

| | |
|---------|---|
| 氏名 | ホウ 包 図 雅 BAO TUYA |
| 学位の種類 | 博士（学術） |
| 学位記番号 | 博第818号 |
| 学位授与の日付 | 平成24年3月23日 |
| 学位授与の条件 | 学位規則第4条第1項該当 課程博士 |
| 学位論文題目 | TRAJECTORIES FOR SASAKIAN MAGNETIC FIELDS ON HOMOGENEOUS REAL HYPERSURFACES IN COMPLEX SPACE FORMS (複素空間形内の等質実超曲面上の佐々木磁場による軌道) |
| 論文審査委員 | 主査 教授 足立 俊 明 教授 山本 和 広 教授 夏目 利 一 准教授 松 添 博 |

論文内容の要旨

リーマン多様体の形状を考察する1つの代表的な方法として、その多様体上の測地線の様子を観察すること、特にユークリッド空間をはじめとする実空間形といわれる多様体上の測地線の様子と比較して調べることによる多様体自身の性質を研究することが古くからなされてきた。この研究の展開として、リーマン多様体上に幾何学的構造が更に付加されている場合に、この多様体の形状や幾何構造を曲線族の性質から考察できないかという考え方がある。すなわち幾何構造が導入できるという条件がつくために多様体の形状に制限がかかることになるため、この幾何構造に関係深い曲線族の性質は幾何構造や多様体の形状と密接な関係があるであろうという考えである。

本研究では、ケーラー多様体内の実超曲面という実奇数次元のリーマン多様体上にケーラー多様体の複素構造から誘導される概接触構造とよばれる幾何構造に注目した。ケーラー多様体においては指導教員により複素構造に付随したケーラー磁場が導入され、この磁場の影響下で等速運動する荷電粒子の軌道という測地線の摂動を対象とした研究がなされている。そこで誘導された接触構造に付随した磁場を導入し、特に代表的な実超曲面である複素空間形内の等質 Hopf 超曲面においてこの磁場の下での軌道の性質を詳しく考察した。

第二節において関連するリーマン幾何学の基本事項を簡潔にまとめ、第三節でケーラー多様体の実超曲面上には複素構造から誘導された特性テンソルに対応してケーラー形式と類似の閉二次形式が存在することを示し、佐々木磁場の概念を導入した。概接触構造を持つ多様体はケーラー多様体の奇数次元類似物としてとらえられ、佐々木磁場の定義はケーラー磁場の定義と同等であるにもかかわらず、佐々木磁場は作用する磁力が一樣ではないというケーラー磁場とは大きく異なる性質を持つことがわかった。このためケーラー磁場の下での軌道は常に円になるという性質を持つが、佐々木磁場の下での軌道は一般に複雑になることが導かれる。そこで佐々木磁場の軌道の中で円になるものは存在するか、存在すればどの程度の量(本数)があるか、またこのような円軌道はどのような性質を持つか、という問題設定を行った。第四節でフレネーセレーの観点による曲線族の分類の中で円が測地線に次ぐ単純な曲線であることを述べ、第六節で軌道が円になることを判断するには構造振率という不変量が重要な役割を果たすことを示した。

円軌道のより詳しい性質を調べるために、佐々木空間形とよばれる定 ϕ 断面曲率を持つ多様体を含むクラスである複素空間形内のHopf等質実超曲面において集中的に考察した。まずA型実超曲面において軌道が円になるために必要十分条件を磁力、構造振率・主振率を用いて与えた。次に測地球面をはじめとする A_1 型実超曲面上の円軌道について、非平坦複素空間形内の曲線としてみた場合基本四次螺旋になっていることを示した。この結果Hopf写像を通して複素ユークリッド空間への水平持ち上げを考えると三階の線形微分方程式の解になっていることがわかり、その特性方程式である三次代数方程式の解により円軌道の発散性や閉性とその場合の長さを記述できることを示した。この代数的記述を磁力と構造振率による幾何学的記述に書き直すために、複素射影空間内の円の考察と対比させた。この空間の円はトーラスから複素射影空間への平行等長埋蔵による測地線の像として得られるが、一方Hopf写像を通して水平持ち上げを考えるとやはり三階の線形微分方程式を満たすことが知られている。これら二つの三次方程式を比較することで埋蔵から得られた複素射影空間の円の幾何学的性質から軌道の幾何学的性質を導くことを行い、円軌道が閉じるための必要十分条件を磁力と構造振率から決まる量が互いに素な整数を用いて記述されること、またそのときの長さはこれらの整数を用いて表現できることを示した。次にA型以外の等質実超曲面に対して考察した。これらの実超曲面ではA型の場合と異なり一般に構造振率は定数ではなく関数になることがわかる。このため軌道は一般には円にならないことがわかるが、更に詳しく調べることで複素空間内のB型実超曲面上で円を一般化した二次の曲線にもならないための磁力の条件を与えた。これらの考察の応用として、円軌道の量により複素空間形内の実超曲面の中でA型や特に A_1 型の実超曲面の特徴付けを行った。特に A_1 型実超曲面の特徴付けは足立一前田によるA型実超曲面の特徴付けの精密化になっている。

論文審査結果の要旨

本論文では、非平坦複素空間形内の超曲面上の佐々木磁場の軌道がフレネ・セレーの公式に関して単純な曲線になる場合があるかという観点から、特に等質ホップ超曲面において考察し、A型超曲面といわれる測地球面を含む代表的な超曲面の特徴付けを行っている。

リーマン多様体において測地線の性質を考察することは多様体の形状を調べる代表的な手法の一つである。リーマン多様体に更に幾何構造が加えられているとき、構造に関連した測地線を含む曲線族を考察することでその幾何構造を考察できないかという問題を考えることができる。ケーラー構造に対してケーラー形式の定数倍という磁場（閉2形式）を考え、その磁場の下での軌道の考察が足立により成されているが、ケーラー多様体は実偶数次元であることから、奇数次元の多様体に対して類似の考察ができないかという動機付けにより研究が始められている。この研究ではケーラー多様体の超曲面に複素構造から誘導される概接触構造を対象を選んでケーラー構造との対比を行いながら考察が進められている。

2章でリーマン幾何学の簡単なまとめを行って記号を導入した後、3章において概接触構造からケーラー形式と同様に定義される2形式が閉2形式になることを示し、その定数倍を佐々木磁場と名付けている。ケーラー磁場と大きく異なる点は、複素構造がリーマン接続に関して平行であるのに対して概接触構造は平行ではないため、粒子に作用するローレンツ力が一様ではない点である。このため、ケーラー磁場の下での軌道は常に円になるのに対して、佐々木磁場による軌道は一般には円にはならない。従って、円になるような軌道の存在性に主眼を置き考察を深めることになる。

6章において軌道の性質を端的に表現する構造振率関数を導入し、5章で述べた複素空間形内の等質実超曲面の性質を利用してA型実超曲面ではこの関数が定数になることを示している。A型実超曲面上では磁力と構造振率および主曲率ベクトルへの分解を表す主振率が合同性を表す不変量になり、これらと超曲面の主曲率とを用いて、複素射影空間内のA型実超曲面上の軌道が円になる条件を7章で与えている。更にそれらが複素射影空間から見てどのような曲線に見えるか8章で調べることで、円軌道が閉軌道になる条件とその場合の長さの表示を9章で与えている。また、10～14章では、より複雑にはなるが同様の考察を複素双曲空間内のA型実超曲面に対しても行っている。

一方、B型や例外型とよばれる残りの等質ホップ超曲面についてはどうなるかを16～18章において考察していて、ほとんど円軌道にはならないことを示している。これらの考察を基に円軌道が存在する方向が稠密であるのは測地球面などA₁型とよばれる等質超曲面に限ること、またこのような円軌道の量によりA型実超曲面を特徴付けることができることを19章で述べている。

本研究の成果は、5編の学術論文として公表され微分幾何学における部分多様体の曲線族からの研究分野において寄与が大きいことから、本学課程博士(学術)の学位論文として十分な価値を有する物と認める。