 埋め込みであるから, $\mathcal{B}_{f_k}(u, v) = \{0\}$かつ二つの円をとると, 条件(2)が成り立つ.

一方で, fが条件(2)を満たすならば, 定理7.2によってfがisotropicであることがわかる. ガウスの方程式(1.21)により, 接ベクトル$u \in T_pM \subset T_p\widetilde{M}$によって生成される$M$および$\widetilde{M} = \mathbb{C}M^n(\tilde{c})$の一次元複素ベクトル空間の正則断面曲率$H_M(u), H_{\widetilde{M}}(u)$は

$$\begin{aligned}\tilde{c} = H_{\widetilde{M}}(u) &= H_M(u) + \langle \sigma(u, Ju), \sigma(Ju, u) \rangle - \langle \sigma(u, u), \sigma(Ju, Ju) \rangle \\ &= H_M(u) + 2\|\sigma(u, u)\|^2\end{aligned}$$

という関係を満たす. このように, $H_M(u) = \tilde{c} - 2\lambda_f(p)^2$は$u \in T_pM$に依存しない. 複素空間形におけるSchurの補題により正則断面曲率は点にも依存せず一定である. よって, Mは複素空間形に局所同型である. □

定理8.4に関して$n = 1$のときに拡張することはできない. ケーラー多様体$\widetilde{M}$上の任意のholomorphic curve $f : M \to \widetilde{M}$に対して

$$\langle \sigma(u, u), \sigma(u, Ju) \rangle = \langle \sigma(u, u), J\sigma(u, u) \rangle = 0$$

でるから, isotropicである. Mの正則断面曲率は一般に一定ではないので, $n = 1$の場合に対して定理8.4が成り立たない例がある. 定理8.4の証明を見ると, Schurの補

題を適用せずにすませることができれば，$n=1$ の場合に対しても成立することがわかる．つまり，f が constant isotropic であることを示すことができれば，$n=1$ を含む結果が得られる．p.74 の注意により，定理 8.4 の (2) の条件を，曲率の対数微分が 0 である曲線に関する条件に置き換えると，次のようになる．

命題 8.1 複素次元 $n \geq 1$ のケーラー多様体 M の等長はめ込み $f : M \to \mathbb{C}M^N(\tilde{c})$ $(\tilde{c} > 0)$ が充満はめ込みであるとき，次の二つの条件は互いに同値である．

(1) はめ込み f はある正の整数 k に対して，k 次ベロネーゼ埋め込み $f_k : \mathbb{C}P^n(\tilde{c}/k) \to \mathbb{C}P^{m(k)}(\tilde{c})$ に局所同型である．

(2) M の任意の正規直交接ベクトルの組 (u, v) に対して，$\nabla_{\dot{\gamma}_1}\dot{\gamma}_1(0) \neq \nabla_{\dot{\gamma}_2}\dot{\gamma}_2(0)$ を満たす 0 の曲率の対数微分をもつ二つの滑らかな曲線 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{G}_f(u, v) \cup \mathcal{G}_f(u, -v)$ が存在する．

この命題は，前田氏 ([14]) による円を用いたベロネーゼ埋め込みの特徴付けの曲率の対数微分を用いた見直しになる．

最後に，複素射影空間，複素ユークリッド空間，複素双曲空間の一つである複素空間形内の複素超曲面について述べる．複素空間形内の平行な第二基本形式をもつ複素超曲面は全測地的であるか，または複素射影空間内の complex quadric に局所同型であるかのいずれかが成り立つことが知られている ([19, 28])．

定理 8.5 複素空間形内の複素超曲面 M が全測地的であるか，または complex quadric に局所同型であるかのいずれかが成り立つための必要十分条件は，M の任意の単位接ベクトル u に対して，$\dot{\gamma}(0) = u$ となる測地線 γ が存在するか，または $\dot{\gamma}(0) = u$, $Y_\gamma(0) /\!/ Ju$ の円 γ で外的形状でも一定な測地曲率をもつ曲線が存在するかのいずれかが成り立つことである．

謝辞

本研究にあたり名古屋工業大学大学院（情報工学専攻情報数理分野）の足立 俊明教授にはご多忙の中、丁寧かつ熱心なご指導とご鞭撻を賜りました。心より深く感謝致します。そして、博士後期課程修了に至るまで陰ながら支えてくださいました家族である杉山 広、杉山 博子、杉山 賢、木山 幸子ならびに友人、すべての人に深く感謝致します。

参考文献

[1] D.V. Alekseevsky and S. Marchafava, *Almost complex submanifolds of quaternionic manifolds*, Steps in Differential Geometry, Proceedings of the Colloquium on Differential Geometry. (2000), 23–38.

[2] T. Adachi, S. Maeda and K. Ogiue, *Extrinsic shape of circles and standard imbeddings of projective spaces*, manuscript math. 93(1997), 267–272.

[3] T. Adachi and T. Sugiyama , *A characterization of isotropic immersions by extrinsic shapes of smooth curves*, Differential Geometry and its applications. 26(2008), 307–312.

[4] R. Bryant, *Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the* 4-*sphere*, J. Diff. Geom. 17(1982), 455–473.

[5] J. Cheeger and D.G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland Mathematical Library. (1975)

[6] B. -Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, Pure and aplied mathematics. (1975)

[7] B. -Y. Chen, *Surfaces with parallel normalized mean curvature vector*, Monatsh Math. 90(1980), 185–194.

[8] B. -Y. Chen, *Geometry submanifolds and its application*, Tokyou. Sience Univ.

[9] B. -Y. Chen L. Vanhecke, *Differential geometry of geodesic spheres*, J. Reine Angew. Math. 325(1981), 28–67.

[10] U. Dursun, *Null* 2-*type submanifold of Euclidean space* E^6 *with parallel normalized mean curvature vector*, Kodai Math J. 28(2005), 191–198.

[11] D. Ferus, *Immersions with parallel second fundamental form*, Math. Z. 140(1974), 87–92.

[12] S. Ishihara, *Quaternionic Kählerian manifolds*, J. Diff. Geom. 9(1974), 483–500.

[13] M. Kôzaki and S. Maeda, *A characterization of extrinsic spheres in a Riemannian manifold*, Tsukuba J. Math. 26(2002), 291–297.

[14] S. Maeda, *Remarks on isotropic immersions*, Yokohama Math. J. 34 (1986), 83–90.

[15] S. Maeda , *A characterization of constant isotropic immersions by circles,* Arch. Math.(Basel) 81(2003), 90–95.

[16] S. Maeda and Y. Ohnita, *Herical geodesic immersions into complex space forms*, Geom. Dedicata 30(1989), 93–114.

[17] S. Maeda and K. Ogiue, *Geometry of submanifolds in terms of behavior of geodesics*, Tokyo J. Math. 17(1994), 347–354.

[18] S. Maeda and H. Tanabe, *Totally geodesic immersions of Kaehler manifolds and Kaehler Frenet curves*, Math. Z. (2006)252, 787–795.

[19] H. Nakagawa and R. Takagi, *On locally symmetric Kähler submanifold in a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan. 28(1976), 638–667.

[20] H. Nakagawa and K. Ogiue, *Complex space forms immersed in complex space forms*, Trans. A.M.S. 219(1976), 289–297.

[21] K. Nomizu, 現代微分幾何入門, 裳華房. (1981)

[22] K. Nomizu and K. Yano, *On circles and spheres in Riemannian geometry*, Math. Ann. 210(1974), 163–170.

[23] K. Ogiue, *Differential geometry of Kähler submanifolds*, Adv. Math. 13(1974), 73–114.

[24] B. O'Neill, *Istropic and Kähler immersions*, Canad. J. Math. 17(1965), 907–915.

[25] J.S. Pak and K. Sakamoto, *Submanifolds with d-planer geodesic immersed in complex projective spaces*, Tôhoku Math. J. 38(1986), 297–311.

[26] K. Sakamoto, *Planer geodesic immersions*, Tôhoku Math. J. 29(1977), 25–56.

[27] K. Suizu, S. Maeda and T. Adachi, *Characterization of totally geodesic Kähler immersions*, Hokkaido Math. J. 31(2002), 629–641.

[28] K. Suizu, S. Maeda and T. Adachi, *A characterization of Veronese imbeddings into complex projective spaces by circles*, Math. Rep. Acad. Sci. Royal Soc. Canad. 24(2002), 61–66.

[29] T. Sugiyama , *Totally geodesic Kaehler immersions in veiw of curves of order two*, Geometry Dedicata 125(2007), 53–61.

[30] T. Sugiyama , 位数 2 の曲線の全臍的な等長はめ込み，部分多様体論湯沢 2005 研究集会記録. (2005), 86–88.

[31] T. Sugiyama and T. Adachi, *Logarithmic derivatives of geodesic curvature for smooth curves and isometric immersions*, Far East Journal of Mathematical Sciences. (2006)23, 181–192.

[32] T. Sugiyama , *Logarithmic derivatives of curvature of curves and isometric immersions*, Hokkaido University Techninical Report Series in Mathematics. (2007), 149–153.

[33] T. Sugiyama , 全臍的な等長はめ込みと全測地的ケーラーはめ込みの位数 2 の曲線による特徴づけ, 大阪市立大学数学研究所ミニスクール, 情報幾何への入門と応用. (2006), 115–120.

[34] T. Sugiyama , *Characterizations of submanifolds by extrinsic shapes of curves,* 第 54 回幾何学シンポジウム予稿集. (2007), 198–2006.

[35] T. Sugiyama and T. Adachi, *Totally umbilic isometric immersions and curves of order* 2, Monatshefte fur Mathematik. (2007)150, 73–81.

[36] M. Takeuchi, *Parallel submanifolds of space forms*, Manifolds and Lie groups (Notre Dame, Ind. 1980), in honor of Y. Matsushima, Birkhäuser, Boston, Mass. Progr. Math. 14(1981), 429–447.

[37] H. Tanabe, *Characterization of totally geodesic submanifolds in terms of Frenet curves*, Sci. Math. Japonica. 63(2006), 83–88, :e2005, 557–562.

[38] H. Tanabe, *Parallel isometric immersions and Kähler Frenet curves*, Far East J. Math. Sci. 20(2006), 1–19.

[39] H. Tanabe, *Quaternionic Frenet curves and totally geodesic immersions*, Yokohama Math. J. 52(2005),1–10.

[40] H. Tanabe, *A note on isometric immersions of Cayley projective plane and Frenet curves* , Proc. Japan Acad. 81, Ser. A(2005)12–16.

[41] S. Tanno, 多様体の微分幾何学, 実教出版株式会社. (1976)