

博 士 論 文

低レイノルズ数ポアズイユ乱流の
大規模構造とその維持機構

Large-Scale Structure and Sustenance Mechanism
in Turbulent Poiseuille Flow at Low Reynolds Number

平成 25 年

福留 功二

目次

目次	i
図目次	iv
表目次	viii
記号表	ix
1 緒言	1
1.1 研究背景	1
1.2 再層流化に関する先行研究	2
1.3 研究目的	5
1.4 章の構成	6
2 計算手法と計算条件	7
2.1 計算対象	7
2.2 基礎方程式	8
2.2.1 支配方程式	8
2.2.2 無次元化	8
2.3 計算手法	9
2.3.1 方程式の導出	10
2.3.2 時間離散	11
2.3.3 空間離散	12
2.3.4 行列計算	14
2.3.5 平均圧力勾配	18
2.3.6 境界条件の取り扱い	19

2.3.7	エイリアス誤差の除去	21
2.3.8	圧力の計算	23
2.4	計算条件	25
3	計算領域の影響の評価	27
3.1	小計算領域 MB における乱流構造	27
3.1.1	瞬時場構造	27
3.1.2	小計算領域 MB での流れの非定常性	31
3.2	大計算領域 LB における乱流構造	38
3.3	統計量に及ぼすレイノルズ数依存性と計算領域の影響	44
4	大規模間欠構造の維持機構	52
4.1	乱流 - 層流パターンの移流速度	52
4.2	時間平均による大規模構造の抽出	54
4.3	時空間平均による大規模構造の抽出	57
4.4	大規模構造の維持機構	62
4.5	乱流 - 層流パターンの運動量輸送機構	65
5	剛体回転の影響	69
5.1	緒言	69
5.2	計算対象	70
5.3	計算条件と計算手法	70
5.3.1	支配方程式	70
5.3.2	無次元化	71
5.4	計算条件	72
5.4.1	乱流統計量	74
5.4.2	乱流構造	81
6	結言	90
	謝 辞	93
Appendix		
A	非同次方程式の境界条件の決定法	94

B	初期場の作成法	97
C	計算領域におけるアスペクト比の影響	99
	参考文献	103

図 目 次

1.1	Turbulent-laminar patterns in several internal shear flows.	3
2.1	The geometry of computational domain.	7
2.2	A diagram representing equilibrium between the mean pressure gradient and the wall shear stress.	18
3.1	Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 60$ (MB).	29
3.2	Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 70$ (MB).	29
3.3	Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 80$ (MB).	30
3.4	Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 100$ (MB).	30
3.5	Time evolution of skin friction coefficient C_f and bulk Reynolds number Re_m at $Re_e = 60$ (MB).	33
3.6	Trajectories of skin friction coefficient C_f as a function of Re_m (MB). . .	33
3.7	Time evolution of instantaneous flow field of MB in period of increasing C_f (part 1).	34
3.8	Time evolution of instantaneous flow field of MB in period of increasing C_f (part 2).	35
3.9	Time evolution of instantaneous flow field of MB in period of decreasing C_f (part 1).	36
3.10	Time evolution of instantaneous flow field of MB in period of decreasing C_f (part 2).	37

3.11	Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 60$ (LB).	40
3.12	Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 70$ (LB).	40
3.13	Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 80$ (LB).	41
3.14	Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 100$ (LB).	41
3.15	Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices at both upper- and lower-wall sides for $Re_e = 60$ (LB).	42
3.16	Instantaneous velocity vectors (v^+, w^+) and square of streamwise vorticity ω_x^{+2} in the typical cross-streamwise plane for $Re_e = 60$.	43
3.17	Flow of Fig.3.15(b) after $t^+ = 2235$.	43
3.18	Instantaneous distributions of streaky structures in the same flow as Fig.3.15(b).	43
3.19	Skin friction coefficient C_f and bulk Reynolds number Re_m for both MB and LB.	46
3.20	Logarithmic plot of mean velocity profiles for both MB and LB.	47
3.21	R.m.s. values of velocity fluctuation $u_{i\ rms}^+$ (MB).	48
3.22	R.m.s. values of velocity fluctuation $u_{i\ rms}^+$ (LB).	49
3.23	Reynolds shear stress $-\overline{u'^+v^+}$ and total shear stress τ_{total}^+ (MB).	50
3.24	Reynolds shear stress $-\overline{u'^+v^+}$ and total shear stress τ_{total}^+ (LB).	50
3.25	Budget of turbulent kinetic energy k^+ (MB).	51
3.26	Budget of turbulent kinetic energy k^+ (LB).	51
4.1	Distribution of R_{11} as a function of dx^+ and dt^+ in the channel center.	53
4.2	Distributions of advection velocity U_p^+ and mean velocity U^+ .	53
4.3	Time-averaged velocity vectors of velocity fluctuations at channel center and near wall region.	55
4.4	Contours of conditionally averaged velocity fluctuations in the $x - y$ plane.	56
4.5	Time-averaged velocity vectors (\tilde{v}, \tilde{w}) of averaged velocity fluctuations in the cross streamwise plane.	56
4.6	Schematics of averaging procedure represented by $\langle \rangle$.	59

4.7	Contours of both temporally and spatially averaged velocity fluctuations in the $x - y$ plane.	60
4.8	Contours of both temporally and spatially averaged Reynolds shear stress, sweep and ejection in the $x - y$ plane.	61
4.9	Contours of both temporally and spatially averaged streamwise and wall-normal vorticities in the $x - y$ plane.	64
4.10	Contours of both temporally and spatially averaged $\partial w / \partial x$ in the $x - y$ plane.	64
4.11	Distributions of $Re_{m\ Local}$, $Re_{\tau\ Local}$ and $C_{f\ Local}$ in streamwise direction.	67
4.12	Schematics of large-scale flow around the turbulent regions.	67
4.13	Schematics of momentum transfer in turbulent region and its interfaces with quasi-laminar region.	68
5.1	The geometry of computational domain with system rotation.	70
5.2	Mean velocity profiles of rotating channel flow.	77
5.3	Distributions of total stress and Reynolds shear stress.	78
5.4	Distributions of ejection and sweep in pressure side.	79
5.5	Budgets of turbulent kinetic energy in pressure side.	80
5.6	Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB40-075.	82
5.7	Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB40-15.	82
5.8	Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB40-100.	83
5.9	Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB50-075.	83
5.10	Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB60-025.	84
5.11	Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB60-075.	84
5.12	Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB80-075.	85

5.13	Distributions of streamwise vorticity on $x - z$ plane at $y^* = 5$ in case LB40-075.	86
5.14	Distributions of streamwise vorticity on $x - z$ plane at $y^* = 5$ in case LB40-15.	86
5.15	Distributions of streamwise vorticity on $x - z$ plane at $y^* = 5$ in case LB40-100.	87
5.16	Distributions of streamwise vorticity on $x - z$ plane at $y^* = 5$ in case LB50-075.	87
5.17	Distributions of streamwise vorticity on $x - z$ plane at $y^* = 5$ in case LB60-025.	88
5.18	Distributions of streamwise vorticity on $x - z$ plane at $y^* = 5$ in case LB60-075.	88
5.19	Distributions of streamwise vorticity on $x - z$ plane at $y^* = 5$ in case LB80-075.	89
B.1	Time evolution of bulk Reynolds number in case of $Re_\tau = 100$; flow is evolved from artificial turbulence.	98
C.1	Turbulent-laminar pattern in computational domain $(15\pi\delta \times 2\delta \times 15\pi\delta)$. .	101
C.2	Turbulent-laminar pattern in computational domain $(65\pi\delta \times 2\delta \times 3\pi\delta)$. .	102

表 目 次

2.1	Numerical methods of DNS.	9
2.2	Computational conditions for Poiseuille flow.	26
3.1	Reynolds numbers and skin friction coefficient in cases MB and LB.	46
5.1	Computational conditions for rotating channel flow.	73
5.2	Skin friction coefficient and bulk Reynolds numbers of rotational channel flow with different Re_e and Ro_e	76
C.1	Computational conditions for Poiseuille flows in the computational do- mains of different aspect ratio.	100

記号表

C_f : 壁面摩擦係数 $C_f = 2\tau_w / \rho U_m^2$

C_m : チェビシェフ級数の係数

f : 空間発展方程式の右辺

g : 壁面垂直方向渦度成分 $g = \omega_y$

$G(y)$: チェビシェフ級数の正規化するための重み関数

H_i : x_i 方向の非線形項

h_g : 壁面垂直方向渦度成分の方程式における非線形項

H_{Rg} : 壁面垂直方向渦度成分の方程式に AB 法を適用した非線形項

H_{Rv} : 壁面垂直方向速度成分の方程式に AB 法を適用した非線形項

h_v : 壁面垂直方向速度成分の方程式における非線形項

i : 虚数単位

k : 乱流エネルギー $k = \overline{u_i u_i} / 2$

k_x : x 方向波数 $k_x = 2\pi n_1 / L_1$

k_z : z 方向波数 $k_z = 2\pi n_3 / L_3$

L_i : x_i 方向の計算領域の長さ

N_i : x_i 方向の格子点数

n_i : x_i 方向の格子点

P : 平均圧力

p : 圧力

p_{eff} : 遠心力を考慮した圧力

R_{11} : 流れ方向 2 点相関係数

Re_c : 中心速度によるレイノルズ数 $Re_c = 2U_c\delta/\nu$

Re_e : レイノルズ数 $Re_e = u_e\delta/\nu$

Re_m : バルクレイノルズ数 $Re_m = 2U_m\delta/\nu$

Re_W : クエット乱流のレイノルズ数 $Re_W = U_W\delta/\nu$

Re_τ : 摩擦レイノルズ数 $Re_\tau = u_\tau\delta/\nu$

Ro_e : ローターション数 $Ro_e = 2\Omega\delta/u_e$

S_{ij} : 速度勾配テンソルの対称部分 $S_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$

t : 時間

$T_m(y)$: チェビシェフ多項式

U : 流れ方向速度平均

U_c : チャネル中心流れ方向平均速度

u_i : x_i 方向速度成分

U_m : バルク平均速度

U_p : 乱流 - 層流パターンの移流速度

U_W : クエット流における両壁の移動速度

u : 流れ方向速度成分

u_e : 平均圧力勾配による代表速度 $u_e = \sqrt{-\frac{\delta}{\rho} \frac{dP}{dx}}$

u_τ : 摩擦速度 $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$

v : 壁面垂直方向速度成分

w : スパン方向速度成分

x : 流れ方向座標

x_i : i 方向座標

y : 壁面垂直方向座標

z : スパン方向座標

β, β^+, β^- : 空間発展方程式の係数

γ : 圧力の方程式の係数

δ : チャネル半幅 $\delta = L_2/2$

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ

ΔP : 圧力差

$\Delta t, dt$: 時間増分

$\Delta x, dx$: 変位

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$: x 方向, y 方向, z 方向格子間隔

ε_{ijk} : エディントンのイプシロン

μ : 粘性係数

ν : 動粘性係数

θ : 角度

ρ : 密度

ϕ : 壁面垂直方向速度 v のラプラシアン $\phi = \nabla^2 v$

τ : せん断応力

τ_{total} : 全せん断応力

τ_w : 平均壁面せん断応力 $\tau_w = \mu \frac{dU}{dy} \big|_w$

τ_w^* : 平均圧力勾配に対する平均壁面せん断応力 $\tau_w^* = (u_\tau/u_e)^2$

ω_i : x_i 方向渦度成分

ω_x : 流れ方向渦度成分

ω_y : 壁面垂直方向渦度成分

ω_z : スパン方向渦度成分

Ω : z 方向剛体回転の回転数

II : 変動速度の勾配テンソルの第二不変量 $II = -\frac{1}{2} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$

∇ : ハミルトン演算子 ナブラ $(= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z})$

添 字

$(\)_i$: x_i 方向成分

$(\)_{rms}$: 乱れ強さ

$(\)_{Local}$: 各 x 断面における値

$(\)|_w$: 壁面上の値

$(\)^n$: 時間ステップ

$(\tilde{\ })$: \bar{U}_p で移動する座標系での平均

$(\widehat{\ })$: スペクトル係数

$(\overline{\ })$: アンサンブル平均

$(\)'$: 変動成分

$(\)^\times$: 平均圧力勾配による代表速度 u_e , チャネル半幅 δ による無次元量

$(\)^*$: 平均圧力勾配による代表速度 u_e , 動粘性係数 ν による無次元量

$(\)^+$: それぞれの壁面で定義される摩擦速度 u_τ , 動粘性係数 ν による無次元量

第1章

緒言

1.1 研究背景

大気や海洋，工業機器などの自然界における流れはほとんどが乱流である．一般的に乱流は層流と比較して熱や物質の輸送を改善する一方で，流体抵抗を増大させる．例えば，乱流の壁面摩擦抵抗は層流に比べ数十倍である．そのため航空機やパイプラインなどの流体輸送で省エネルギーの観点から以下に述べるような乱流のメカニズムの解明と制御が工学的に重要な課題となっている．

例えば，乱流の摩擦抵抗を低減させる研究が実験および数値計算で盛んに行われている．摩擦抵抗低減の方法として，Choi ら (1993) によるリブレットを設ける壁面形状の変化，Sibilla ら (2005) のポリマー添加や Yu ら (2006) の界面活性剤添加による流体物性の変化，及び Xu ら (2002) によるマイクロバブルの添加など多岐に渡り実現され，そのメカニズムも精力的に研究がなされている．

また，壁乱流にみられるストリーク構造や縦渦構造は，乱流を支配する準秩序構造として認識されている．この準秩序構造は乱流の理解と制御をする上で重要であり，これらの構造の解明が Kline ら (1967) を発端として盛んに行われている．計算機の発達に伴い，Navier-Stokes 方程式の直接数値シミュレーション (DNS) が行われるようになり実験では得られなかった時空間データから乱流の準秩序構造解析が可能となった．壁乱流の代表的な流れの一つであるポアズイユ乱流は Kim ら (1987) によりスペクトル法による DNS が行われた．その後，Robinson(1991)，Kagagi ら (1995)，Jeong ら (1997) など多くの研究がなされ，準秩序構造の統計的，運動学的な詳細が明らかになった．これらの知見からも多くの抵抗低減手法が提案されている．Choi ら (1994) や Hammond ら (1998) は縦渦構造によるスウィープ，イジェクション

を抑制するため壁面に吸い込み・噴出しを設けた．

一方，乱流現象のメカニズムを解明する試みとして，Jimenez ら (1991) は，乱流が維持される最小の計算領域を用いたミニマルチャネル流を提案した．このミニマルチャネル流は乱流の動力的解析を可能とし，その後研究が盛んに行われるようになった．Hamilton ら (1995)，Jimenez ら (1999) などは乱流の自己維持機構 (SSP) を明らかにした．また，Waleffe(2001) などによる定常進行波や Toh ら (2003) などによる周期解が求められ，組織構造の空間構造や乱流生成機構が明らかになっている．これらの知見からも抵抗低減の研究がなされており，Kawahara(2005) などが挙げられる．

ミニマルチャネル流による解析において，Waleffe(2001) が示した定常進行波の厳密解は $Re_\tau \approx 60$ である．ここで， Re_τ は壁面摩擦速度 u_τ とチャネル半幅 δ ，動粘性係数 ν で定義される摩擦レイノルズ数である．このレイノルズ数では次節で述べるように十分大きい計算領域で乱流 - 層流パターンの発生が確認されている (Tsukahara et al., 2007)．従って，ミニマルチャネル流は乱流の周期流を仮定し自由度を低減したもので乱流の本質であると考えられているが，乱流で観測される間欠性やそのダイナミクスなどの解明は難しい．

また，乱流の抵抗低減は結局，再層流化過程を伴うものである．従って，レイノルズ数の低下による基本的な再層流化現象の研究は種々の抵抗低減効果に対し，基礎的な知識を与える一つの好材料であり，抵抗低減のメカニズム解明に役立つと考えられる．しかし，この乱流から層流への再層流化は，現状で未知な部分が多い．

1.2 再層流化に関する先行研究

平行平板間乱流においてレイノルズ数を低下させると，乱流と準層流の状態が空間的に配列する乱流 - 層流パターンが生じる領域がある (Barkley and Tuckerman, 2007)．図 1.1 に示すように，この乱流 - 層流パターンは，ポアズイユ流 (沼野ら, 2008, Tsukahara et al., 2010)，クエット流 (Prigent et al., 2002)，テラー・クエット流 (Prigent et al., 2002) および円盤間流れ (Cros et al., 2002, 2006) など，各種平行平板間流れで観察され，大規模な間欠性と流れ方向に傾きを有するなど類似の構造を持つ．大アスペクト比の計算においてもクエット流 (Barkley and Tuckerman, 2007) やポアズイユ流 (Tsukahara et al., 2005, 2006, 2007) でその存在が確認された．また，近年の先行研究として以下の 3 つは特筆できる．

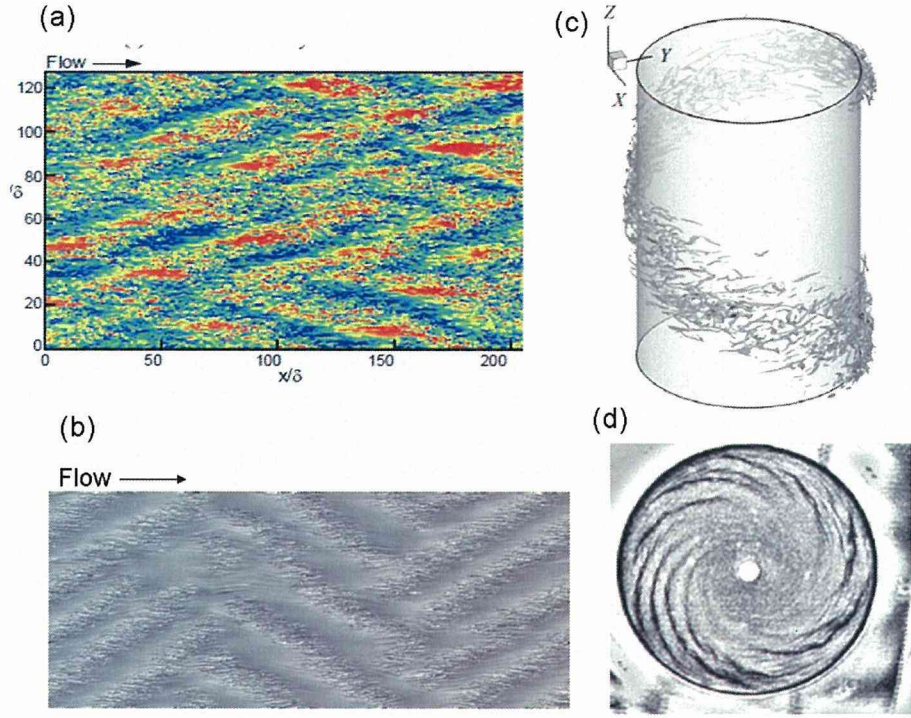


Figure 1.1 Turbulent-laminar patterns in several internal shear flows. (a) Poiseuille flow (Tsukahara et al., 2007) at Reynolds number $Re_\tau = 80$. Color represents intensity of streamwise velocity fluctuation in the channel center. Red to blue, $u'^+ = -2$ to 2 . (b) Couette flow (Duguet et al, 2010) at $Re_W = 330$, where the Reynolds number is defined by the velocity of the walls moving opposite directions at same speed and channel depth. Contours of streamwise velocity in the mid-plane are visualized. (c) Taylor-Couette flow where inner- and outer-cylinder Reynolds numbers are 611 and -1375 (Dong et al., 2011); these Reynolds numbers are defined by rotation velocities of inner- and outer- cylinder, respectively. Vortices are visualized by the iso-surfaces of the intermediate eigenvalue. (d) Torsional Couette flow (Cros and Gal, 2006). Black and white regions represent turbulent and laminar regions, respectively.

Duguet ら (2010) は, クエット乱流の乱流-層流パターンの発生が, $Re_W > 325$ で発生することを確認した. ここで Re_W は, 両壁面が $\pm U_W$ で異方向に移動するクエット乱流のレイノルズ数であり, ν および δ を用いて $Re_W = U_W \delta / \nu$ で定義さ

れる．さらに，初期場の攪乱として，一様乱数と一点乱れを採用し，両者で乱流 - 層流パターンを生成することを示した．

Brethouwer ら (2012) は，クエット流にスパン方向剛体回転，オープンチャネル流（二つの壁面条件のうち一方が粘着条件，もう一方が自由せん断条件としたもの）に浮力による安定成層，そしてポアズイユ流に磁場を課した．ここで，これらの外力はすべて乱流場を安定化する方向に作用する．低レイノルズ数に限らず，これらの安定な外力を加えることで高レイノルズ数においても乱流 - 層流パターンが発生することを示した．

Avila ら (2011) は，円管の乱流パフ構造 (Wynnganski et al., 1973, 1975, Nishi et al., 2008) により亜臨界乱流遷移レイノルズ数が決定されることを示した．これは，乱流 - 層流パターンの解明が流体の再層流化現象のみならず，遷移現象にもつながることを示している．

ポアズイユ乱流における過去の研究を述べる．Patel ら (1969) は，流入部を攪乱したポアズイユ乱流において， $1350 < Re_m < 1800$ で間欠的な流れが発生することを示した．ただし， Re_m は，バルク平均速度 U_m と ν および δ により $Re_m = 2U_m\delta/\nu$ で定義される．Carlson ら (1982) は，人工的な乱れの流入により， $Re_c > 2000$ で乱流となることを示した．ここで， Re_c はチャネル中心平均速度 U_c を用いて $Re_c = 2U_c\delta/\nu$ で定義される．Nishioka ら (1985) は， $Re_c > 2020$ で乱流となり， $2020 < Re_c < 3200$ で，間欠的な流れが発生することを示した．また，数値計算において，Iida ら (1998) は， $(5\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta)$ の計算領域でポアズイユ乱流のレイノルズ数を系統的に低下させ，レイノルズ数の低下とともに流れが非定常となり， $Re_\tau = 60$ において Re_m と壁面摩擦係数 C_f が大きく振動することを明らかにした．さらに， Re_τ を 80 から 60 へと減少させた場合， C_f の低い領域でスウィープの減少と，粘性底層が増加することを見出した．ここで， C_f は平均壁面せん断応力 τ_w と密度 ρ ， U_m を用いて $C_f = 2\tau_w/\rho U_m^2$ で定義される．

Tsukahara ら (2005, 2006) は $(51.2\delta \times 2\delta \times 22.5\delta)$ の大規模な計算領域において， $Re_\tau \leq 80$ で乱流構造の空間的な間欠性が増加し，円管ポアズイユ流で見られるような乱流パフ構造 (Wynnganski et al., 1973, 1975) と類似の構造が現れることを示した．さらに Tsukahara ら (2007) は，計算領域を $(327.7\delta \times 2\delta \times 128\delta)$ まで拡張し， $Re_\tau = 80$ において乱流パフ構造と類似の構造， $Re_\tau = 56$ において，乱流スラグのような構造が現れることを見出した．また，それらの構造はスカラー輸送に大きく影響することを明らかにしている．

一方，吉野ら (2008) は，ポアズイユ乱流の臨界レイノルズ数を調査した．その結果， $Re_c \leq 1230$ で再層流化が生じ，乱れエネルギーの減衰が円管と類似していることを示した．沼野ら (2008) は実験で乱流 - 層流パターンの発生を示し，そのスケールがレイノルズ数の減少に伴って大きくなることを示した．

1.3 研究目的

1.1 節の研究背景で述べたように発達した壁面乱流の再層流化過程を理解することは乱流による壁面摩擦抵抗増大のメカニズムを理解し，さらには効率的に摩擦を減少させる戦略を模索するうえで，ひとつの重要な方法である．また，1.2 節で述べたように，低レイノルズ数の再層流化過程は，科学的にも興味深い現象を含んでおり，現在さらに研究者の関心を集めている．

本研究では，低レイノルズ数のため乱流の一様性が維持できず，乱流領域と非乱流領域（準層流領域）が空間的に同時に生じるポアズイユ乱流の直接数値シミュレーションを従来に比べ大規模な計算領域のもとで行う．計算にはスペクトル法を用いる．空間的な間欠構造のために，流れ場は乱流 - 層流パターンの縞状の模様が生じる．

本研究の目的は，計算領域の大小による乱流 - 層流パターンの人工的な除去，時空間的な条件平均，スパン方向を中心軸としたチャンネル全体の回転の 3 つの方法により，乱流 - 層流パターンが維持されるメカニズムについて明らかにすることである．以下，本研究の目的を具体的に述べる．

1) 計算領域の影響

計算領域の大小による乱流構造の変化を議論する．特に，乱流 - 層流パターンが発生する計算領域と発生できない小さな計算領域を比較することで，計算領域が乱流構造や種々の乱流統計量に与える影響を議論する．

2) 乱流 - 層流パターンの維持機構解明

流れ場を時空間的に平均することで大規模構造の 3 次元分布を明らかにし，その維持メカニズムの解明を行う．

3) 大規模構造に対する剛体回転の影響

低レイノルズ数ポアズイユ乱流にスパン方向の剛体回転を負荷させ，乱流構

造の変化を明らかにする．特に，乱流 - 層流パターンが消滅するメカニズムを考察する．

1.4 章の構成

この論文は，二つのパートで構成される．一つ目は，乱流 - 層流パターンが観測されるレイノルズ数において計算領域の大きさの影響とその構造を議論する（第3章）．二つ目は，乱流 - 層流パターンの乱流構造とその維持機構（第4章）および体積力の影響（第5章）である．

論文は5章より構成される．

第1章は緒言であり，低レイノルズ数の再層流化過程を明らかにすることの工学的背景，先行研究を議論し，本研究で乱流の直接数値シミュレーションにより低レイノルズ数ポアズイユ乱流を解析する目的，および論文の章の構成について記述する．

第2章では，スペクトル法によるポアズイユ流の直接数値シミュレーションの計算手法を詳細に記述する．

第3章では，乱流 - 層流パターンと呼ばれる大規模な運動状態を，計算領域が十分に捉えられる場合と，捉えられない場合での乱流構造の相違，統計量への影響を詳細に議論する．さらに，ポアズイユ乱流のレイノルズ数依存性も評価する．

第4章では，乱流 - 層流パターンの移流速度を定量的に求める．さらに，速度場を時空間的に条件平均することで，乱流 - 層流パターンと関連する大規模な流れの3次元構造を明らかにし，流れが維持されるメカニズムを考察する．

第5章では，チャンネル全体に体積力であるスパン方向の剛体回転を作用させた低レイノルズ数ポアズイユ乱流の統計量と大規模構造について議論する．

結論は第6章にまとめられている．

第2章

計算手法と計算条件

2.1 計算対象

計算対象及び座標系を図 2.1 に示す．本研究では，平行平板間ポアズイユ乱流のスペクトル法による直接数値シミュレーション (DNS) を利用し，低レイノルズ数における乱流構造を調べる．ここで座標系は，流れ方向に x ，壁面垂直方向に y ，スパン方向に z とした．流れは，流れ方向にかかる平均圧力勾配 dP/dx により駆動し，境界条件は，流れ方向及びスパン方向に周期境界条件，および壁面上で粘着条件を適用する．ここで P は各 x 断面の平均圧力を示す．図 2.1 で示す L_1 ， L_2 ， L_3 はそれぞれ流れ方向，壁面垂直方向，スパン方向の計算領域の長さである．

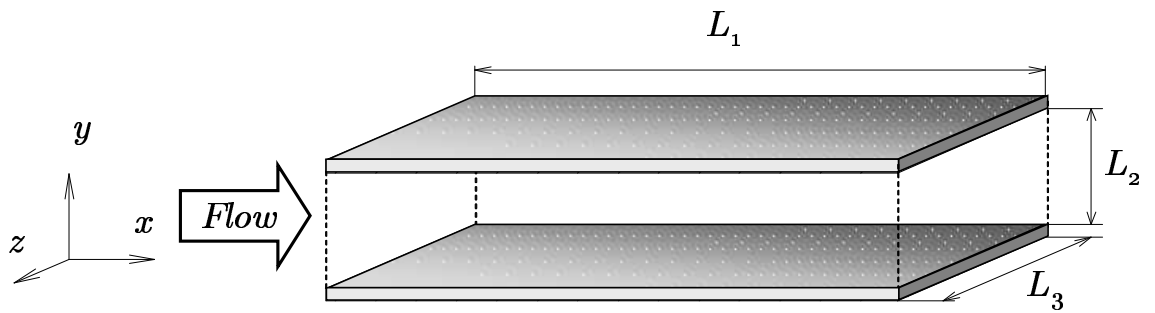


Figure 2.1 The geometry of computational domain.

2.2 基礎方程式

2.2.1 支配方程式

解析対象となる非圧縮粘性流体の運動方程式 (Navier-Stokes 方程式), 連続の式は以下のように示される .

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2)$$

但し, j はダミーインデックスで総和規約をする . ここで, t , x_i , u_i , p , ρ , ν はそれぞれ, 時間, x_i 方向座標, x_i 方向速度成分, 圧力, 密度, 動粘性係数を示す . x_i に関して, x_1 , x_2 , x_3 はそれぞれ x , y , z と同等である . 同様に u_i で示される u_1 , u_2 , u_3 は, u , v , w と同等である .

2.2.2 無次元化

方程式の無次元化について述べる . 長さスケールはチャネル半幅 $\delta (= L_2/2)$, 速度は平均圧力勾配 dP/dx による代表速度 $u_e \left(= \sqrt{-\frac{\delta}{\rho} \frac{dP}{dx}} \right)$ で無次元化し, 上付き文字 (\times) を付けて示す .

$$u_i^\times = \frac{u_i}{u_e}, \quad x_i^\times = \frac{x_i}{\delta}, \quad p^\times = \frac{p}{\rho u_e^2}, \quad t^\times = \frac{t u_e}{\delta} \quad (2.3)$$

式 (2.3) を式 (2.1), (2.2) に代入することにより, 支配方程式は次のようになる .

$$\frac{\partial u_i^\times}{\partial t^\times} + u_j^\times \frac{\partial u_i^\times}{\partial x_j^\times} = -\frac{\partial p^\times}{\partial x_i^\times} + \frac{1}{Re_e} \frac{\partial^2 u_i^\times}{\partial x_j^\times \partial x_j^\times}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u_j^\times}{\partial x_j^\times} = 0 \quad (2.5)$$

ここで, $Re_e = u_e \delta / \nu$ で定義される . さらに, 式 (2.4) の非線形項を回転型に分解することで次式を得る . ただし, 以降簡略化のため \times は省略する .

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = H_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_e} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.6)$$

$$H_i = \left(\varepsilon_{ijk} u_j \omega_k - \frac{\partial P}{\partial x_i} \delta_{i1} \right), \quad (2.7)$$

$$p = p' + \frac{1}{2} u_j u_j \quad (2.8)$$

ここで, ω_i , δ_{ij} , ε_{ijk} , p' , H_i はそれぞれ x_i 方向渦度成分, クロネッカーのデルタ, エディントンのイプシロン, 変動圧力, 平均圧力勾配を加えた x_i 方向の非線形項を示す. ω_i で示される ω_1 , ω_2 , ω_3 成分はそれぞれ, ω_x , ω_y , ω_z と同等である. 上付き文字 (i) は変動成分を示す.

2.3 計算手法

本研究の計算手法は Kim ら (1987) と同様である. 表 2.1 に計算手法をまとめ, 以降の節で詳細を述べる.

Table 2.1 Numerical methods of DNS.

Time advancement	Non-linear terms	2nd-order Adams-Bashforth method
	Viscous terms	Crank-Nicolson method
Spatial discretization scheme	x , z -directions	Fourier-Galerkin method
	y -direction	Chebyshev-tau method
Boundary conditions	x , z -directions	Periodic boundary condition
	y -direction	Non-slip boundary condition
Computation of non-linear terms		Pseudo-spectral method
Elimination of aliasing errors	Padding technique	

2.3.1 方程式の導出

時間進行の方程式は， $\nabla^2 v$ と ω_y によるものである．ここで ∇ はハミルトンの演算子ナブラである．それぞれの方程式の導出過程は以下の通りである．

1) $\nabla^2 v$ の方程式

式 (2.6) の $i = 2$ 成分に ∇^2 を作用させる．

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 v = -\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 p + \nabla^2 H_2 + \frac{1}{Re_e} \nabla^4 v \quad (2.9)$$

ここで，式 (2.4) に ∇ を内積させ，圧力のラプラシアン $\nabla^2 p$ を求めて，式 (2.9) に代入すると壁面垂直方向速度成分の 4 階偏微分方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 v &= h_v + \frac{1}{Re_e} \nabla^2 (\nabla^2 v), \\ h_v &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_3}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

ただし，境界条件は以下の式で与えられる．

$$v(x, y = \pm 1, z) = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y = \pm 1, z) = 0 \quad (2.12)$$

2) ω_y の方程式

式 (2.6) に $\nabla \times$ を作用させると， $i = 2$ の壁面垂直方向渦度成分の 2 階偏微分方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t} g = h_g + \frac{1}{Re_e} \nabla^2 g, \quad (2.13)$$

$$g = \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.14)$$

$$h_g = \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} \quad (2.15)$$

ただし，境界条件は以下の式で与えられる．

$$\omega_y(x, y = \pm 1, z) = 0 \quad (2.16)$$

この他に，以下の連続の式を連立することで時間進行解が得られる．

3) 連続の式

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.17)$$

なお, g , v から u と w を計算する場合には, 式 (2.14) と式 (2.17) を連立して求める.

2.3.2 時間離散

ここでは, ω_y , $\nabla^2 v$ の方程式に対する時間離散化手法を説明する. まず, 2 次精度の Adams - Bashforth 法 (AB 法) と Crank - Nicolson 法 (CN 法) を式 (2.18) に適用するとその離散方程式は以下ようになる.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = H \quad (2.18)$$

- ・ 2 次精度 Adams - Bashforth 法

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}H^n - \frac{1}{2}H^{n-1} \quad (2.19)$$

- ・ Crank - Nicolson 法

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(H^{n+1} + H^n) \quad (2.20)$$

ただし, n , $n+1$ は時間ステップを, Δt は時間刻みを表している.

非線形項に AB 法, 粘性項に CN 法を適用する AB/CN 法を用いて, 式 (2.13) は, 以下の式で表される.

$$\frac{g^{n+1} - g^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}h_g^n - \frac{1}{2}h_g^{n-1} + \frac{1}{2Re_e}(\nabla^2 g^{n+1} + \nabla^2 g^n) \quad (2.21)$$

上式を整理すると, 以下の式が得られる.

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Re_e}\nabla^2\right)g^{n+1} = \frac{\Delta t}{2}(3h_g^n - h_g^{n-1}) + \left(1 + \frac{\Delta t}{2Re_e}\nabla^2\right)g^n \quad (2.22)$$

ただし, 境界条件は,

$$g^{n+1}(x, y = \pm 1, z) = 0 \quad (2.23)$$

式 (2.10) で, $\phi = \nabla^2 v$ とし AB/CN 法を用いると次の式になる.

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Re_e}\nabla^2\right)\phi^{n+1} = \frac{\Delta t}{2}(3h_v^n - h_v^{n-1}) + \left(1 + \frac{\Delta t}{2Re_e}\nabla^2\right)\phi^n, \quad (2.24)$$

$$\phi^{n+1} = \nabla^2 v^{n+1} \quad (2.25)$$

ただし，境界条件は以下の式で与えられる．

$$v^{n+1}(x, y = \pm 1, z) = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}(x, y = \pm 1, z) = 0 \quad (2.27)$$

2.3.3 空間離散

周期境界条件を適用する流れ方向及びスパン方向にはフーリエ級数，壁面垂直方向にはチェビシェフ級数を用いて有限級数展開する．

壁面垂直方向渦度成分 g にこれらの有限級数展開を適用すると次式を得る．

$$g = \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=-N_1/2}^{N_1/2-1} \sum_{n_3=-N_3/2}^{N_3/2-1} \hat{g}_m(k_x, k_z) \exp\{i(k_x x + k_z z)\} T_m(y), \quad (2.28)$$

$$k_x = \frac{2\pi}{L_1} n_1, \quad k_z = \frac{2\pi}{L_3} n_3 \quad (2.29)$$

\hat{g}_m は g のスペクトル係数， k_x, k_z はそれぞれ流れ方向，スパン方向の波数を示している．また， L_i および N_i は x_i 方向の計算領域および x_i 方向格子点数を示す． $T_m(y)$ は m 次のチェビシェフ多項式であり，

$$T_m(y) = \cos m\theta, \quad (2.30)$$

$$y = \cos \theta, \quad (2.31)$$

$$g(y) \sim \sum_{m=0}^{N_2-1} \hat{g}_m T_m(y) \quad (2.32)$$

の関係を満たす．

フーリエ級数，チェビシェフ級数は完全直交関数系であり，次の関係を満たす．

$$\frac{1}{L_i} \int_0^{L_i} \exp\left(i \frac{2\pi n_i}{L_i} x_i\right) \exp\left(-i \frac{2\pi l}{L_i} x_i\right) dx_i = \delta_{n_i l} \quad (i = 1, 3), \quad (2.33)$$

$$\int_{-1}^1 T_m(y) T_s(y) G(y) dy = \frac{\pi C_m}{2} \delta_{m s} \quad (m, s \geq 0) \quad (2.34)$$

ここで， i は虚数単位とする．

C_m と $G(y)$ はそれぞれ，定数および正規化するための重み関数であり，以下のように定義される．

$$C_m = \begin{cases} 2 & (m = 0) \\ 1 & (m \geq 1) \end{cases}, \quad (2.35)$$

$$G(y) = \frac{1}{(1 - y^2)^{1/2}} \quad (2.36)$$

したがって, $g (= \omega_y)$ を有限級数展開したものを式 (2.22) に代入し, 各方向に基底関数を乗じて積分すると, 直交性により式 (2.33), (2.34) が成立するため次式となる.

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{\Delta t}{2Re_e} (-k_x^2 - k_z^2) \right\} \hat{g}_m^{n+1} - \frac{\Delta t}{2Re_e} \hat{g}_m^{(2)n+1} \\ &= \frac{\Delta t}{2} \left(3\hat{h}_{gm}^n - \hat{h}_{gm}^{n-1} \right) + \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{2Re_e} (-k_x^2 - k_z^2) \right\} \hat{g}_m^n + \frac{\Delta t}{2Re_e} \hat{g}_m^{(2)n} \quad (2.37) \end{aligned}$$

ここで, 式中の $\hat{g}_m^{(2)}$ は g の y 方向 2 階微分 $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ のスペクトル係数を示す. 両辺に $-2Re_e/\Delta t$ を乗じると次式を得る.

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{2Re_e}{\Delta t} + (-k_x^2 - k_z^2) \right\} \hat{g}_m^{n+1} + \hat{g}_m^{(2)n+1} \\ &= -Re_e \left(3\hat{h}_{gm}^n - \hat{h}_{gm}^{n-1} \right) + \left\{ -\frac{2Re_e}{\Delta t} - (-k_x^2 - k_z^2) \right\} \hat{g}_m^n - \hat{g}_m^{(2)n} \quad (2.38) \end{aligned}$$

式 (2.24) にも同様の操作を施すと, g および ϕ について以下の離散式が得られる.

・壁面垂直方向渦度成分の方程式

$$\beta^+ \hat{g}_m^{n+1} + \hat{g}_m^{(2)n+1} = \widehat{H_{Rgm}} + \beta^- \hat{g}_m^n - \hat{g}_m^{(2)n}, \quad (2.39)$$

$$\beta^+ = -\frac{2Re_e}{\Delta t} + (-k_x^2 - k_z^2), \quad (2.40)$$

$$\beta^- = -\frac{2Re_e}{\Delta t} - (-k_x^2 - k_z^2), \quad (2.41)$$

$$\widehat{H_{Rgm}} = -Re_e \left(3\hat{h}_{gm}^n - \hat{h}_{gm}^{n-1} \right) \quad (2.42)$$

・壁面垂直方向速度成分の方程式

$$\beta^+ \hat{\phi}_m^{n+1} + \hat{\phi}_m^{(2)n+1} = \widehat{H_{Rvm}} + \beta^- \hat{\phi}_m^n - \hat{\phi}_m^{(2)n}, \quad (2.43)$$

$$\widehat{H_{Rvm}} = -Re_e \left(3\hat{h}_{vm}^n - \hat{h}_{vm}^{n-1} \right) \quad (2.44)$$

2.3.4 行列計算

フーリエ級数により離散化された方程式の時間積分は以下に述べる行列計算により実行される．例として次のような空間発展方程式を考える．

$$\beta u \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad (2.45)$$

$$u(\pm 1) = 0 \quad (2.46)$$

上式にチェビシェフ・タウ近似を行う．

$$\beta \hat{u}_m \pm \hat{u}_m^{(2)} = \hat{f}_m \quad (m = 0, \dots, N_2 - 3), \quad (2.47)$$

$$\sum_{m=0}^{N_2-1} \hat{u}_m = 0, \quad \sum_{m=0}^{N_2-1} (-1)^m \hat{u}_m = 0 \quad (2.48)$$

次に，チェビシェフ係数間の関係について考える． u のチェビシェフ級数 \hat{u}_m ， u の y 方向 1 階微分のチェビシェフ級数 $\hat{u}_m^{(1)}$ および y 方向 2 階微分のチェビシェフ級数 $\hat{u}_m^{(2)}$ との間にはそれぞれ次の漸化式が成立する．

$$C_m \hat{u}_m^{(1)} = 2(m+1) \hat{u}_{m+1} + \hat{u}_{m+2}^{(1)}, \quad (2.49)$$

$$C_m \hat{u}_m^{(2)} = 2(m+1) \hat{u}_{m+1}^{(1)} + \hat{u}_{m+2}^{(2)}, \quad (2.50)$$

$$C_m = \begin{cases} 2 & (m = 0) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

式 (2.49) および式 (2.50) より， $C_m \hat{u}_m^{(2)}$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned} C_m \hat{u}_m^{(2)} &= 4(m+1)(m+2) \hat{u}_{m+2} + 8(m+2)(m+4) \hat{u}_{m+4} \\ &\quad + 12(m+3)(m+6) \hat{u}_{m+6} + 16(m+4)(m+8) \hat{u}_{m+8} + \dots \\ &= \sum_{\substack{l=m+2 \\ l+m: \text{even}}}^{N_2-1} l(l^2 - m^2) \hat{u}_l \quad (m = 0, \dots, N_2 - 3) \end{aligned} \quad (2.51)$$

ただし， $m > N_2 - 1$ では $\hat{u}_m = 0$ とする．また，式中の $l+m: \text{even}$ は $l+m$ が偶数のときのみ総和を取ることを示す．なお， $l+m: \text{odd}$ は $l+m$ が奇数のとき総和を取るものとする．

式 (2.51) を用いると，式 (2.47) は次のように書ける．

$$\beta \hat{u}_m \pm \sum_{\substack{l=m+2 \\ l+m: \text{even}}}^{N_2-1} \frac{l}{C_m} (l^2 - m^2) \hat{u}_l = \hat{f}_m \quad (m = 0, \dots, N_2 - 3) \quad (2.52)$$

また，境界条件の式 (2.48) の両辺の和，差をとることによりこれらは次のように書き換えられる．

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}}^{N_2-1} \hat{u}_n = 0 \quad , \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2-1} \hat{u}_n = 0 \quad (2.53)$$

一方，式 (2.47) と漸化式 (2.50) より

$$\begin{aligned} & \beta C_{m-2}(m+1)\hat{u}_{m-2} + \{\pm 4m(m-1)(m+1) - 2\lambda_m\beta m\} \hat{u}_m + \lambda_{m+2}\beta(m-1)\hat{u}_{m+2} \\ & = C_{m-2}(m+1)\hat{f}_{m-2} - 2\lambda_m m \hat{f}_m + \lambda_{m+2}(m-1)\hat{f}_{m+2} \\ & \quad (m = 2, \dots, N_2), \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} C_m &= \begin{cases} 2 & (m = 0) \\ 1 & (\text{otherwise}), \end{cases} \\ \lambda_m &= \begin{cases} 1 & (0 \leq m \leq N_2 - 2) \\ 0 & (m \geq N_2 - 2) \end{cases} \end{aligned}$$

以上により，式 (2.54) を用いて式 (2.39)，(2.43) は以下のように示される．

・ 壁面垂直方向渦度成分の方程式

$$\begin{aligned} & \beta^+ C_{m-2}(m+1)\hat{g}_{m-2}^{n+1} + \{4m(m-1)(m+1) - 2\lambda_m\beta^+ m\} \hat{g}_m^{n+1} \\ & \quad + \lambda_{m+2}\beta^+(m-1)\hat{g}_{m+2}^{n+1} \\ & = \beta^- C_{m-2}(m+1)\hat{g}_{m-2}^n + \{-4m(m-1)(m+1) - 2\lambda_m\beta^- m\} \hat{g}_m^n \\ & \quad + \lambda_{m+2}\beta^-(m-1)\hat{g}_{m+2}^n + C_{m-2}(m+1)\widehat{H_{Rg_{m-2}}} \\ & \quad - 2\lambda_m m \widehat{H_{Rg_m}} + \lambda_{m+2}(m-1)\widehat{H_{Rg_{m+2}}} \\ & \quad (m = 2, \dots, N_2), \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\sum_{\substack{l=0 \\ l:\text{even}}}^{N_2-1} \hat{g}_l^{n+1} = 0 \quad , \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l:\text{odd}}}^{N_2-1} \hat{g}_l^{n+1} = 0 \quad (2.56)$$

・壁面垂直方向速度成分の方程式

$$\begin{aligned}
& \beta^+ C_{m-2}(m+1) \hat{\phi}_{m-2}^{n+1} + \{4m(m-1)(m+1) - 2\lambda_m \beta^+ m\} \hat{\phi}_m^{n+1} \\
& \quad + \lambda_{m+2} \beta^+ (m-1) \hat{\phi}_{m+2}^{n+1} \\
& = \beta^- C_{m-2}(m+1) \hat{\phi}_{m-2}^n + \{-4m(m-1)(m+1) - 2\lambda_m \beta^- m\} \hat{\phi}_m^n \\
& \quad + \lambda_{m+2} \beta^- (m-1) \hat{\phi}_{m+2}^n + C_{m-2}(m+1) \widehat{H_{Rvm-2}} \\
& \quad - 2\lambda_m m \widehat{H_{Rvm}} + \lambda_{m+2} (m-1) \widehat{H_{Rvm+2}} \\
& \quad (m = 2, \dots, N_2), \tag{2.57}
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{l=0 \\ l: \text{even}}}^{N_2-1} \hat{\phi}_l^{n+1} = 0, \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l: \text{odd}}}^{N_2-1} \hat{\phi}_l^{n+1} = 0 \tag{2.58}$$

式 (2.55) , (2.57) およびそれらの境界条件は偶数モードと奇数モードが互いに独立であることからそれぞれに分解して行列計算ができる .

偶数モード及び奇数モードに対して以下に示す行列をそれぞれ独立に計算することと解が得られる．

係数行列（偶数モードの場合）

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ x & x & x & & & & & \\ & x & x & x & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & x & x & x & \\ & & & & & x & x & \\ & & & & & & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{g}_0 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{g}_{N_2-5} \\ \hat{g}_{N_2-3} \\ \hat{g}_{N_2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R.H.S._2 \\ R.H.S._4 \\ \vdots \\ \vdots \\ R.H.S._{N_2-5} \\ R.H.S._{N_2-3} \\ R.H.S._{N_2-1} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

係数行列（奇数モードの場合）

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ x & x & x & & & & & \\ & x & x & x & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & x & x & x & \\ & & & & & x & x & \\ & & & & & & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_3 \\ \hat{g}_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{g}_{N_2-6} \\ \hat{g}_{N_2-4} \\ \hat{g}_{N_2-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R.H.S._1 \\ R.H.S._3 \\ \vdots \\ \vdots \\ R.H.S._{N_2-6} \\ R.H.S._{N_2-4} \\ R.H.S._{N_2-2} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

ここで，右辺の第1行成分は境界条件によるものである．これらの行列計算はガウス消去法を用いて解かれ，係数行列は丸め誤差が小さくなるように配置されているので軸選択を行う必要はない（Canuto 1988）．

2.3.5 平均圧力勾配

平均圧力勾配は式(2.7)の H_i に含まれるが、その取り扱いには注意を要する。ここで H_i は以下の式で示される。

$$H_i = \text{非線形項}(\varepsilon_{ijk}u_j\omega_k) - \text{平均圧力勾配} \left(\frac{dP}{dx} \right) \quad (2.61)$$

平均圧力勾配 dP/dx は壁面せん断力 τ_w との釣り合いで導出される。図 2.2 に示されるような、微小領域 $\Delta x \times 2\delta$ での圧力と τ_w の力の釣り合いを考える。ここで $x = 0$, $x = \Delta x$ 断面での平均圧力をそれぞれ P_{in} , P_{out} とすると式(2.62)が得られる。

$$-(P_{out} - P_{in})2\delta = 2\tau_w\Delta x \quad (2.62)$$

$(P_{out} - P_{in}) = \Delta P$ とおき、式(2.3)と同一の長さスケール δ と速度スケール u_e で無次元化を行うと平均圧力勾配は式(2.65)となる。

$$-\frac{\Delta P}{\Delta x}\delta = \tau_w, \quad (2.63)$$

$$-\frac{d(P/\rho u_e^2)}{d(x/\delta)} = \frac{(\tau_w/\rho)}{u_e^2}, \quad (2.64)$$

$$-\frac{dP^\times}{dx^\times} = \left(\frac{u_\tau}{u_e} \right)^2 = 1 \quad (2.65)$$

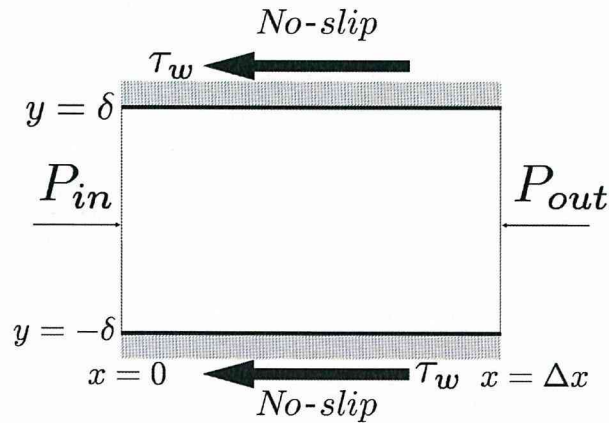


Figure 2.2 A diagram representing equilibrium between the mean pressure gradient and the wall shear stress.

2.3.6 境界条件の取り扱い

スペクトル法では，計算領域内部および境界上の格子点のみが扱われるため，壁面境界条件の適合性が重要になる．すなわち，壁面上では， $u = v = w = 0$ ， $\partial v / \partial y = 0$ を厳密に満たさなければならない． $u = v = w = 0$ の条件については前節の行列計算のところで述べた．ここでは $\partial v / \partial y = 0$ についてさらに詳しく述べることにする．まず， v^{n+1} を次式のように展開することが出来る．

$$v^{n+1} = v_p^{n+1} + C_1 v_1^{n+1} + C_2 v_2^{n+1} \quad (2.66)$$

ここで， v_p は非同次方程式の特殊解， v_1 と v_2 は同次方程式の解である．次に， $\partial v / \partial y(y = \pm 1) = 0$ ， $v(y = \pm 1) = 0$ の二つの境界条件を満足するように C_1 ， C_2 を決定する．

以下に v_p ， v_1 ， v_2 が満たす方程式と境界条件をあわせて示す．

・非同次方程式の特殊解

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Re_e} \nabla^2\right) \phi_p^{n+1} = \frac{\Delta t}{2} (3h_v^n - h_v^{n-1}) + \left(1 + \frac{\Delta t}{2Re_e} \nabla^2\right) \phi^n, \quad (2.67)$$

$$\phi_p^{n+1} = \nabla^2 v_p^{n+1}, \quad (2.68)$$

$$\phi_p^{n+1}(\pm 1) = 0, \quad (2.69)$$

$$v_p^{n+1}(\pm 1) = 0 \quad (2.70)$$

・同次方程式の解 1

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Re_e} \nabla^2\right) \phi_1^{n+1} = 0, \quad (2.71)$$

$$\phi_1^{n+1} = \nabla^2 v_1^{n+1}, \quad (2.72)$$

$$\phi_1^{n+1}(+1) = 0, \quad \phi_1^{n+1}(-1) = 1, \quad (2.73)$$

$$v_1^{n+1}(\pm 1) = 0 \quad (2.74)$$

・ 同次方程式の解 2

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Re_e} \nabla^2\right) \phi_2^{n+1} = 0, \quad (2.75)$$

$$\phi_2^{n+1} = \nabla^2 v_2^{n+1}, \quad (2.76)$$

$$\phi_2^{n+1}(+1) = 1, \quad \phi_2^{n+1}(-1) = 0, \quad (2.77)$$

$$v_2^{n+1}(\pm 1) = 0 \quad (2.78)$$

これらの方程式を満たすように $\phi_p^{n+1}, \phi_1^{n+1}, \phi_2^{n+1}$ を, 次に $v_p^{n+1}, v_1^{n+1}, v_2^{n+1}$ を求めて, 最後に式 (2.66) から v^{n+1} が得られる. 得られた v^{n+1} は任意の C_1, C_2 に対して $v^{n+1}(\pm 1) = 0$ を満足すが, $\partial v^{n+1}/\partial y(\pm 1) = 0$ を満たすように C_1, C_2 を決定する (詳細は Appendix A 参照).

2.3.7 エイリアス誤差の除去

非線形項の計算は擬スペクトル法を用いて行う．擬スペクトル法は，波数空間の物理量を高速逆フーリエ変換 (FFT^{-1}) を用いて物理空間に変換し，積を算出して高速フーリエ変換 (FFT) により波数空間に戻すものである．波数空間上で非線形項を計算する場合，計算負荷は N^2 のオーダーで計算効率が悪い．一方，擬スペクトル法の場合，計算負荷は $N \log N$ のオーダーに軽減される．ただし，擬スペクトル法を利用して非線形項を計算する場合にはエイリアス誤差が生じる．このエイリアス誤差を取り除くため，本研究ではパディング法 (3/2 rule) を用いる．パディング法は， FFT^{-1} によって各変数を物理空間に戻す前に，スペクトルモード数を $N_2 - 1$ から $3(N_2 - 1)/2$ に増大させ，高波数側に 0 を代入する．

$$\hat{u}_m = \begin{cases} \hat{u}_m & (0 \leq m \leq N_2 - 1) \\ 0 & (N_2 \leq m \leq \frac{3}{2}(N_2 - 1)) \end{cases} \quad (2.79)$$

この操作の後， FFT^{-1} を用いて物理空間にもどし非線形項 $w = u \cdot v$ を計算した後，FFT により波数空間へ変換する．こうして得られた \hat{w}_m は $0 \leq m \leq \frac{3}{2}(N_2 - 1)$ まで存在し， $N_2 - 1$ 以下のモードには誤差が含まれない．一方，チェビシェフ級数を用いる y 方向についても同様に誤差が含まれ，パディング法を用いて除去できる．擬スペクトル法の誤差について詳しい記述は吉澤ら (2003) を参照されたい．

非線形項の y 方向 1 階微分のスペクトル係数 $\hat{w}_m^{(1)}$ の計算法を具体的に示す．パディングにより求めた \hat{w}_m の $0 \sim \frac{3}{2}(N_2 - 1)$ の項で $\hat{w}_{\frac{3}{2}(N_2 - 1) + 1} = 0$ とし，漸化式 (2.49) により $\hat{w}_m^{(1)}$ の $0 \sim N_2 - 2$ 次の項を求めることも出来るが，本計算では以下を用いる．漸化式 (2.49) より次式を得る．

$$C_m \hat{w}_m^{(1)} = 2 \sum_{\substack{k=m+1 \\ k+m: \text{odd}}} k \hat{w}_k \quad (2.80)$$

一方， $w = u \cdot v$ において \hat{w} と \hat{u} ， \hat{v} の間には次の関係が成立する．

$$\hat{w}_k = \frac{2}{\pi C_k} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} \hat{u}_m \hat{v}_n T_m(y) T_n(y) T_k(y) G(y) dy \quad (2.81)$$

$T_m(y)$ は式 (2.30) および式 (2.31) の関係より

$$T_m(y) T_n(y) T_k(y) = \frac{1}{2} \{ T_{(m+n)}(y) T_k(y) + T_{(m-n)}(y) T_k(y) \} \quad (2.82)$$

となる．式 (2.82) を式 (2.81) に代入する．

$$\hat{w}_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi C_k} \left\{ \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} \hat{u}_m \hat{v}_n T_{(m+n)} T_k(y) G(y) dy \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} \hat{u}_m \hat{v}_n T_{(m-n)} T_k(y) G(y) dy \right\} \quad (2.83)$$

したがって，直交性より次のようになる．

$$\hat{w}_k = \frac{1}{2} \left(\sum_{m+n=k} \hat{u}_m \hat{v}_n + \sum_{|m-n|=k} \hat{u}_m \hat{v}_n \right) \quad (2.84)$$

式 (2.84) に式 (2.80) の関係を用いると以下を得る．

$$\hat{w}_{N_2-1}^{(1)} = \sum_{\substack{k=N_2 \\ k+N_2-1:\text{odd}}}^{2(N_2-1)} k \left(\sum_{\substack{k=l+m \\ 0 \leq l, m \leq N_2-1}} \hat{u}_l \hat{v}_m \right), \quad (2.85)$$

$$\hat{w}_{N_2-2}^{(1)} = \sum_{\substack{k=N_2-1 \\ k+N_2-2:\text{odd}}}^{2(N_2-1)} k \left(\sum_{\substack{k=l+m \\ 0 \leq l, m \leq N_2-1}} \hat{u}_l \hat{v}_m \right) + N_2 (\hat{u}_0 \hat{v}_{N_2-1} + \hat{u}_{N_2-1} \hat{v}_0) \quad (2.86)$$

上式を初期値とし漸化式 (2.49) より $0 \sim N_2 - 3$ 次の項は求められる．

2.3.8 圧力の計算

Navier-Stokes 方程式 (2.4) に ∇ を内積すると，圧力のラプラシアンが得られる．

$$\nabla^2 p = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} \quad (2.87)$$

ここで，式 (2.7) で示すように H_i は次式で定義される．

$$H_i = \varepsilon_{ijk} u_j \omega_k - \frac{\partial P}{\partial x_i} \delta_{i1} \quad (2.88)$$

スペクトル空間で式 (2.87) は，以下ようになる．

$$\gamma \hat{p}_m + \hat{p}_m^{(2)} = \widehat{H}_{wm}, \quad (2.89)$$

$$\gamma = (-k_x^2 - k_z^2), \quad (2.90)$$

$$\widehat{H}_{wm} = \frac{\partial \widehat{H}_{1m}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{H}_{2m}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{H}_{3m}}{\partial z} \quad (2.91)$$

式 (2.47) に対する式 (2.54) と同様にして，式 (2.89) は以下となる．

$$\begin{aligned} \gamma C_{m-2}(m+1) \hat{p}_{m-2} + \{4m(m-1)(m+1) - 2\lambda_m \gamma m\} \hat{p}_m + \lambda_{m+2} \gamma (m-1) \hat{p}_{m+2} \\ = C_{m-2}(m+1) \widehat{H}_{wm-2} - 2\lambda_m m \widehat{H}_{wm} + \lambda_{m+2}(m-1) \widehat{H}_{wm+2} \\ (m = 2, \dots, N_2 - 1) \end{aligned} \quad (2.92)$$

式 (2.92) により求めた圧力は，式 (2.8) に示すように， $u_j u_j / 2$ が含まれているので，これを取り除いたものが圧力 (変動成分) である．

次に境界条件の取り扱いについて説明する．Navier-Stokes 方程式 (2.4) の $i = 2$ 成分は次式となる．

$$\frac{\partial v}{\partial t} = H_2 - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re_e} \nabla^2 v \quad (2.93)$$

ここで境界条件は，2.3.6 節 (19 ページ) にも述べたように，壁面上では $u = v = w = 0$ ， $\partial v / \partial y = 0$ を厳密に満たさなければならない．さらに壁面上で $\partial / \partial x = \partial / \partial z = 0$ 及び $\partial^2 / \partial x^2 = \partial^2 / \partial z^2 = 0$ が成立する．一方， $\partial^2 v / \partial y^2 \neq 0$ となる．従って，圧力についての境界条件は以下の式 (2.94) で表される．

$$\frac{\partial p}{\partial y}(\pm 1) = \frac{1}{Re_e} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\pm 1) \quad (2.94)$$

上式は圧力の Neumann 型境界条件に相当する．次に，式 (2.94) に対応するフーリエ・チェビシェフ級数の関係を求める．ここで，チェビシェフ級数の微分は以下で示される．

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{\partial}{\partial y} \sum_{m=0}^{N_2-1} \hat{p}_m T_m(\pm 1) = \sum_{m=0}^{N_2-1} \hat{p}_m \frac{\partial T_m}{\partial y}(\pm 1) = \sum_{m=0}^{N_2-1} (\pm 1)^{m+1} m^2 \hat{p}_m, \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{m=0}^{N_2-1} \hat{v}_m T_m(\pm 1) = \sum_{m=0}^{N_2-1} \frac{\partial^2 \hat{v}_m}{\partial y^2} T_m(\pm 1) = \sum_{m=0}^{N_2-1} (\pm 1)^m \hat{v}_m^{(2)} \quad (2.96)$$

式 (2.94) に，式 (2.95) と式 (2.96) を代入すると以下のようになる．

$$\sum_{m=0}^{N_2-1} (\pm 1)^{m+1} m^2 \hat{p}_m = \frac{1}{Re_e} \sum_{m=0}^{N_2-1} (\pm 1)^m \hat{v}_m^{(2)} \quad (2.97)$$

これは奇数モードと偶数モードに分けることができる．

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m:odd}}^{N_2-2} m^2 \hat{p}_m = \frac{1}{Re_e} \sum_{\substack{m=0 \\ m:even}}^{N_2-1} (\pm 1)^m \hat{v}_m^{(2)}, \quad (2.98)$$

$$\sum_{\substack{m=0 \\ m:even}}^{N_2-1} m^2 \hat{p}_m = \frac{1}{Re_e} \sum_{\substack{m=1 \\ m:odd}}^{N_2-2} (\pm 1)^m \hat{v}_m^{(2)} \quad (2.99)$$

式 (2.98) と式 (2.99) が式 (2.92) における奇数モード，偶数モードの境界条件に対応する．

2.4 計算条件

本研究で対象とするレイノルズ数 Re_e , およびその他の計算条件を表 2.2 に示す . 表中に示す上付き文字 (+) は壁面摩擦係数 u_τ と動粘性係数 ν で無次元化を行ったことを示す . また , Δx , Δy , Δz はそれぞれ , 流れ方向 , 壁垂直方向 , スパン方向の格子点間隔を示す . y 方向は不等間隔であり , 壁面近傍でより小さな値をとる . Δt は各計算ステップにおける時間間隔である . 計算領域は $(10\pi\delta \times 2\delta \times 5\pi\delta)$ (以下 MB とする) と $(22\pi\delta \times 2\delta \times 10\pi\delta)$ (以下 LB とする) とした . ただし , $Re_e = 100$ に対する MB の計算領域のみ $(8\pi\delta \times 2\delta \times 4\pi\delta)$ とした . 後述するが , MB の $Re_e = 60$ において時間的に大きな流量変化が生じた . これは , 計算領域を $(5\pi\delta \times 2\delta \times 2.5\pi\delta)$ (以下 , SB とする) とした Iida ら (1998) の結果と一致している .

本研究では $Re_e = 150, 100$ の初期場 (Appendix B 参照) を作成し , レイノルズ数を $Re_e = 100 \quad 80 \quad 70 \quad 60$ と系統的に減少させ , 統計的に定常となったものを用いて各レイノルズ数で再層流化過程の乱流構造を解析する . このレイノルズ数の減少は , 平均圧力勾配をステップ状に減少させたことと対応している .

計算結果の妥当性は , 計算領域と格子点数に依存する . 計算領域の不足は乱流の大規模構造を捕らえられない . 一方 , 格子点数の不足は高波数スペクトルがカットオフされ低波数と高波数の乱れの相互作用や散逸が十分考慮されず , 現実の流れとは異なった結果が得られる . 本研究では , エネルギースペクトルと二点相関から格子点数と計算領域の妥当性を確認した .

また , MB の計算領域における $Re_e \geq 70$ の計算では , 格子解像度が不足していると考えられるが , レイノルズ数効果を定性的に比較するために使用している .

第 3 章と第 4 章の計算は 2.66GHz の INTEL CORE 2 QUAD を用いた . 各計算において , 定常状態を得るまでに約 200000 ステップ , 統計量はさらに 20000 ステップの計算を行い 100 ステップごとに平均して算出した . ただし , MB の $Re_e = 60$ において , 統計量の算出は , 280000 ステップで 100 ステップごとに統計量を平均し算出する . CPU 時間はそれぞれ , MB の定常までに 200 時間 , 統計量の算出に 22 時間 , LB の定常までに 1300 時間 , 統計量の算出に 140 時間であった .

Table 2.2 Computational conditions for Poiseuille flow.

MB				
Computational domain ($L_1 \times L_2 \times L_3$)	$10\pi\delta \times 2\delta \times 5\pi\delta$			$8\pi\delta \times 2\delta \times 4\pi\delta$
$Re_e (= u_e\delta/\nu)$	60	70	80	100
Grid points ($N_1 \times N_2 \times N_3$)	$192 \times 65 \times 144$	$128 \times 65 \times 128$		$256 \times 65 \times 128$
L_1^+	1885	2199	2513	2513
L_3^+	942.5	1100	1257	1257
Δx^+	9.82	17.2	19.6	9.82
Δy^+	$0.07 \sim 2.94$	$0.08 \sim 3.43$	$0.10 \sim 3.93$	$0.12 \sim 4.91$
Δz^+	6.54	8.59	9.82	9.82
$\Delta t^+ (= \Delta t u_\tau^2/\nu)$	0.03	0.035	0.04	0.04

LB				
Computational domain ($L_1 \times L_2 \times L_3$)	$22\pi\delta \times 2\delta \times 10\pi\delta$			
$Re_e (= u_e\delta/\nu)$	60	70	80	100
Grid points ($N_1 \times N_2 \times N_3$)	$512 \times 65 \times 288$			
L_1^+	4147	4838	5529	6912
L_3^+	1885	2199	2513	3142
Δx^+	8.10	9.45	10.8	13.5
Δy^+	$0.07 \sim 2.94$	$0.08 \sim 3.43$	$0.10 \sim 3.93$	$0.12 \sim 4.91$
Δz^+	6.54	7.63	8.73	10.9
$\Delta t^+ (= \Delta t u_\tau^2/\nu)$	0.03	0.035	0.04	0.05

第3章

計算領域の影響の評価

3.1 小計算領域 MB における乱流構造

3.1.1 瞬時場構造

図 3.1 から図 3.4 に各レイノルズ数における計算領域 MB の瞬時場構造を示す．いずれの瞬時場構造も，低速ストリーク（緑の等値面），縦渦（赤と青の等値面）を示している．ここで，低速ストリークは流れ方向変動速度 $u'^+ = -3.0$ の領域，縦渦は変動速度の速度勾配テンソルの第二不変量 $II^+ = -1/2 \cdot \partial u_i^+ / \partial x_j^+ \cdot \partial u_j^+ / \partial x_i^+$ の等値面で，流れ方向渦度 ω_x^+ の正負により正回転の渦（赤）と負回転の渦（青）を表している．また，黒の領域は $y^+ \approx 10$ での低速の領域 ($u'^+ \leq 0$) を示している．以降，流れ方向変動速度のみ上付き文字 (\prime) をもちいて u' とする（ただし，テンソル表記の場合は省略する）．

図 3.1 に $Re_e = 60$ の瞬時場を示す．低速ストリークがチャンネル全体にわたって存在する．一方，縦渦は空間的に間欠的な分布を示す．縦渦が多く存在する乱流領域では，低速ストリークの揺動が見られ，レイノルズ応力の生成に寄与していると考えられる．縦渦があまり見られない準層流領域は低速ストリークが流れ方向に揺動なしに伸びる傾向がある．流れが間欠的になることは遷移過程の円管乱流に生じるパフ構造と類似している (Shimizu, 2009)．一方，3.1.2 節に示すように，乱流 - 層流パターンと異なり MB の流れ場は時間的な非定常性が強い．

図 3.2 に $Re_e = 70$ の瞬時場を示す． $Re_e = 60$ に対して，低速ストリークはチャンネル全体で揺動し，縦渦は $Re_e = 60$ と同様，空間的な間欠性が見られる．さらに， $Re_e = 60$ に比べ小さい渦が存在する．

図 3.3 に $Re_e = 80$ の瞬時場を示す． $Re_e = 70$ と同様，低速ストリークはチャンネル全体で大きく揺動し，空間的な間欠性が明確に見られる．また，黄色の線で示すように乱流領域は流れ方向に対して約 15 度傾いた分布を示す傾向が見られる．

図 3.4 に $Re_e = 100$ の瞬時場を示す． $Re_e = 70, 80$ と同様，低速ストリークはチャンネル全体で大きく揺動し，ストリーク間隔が狭いところに縦渦が多い傾向が見られる．縦渦の分布は空間的に間欠性は見られるが，全体としてほぼ一様に分布している．

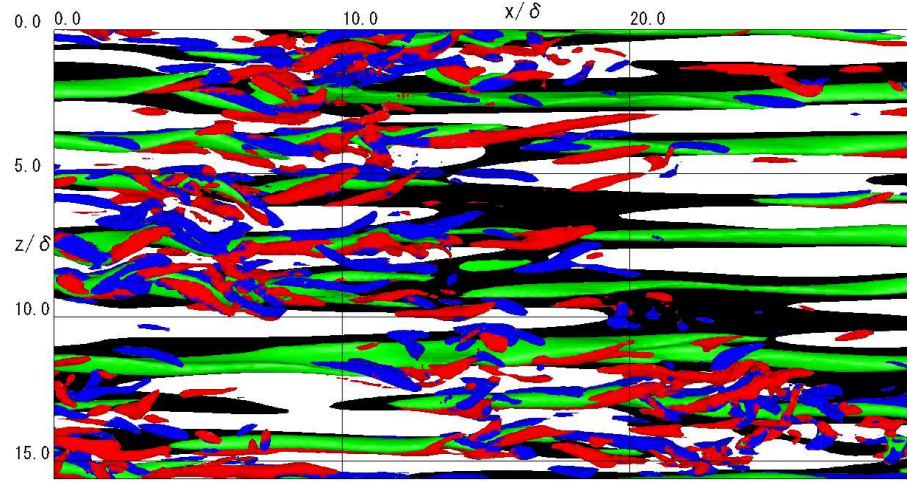


Figure 3.1 Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 60$ (MB). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red: $II^+ = 0.002$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $II^+ = 0.002$ and $\omega_x^+ < 0$. The visualized volume is the lower half of the computational box.

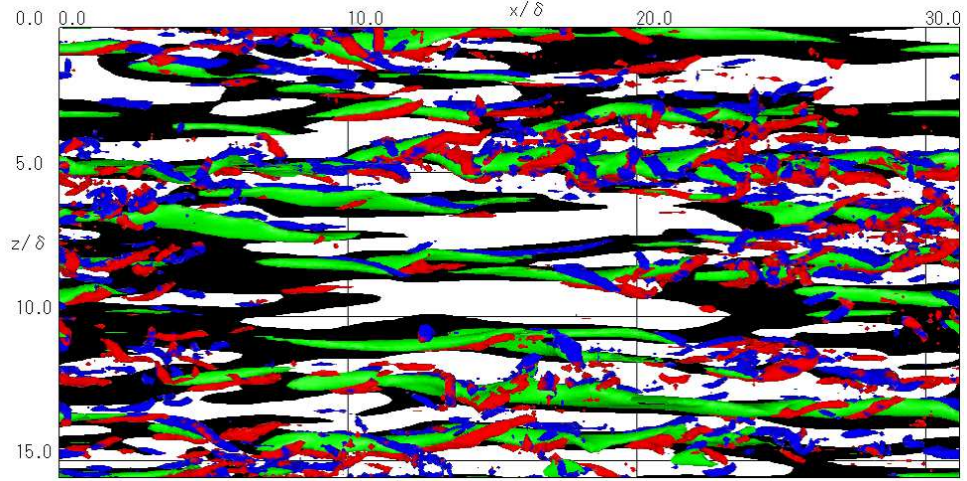


Figure 3.2 Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 70$ (MB). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red: $II^+ = 0.005$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $II^+ = 0.005$ and $\omega_x^+ < 0$. The visualized volume is the lower half of the computational box.

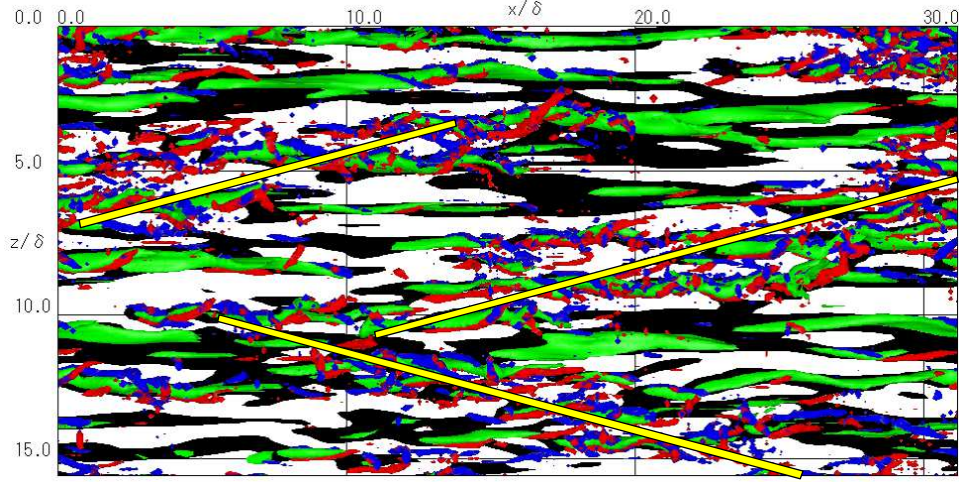


Figure 3.3 Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 80$ (MB). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red: $H^+ = 0.009$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $H^+ = 0.009$ and $\omega_x^+ < 0$. Yellow lines represent turbulent regions inclined at 15 degrees to the streamwise direction. The visualized volume is the lower half of the computational box.

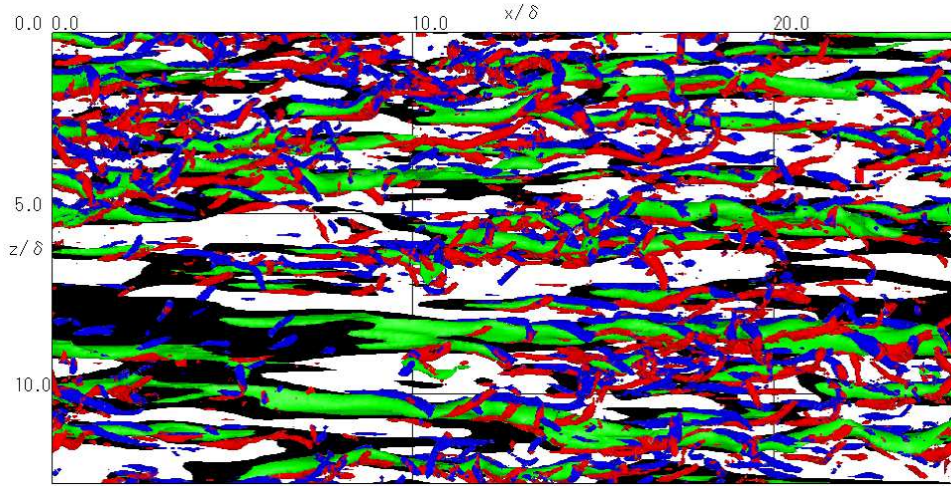


Figure 3.4 Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 100$ (MB). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red: $H^+ = 0.01$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $H^+ = 0.01$ and $\omega_x'^+ < 0$. The visualized volume is the lower half of the computational box.

3.1.2 小計算領域 MB での流れの非定常性

低レイノルズ数で計算領域が小さい場合は流れの非定常性が強く現れる．本節は，バルクレイノルズ数 Re_m と壁面摩擦係数 C_f の非定常性に着目し，特に C_f の増加過程と減少過程にある場合の瞬時場構造を比較する．

図 3.5 に $Re_e = 60$ の Re_m と C_f の時間変化を示す．図中の細線はそれぞれの平均値を示し，破線は平均のバルクレイノルズ数に基づいた C_f の層流の理論値および Dean(1978) による実験値である． Re_m と C_f は大きく振動する． Re_m の変動が先に起こり，その後 C_f が追従する傾向が見られる．また， C_f の振動は，周期の短い変動が含まれ，壁面の乱れの影響が顕著にあらわれると考えられる．また， C_f の最小値は層流の値より大きく離れたところにあるのに対し，最大値は Dean(1976) の実験式を超える結果も得られた． Re_m と C_f の周期は $t^+ \approx 2000$ であり，Iida ら (1998) による SB の周期 $t^+ \approx 1500$ に比べ大きくなる．これは局所的に乱れが強くなった場合，そこからチャンネル全体に広がるのにかかる時間が大きいためであると考えられる．

図 3.6 に Re_m と C_f のトラジェクトリーを Patel and Head(1969) の実験値，Dean(1978) の実験式および平板境界層の Blasius の式とともに示す．中心は，Patel and Head(1969) の実験値付近をとり， Re_e が減少するに従ってその軌道が大きな楕円を反時計回りに描く．これは，レイノルズ数の低下とともに乱流構造のスケールが大きくなるためである．

図 3.7 から図 3.10 に， C_f の低い $t^+ = 3600$ から C_f の高い $t^+ = 4740$ の増加過程 (図 3.7 と図 3.8) と， $t^+ = 4800$ から C_f の低い $t^+ = 5940$ の減少過程 (図 3.9 と図 3.10) の瞬時場構造を示す．なお，図 3.7(a) から図 3.7(g) までは Re_m が増加する時間過程である．これに対して図 3.7(h) から図 3.8(e) では Re_m が減少する．一方，図 3.8(f) からは Re_m が再び増大に転じる．いずれの図も縦渦 (赤と青) と低速ストリーク (緑)，壁面近傍 ($y \simeq 10$) における低速領域 (黒) を示している．

C_f の低い $t^+ = 3600$ (図 3.7(a)) で，縦渦は，空間的に局在し間欠的に分布する．一方，低速ストリークはチャンネル全体に渡って存在する．縦渦が多く見られる部分では低速ストリークが揺動し，細く密集している．縦渦があまり見られない準層流領域では，低速ストリークが流れ方向に長く，スパン方向の間隔も大きくなる． C_f と Re_m の増加過程 (図 3.7(a) から図 3.8(g)) では，時間が経過するにつれ，スケールが小さい縦渦が多く生じている．特に， $t^+ = 3780$ で，縦渦が多い領域は流れ方向に対して斜め方向に広がる．一方， $t^+ = 4080$ になると， $t^+ = 3780$ とは

反対の傾きの領域に縦渦が多く存在することが確認できる． C_f が最も大きくなる $t^+ = 4440$ では縦渦の集中する領域が $t^+ = 3780$ と比べて流れ方向に対して反対に傾く傾向が明確に見られる． Re_m が減少する過程（図 3.7(h) 以降）では，流れ方向に傾いた縦渦の集中領域は明確に見られるが，縦渦の数は減少傾向にある．

次に， C_f の減少過程（図 3.9 と図 3.10）に着目する．この過程では Re_m も減少する．減少過程の初期には斜め方向の構造は見られるが，増大過程に比べて渦の密集が緩和する．さらに，ストリークも流れ方向に揺動が見られなくなる．この傾向は，さらに時間が経過すると顕著になり，縦渦が集中する領域全体も流れ方向の傾きが見られなくなる．特に， $t^+ \approx 5400$ で渦が流れ方向に長く伸ばされる傾向がはっきりと見られる．この渦伸張により，渦が消滅すると考えられる．なお，渦の消滅後もストリーク構造は残ることがわかる．これらの結果から，MB の領域における C_f の増加過程はストリークの揺動と縦渦の生成によるもので，減少過程は，ストリークの安定化と乱れの減衰によるものと考察できる．また， C_f の増加過程では，流れ方向に対して斜めに傾いた縦渦が密集する領域が形成され強化されるのに対して， C_f の減少過程では，密集領域の流れ方向の傾きが小さくなり，縦渦も減少することがわかった．

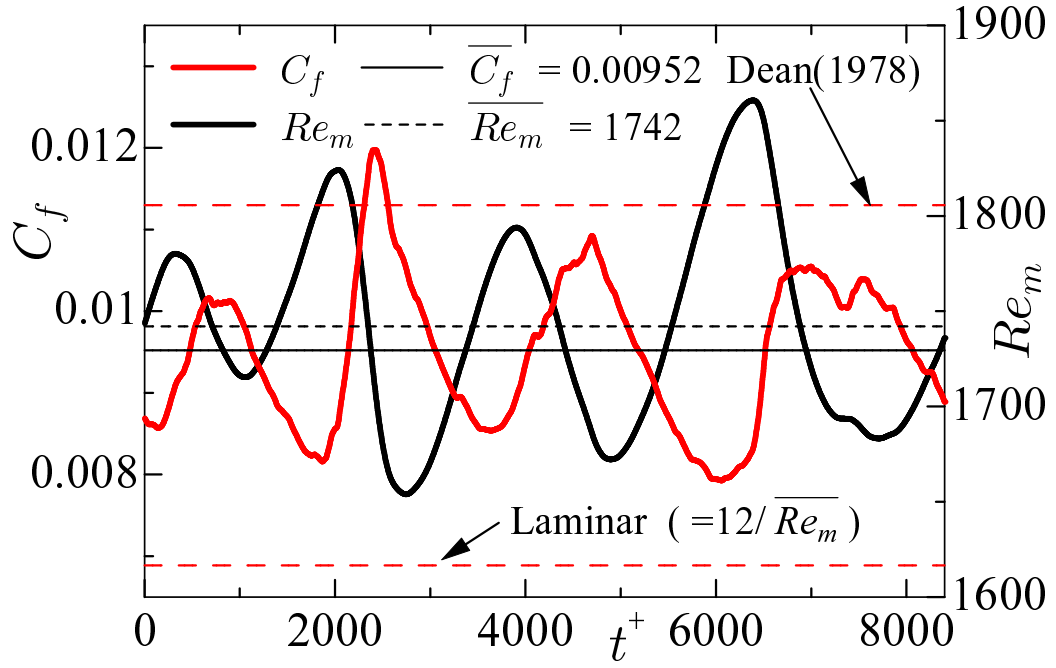


Figure 3.5 Time evolution of skin friction coefficient C_f and bulk Reynolds number Re_m at $Re_e = 60$ (MB).

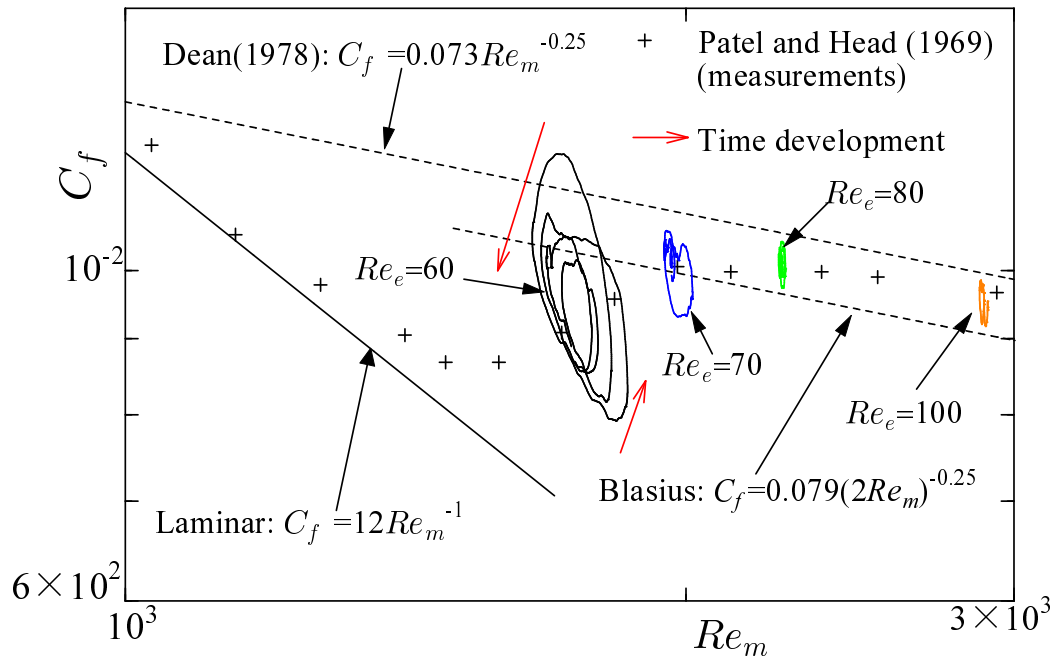


Figure 3.6 Trajectories of skin friction coefficient C_f as a function of Re_m (MB).

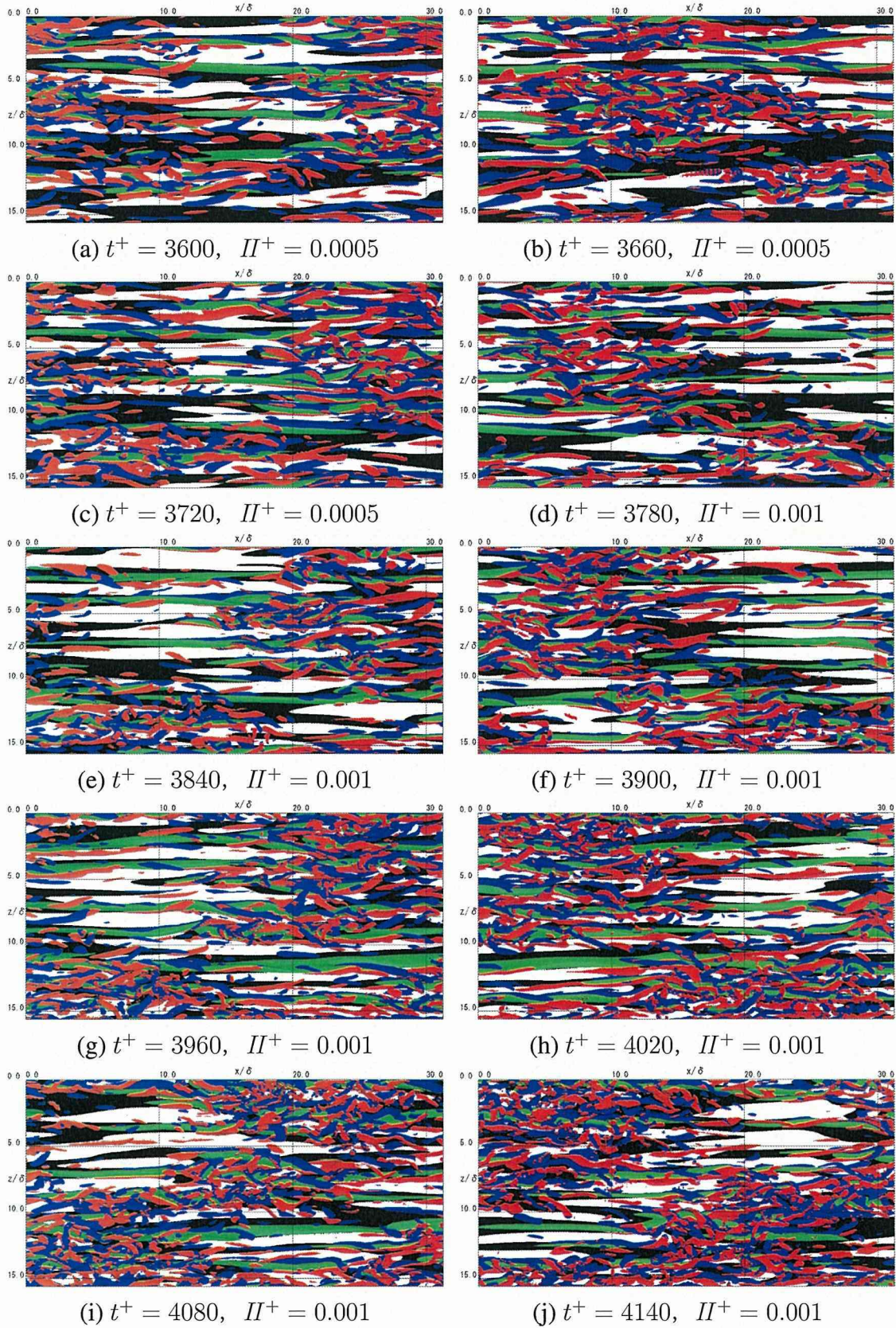


Figure 3.7 Time evolution of instantaneous flow field of MB in period of increasing C_f (part 1). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red and blue iso-surfaces represent positive and negative vortical structures detected by II ; red and blue represent positive and negative ω_x , respectively. The visualized volume is the lower half of the computational box.

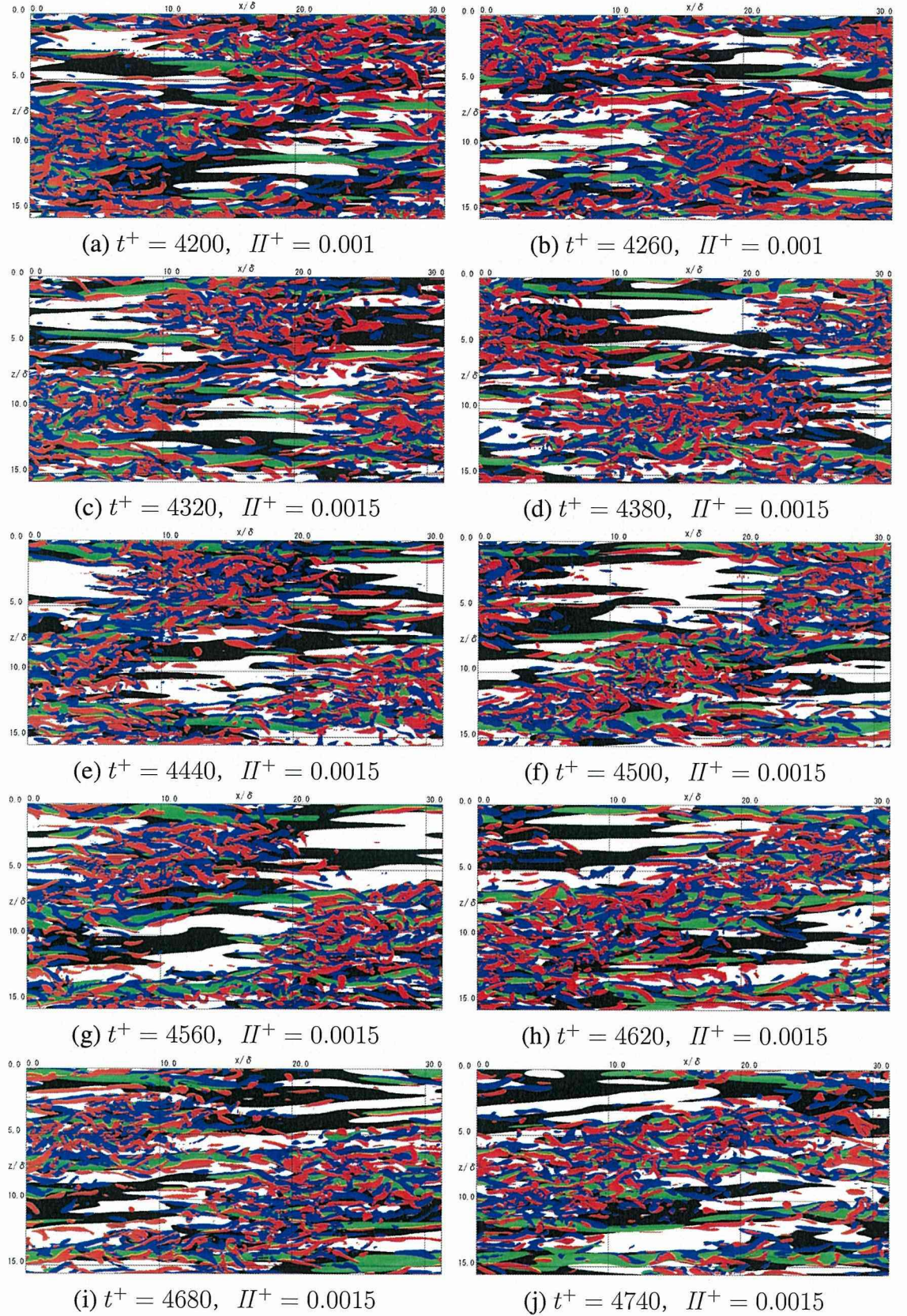


Figure 3.8 Time evolution of instantaneous flow field of MB in period of increasing C_f (part 2). Green: $u^+ = -3$, black regions: $u^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red and blue iso-surfaces represent positive and negative vortical structures detected by II ; red and blue represent positive and negative ω_x , respectively. The visualized volume is the lower half of the computational box.

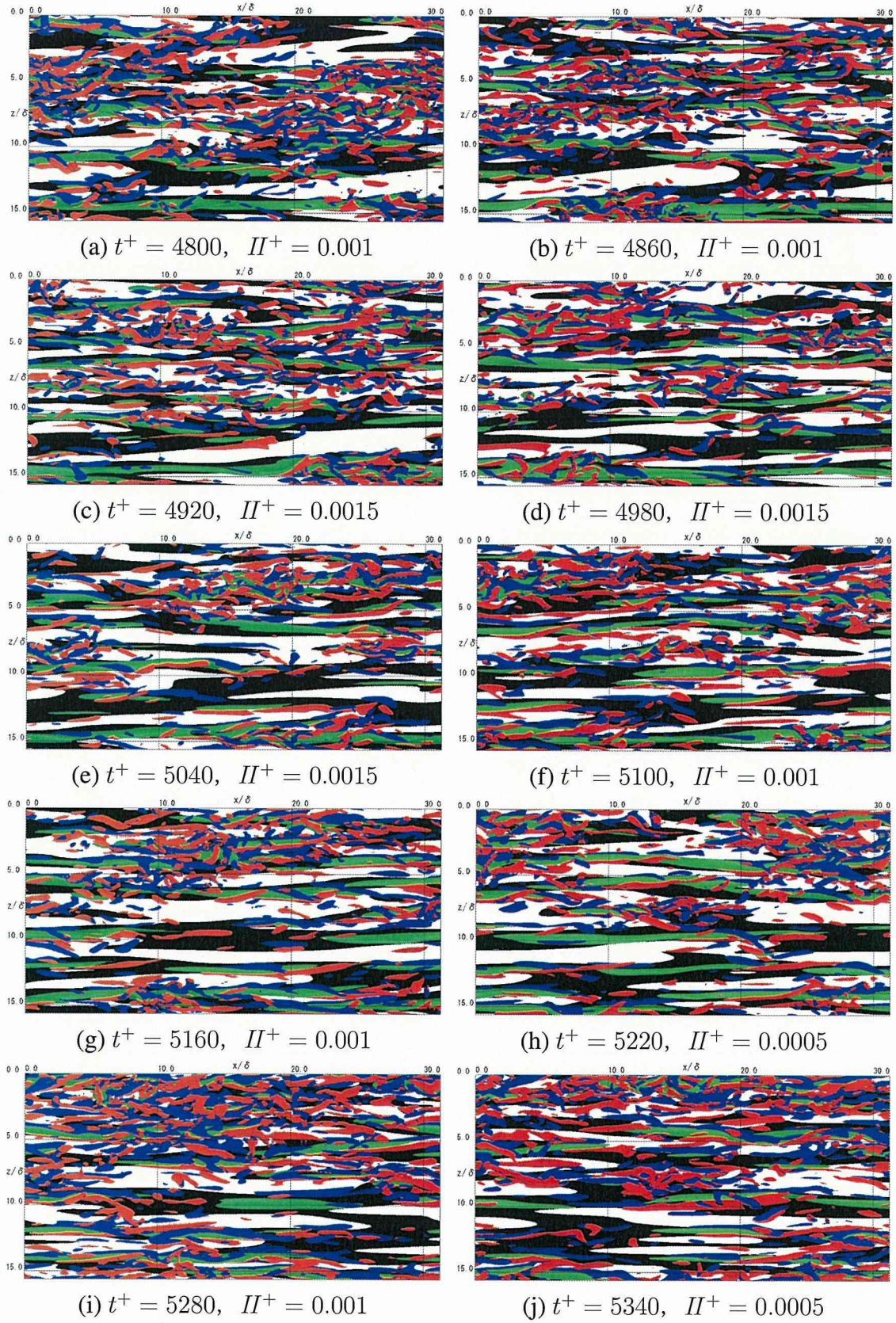


Figure 3.9 Time evolution of instantaneous flow field of MB in period of decreasing C_f (part 1). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red and blue iso-surfaces represent positive and negative vortical structures detected by II ; red and blue represent positive and negative ω_x , respectively. The visualized volume is the lower half of the computational box.

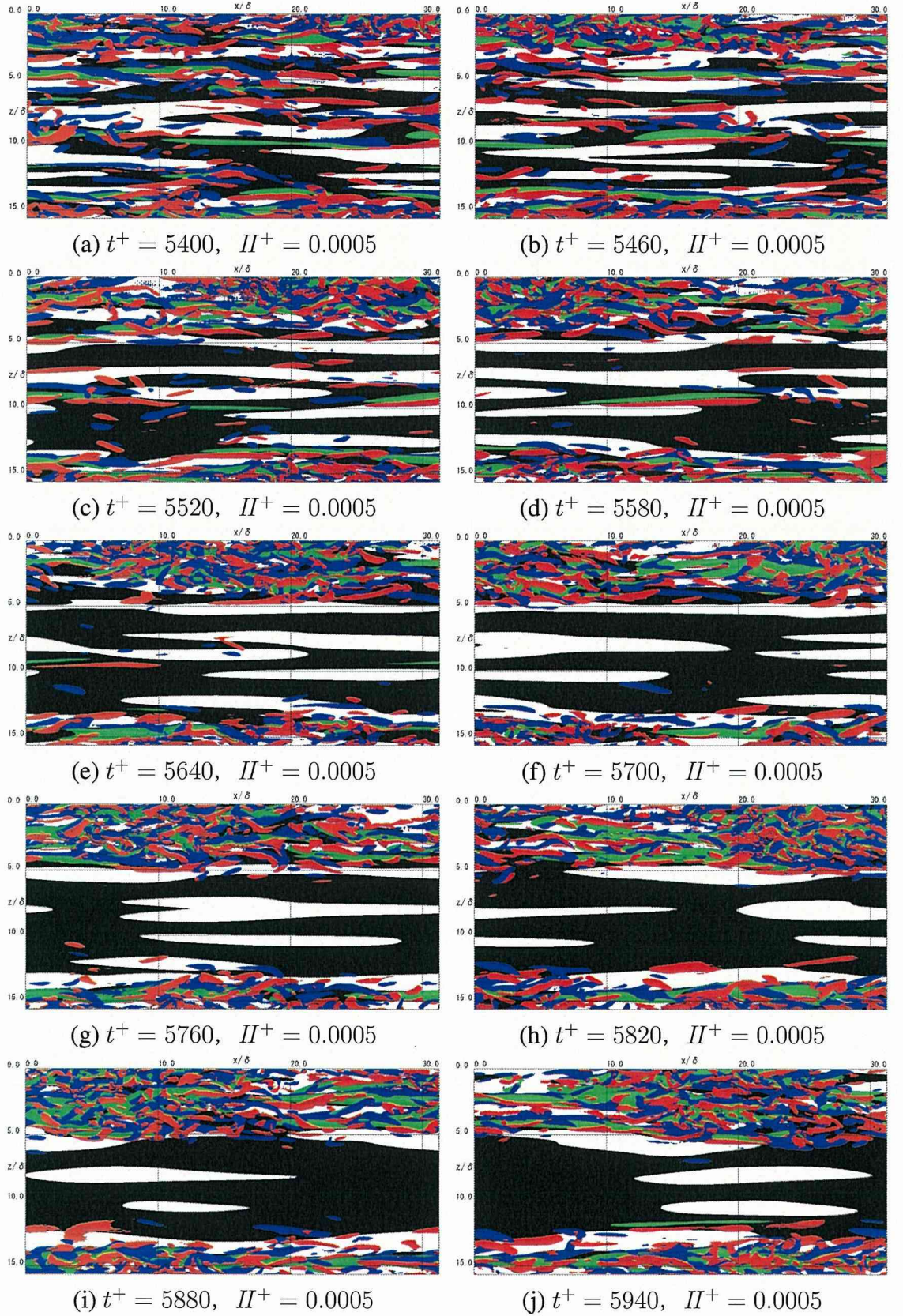


Figure 3.10 Time evolution of instantaneous flow field of MB in period of decreasing C_f (part 2). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red and blue iso-surfaces represent positive and negative vortical structures detected by II ; red and blue represent positive and negative ω_x , respectively. The visualized volume is the lower half of the computational box.

3.2 大計算領域LBにおける乱流構造

本節では，流れの非定常性が見られない程度に大きな計算領域での乱流構造について議論する．なお，このとき， $Re_e = 60$ での Re_m の変動は約 0.6% であった．

図 3.11 に $Re_e = 60$ の瞬時場における縦渦と低速ストリークの分布を示す．縦渦は局所的に存在している．縦渦が多い乱流領域とあまりみられない準層流領域が発生する．この縦渦が多く分布する部分は，円管乱流の遷移域で見られる乱流パフ構造と類似の構造を示すことが Tsukahara ら (2005) により示されている．乱流領域の上流に白で示す高速流体，下流に黒で示す低速流体が多く存在する．よって，乱流領域は高速流体と低速流体で挟まれる領域として特徴付けられる．さらなる構造の議論は第 4 章で詳しく述べる．

図 3.12 に $Re_e = 70$ の瞬時場における縦渦と低速ストリークの分布を示す． $Re_e = 60$ と同様に乱流領域が観測できる．ただし， $Re_e = 60$ に比べ，乱流領域に存在する縦渦が多く，準層流領域の面積は狭くなっている．乱流領域の下流では，縦渦があまり見られないが， $Re_e = 60$ に比べより太い低速ストリークが多く存在している．ストリーク間隔は，乱流領域内部で狭くなっている．一方，準層流領域に存在する低速ストリークは長く伸びている．また，乱流領域は， $Re_e = 60$ と同様に高速流体と低速流体に挟まれている．

図 3.13 に $Re_e = 80$ の瞬時場における縦渦と低速ストリークの分布を示す． $Re_e = 60$ に比べ，縦渦が全体に分布しているが，あまり見られない領域も存在する．また縦渦が多く集まる領域とまばらに存在する領域，観察できない領域がある．低速ストリークは， $Re_e = 60$ や $Re_e = 70$ と比較してストリーク間隔が狭く揺動も見られる．Tsukahara ら (2005) の結果では， $Re_e = 80$ で乱流 - 層流パターンが観測され，図 3.12($Re_e = 70$) の構造に近い．しかし，本計算では乱流 - 層流パターンに近い構造は得られなかった．

図 3.14 に $Re_e = 100$ の瞬時場における縦渦と低速ストリークの分布を示す． $Re_e = 80$ と同様，縦渦が領域全体に分布している．この縦渦は，空間的に多く存在するところがあり，クラスター化している．ただし，第二不変量の閾値を小さくすることで縦渦が一様に生じる．従って，低速ストリークの揺動が計算領域全体に見られ，この構造に空間的間欠性は見られないと結論できる．

図 3.15 は、同じ時間の瞬時場をチャンネル中心から、上壁側 (a) と下壁側 (b) に分けて示したものである。チャンネルの上下両壁で乱流 - 層流パターンが見られる。さらに乱流領域と準層流領域がチャンネルの上下でよく対応している。すなわち、各領域は下壁から上壁にわたって存在することがわかる。

図 3.16 に流れ方向渦度の二乗 ω_x^{+2} の分布、壁面垂直方向速度 v^+ とスパン方向速度 w^+ のベクトル線図を示す。図 3.16 は、図 3.15 における $x^+ = 300$ の断面であり、 $z^+ < 750$ が準層流領域、 $z^+ > 750$ が乱流領域に相当する。ここで、乱流領域と非乱流領域の区別は、図 3.15 の可視化結果に基づいて、縦渦が多く存在する領域を乱流領域、あまり見られない領域を準層流領域としている。図 3.16 より、乱流領域は渦がチャンネル全体に渡って存在し、特に壁面近傍でその数が顕著である。さらに、チャンネル中央を横切り対壁に向かう大規模な運動も確認できる。

図 3.17 に図 3.15(b) から $t^+ = 2235$ 経過した瞬時場を示す。乱流領域の縦渦、上流の高速流体と下流の低速流体の分布、乱流領域の傾きは異なる時間でもよく一致し、乱流 - 層流パターンは長時間安定して存在すると考えられる。次に、ストリークのスパン方向の揺動について乱流領域と準層流領域との違いを明確にするため流れ方向変動速度のスパン方向微分係数の分布を調べた。図 3.18 に図 3.15(b) の $y^+ \simeq 10$ での $\frac{\partial u'^+}{\partial z^+}$ の分布を示す。ストリーク構造は準層流領域で非常に長く存在する。一方、乱流領域はストリーク構造の間隔が狭く、揺動が大きいことがわかる。

$Re_e = 60, 70$ で観察された乱流 - 層流パターンは円管乱流で観測される乱流パフ構造と類似の構造を持つと考えられている (Tsukahara et al., 2005, Wygnanski et al., 1973, 1975)。しかし流れ方向に対して傾きを持って存在するなど、異なる性質も有する。パターンの傾きは初期場の違いにより正負のいずれかの値をとる。また、傾きの角度は計算領域のアスペクト比 (L_x/L_z) の影響を受ける。従って、本論文では、この角度について定量的に議論するのではなく、傾いた領域内の乱流構造を調べ、傾くメカニズムを明らかにすることに主眼が置かれている。なお、アスペクト比によらず乱流 - 層流パターンの発生は確認されている (Barkley and Tuckerman, 2007, Tsukahara et al., 2005, 2006, 2007)。本研究では、計算領域のアスペクト比は、過去の先行研究 (Tsukahara, 2007, 2010) に基づいて決めた。また、計算領域のアスペクト比を変えた計算結果は Appendix C で述べる。

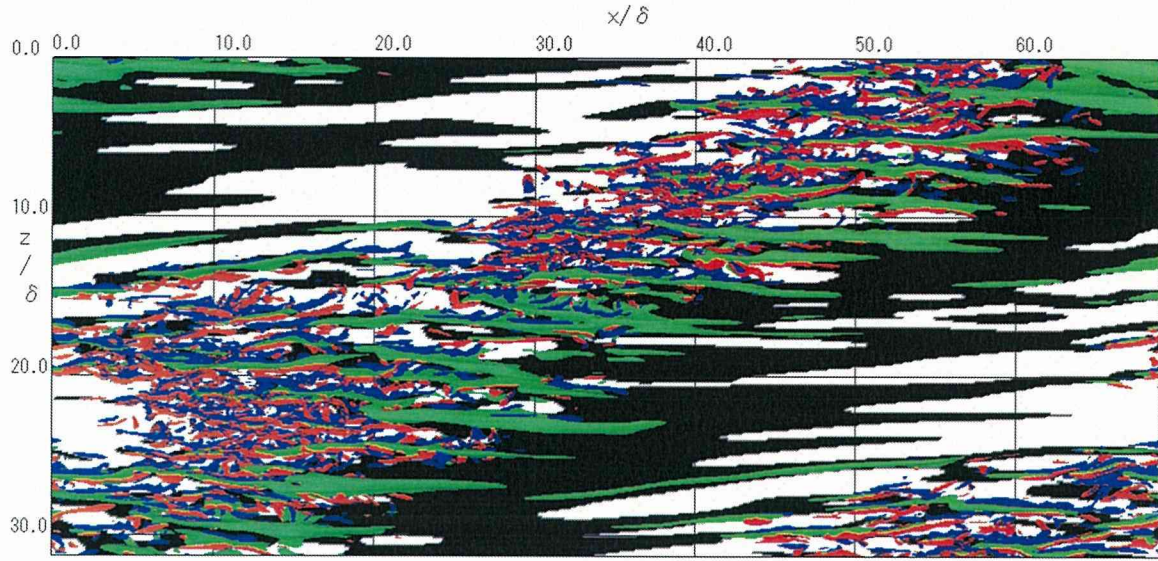


Figure 3.11 Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 60$ (LB). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red: $II^+ > 0.005$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $II^+ > 0.005$ and $\omega_x^+ < 0$. The visualized volume is the lower half of the computational box.

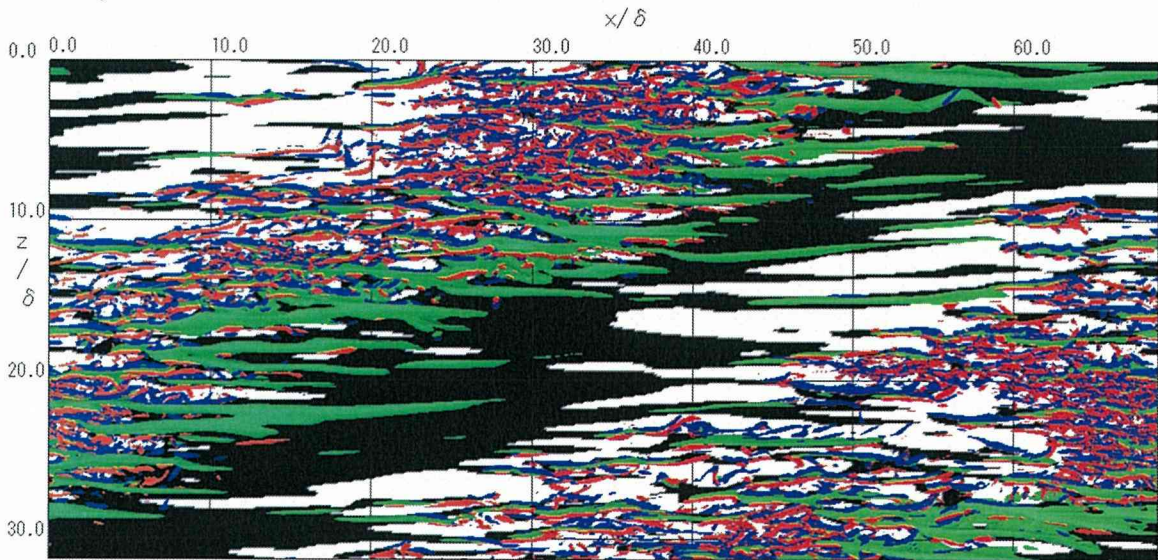


Figure 3.12 Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 70$ (LB). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red: $II^+ > 0.005$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $II^+ > 0.005$ and $\omega_x^+ < 0$. The visualized volume is the lower half of the computational box.

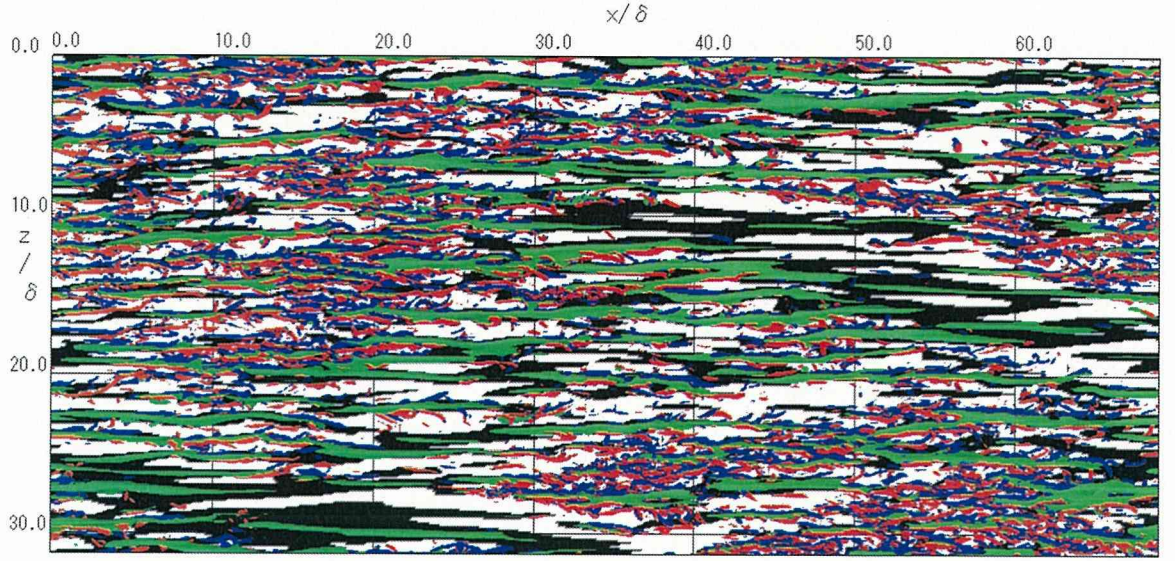


Figure 3.13 Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 80$ (LB). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red: $II^+ > 0.01$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $II^+ > 0.01$ and $\omega_x^+ < 0$. The visualized volume is the lower half of the computational box.

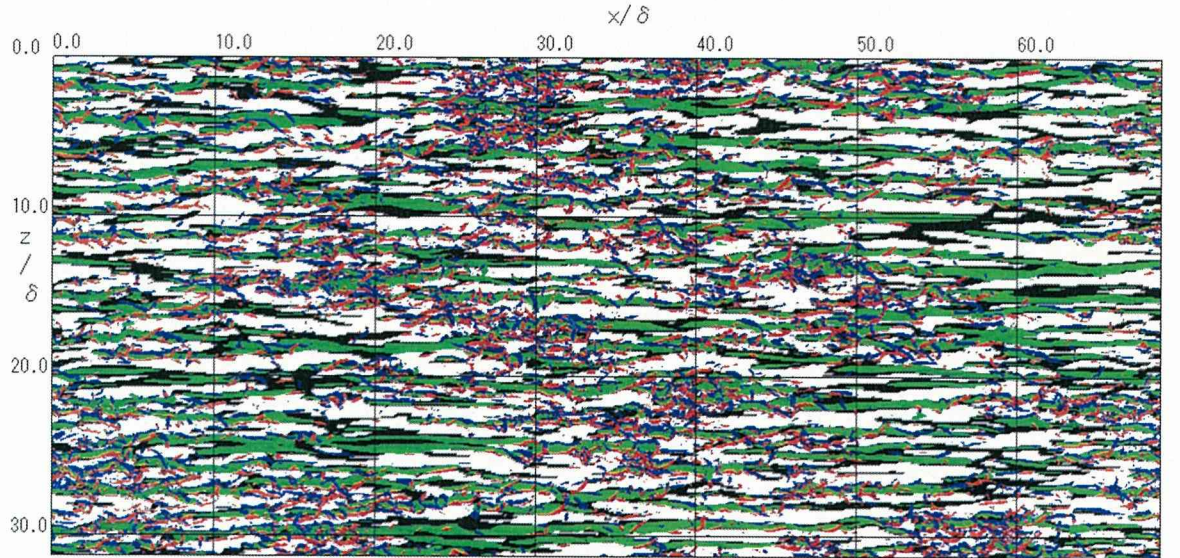


Figure 3.14 Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices for $Re_e = 100$ (LB). Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red: $II^+ > 0.01$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $II^+ > 0.01$ and $\omega_x^+ < 0$. The visualized volume is the lower half of the computational box.

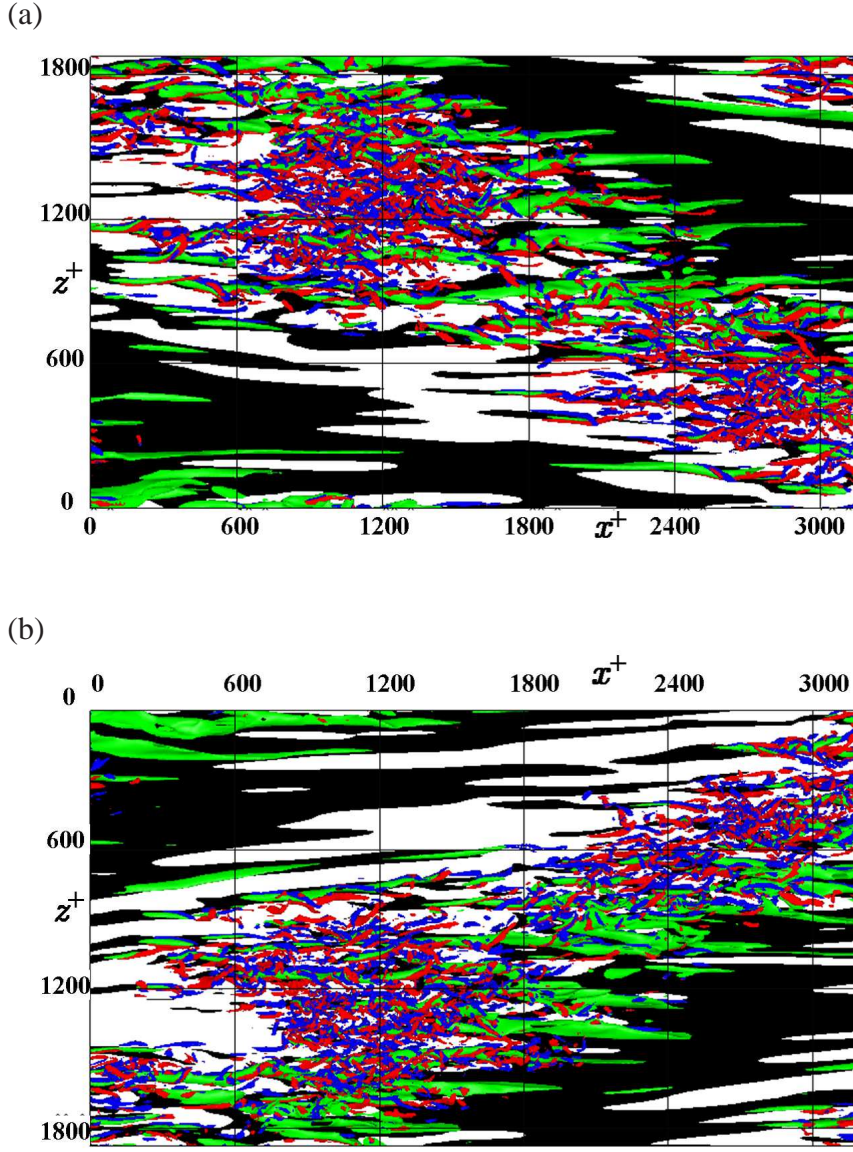


Figure 3.15 Instantaneous distributions of low-speed streaks and quasi-streamwise vortices at both upper- and lower-wall for sides for $Re_e = 60$ (LB). (a) and (b) represent the upper- and lower-channel sides viewed from the channel center, respectively. Green: $u'^+ = -3$, black regions: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, red: $H^+ > 0.05$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $H^+ > 0.005$ and $\omega_x^+ < 0$.

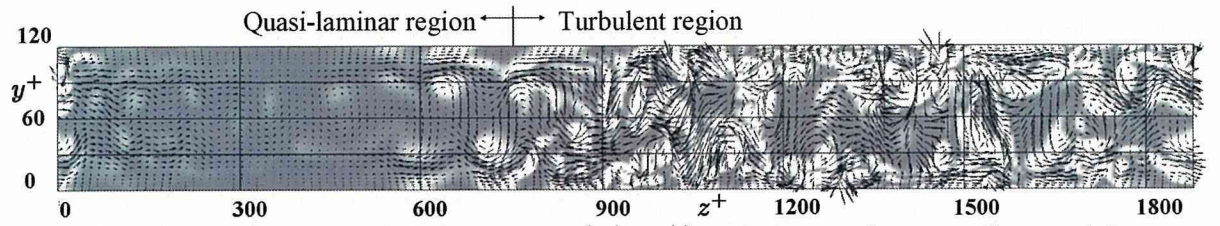


Figure 3.16 Instantaneous velocity vectors (v^+ , w^+) and square of streamwise vorticity ω_x^{+2} in the typical cross-streamwise plane for $Re_e = 60$. Gray to white, $\omega_x^{+2} = 0$ to 0.01.

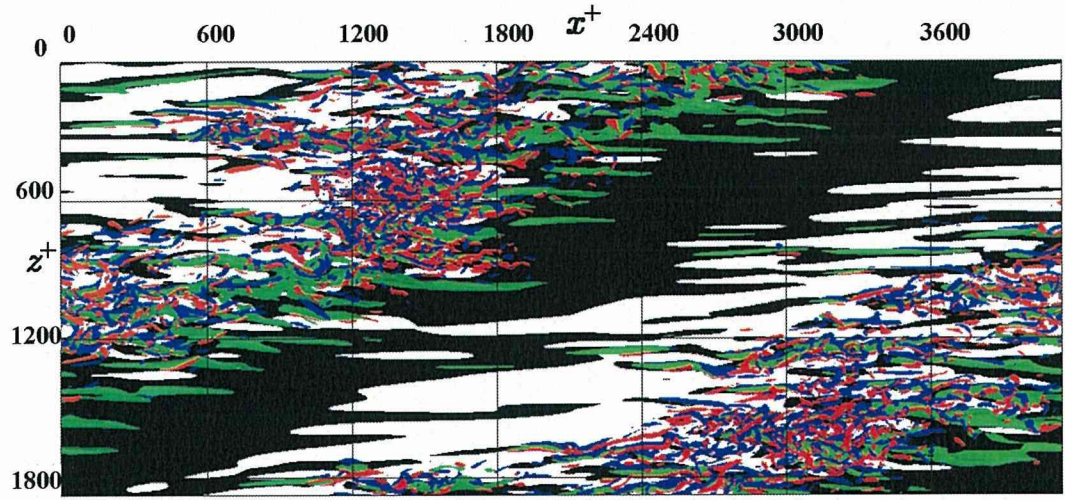


Figure 3.17 Flow of Fig.3.15(b) after $t^+ = 2235$.

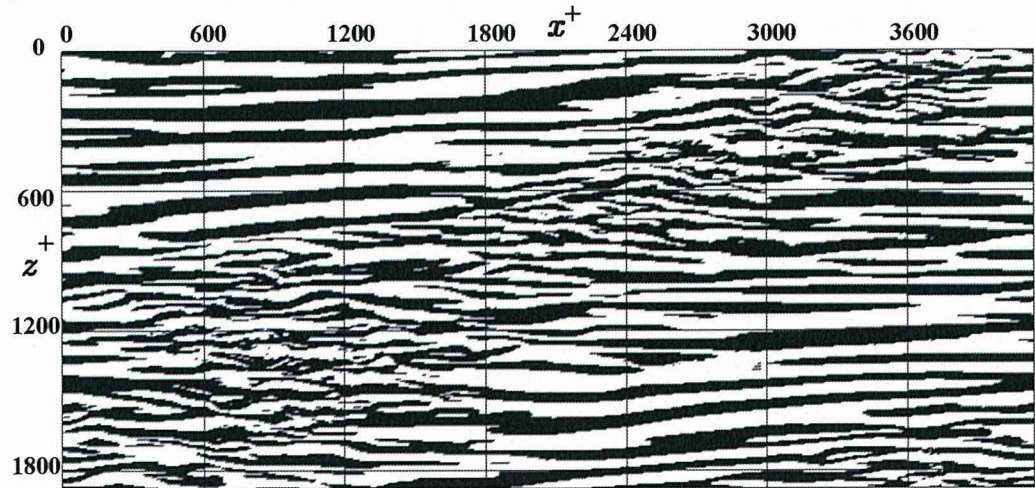


Figure 3.18 Instantaneous distributions of streaky structures in the same flow as Fig.3.15(b). Black regions represent $\frac{\partial u'^+}{\partial z^+} < 0$ at $y^+ \simeq 10$.

3.3 統計量に及ぼすレイノルズ数依存性と計算領域の影響

各レイノルズ数における乱流統計量を以下に示し、その乱流構造の変化を議論する．表 3.1 に C_f と Re_m および Re_e の平均値を示す．MB と LB の差は、 $Re = 100$ ではみられないが、レイノルズ数が低下するほど顕著となる．また、図 3.19 に、バルクレイノルズ数 Re_m と壁面摩擦係数 C_f の結果を Patel ら (1969)、Kim ら (1978)、Tsukahara ら (2005, 2006, 2007) および Iida ら (1998) と共に示す． C_f は Re_m の減少に伴い、Dean(1978) の相関式と Patel ら (1969) の実験結果に沿って増加する． $Re_m \geq 2000$ では、計算領域の違いは見られない．一方、 $Re_m \leq 2000$ ($Re_e \leq 70$) では、MB が Patel らの実験や Iida ら (1998) 結果 (SB) と一致する．LB は、Dean(1978) の相関式や Tsukahara ら (2007) の結果と一致し、計算領域の大きさの影響により差異が生じる．しかし、SB と MB の $Re_e = 60$ においても層流とはならない．これは、乱流を維持する最小スケールであるミニマルチャネル流 (Jimenez and Moin, 1991) より計算領域が大きいことによる．

図 3.20 に内層パラメータで無次元化した平均速度分布を Patel ら (1969)、Iida ら (1998) および Tsukahara ら (2005, 2006, 2007) の結果とともに示す． $Re_e = 100$ においても、対数則と一致せず、外層で対数則からわずかに上昇する． Re_e の低下とともに、対数則から大きく逸脱するようになり、粘性底層の増加が見られる．LB における $Re_e = 60$ は、Patel ら (1969) による $Re_m = 1725$ と比較して、低い値をとる．これは、乱流 - 層流パターンが安定して存在するため、レイノルズ応力が大きいためであると考えられる．一方、MB は外層で大きな値を示す．これは C_f が低い状態の存在によるものである． $Re_e = 70$ と $Re_e = 100$ では計算領域の影響は見られない．

図 3.21 に MB、図 3.22 に LB の変動速度の RMS 値を Iida ら (1998) および Tsukahara(2007) の結果とともに示す．ここで示す変動速度、特に流れ方向成分は、その瞬時場での平均速度からの変動値として求めており、全時間平均した平均速度からの変動値と異なる． u_{rms}^+ はレイノルズ数の低下とともにピークがそれぞれ減少する．一方、乱流 - 層流パターンが観察できる LB の $Re_e = 60, 70$ においては、チャンネル中央で大きな値をとる．これは、チャンネル中央で乱流領域の前後に存在する高速流体と低速流体のためと考えられる． $Re_e = 60$ を Iida ら (1998) の結果と比較する． u_{rms}^+ は、Iida ら (1998) に比べ $y^+ \simeq 15$ におけるピークが低く、 v_{rms}^+ は高い．これは、Iida ら (1998) の結果が $Re_e = 80$ からレイノルズ数の減少過程で、 C_f がほぼ一定値を保ち、振動しない遷移過程の値であるためであると考えられる．この過程

において，ストリークが強く存在するが，縦渦のような乱れはあまり見られないと考えられる．また， w_{rms}^+ は乱流 - 層流パターンが観察される LB の $Re_e = 60, 70$ で大きな値を示す．これは，乱流 - 層流パターンが大きなスパン方向速度を有することを示唆する．

図 3.23 に MB のレイノルズ応力 $-\overline{u'^+v'^+}$ と全せん断応力 τ_{total}^+ の分布を示す．全せん断応力は，レイノルズ応力と粘性によるせん断応力の和であり，定常状態では $\tau_{total}^+ = 1 - y^+/Re_e$ の直線となる．図 3.23 より，全せん断応力は直線分布を示しており，定常である． $Re_e = 60$ において，大きな流量の変動を伴い，流れが非定常であったが，統計量の算出に用いたサンプリング数が十分であることを示す．レイノルズ応力は，レイノルズ数の低下に伴い減少するが，その極大は $y^+ = 20 \simeq 30$ である． $Re_e \geq 70$ で，レイノルズ応力は過去のものとの差異は見られない． $Re_e = 60$ で，本計算と Iida ら (1998) の結果は，ピークがチャンネル中央に移動するなど明らかな差が見られる．これは RMS 値の考察でも述べたとおり Iida ら (1998) の結果が遷移過程の値であるためと考えられる．この遷移過程では $y^+ \leq 20$ の壁面近傍でレイノルズ応力の低下が見られるが， $y^+ \geq 20$ の上方では，大きなレイノルズ応力が存在し，乱流の維持に貢献すると考えられる．

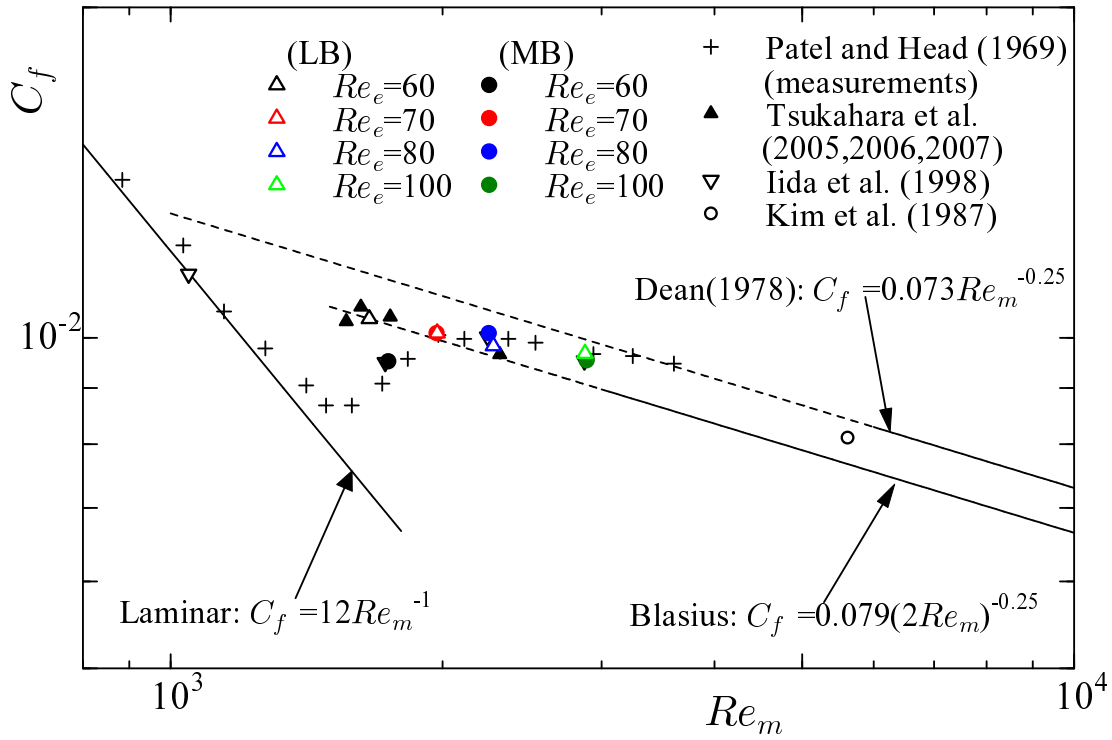
図 3.24 に LB のレイノルズ応力と全せん断応力の分布を示す．全せん断応力の分布より定常であることがわかる．レイノルズ数の低下とともにレイノルズ応力は減少するが，図 3.23 に示す MB に比べ，乱流 - 層流パターンが発生する $Re_e = 60$ と 70 でレイノルズ応力は大きい．特に， $Re_e = 60$ では壁面近傍で大きく，乱れが多く存在することを示す．

図 3.25 に MB の乱流エネルギー k^+ の収支を示す．生成項はレイノルズ数の減少と共にピークが壁面から離れ減少する．それに伴い，散逸項も減少する．特に，乱流拡散は，レイノルズ数の低下により壁面への輸送が小さくなる傾向が見られる．

図 3.26 に LB の乱流エネルギー k^+ の収支を示す．レイノルズ数の低下により生成項は減少するが，ピークの位置は MB ほど壁面から離れない．さらに，散逸項と壁面への乱流拡散項は $Re_e = 60$ では MB と異なり増大する．これは壁面近傍に乱れが多く存在し，また，壁面への乱れの輸送が活発に起こることを示す．

Table 3.1 Reynolds numbers and skin friction coefficient in cases MB and LB.

	Re_e $(= \frac{u_e \delta}{\nu})$	Re_m $(= \frac{2U_m \delta}{\nu})$	Re_c $(= \frac{2U_c \delta}{\nu})$	C_f $(= \frac{\tau_w}{0.5\rho U_m^2})$
MB	60	1747	2318	9.51×10^{-3}
	70	1972	2486	1.01×10^{-2}
	80	2251	2772	1.01×10^{-2}
	100	2888	3462	9.61×10^{-3}
LB	60	1660	2172	1.05×10^{-2}
	70	1972	2494	1.01×10^{-2}
	80	2277	2806	9.88×10^{-3}
	100	2875	3456	9.68×10^{-3}

Figure 3.19 Skin friction coefficient C_f and bulk Reynolds number Re_m for both MB and LB.

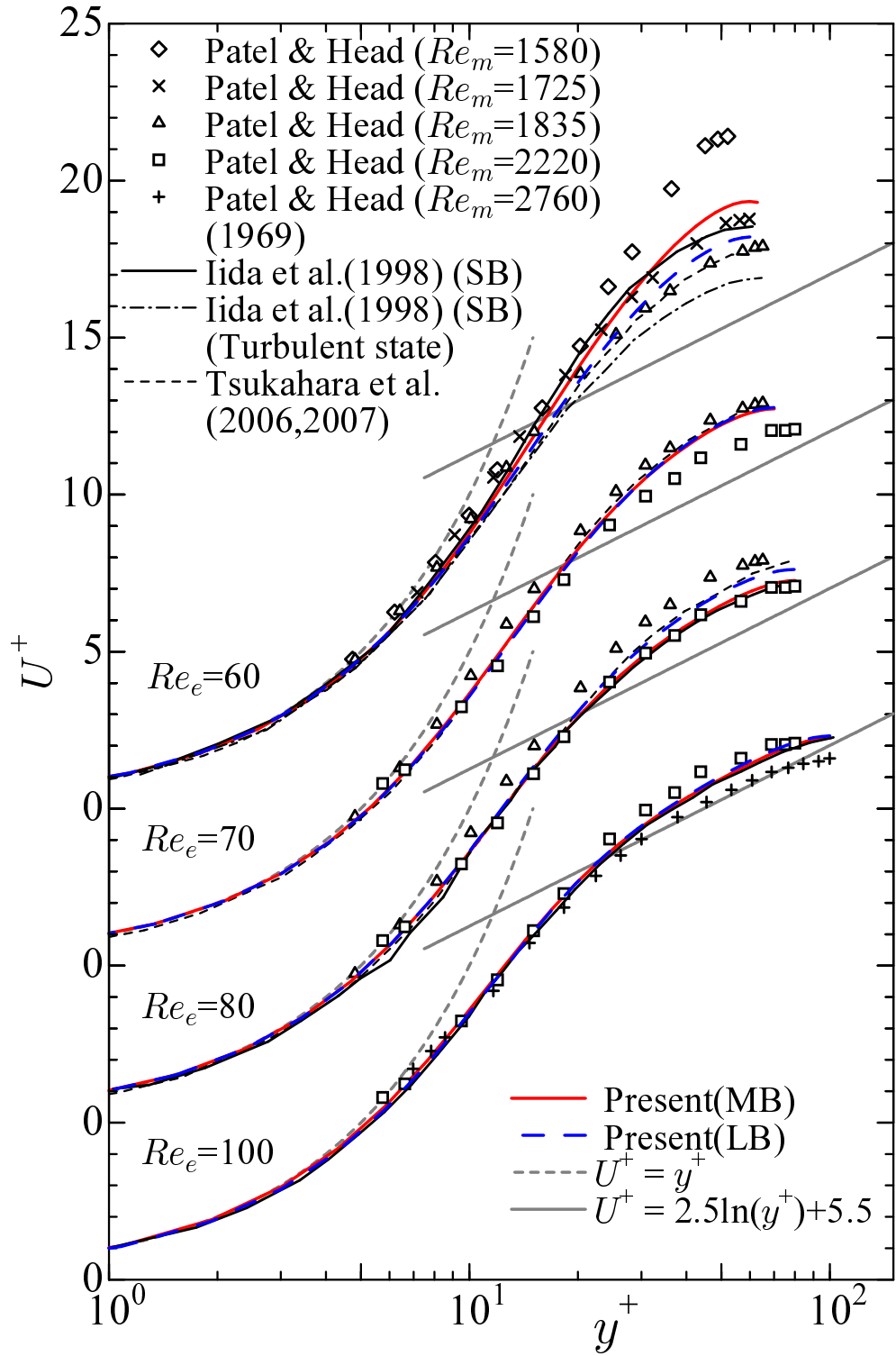
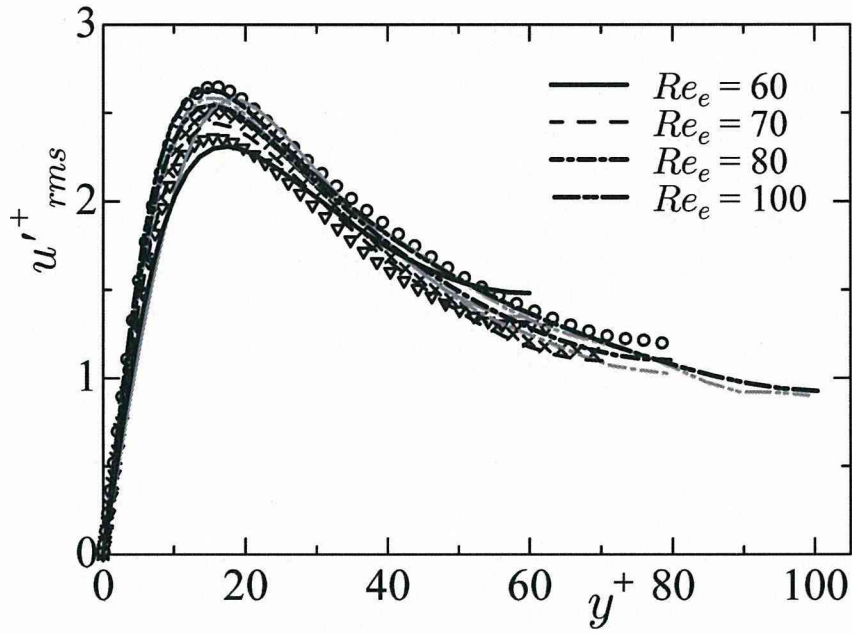
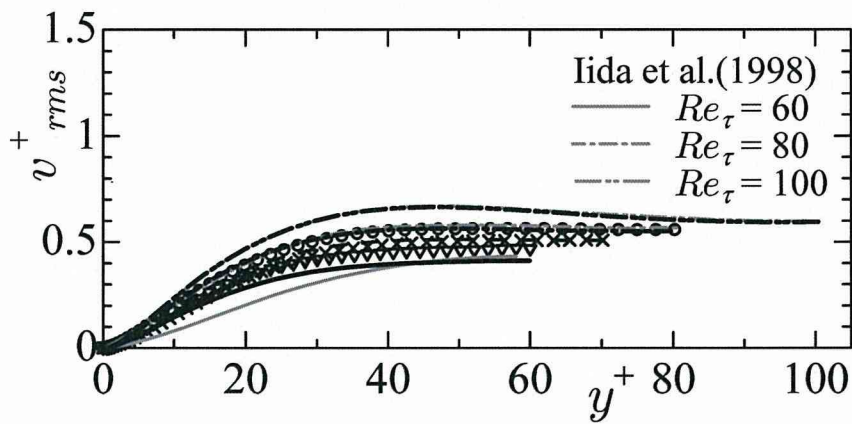


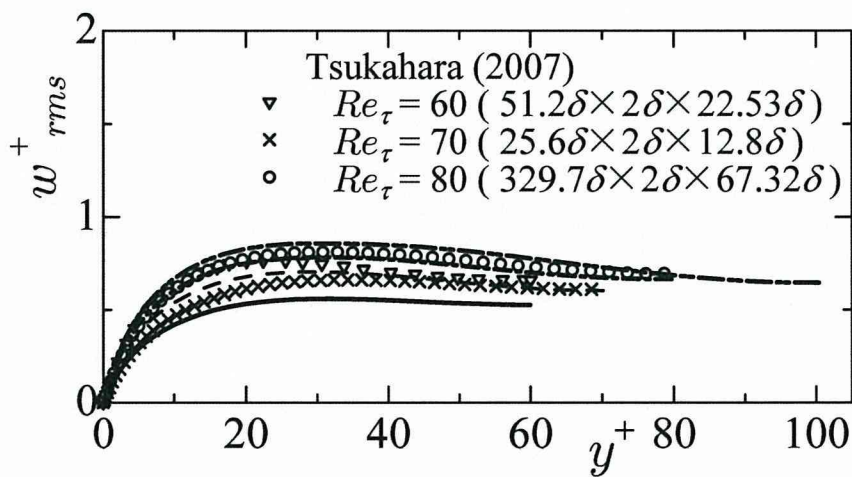
Figure 3.20 Logarithmic plot of mean velocity profiles for both MB and LB.



(a) Streamwise velocity fluctuation u'_{rms}^+ .

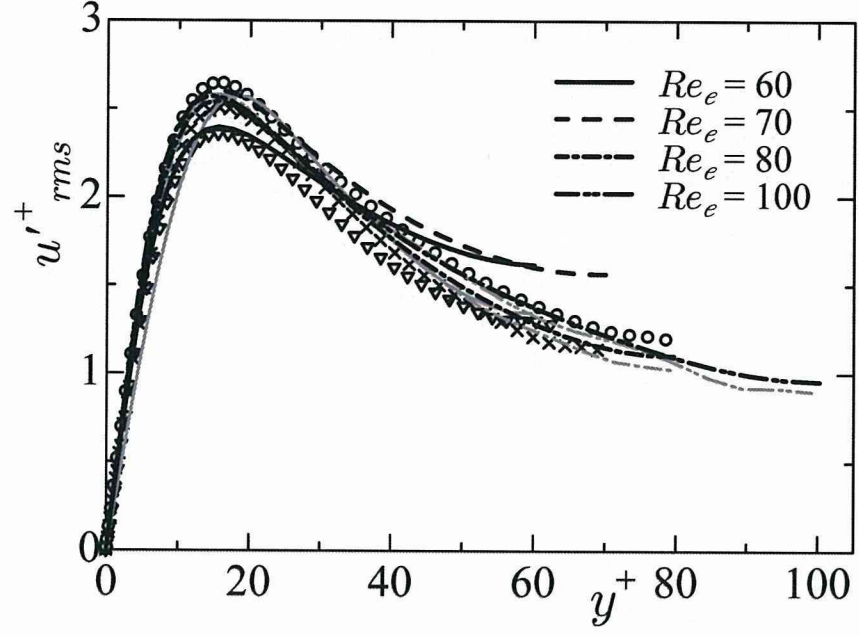


(b) Wall-normal velocity fluctuation v'_{rms}^+ .

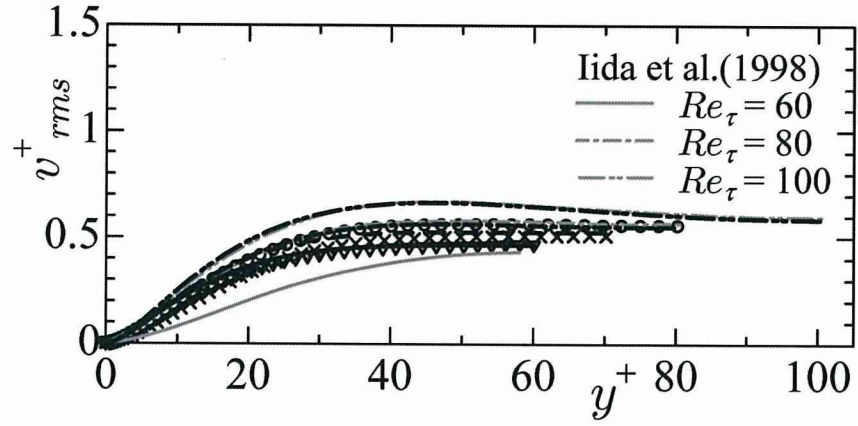


(c) Spanwise velocity fluctuation w'_{rms}^+ .

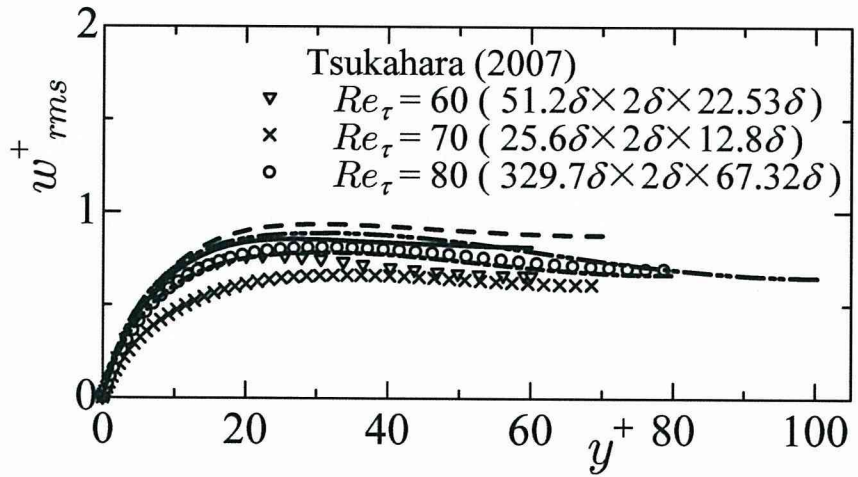
Figure 3.21 R.m.s. values of velocity fluctuation $u_i'^+_{rms}$ (MB).



(a) Streamwise velocity fluctuation u'_{rms} .



(b) Wall-normal velocity fluctuation v'_{rms} .



(c) Spanwise velocity fluctuation w'_{rms} .

Figure 3.22 R.m.s. values of velocity fluctuation u'_{rms} (LB).

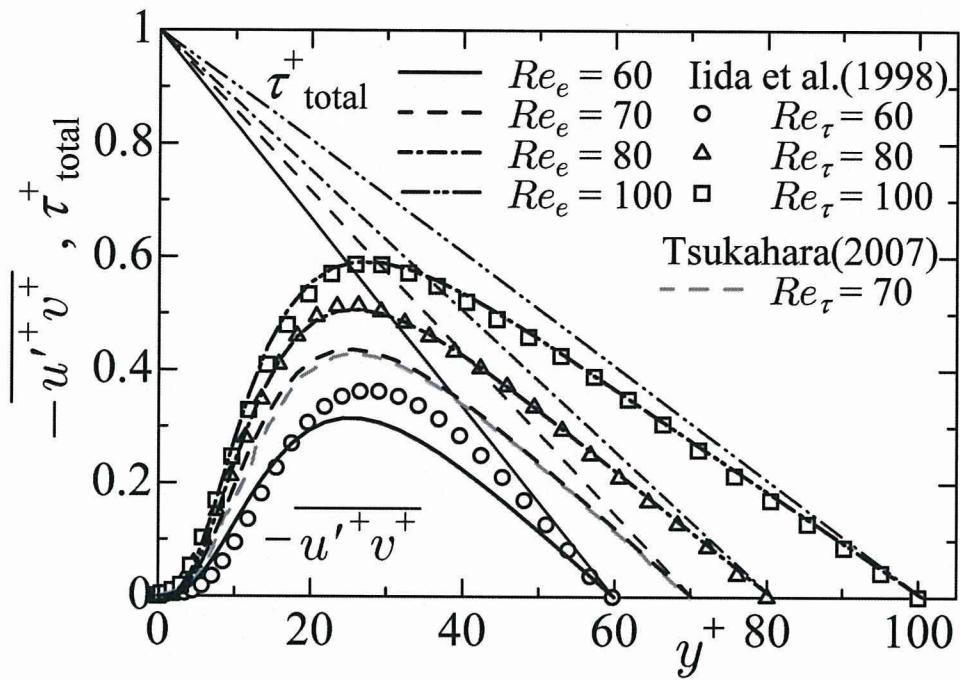


Figure 3.23 Reynolds shear stress $-\overline{u'^+v'^+}$ and total shear stress τ_{total}^+ (MB).

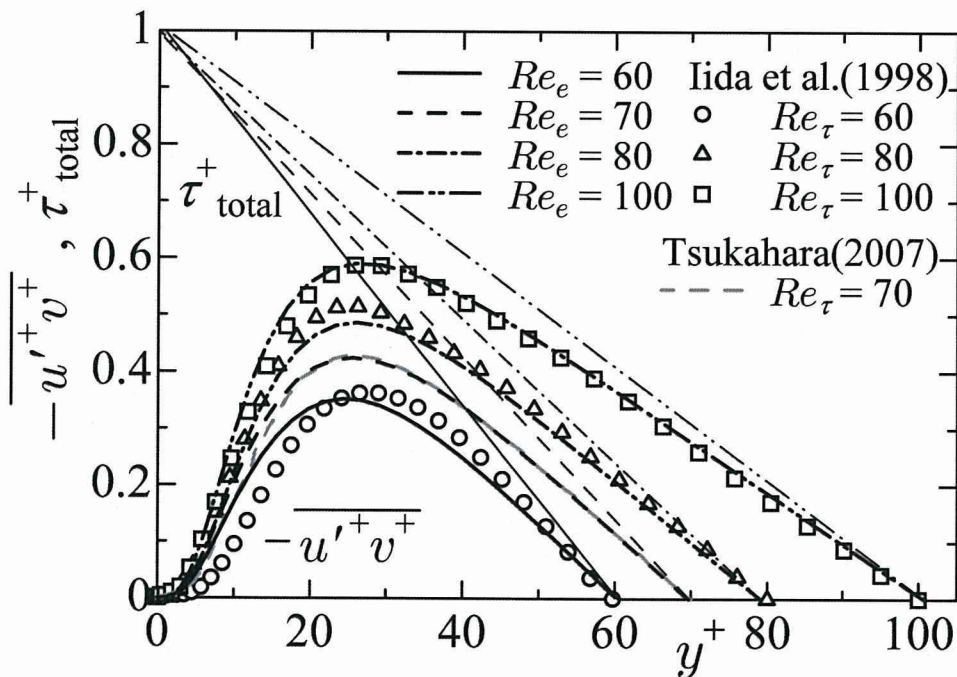


Figure 3.24 Reynolds shear stress $-\overline{u'^+v'^+}$ and total shear stress τ_{total}^+ (LB).

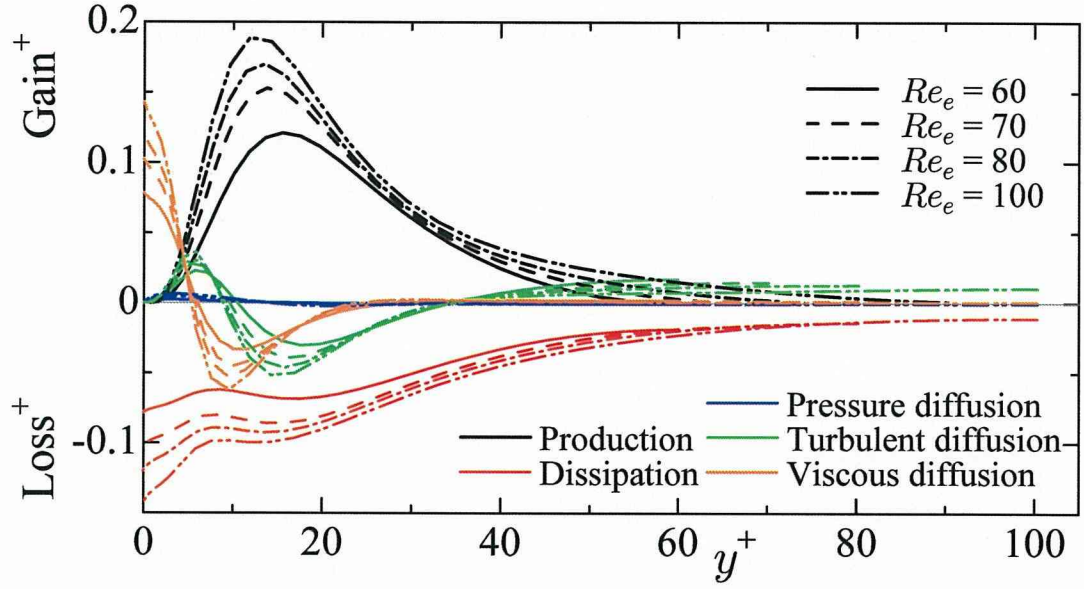


Figure 3.25 Budget of turbulent kinetic energy k^+ (MB).

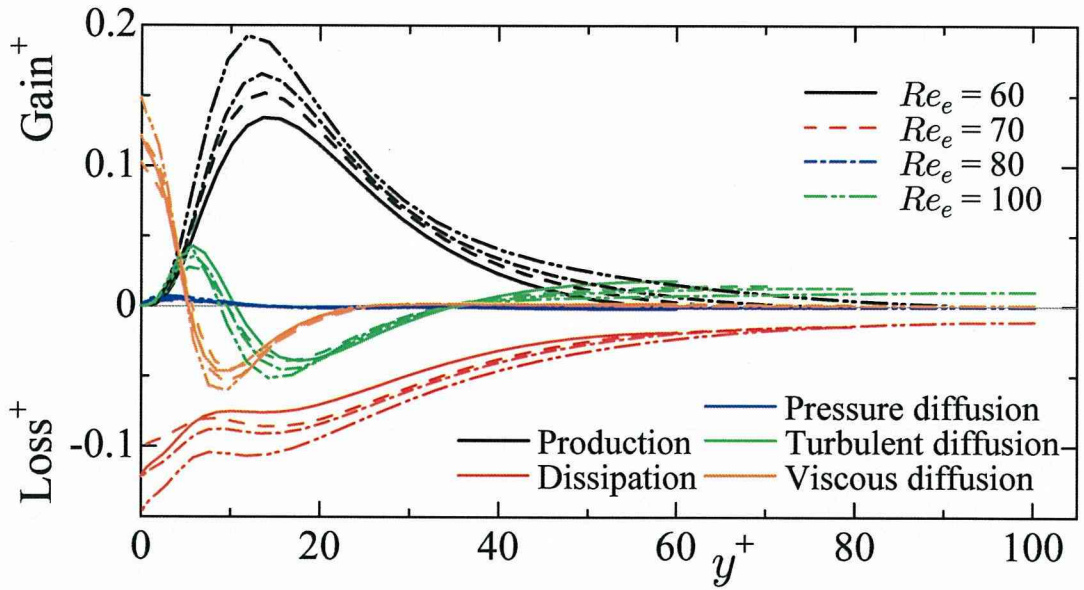


Figure 3.26 Budget of turbulent kinetic energy k^+ (LB).

第4章

大規模間欠構造の維持機構

4.1 乱流 - 層流パターンの移流速度

第3章で示したようにLBの乱流 - 層流パターンは、長時間その形状を維持する。これはパターンの移流速度がチャンネル全体に渡って一定であることを示唆する。このことを明確にするため、 $Re_e = 60$ の結果について定量的に移流速度を計算する。

図3.15, 図3.17に示されるように、乱流領域の上流と下流に、それぞれ大規模な高速と低速の流体が定常的に確認される。従って、本論文では、流れ方向変動速度を用いてパターンの移流速度を算出する (Priymak et al., 2004)。各 y 断面における流れ方向変動速度の二点相関係数を経過時間 dt と x 方向への移動距離 dx の変数として算出した。二点相関係数は、以下のように定義される。

$$R_{11}(dx, dt) = \frac{\overline{u'(x, t)u'(x + dx, t + dt)}}{u_{rms}'^2} \quad (4.1)$$

図4.1にチャンネル中央での R_{11} の分布を示す。二点相関の極大点は原点から直線的に下流方向へ移動する。この極大点のなす直線の傾き dx^+/dt^+ を最小二乗法で算出し、パターンの移流速度 U_p^+ とする。

図4.2に各 y の位置でのパターンの移流速度を示す。また、計算領域全体の平均速度を塚原 (2007) の平均速度分布と共に示す。平均速度は塚原 (2007) とほぼ一致する。一方、各 y^+ での移流速度 U_p^+ はほぼ一定となる。これは乱流領域が形状を保って流れ方向に移動することと対応する。ここで、移流速度のチャンネル全体にわたる平均値は $\bar{U}_p^+ = 14.1$ で、バルク平均速度 $U_m = 13.8$ とほぼ一致する。これは、Tsukahara ら (2005) が目視でパターンの移流速度をバルク平均速度とみなした結果とも一致する。

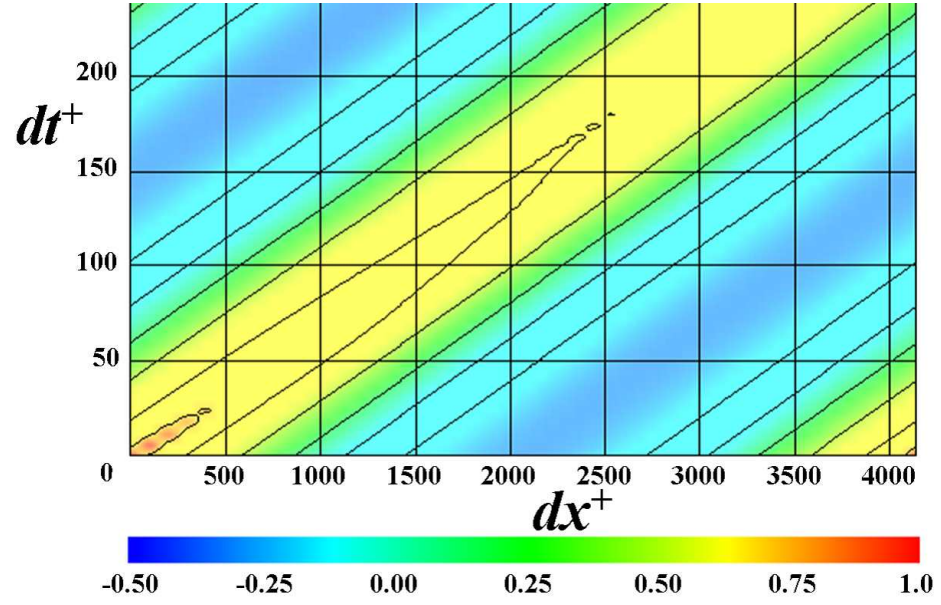


Figure 4.1 Distribution of R_{11} as a function of dx^+ and dt^+ in the channel center. The value of R_{11} is represented in color.

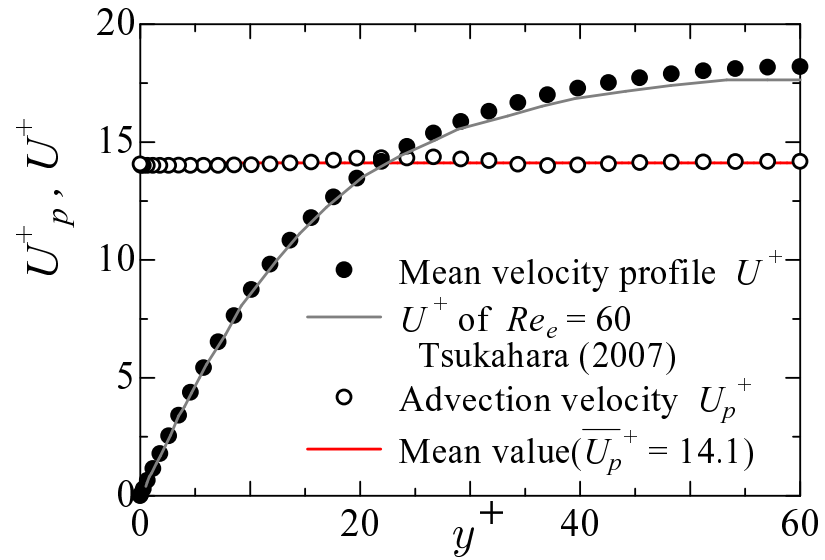


Figure 4.2 Distribution of advection velocity U_p and mean velocity U . Mean velocity of Tsukahara (2007) is in good agreement with our result.

4.2 時間平均による大規模構造の抽出

乱流 - 層流パターンの平均構造を抽出するため移流速度 \bar{U}_p で移動する座標系によって各速度成分の変動値 ($u' = u - U, v, w$) を時間平均した．すなわち，移流速度の分だけ座標系を移動して時間平均を行った．各速度変動の平均値は $\tilde{\cdot}$ で表し以下の式で定義される．

$$\tilde{u}_i(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T u_i(x + \bar{U}_p t, y, z, t) dt \quad (4.2)$$

ただし， $t = 0$ での速度分布は，図 3.15(b) に対応する．

図 4.3(a),(b) にチャンネル中央 $y^+ = 60$ と壁面近傍 $y^+ = 10$ における平均場のベクトル線図 (\tilde{u}', \tilde{w}) を示す．図の灰色で示す領域は，図 3.15(b) の縦渦が多い乱流領域である． $y^+ = 60$ と $y^+ = 10$ の両面において，乱流領域を取り巻く壁面垂直方向渦度をもつ大きな循環がみられる．そして，乱流領域はチャンネル中央と壁面近傍の両者で上流に高速流体，下流に低速流体で特徴付けられる．

図 4.4(a),(b) に \tilde{u}^{++} と \tilde{w}^{++} の $x - y$ 断面の等値線を示す．ただし， $x - y$ 断面は図 4.3 の赤い矢印の断面に対応する．図 4.4(a) では，高速流体がチャンネル中央で乱流領域へ流入し，上流側の層流と乱流領域の境界で，せん断層 $\partial \tilde{u}^{++} / \partial y^+$ を生成する．一方，壁面近傍の乱流領域では上流側の高速流体が，下流側の低速流体へと侵入し衝突する．さらに，図 4.4(b) より，乱流領域と準層流領域の界面は，高速流体と低速流体のみでなく，スパン方向速度とも相関する．チャンネル中央の乱流領域の上流側で，負のスパン方向速度が生じる．一方，下流では壁面近傍で正のスパン方向速度が生じる．これは，上流からの高速流体の侵入による再分配のためと考えられる．

図 4.5 は，図 4.3 の青の矢印で示した $y - z$ 断面での \tilde{v} と \tilde{w} のベクトル線図を示す．図 4.5 の矢印で示すように，チャンネル中央で生成されたスパン方向速度は壁面へ向う．一方，壁面近傍で生成されたスパン方向速度はチャンネル中央へ向かう．このスパン方向速度は，乱流領域の周りに存在する循環を形成し，パターンの維持構造に大きく関与する．この点は，4.4 節「大規模構造の維持機構」において詳細に議論する．

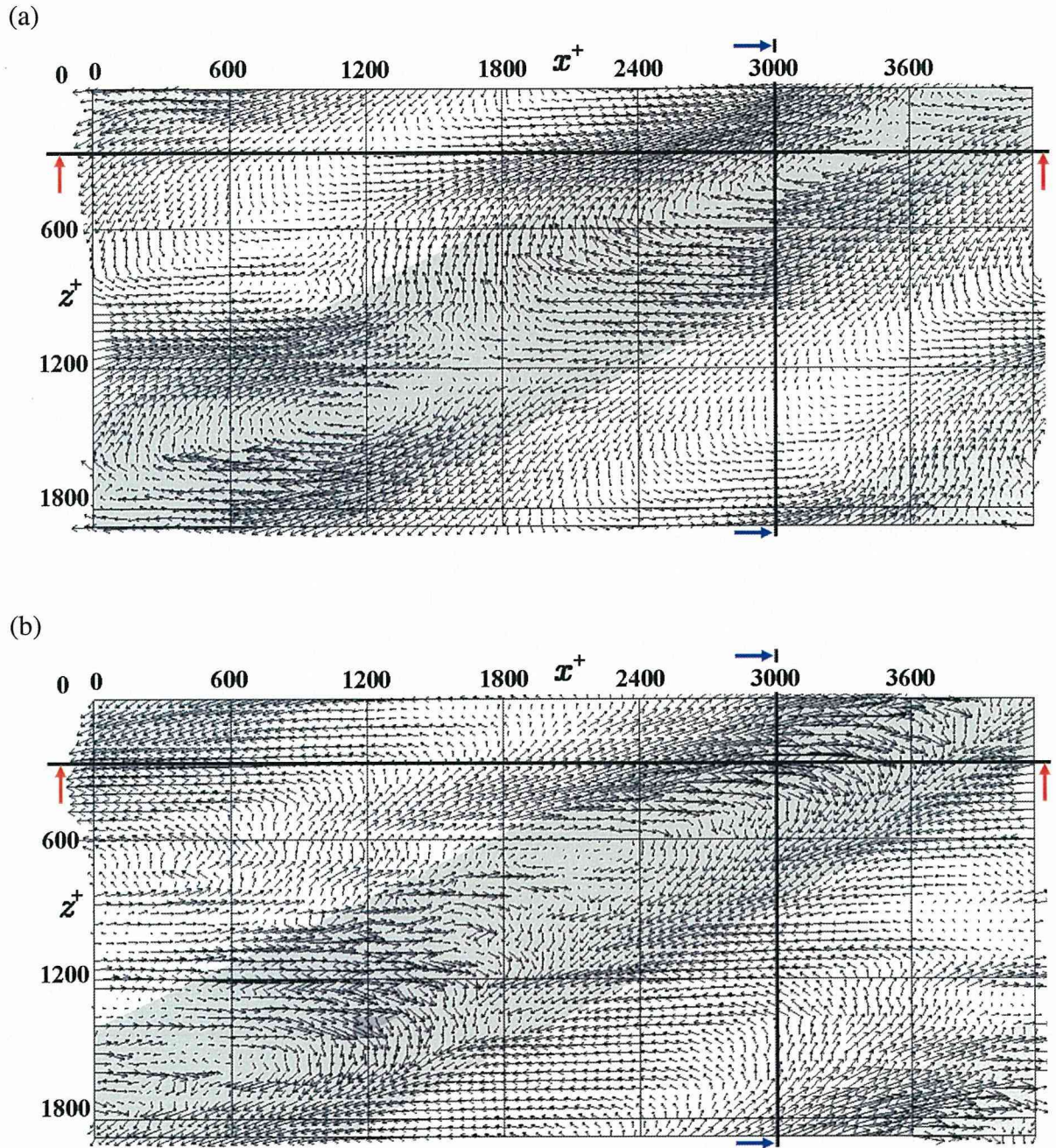
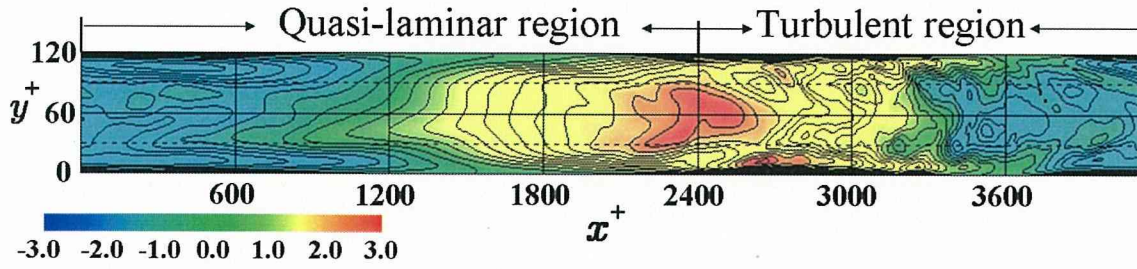


Figure 4.3 Time-averaged velocity vectors (\tilde{u}', \tilde{w}) of the velocity fluctuations. Gray regions represent the turbulent regions. (a) Channel center. (b) $y^+ = 10$.

(a)



(b)

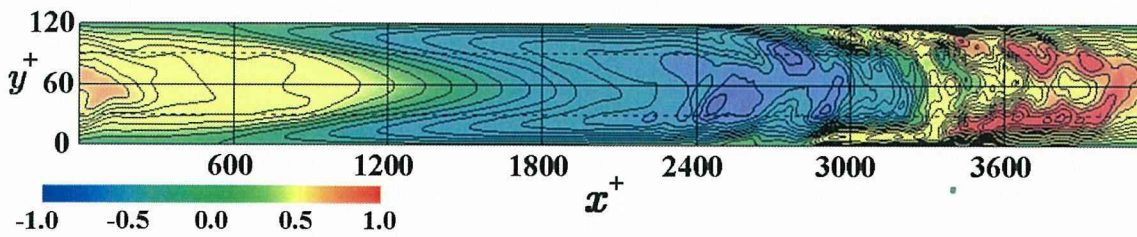


Figure 4.4 Contours of conditionally averaged velocity fluctuations in the $x-y$ plane indicated by red arrows in Figs. 4.3(a) and (b). (a) \tilde{u}'^+ ; contour interval is 0.25. (b) \tilde{w}'^+ ; contour interval is 0.1.

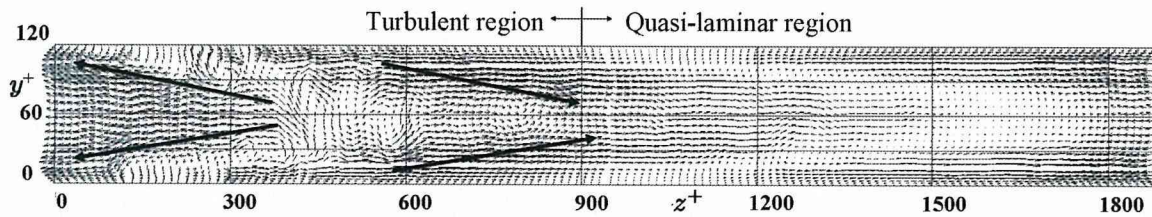


Figure 4.5 Time-averaged velocity vectors (\tilde{v}, \tilde{w}) of averaged velocity fluctuations in the cross streamwise plane indicated by blue arrows in Figs. 4.3(a) and (b). Black arrows inside the figure represent upward and downward large-scale motion.

4.3 時空間平均による大規模構造の抽出

前節では、乱流 - 層流パターンの移流速度 \bar{U}_p で移動する座標系で平均を行い、平均構造を取り出した。本節では、図 4.6 に示すように、このパターンが構造方向（綫の方向）に一様であると仮定し、構造方向にも平均を行った。構造方向は計算領域の対角方向（流れ方向に対して約 25 度）に一致すると仮定した。この条件平均量を $\langle \rangle$ であらわし、以下の式で定義する。

$$\langle u_i \rangle_{(x,y)} \equiv \frac{1}{T} \frac{1}{L_z} \int_0^T \int_0^{L_z} u_i \left(x + \bar{U}_p t + \frac{L_x}{L_z} z, y, z, t \right) dz dt \quad (4.3)$$

なお、乱流領域の中心はチャンネル中央で $\langle u' \rangle = 0$ となる位置とし、また図の中心に配置した。一方、図の両端は準層流領域の中心と対応する。図 4.7(a) に流れ方向変動速度 $\langle u' \rangle$ を示す。乱流領域の上流と下流で高速流体と低速流体が存在する。また、図 4.4(a) との比較により乱流領域と準層流領域の界面は、高速流体と低速流体のピークの位置と関係している。ここで、 $x^+ \simeq -1000$ の位置を乱流領域の上流における界面、 $x^+ \simeq 1000$ の位置を乱流領域の下流における界面とする。図 4.4(a) の時間平均のみでは乱流領域の下流で低速流体のピークははっきりとしないが、図 4.7(a) ではより明確に生じる。これは構造方向への平均の有効性を示している。また、乱流領域の上流では、壁面近傍とチャンネル中央で $\langle u' \rangle$ がピークを取り、せん断層 $\langle \partial u' / \partial y \rangle > 0$ が形成される。壁面近傍の高速領域は乱流領域の中心から下流にまで及ぶ。

図 4.7(b) に壁面垂直方向速度 $\langle v \rangle$ を示す。下壁側において、乱流領域の上流で負、下流側で正の値を取り、上壁側では反対の分布となる。よって、乱流領域の上流で壁面に向かう平均流、下流でチャンネル中央に向かう平均流がそれぞれ存在することがわかる。これは、二次流れがチャンネル全体で存在することを示唆するものである。

図 4.7(c) にスパン方向速度 $\langle w \rangle$ を示す。乱流領域の上流側ではチャンネル中央で負のピークを取り、乱流領域から離れるに従って壁面近傍へとピークが移動する。一方、下流側では壁面近傍にピークが存在し、乱流領域から下流側に離れるに従ってピークがチャンネル中央へと移動する。よって、上流と下流のみならず壁面近傍とチャンネル中央で速度分布は非対称となる。

図 4.8(a) にレイノルズ応力 $-\langle u'v \rangle$ の分布を示す。乱流領域の中心でピークを取り、準層流領域では小さいが 0 とはならない。また、ピークを取る位置が、乱流領域の上流では下流に比べ壁面近傍により近いことがわかる。

図 4.8(b), (c) にスウィープとイジェクションをそれぞれ示す。ただし、スウィー

ブは, $u' > 0$, $v < 0$ の条件下の $\langle u'v \rangle$ の分布を, イジェクションは, $u' < 0$, $v > 0$ の条件下の $\langle u'v \rangle$ の分布を示している. 図 4.8(b), (c) よりスウィープのピークは乱流領域の上流, イジェクションのピークは下流側に存在することがわかる. これは乱流領域の上流と下流にそれぞれ高速と低速流体が存在することによって考えられる. 従って, 3 章の図 3.26 で考察したように, 低速流体と高速流体を伴う大規模二次流れの発生が $Re_e = 60$ での乱流エネルギーの収支の特異性となっていると考えられる.

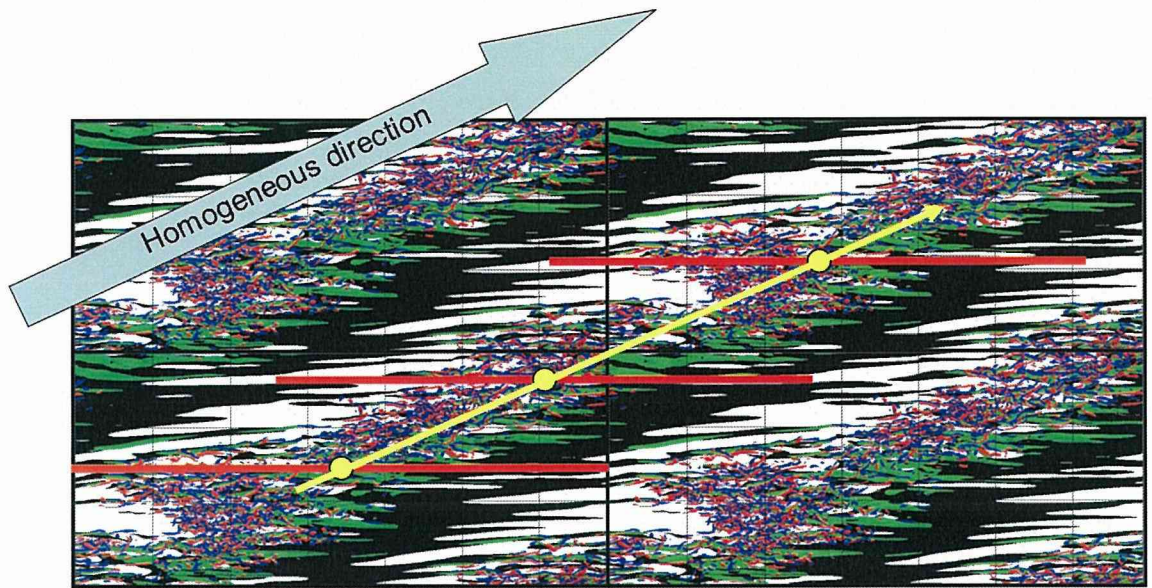


Figure 4.6 Schematics of averaging procedure represented by $\langle \rangle$. Turbulent structure is assumed to be homogeneous in the string direction represented by the blue arrow. Hence, each $x - y$ plane represented by red line, is shifted in the streamwise direction and averaged by overlapping each center point represented by the yellow dot.

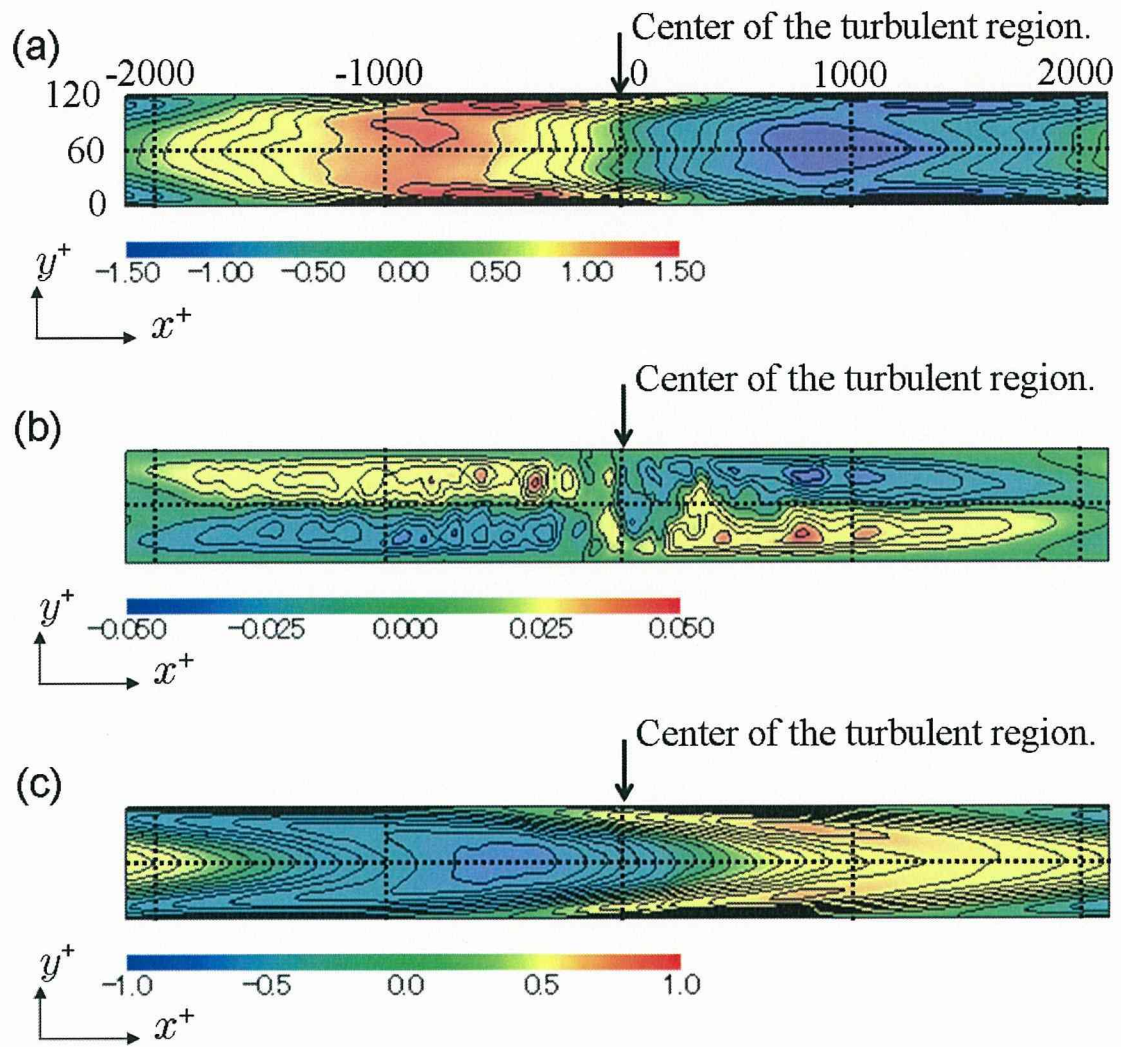


Figure 4.7 Contours of both temporally and spatially averaged velocity fluctuations in the $x - y$ plane. (a) Streamwise velocity fluctuation, (b) wall-normal velocity fluctuation and (c) spanwise velocity fluctuation. Contour intervals are 0.2, 0.01, 0.1 for (a), (b) and (c), respectively. The center of the turbulent region is indicated by arrows.

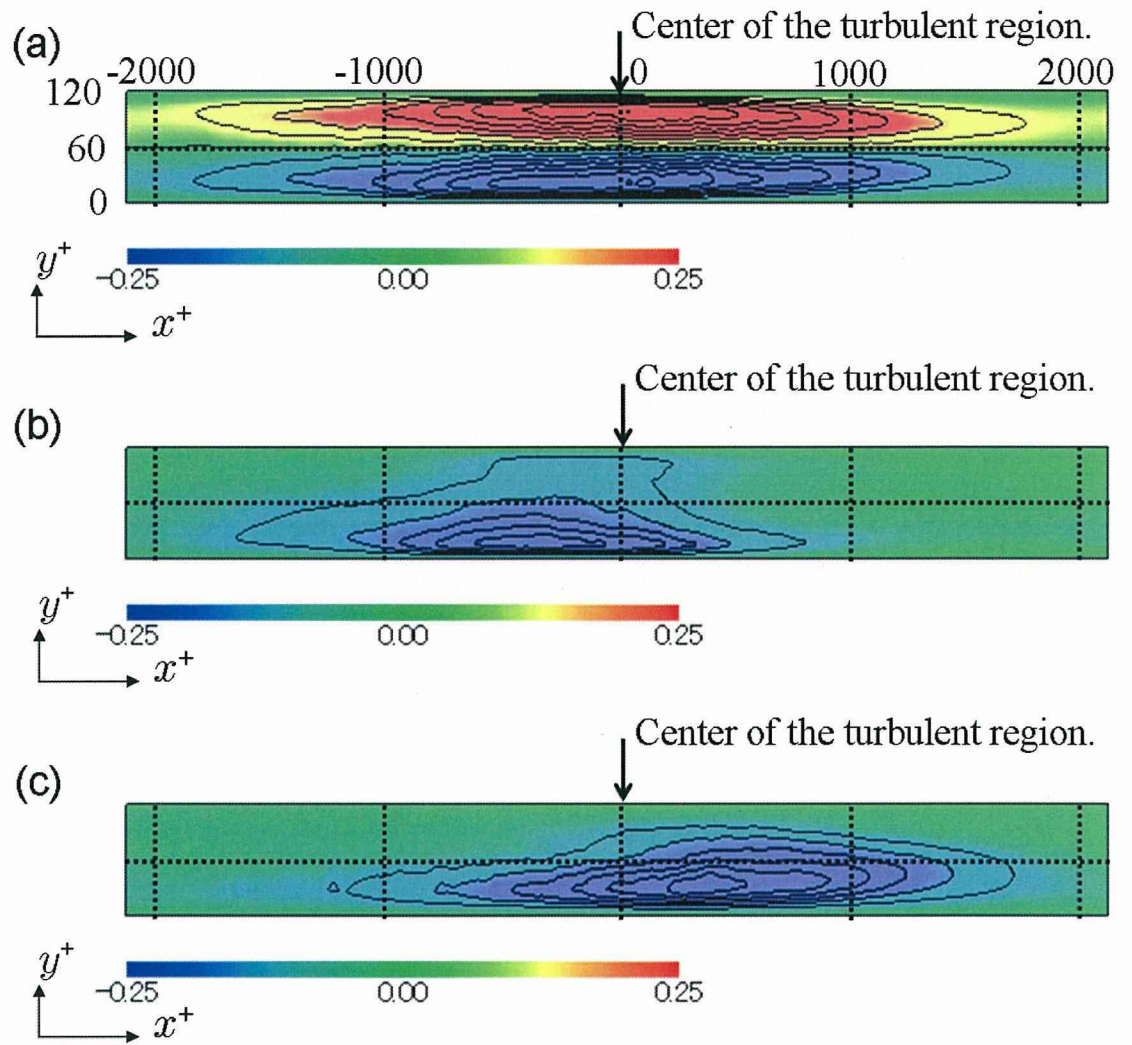


Figure 4.8 Contours of both temporally and spatially averaged Reynolds shear stress, sweep and ejection in the $x - y$ plane. (a) Reynolds stress, (b) sweep and (c) ejection. Contour intervals are 0.1. The center of the turbulent region is indicated by arrows.

4.4 大規模構造の維持機構

円管内乱流について，Shimizu ら (2009) は，高速と低速流体の衝突による強いせん断層の形成が乱流パフの維持を担うことを示している．しかし，ポアズイユ乱流で見られる乱流 - 層流パターンは図 3.15 のように，流れ方向に対して乱流領域が傾き，円管との相違点も存在する．なお，この傾斜は図 1.1 に示すように各種平行平板間流れで共通して見られる (Barkley et al., 2007)．本節では乱流領域が長時間に渡り傾斜して安定に存在するメカニズムを考察する．

乱流領域の界面は上流に高速流体，下流に低速流体が下壁から上壁に渡って存在する．さらに，そこでは，流れ方向速度からの再分配によって駆動されるスパン方向速度を伴ない，この流れによって駆動される大きな循環が存在する．

以下では，平均の渦度とその輸送方程式を議論し，大規模な流れの維持メカニズムを考察する．図 4.9(a) に流れ方向渦度を示す．流れ方向渦度は乱流領域でピークを取る．さらに，上壁側と下壁側では渦度の符号は逆となる．乱流領域と流れ方向渦度の対応は，乱流領域内に流れ方向渦度を持つ循環が存在すること示唆し，上壁側と下壁側で循環の向きが異なることを示している．これは，図 4.7 に示す壁面垂直方向速度からも明らかである．さらに，上壁側と下壁側では乱流 - 層流パターンの流れ方向に対する傾きが逆である．従って， $\langle \omega_x \rangle$ の符号はパターンの傾く方向と対応しており， $\langle \omega_x \rangle$ が維持されるメカニズムがパターンが時間的に安定であることと関係する．

次に，図 4.9(b) に壁面垂直方向渦度を示す．壁面垂直方向渦度は，乱流領域でチャネル全体が負となる．これは，傾いた乱流領域の上流と下流にそれぞれ存在する高速流体と低速流体のためである．

乱流領域が流れ方向および壁面垂直方向の渦度とよく対応することより，渦度輸送方程式からその維持メカニズムを考察する．流れ方向および壁面垂直方向渦度輸送方程式は以下で示される．

$$\frac{D\omega_x}{Dt} = S_{11}\omega_x + S_{12}\omega_y + S_{13}\omega_z + \nu\nabla^2\omega_x \quad (4.4)$$

$$\frac{D\omega_y}{Dt} = S_{21}\omega_x + S_{22}\omega_y + S_{23}\omega_z + \nu\nabla^2\omega_y \quad (4.5)$$

ここで， S_{ij} は変形速度テンソルの ij 成分を示し， $S_{ij} \equiv 0.5(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ である．また， ω_x と ω_y ， ω_z はそれぞれ， x 方向， y 方向， z 方向の渦度である．二次流れは長い時間スケールで維持されるので，線形項が支配的であると仮定すること

で，線形項のみを残し，式 (4.3) で定義した平均を施すと以下ようになる．

$$\frac{D \langle \omega_1 \rangle}{Dt} = - \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.6)$$

$$\frac{D \langle \omega_2 \rangle}{Dt} = - \left\langle \frac{\partial v}{\partial z} \right\rangle \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.7)$$

まず，流れ方向渦度について考察する．図 4.10 に $\langle \partial w / \partial x \rangle$ の分布を示す．図 4.10 より，乱流領域で $\langle \partial w / \partial x \rangle$ は正となることがわかる．よって， $-\langle \frac{\partial w}{\partial x} \rangle \cdot \frac{\partial U}{\partial y}$ は，渦度生成に必ずプラスの寄与をする．さらに， $\langle \partial w / \partial x \rangle$ の分布と $\langle \omega_x \rangle$ の分布が酷似していることも，線形項により $\langle \omega_x \rangle$ が維持されていることを示唆している．

次に，壁面垂直方向渦度について考察する．図 4.5 より明らかに $\langle \partial v / \partial z \rangle$ は乱流領域でゼロではない．その結果，式 (4.7) より乱流領域で $\langle \omega_y \rangle$ が維持される．このため，図 4.3 に見られる $\langle \omega_y \rangle$ の循環が生じると考えられる．

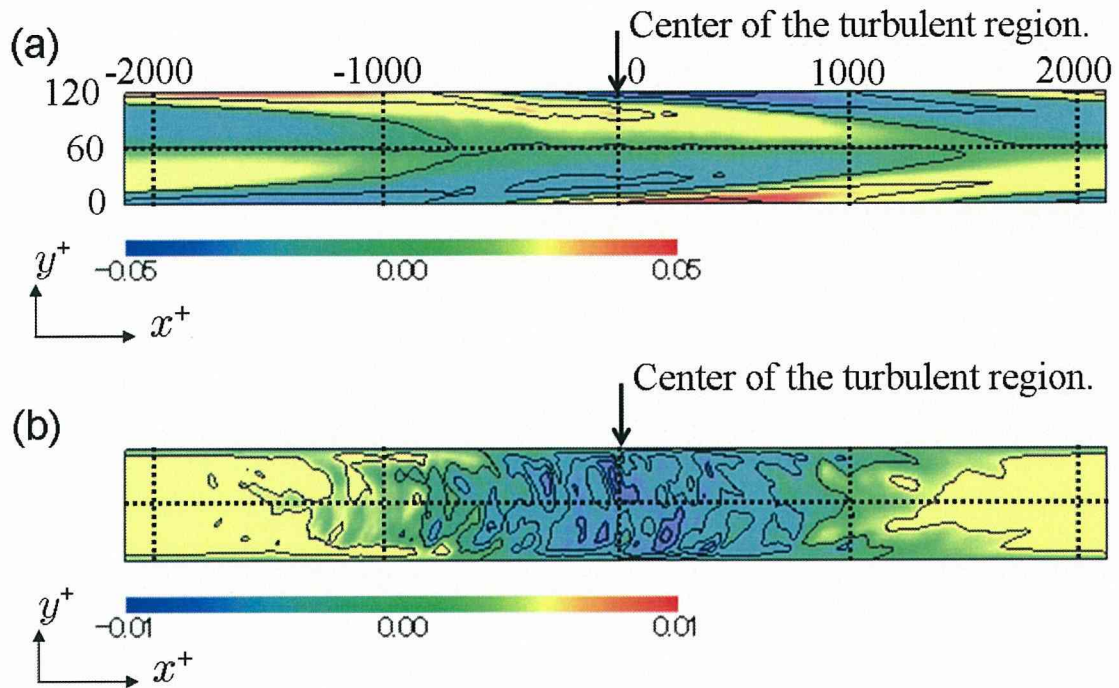


Figure 4.9 Contours of both temporally and spatially averaged streamwise and wall-normal vorticities in the $x - y$ plane. (a) Streamwise vorticity. (b) Wall-normal vorticity. Contour intervals are 0.03 and 0.003 for (a) and (b), respectively. The center of the turbulent region is indicated by arrows.

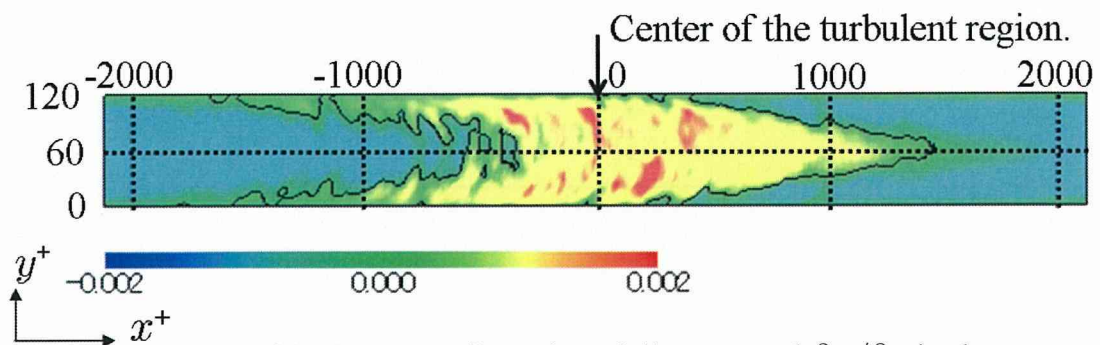


Figure 4.10 Contours of both temporally and spatially averaged $\partial w / \partial x$ in the $x - y$ plane. Contour interval is 0.002. The center of the turbulent region is indicated by arrow.

4.5 乱流 - 層流パターンの運動量輸送機構

図 4.11 に時空間平均したバルクレイノルズ数 $Re_{m\ Local}$, 摩擦レイノルズ数 $Re_{\tau\ Local}$, 摩擦係数 $C_{f\ Local}$ の分布を示す．ここで，バルクレイノルズ数は各 x 断面の平均流速 $\langle U_m \rangle$ と動粘性係数，チャンネル半幅で定義され流量を示す．また，摩擦レイノルズ数は各 x 断面の摩擦速度 $\langle u_{\tau} \rangle$ と動粘性係数，チャンネル半幅で定義される． $C_{f\ Local}$ は， $\langle u_{\tau} \rangle$ と $\langle U_m \rangle$ で定義される． $C_{f\ Local}$ は乱流領域の中心で最大値を取り，中心から離れるにしたがって減少する．そして，乱流領域の上流側の界面 ($x^+ \simeq -1000$) 付近で最小値を取る．しかし，最小値を取る位置は準層流領域の中心である図の両端 ($x^+ \simeq \pm 2073$) とは一致しない．一方， $Re_{m\ Local}$ は乱流領域の上流 ($x^+ \simeq -750$) で最大値，下流側の界面 ($x^+ \simeq 1000$) で最小値を取る．これは，流れ方向速度が上流側と下流側の界面で極値を取ることに由来するものであり，流れ方向に流量の差を生じることと対応する．なお，スパン方向への再分配が生じることにより連続の式（質量保存則）は満足される．一方， $Re_{\tau\ Local}$ は，上流 ($x^+ \simeq -500$) で最大値，下流側 ($x^+ \simeq 1200$) で最小値を取る．これは乱流領域の上流と下流に存在するスウィープとイジェクションに対応する（図 4.8）．ここで，乱流領域の上流と下流側での $C_{f\ Local}$ と $Re_{\tau\ Local}$ の増大と減少はそれぞれ，遷移と再層流化を示していると考察できる．従って，乱流遷移と逆遷移が定常的に乱流領域界面で生じているため，壁面から離れた領域で乱流 - 層流パターンの移流速度が平均速度に比べ小さくなると考えられる．

以下では，乱流領域及びその界面での運動量輸送機構についてこれまでの考察をまとめる．図 4.12 に $x - z$ 断面における上流の高速流体と下流の低速流体の相互作用を示す．上流側の高速流体と下流側の低速流体によって，乱流領域の中心では大規模な再分配が生じる．これにより，上流と下流で異方向のスパン方向速度が生成され，乱流領域全体にわたる $\langle \omega_x \rangle$, $\langle \omega_y \rangle$ を生成する．なお，流れ方向と平行に乱流領域が存在する場合は高速流体と低速流体の衝突が定常的に起こらない．また，スパン方向と平行に乱流領域が存在する場合にも，質量保存則の制約のため大規模な高速流体と低速流体が作られることは考えにくい．よって，乱流 - 層流パターンの維持には，流れ方向から傾くことが必要であると考えられる．一方，円管に見られる乱流パフは流れ方向に対して垂直に存在し (Wynnganski, 1973, 1975, Shimizu, 2009) , 有限のライフタイムを有し分裂と消滅を繰り返す (Nishi, 2008) . これにより平行平板間乱流における乱流 - 層流パターンが安定して存在するのは，乱流領域が流れ方向に傾きを持って存在するからであると考えられる．

図 4.13 に $x - y$ 断面における乱流領域の模式図を示す．まずチャンネル中央付近では，乱流領域上流に存在する高速流体が乱流領域へと侵入する．この高速流体は乱流領域に侵入後，乱流遷移し乱れを生成する．乱れが生成されると乱流拡散（スウィープとイジェクション）が活発化するため，下流側で流速は減少し，再層流化が生じる．従って，上流側での乱流遷移，下流側での再層流化のため乱流領域の移流速度は平均流速より遅くなると考えられる．なお，下流の低速流体は乱流領域を抜け，準層流領域で加速しさらに下流の乱流領域へと侵入する．一方，壁面近傍は乱流 - 層流パターンの移流速度が平均速度より速い．これは，チャンネル中央からの壁面近傍への乱流拡散のためであると考えられる．このため乱流領域下流に存在するイジェクションにより低速ストリークが作成され上流側へと移動し，上流の乱流遷移を助長する．乱流領域上流に存在する乱れは，その上流の層流領域へと取り残されて減衰する．これらの運動量輸送が定常的に生じ乱流 - 層流パターンの維持をなすと考えられる．

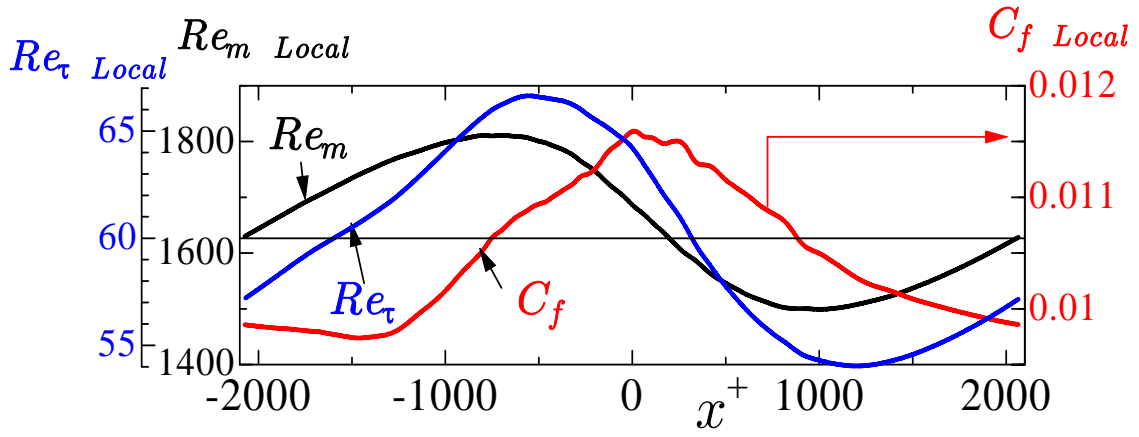


Figure 4.11 Distributions of $Re_{m \text{ Local}}$, $Re_{\tau \text{ Local}}$ and C_f in streamwise direction, they are determined by the conditionally averaged streamwise velocity $\langle u' \rangle$.

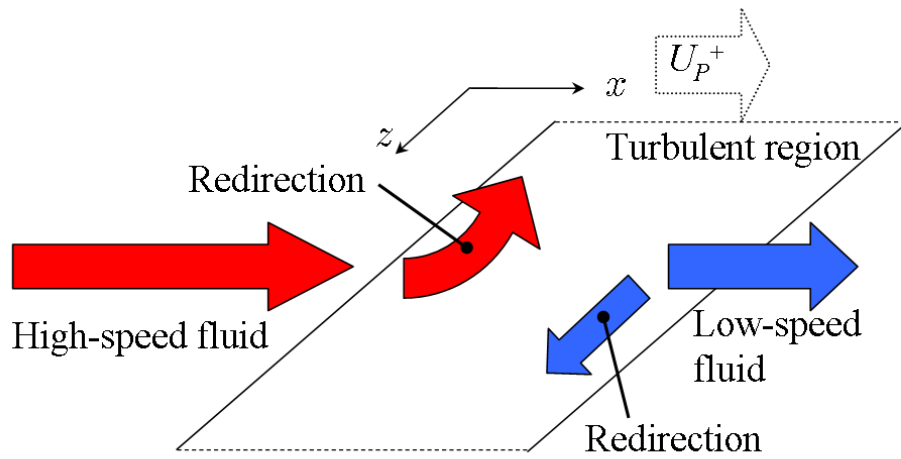


Figure 4.12 Schematics of large-scale flow around the turbulent region.

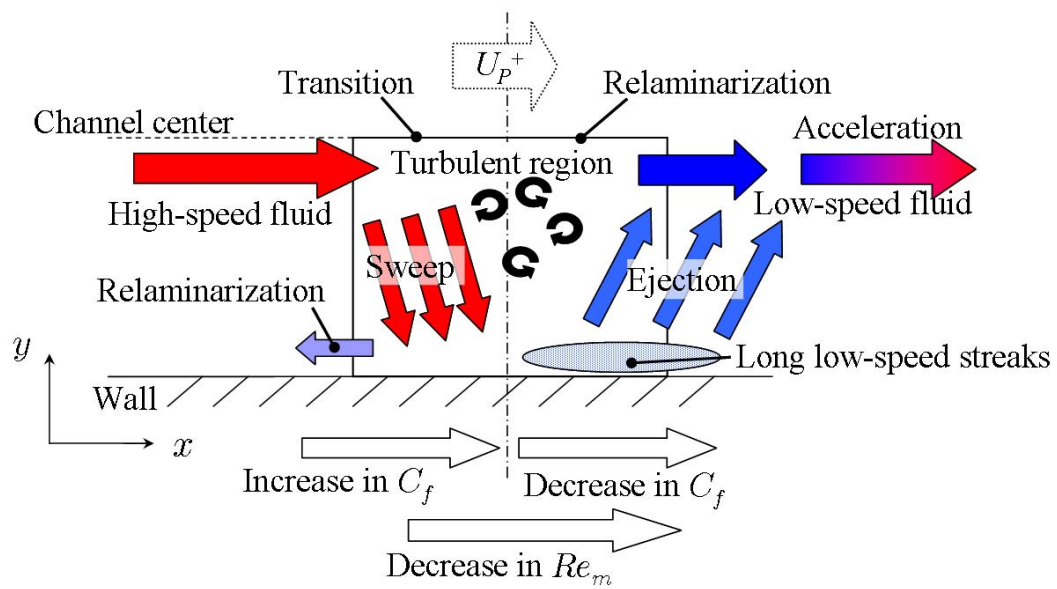


Figure 4.13 Schematics of momentum transfer in turbulent region and its interfaces with quasi-laminar region.

第5章

剛体回転の影響

5.1 緒言

ガスタービンなどの回転機械の性能評価には系の剛体回転が乱流に及ぼす影響を明らかにする必要がある．平均せん断の重畳下での剛体回転の影響は密度成層のそれと類似することが指摘されている．一方，せん断乱流における回転の効果を調べるのにポアズイコ乱流が頻繁に用いられる．スパン方向が回転軸の場合，ポアズイコ流れでは再層流化する安定側 (Suction side) と乱れを促進する不安定側 (Pressure side) に分かれる．即ち，平均速度勾配による平均渦度が剛体回転と同じ向きの場合には安定，異なる向きの場合には不安定となる．不安定側の壁面では，速度勾配，摩擦速度が増大する一方で，安定側では摩擦速度は減少する．従って，摩擦速度で定義されるレイノルズ数は，安定側で減少し，不安定側で増大する．

本研究では，低レイノルズ数のポアズイコ乱流で剛体回転の効果を調べる．安定側はほぼ層流化しているため，研究対象としているのは不安定側とする．

5.2 計算対象

スパン方向に角速度 Ω の剛体回転を負荷させたポアズイユ流の座標系を図 5.1 に示す。 $\Omega > 0$ の場合、下壁が不安定側 (Pressure side), 上壁が安定側 (Suction side) となる。

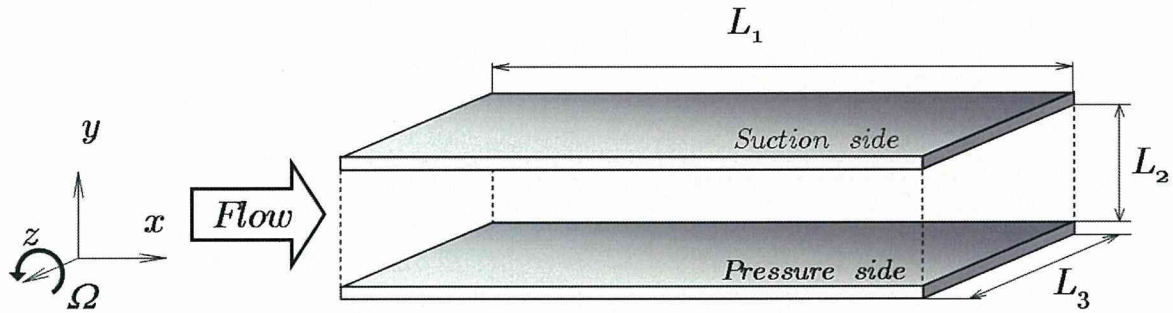


Figure 5.1 The geometry of computational domain with system rotation.

5.3 計算条件と計算手法

5.3.1 支配方程式

解析対象となる非圧縮性粘性流体の運動方程式 (Navier-Stokes 方程式), 連続の式は, スパン方向剛体回転を負荷すると以下のように示される。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{eff}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - 2\Omega (-u_2 \delta_{i1} + u_1 \delta_{i2}) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.2)$$

ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり, p_{eff} は遠心力を考慮した圧力である。

5.3.2 無次元化

次に，速度は圧力勾配による代表速度 u_e ，長さスケールはチャネル半幅 δ で無次元化する．

$$\begin{aligned} u_i^\times &= \frac{u_i}{u_e}, \quad x_i^\times = \frac{x_i}{\delta}, \\ p^\times &= \frac{p_{eff}}{\rho u_e^2}, \quad t^\times = \frac{t u_e}{\delta} \end{aligned} \quad (5.3)$$

式 (5.3) を式 (5.1), (5.2) に代入することにより，支配方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial u_i^\times}{\partial t^\times} + u_j^\times \frac{\partial u_i^\times}{\partial x_j^\times} = -\frac{\partial p^\times}{\partial x_i^\times} + \frac{1}{Re_e} \frac{\partial^2 u_i^\times}{\partial x_j^\times \partial x_j^\times} - Ro_e (-u_2^\times \delta_{i1} + u_1^\times \delta_{i2}) \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial u_j^\times}{\partial x_j^\times} = 0 \quad (5.5)$$

ここで， $Ro_e = 2\Omega\delta/u_e$ はローテーション数である．また， p_{eff}^\times は次式で定義される．

$$p_{eff}^\times = p^\times + \frac{1}{8} Ro_e^2 r^{\times 2} \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

さらに，式 (5.4) は，非線形項を回転型に分解することで次式を得る．ただし，以降簡略化のため \times は省略する．

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = H_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re_e} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5.8)$$

$$H_i = \left(\varepsilon_{ijk} u_j \omega_k + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \delta_{i1} - Ro_e (-u_2 \delta_{i1} + u_1 \delta_{i2}) \right) \quad (5.9)$$

$$p = p' + \frac{1}{2} u_j u_j \quad (5.10)$$

式 (5.9) に示すように， H_i に回転項を追加することで，これ以降のアルゴリズムは，第2章で示したものと同等である．

5.4 計算条件

本研究では，最初に $Re_e = 80$, $Ro_e = 0$ の二次元チャネル乱流の直接数値シミュレーションを行い，次に $Ro_e = 0.75$ の回転を加えた．さらにレイノルズ数を $Re_e = 80$ 60 50 40 15 と系統的に減少させた．また，回転の大きさによる影響についても議論するため $Re_e = 40$ においてローテーション数を $Ro_e = 0.75$ 1.50 10.0 と増加させた計算，及び $Re_e = 60$ においてローテーション数を $Ro_e = 0.75$ 0.25 と減少させた計算も行った．また， $Re_e = 15, Ro_e = 0.75$ は $Re_e = 40, Ro_e = 0.75$ の完全発達した流れから， Re_o を低下させ，完全発達させた．

回転ポアズイユ乱流の DNS の計算条件を表 5.1 に示す．なお，回転数を変化させる計算では平均圧力勾配は一定とした．また，統計量を求めるにあたっては，速度場が十分に発達した状態から，計算領域全体で空間平均して統計量を求めた．ここで，平均圧力勾配による代表速度 u_e と ν による無次元化に $*$ を，圧力側の摩擦速度 u_τ と ν による無次元化には $+$ を付けることにする

なお，計算は 2.66GHz の INTEL CORE 2 QUAD を用いた．各計算において，定常状態を得るまでに約 200000 ステップの計算を行った．定常までに 1200 時間，統計量の算出に 130 時間であった．

Table 5.1 Computational conditions for rotating channel flow.

	LB15-075	LB40-075	LB40-15	LB40-100
Re_e	15	40		
Ro_e	0.75		1.5	10
Comp. domain ($L_x \times L_y \times L_z$)	$22\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$			
Grid points ($n_x \times n_y \times n_z$)	$512 \times 65 \times 288$			
L_1^*	1037	2765		
L_3^*	471	1257		
Δx^*	2.02	5.40		
Δy^*	0.015 ~ 0.813	0.04 ~ 2.14		
Δz^*	1.64	4.36		
Time step ($\Delta t^* = tu_e^2/\nu$)	0.0075	0.02		
	LB50-075	LB60-025	LB60-075	LB80-075
Re_e	50	60		80
Ro_e	0.75	0.25	0.75	
Comp. domain ($L_x \times L_y \times L_z$)	$22\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$			
Grid points ($n_x \times n_y \times n_z$)	$512 \times 65 \times 288$			
L_1^*	3456	4147		5529
L_3^*	1571	1885		2513
Δx^*	6.75	8.10		10.8
Δy^*	0.05 ~ 2.72	0.06 ~ 3.25		0.08 ~ 4.46
Δz^*	5.45	6.54		8.73
Time step ($\Delta t^* = tu_e^2/\nu$)	0.025	0.03		0.04

5.4.1 乱流統計量

各条件におけるバルクレイノルズ数 Re_m と壁面摩擦係数 C_f , および壁面摩擦 u_τ^* を表 5.2 に示す . $Ro_e = 0.75$ での条件では , レイノルズ数が大きくなるにしたがって壁面摩擦係数は減少する . また , LB40-075 と LB40-100 を比較すると回転の増大によって壁面摩擦係数は減少する . これは , 回転の増大によりバルクレイノルズ数が増加していることによる . 一方で , LB40-075 から LB40-15 への変化や LB60-025 から LB60-075 への変化では , 回転の増大によりバルクレイノルズ数は減少し壁面摩擦係数は増大する . いずれの場合にも回転数の増大は壁面摩擦にほとんど影響せずに , 壁面摩擦の増大はバルクレイノルズ数 (すなわち流量) の増大に関係している .

図 5.2(a) に平均速度分布のレイノルズ数効果を示す . 図中の直線は , チャンネル中央の平均速度勾配 $S = \partial U / \partial y$ を示している . レイノルズ数の減少に伴い , チャンネル中央部で平均速度勾配が正から負への逆転現象が見られる . また , 平均速度勾配の逆転は , $Ro_e = 0.25$ と 0.75 の間にも見られる . $Re_e = 15$ (LB15-075) では , 平均速度分布は放物形をとる .

図 5.2(b) に $Re_e = 40$ の平均速度分布を示す . このレイノルズ数は回転がない場合 , 完全に層流になる領域であるが , $Ro_e = 0.75$ では , 層流とならず , 3 次元的な流れ構造が生じる . なお , $Re_e = 0.75$ で平均速度勾配はチャンネル中央で負となる . $Ro_e = 1.5$ (LB40-15) でチャンネル中央の平均速度はほぼ勾配がゼロとなり , $Ro_e = 10$ (LB40-100) では正となる .

図 5.3(a) , (b) に全せん断応力 $-\overline{u'^*v'^*} + dU^*/dy^*$ とレイノルズせん断応力 $-\overline{u'^*v'^*}$ を示す . この全せん断応力は , 定常状態のとき平均圧力勾配と釣り合い直線となる . 図 5.3(a) よりすべての条件で全せん断応力は直線となりほぼ定常状態である . 図 5.3(b) において , レイノルズ数の減少に伴い , Suction 側で変化は見られないが , Pressure 側のレイノルズせん断応力が減少する . 一方 , チャンネル中央のレイノルズ応力はいずれの条件の場合も正となり , Pressure 側のレイノルズせん断応力が輸送されている . さらに , LB60-025 と LB60-075 の比較から , ローテーション数の増加によりレイノルズせん断応力が増加することがわかる . また , $Re = 15$ (LB15-075) のレイノルズ応力はチャンネル全体で小さく , Suction 側でほぼ 0 となる .

図 5.4 に異なるレイノルズ数でのスウィープとイジェクションの分布の違いを示す . $y^+ > 20$ の壁面から離れた領域では , レイノルズ数の減少と共にスウィープとイジェクションの両方が減少する . 壁面近傍は , スウィープは減少するが , イジェクションは変化が見られない . また , $Re_e = 80$ と他の低いレイノルズ数の間で違い

が生じ，これはレイノルズ数の減少により壁面近傍の小スケール渦の抑制よると考えられる (Brooke and Hanratty, 1993, Iida et al., 2008) ．

図 5.5 に乱流エネルギーの輸送方程式の各項を示す．定性的な評価を行うため，各項は生成項の最大値で正規化した．図 5.5(a) では，LB80-075 と LB40-075 におけるレイノルズ数効果が明確に見られる．レイノルズ数の減少により，散逸が Pressure 側全体で減少している．一方，壁面近傍で生成項は変化しないので，乱流エネルギーが過剰に生成される．このエネルギーは，チャンネル中央へ乱流拡散として運ばれる．一方，乱流拡散は $y^+ = 5$ のごく壁近傍でも負の値を取り，壁面への乱れエネルギーの輸送が抑制されることがわかる．これは，壁面近傍の小スケール渦が抑制され散逸も小さくなることと関連する．

同じレイノルズ数で回転数の増加により平均速度勾配が逆転する場合を比較する．図 5.5(b) は，LB60-025 と LB60-075 を比較しているが，この結果は，図 5.5(a) のレイノルズ数の相違とよく似ている．壁面近傍で回転数の増加により散逸率は減少するが，生成項は変化しない．このため，LB60-075 では乱流拡散により乱れエネルギーはチャンネル中央により運ばれる．ここで散逸率の減少は，小スケール渦の減少と関係していると考察できる．

図 5.5(c) に LB40-15 と LB40-100 を示す．LB40-100 は壁面近傍で大きな散逸率を示している．これは圧力拡散により乱れエネルギーが壁面近傍に運ばれ，小スケールの渦が発生したものと考えられる．なお，乱流拡散は壁面近傍で負となり高レイノルズ数とは異なる結果である．

以上のことから，チャンネル中央部で平均速度勾配が負となる場合には，正となる場合に比べ，壁面近傍への乱れエネルギーの輸送が抑制され，散逸率が減少していることがわかる．この結果，大スケール渦による乱れエネルギーの輸送が支配的になると考えられる．

Table 5.2 Skin friction coefficient and bulk Reynolds numbers of rotational channel flow with different Re_e and Ro_e .

	LB15-075	LB40-075	LB40-15	LB40-100
Re_e	15	40		
Ro_e	0.75		1.5	10
Re_m	142	757.6	727.6	797.0
C_f (Pressrure)	2.652×10^{-2}	2.652×10^{-2}	2.877×10^{-2}	2.293×10^{-2}
C_f (Suction)	1.816×10^{-2}	1.825×10^{-2}	1.965×10^{-2}	1.745×10^{-2}
C_f (Average)	2.234×10^{-2}	2.239×10^{-2}	2.421×10^{-2}	2.019×10^{-2}
u_τ^* (Pressure)	1.026	1.090	1.091	1.067
u_τ^* (Suction)	0.980	0.905	0.901	0.931

	LB50-075	LB60-025	LB60-075	LB80-075
Re_e	50	60		80
Ro_e	0.75	0.25	0.75	
Re_m	1085	1540	1433	2182
C_f (Pressrure)	2.088×10^{-2}	1.479×10^{-2}	1.760×10^{-2}	1.389×10^{-2}
C_f (Suction)	1.339×10^{-2}	9.490×10^{-3}	1.064×10^{-2}	7.537×10^{-3}
C_f (Average)	1.714×10^{-2}	1.214×10^{-2}	1.412×10^{-2}	1.071×10^{-2}
u_τ^* (Suction)	1.108	1.103	1.120	1.137
u_τ^* (Average)	0.888	0.884	0.871	0.837

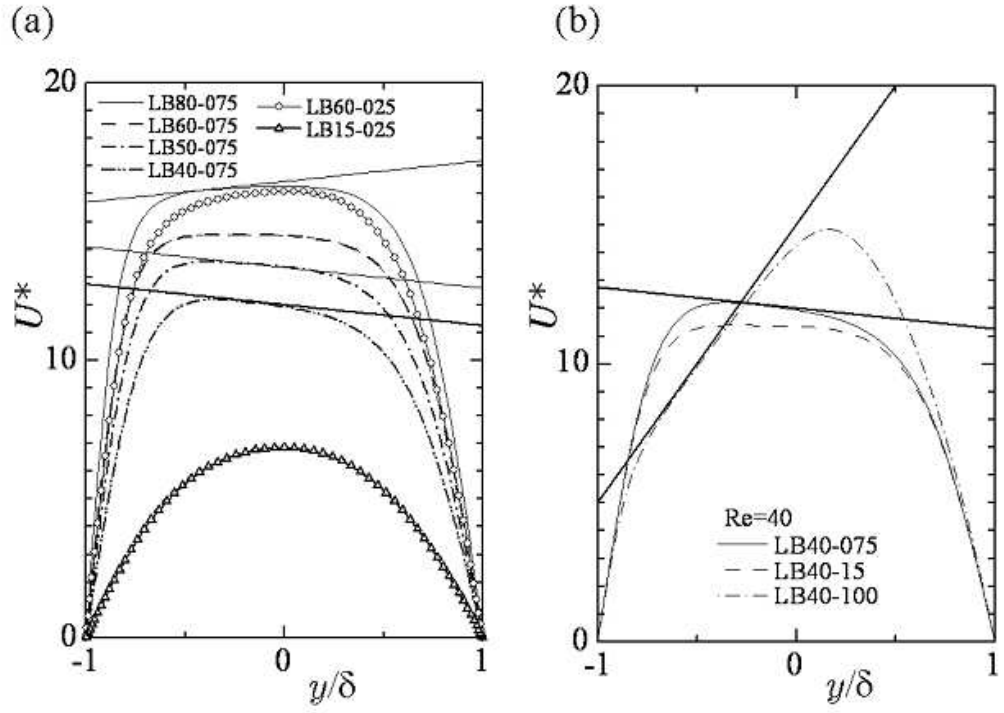


Figure 5.2 Mean velocity profiles for (a); slope of tangent line is $S = 2\Omega$ for LB80-075, while it is $S = -2\Omega$ for LB50-075 and LB40-075, and (b) cases LB40-075, LB40-15 and LB40-100.

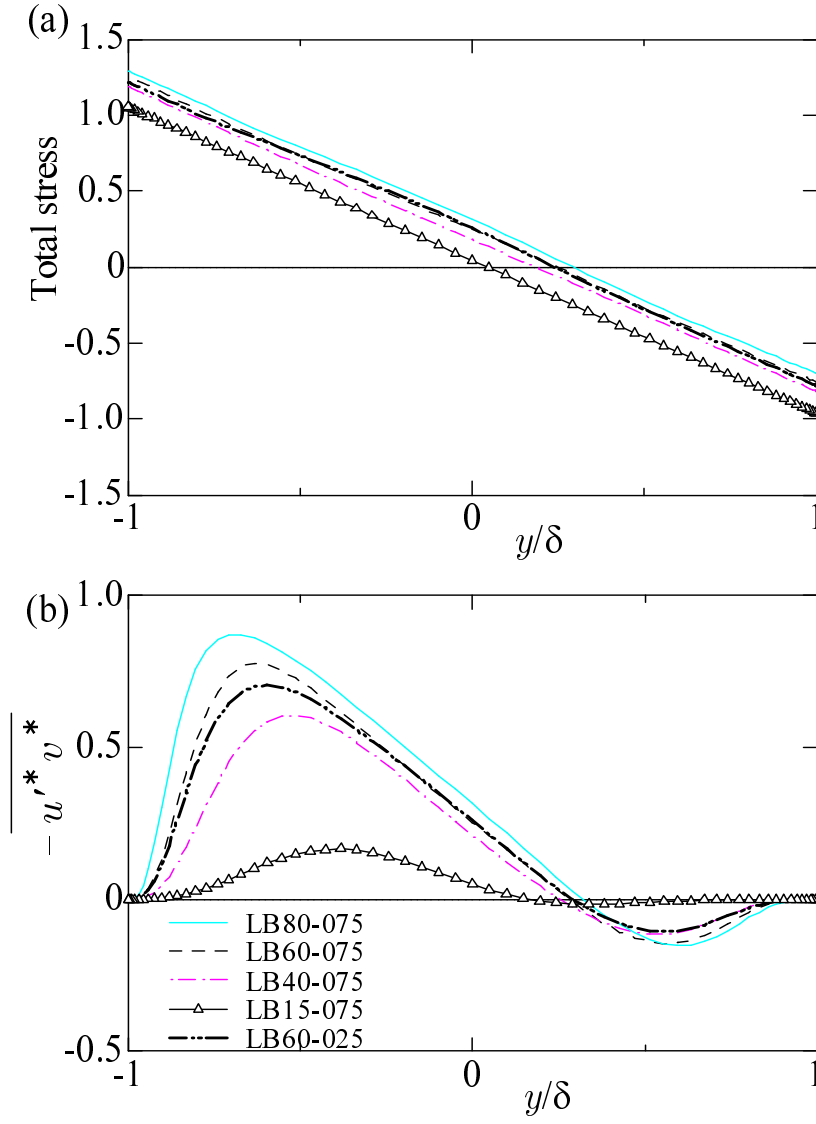


Figure 5.3 Distributions of total stress and Reynolds shear stress.

(a) Total stress $-\overline{u'v'} + dU^*/dy^*$ (b) Reynolds shear stress $-\overline{u'v'}$.

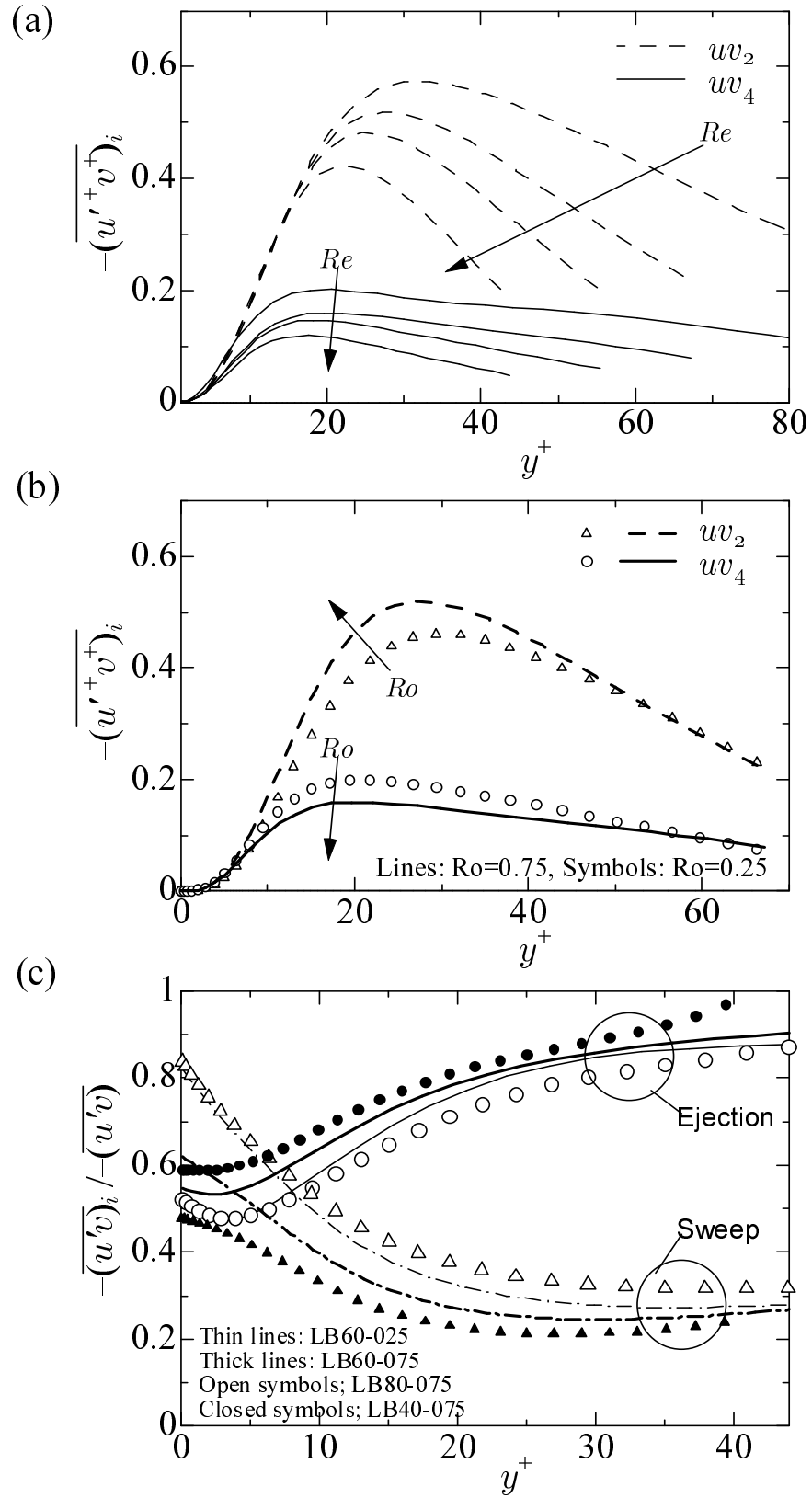


Figure 5.4 Distributions of ejection and sweep in pressure side for (a) cases LB80-075, LB60-075, and LB40-075; (b) case LB60-025 and LB60-075; (c) normalized distribution of ejection and sweep.

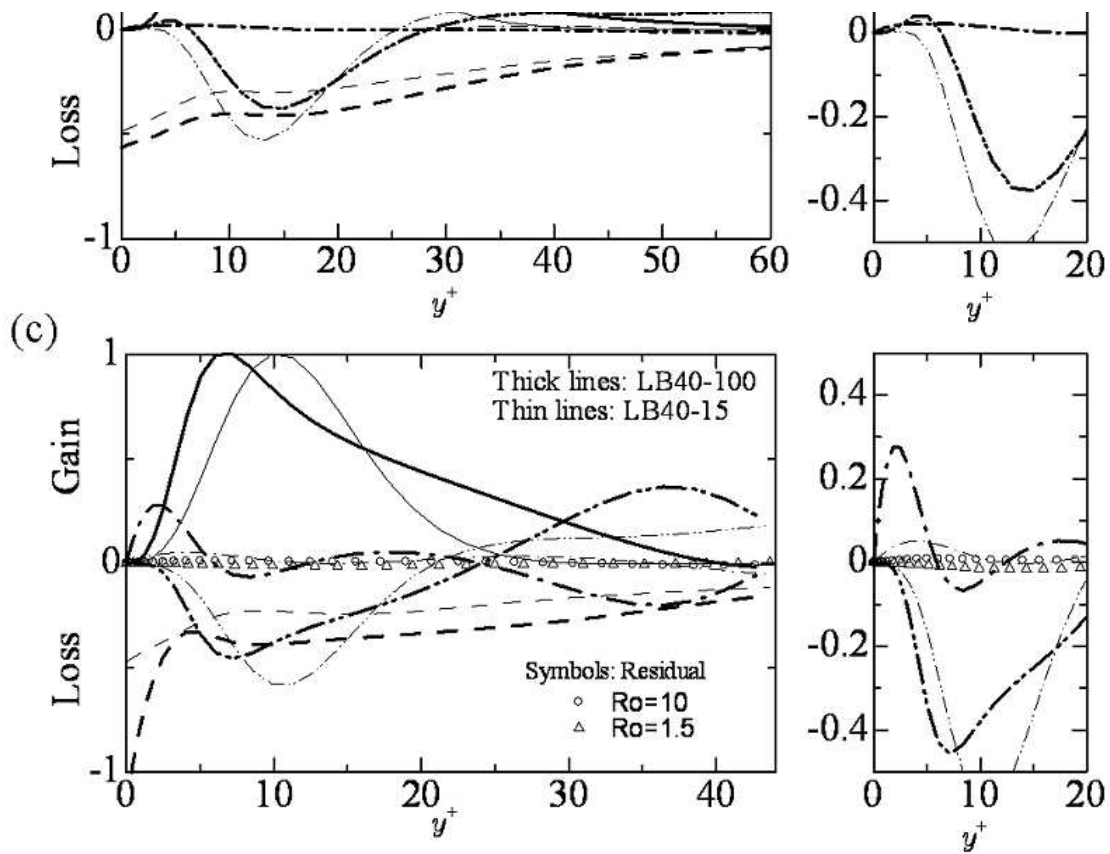


Figure 5.5 Budgets of turbulent kinetic energy in pressure side for (a) cases LB80-075 and LB40-075; (b) case LB60-075 and LB60-025 and (c) case LB40-100 and LB40-15. Focus in near wall vicinity is also included.

5.4.2 乱流構造

本節では，前節に示した乱流統計量の結果と本節に示す瞬時場データを元に，レイノルズ数 Re_e とローテーション数 Ro_e の変化が乱流構造に及ぼす影響について考察する．

図 5.6 から図 5.12 に各条件における瞬時場の縦渦と低速ストリークを示す．縦渦構造は速度勾配テンソルの第二不変量によって可視化し，流れ方向の渦度の正負で赤青の色分けをしている．初めに，いずれの条件においても系に剛体回転をかけると乱流 - 層流パターンが観察されないことが分かる．次に， $Ro_e = 0.75$ で Re_e による変化に着目する． Re_e が 60 以下の場合に異符号の渦度を持つ縦渦が，流れ方向に対して交互につながることで，鎖状に長く伸びた特殊な構造が生じる．鎖状の渦構造に関連した低速ストリークは流れ方向に長く伸びる．また，鎖状の渦構造は比較的レイノルズ数の高い $Re_e = 80$ には見られない．次に， $Re_e = 40$ で Ro_e を変化させた場合の変化に着目する．回転数の増大によって $Ro_e = 1.5$ では鎖状の渦構造が流れ方向に伸ばされる傾向が見られる．ただし，正負の縦渦が秩序的に並ぶ構造は保たれている．さらに回転の効果が大きい $Ro_e = 10$ ではストリークは細かく千切れ，渦のスケールは小さくなり散逸率の増大と一致する． $Re_e = 60$ ， $Ro_e = 0.25$ (LB60-025) と $Re_e = 60$ ， $Ro_e = 0.75$ (LB60-075) で縦渦構造の比較をすると，回転の効果が小さい $Ro_e = 0.25$ のときには鎖状の渦構造は見られず，小さいスケールの渦が多く見られる．従って，LB60-025 と LB80-075，LB60-075 と LB40-075 の瞬時場はそれぞれ類似しており，前節の輸送機構の変化と一致する．以上のことから，チャンネル中央で平均速度勾配の変化は渦のスケールや鎖状の渦構造の発生と関連していることが分かる．

図 5.13 から図 5.19 に Pressure 側壁面近傍における流れ方向渦度の分布を示す．最初に， $Ro_e = 0.75$ の Re_e の変化に着目すると， $Re_e < 60$ 以下で渦度分布の長さスケールが増大していることがわかる．これは，小スケール渦の減少やストリーク間隔の増大に関連し，散逸率が壁面で減少することと対応する．次に， $Re_e = 40$ での Ro_e の変化に着目すると $Re_e = 40$ ， $Ro_e = 10$ (LB40-100) で，渦度分布は非常に細くなり散逸率の増大と対応する．最後に $Re_e = 60$ ， $Ro_e = 0.25$ (LB60-025) の場合と比較して $Re_e = 60$ ， $Ro_e = 0.75$ (LB60-075) では渦度の細かい分布は減少し，流れ方向に長く伸びた分布が支配的となる．これも LB60-075 において壁面近傍での小スケール渦の減少やストリーク間隔の増大と散逸率の減少と対応する．

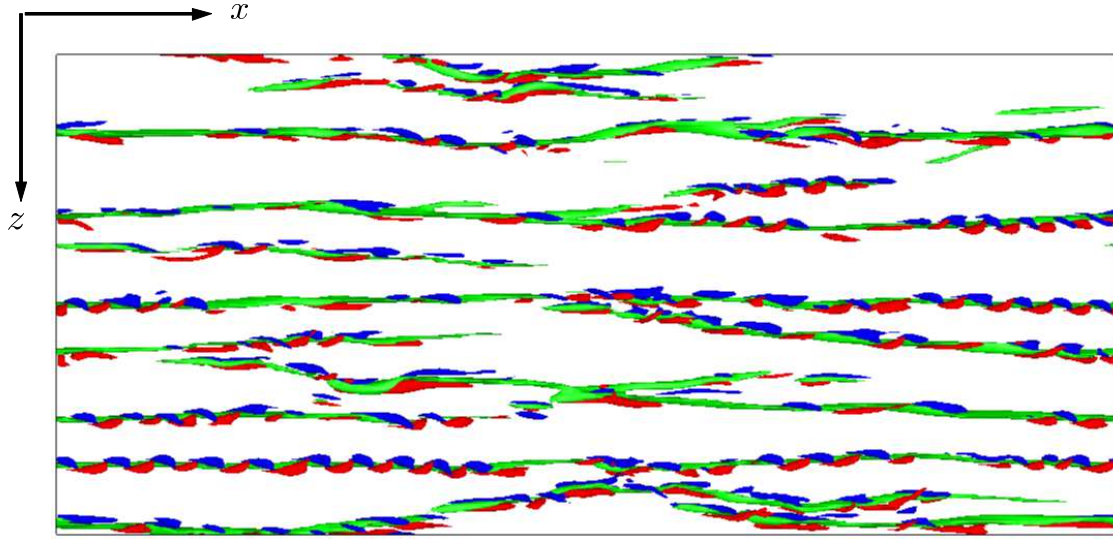


Figure 5.6 Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB40-075. Green: $u'^* = -3$, red: $II^* = 0.01$ and $\omega_x^* > 0$, blue: $II^* = 0.01$ and $\omega_x^* < 0$.

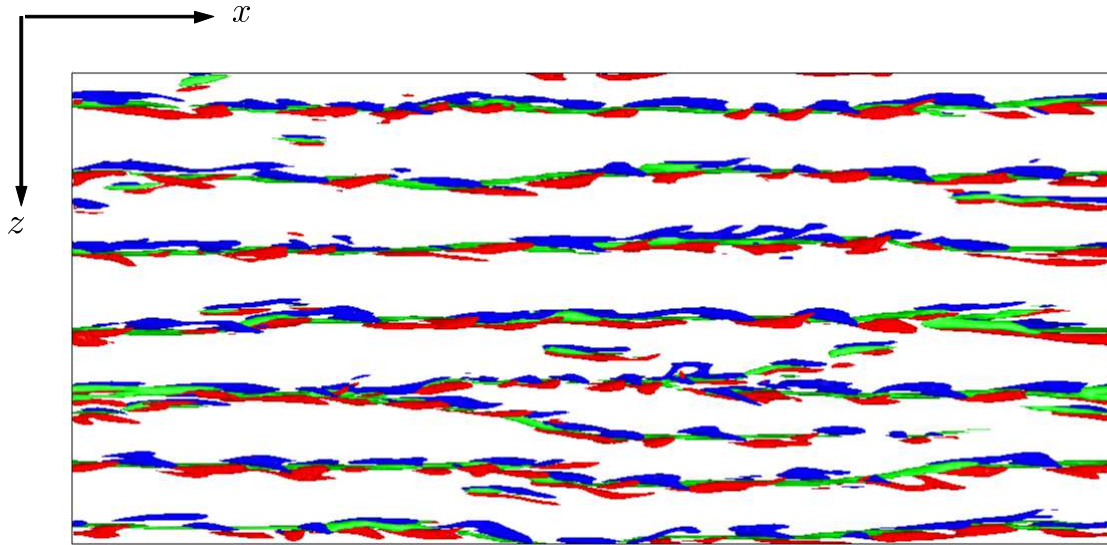


Figure 5.7 Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB40-15. Green: $u'^* = -3$, red: $II^* = 0.01$ and $\omega_x^* > 0$, blue: $II^* = 0.01$ and $\omega_x^* < 0$.

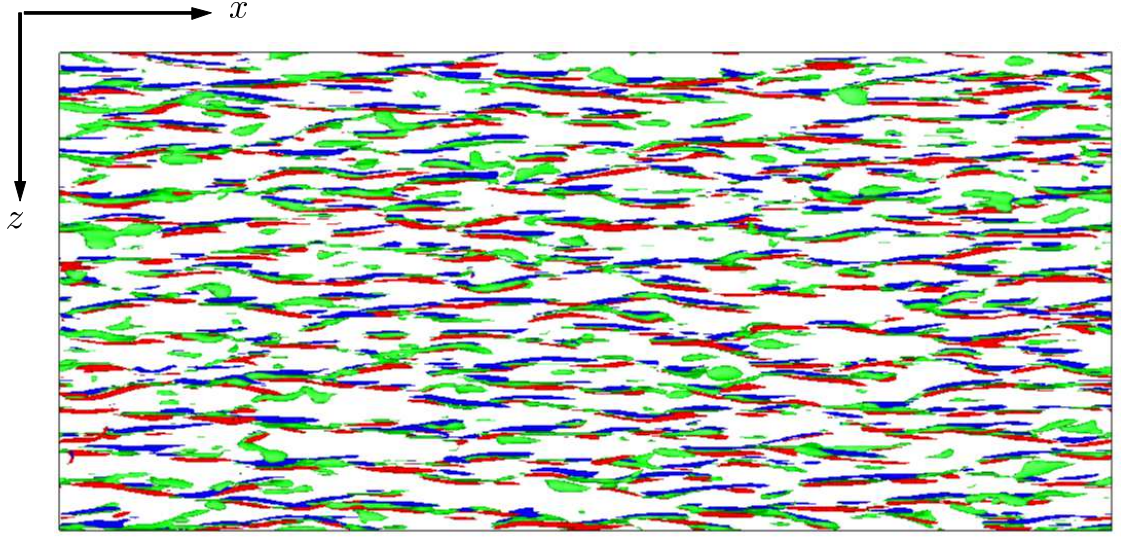


Figure 5.8 Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB40-100. Green: $u'^* = -3$, red: $II^* = 0.05$ and $\omega_x^* > 0$, blue: $II^* = 0.05$ and $\omega_x^* < 0$.

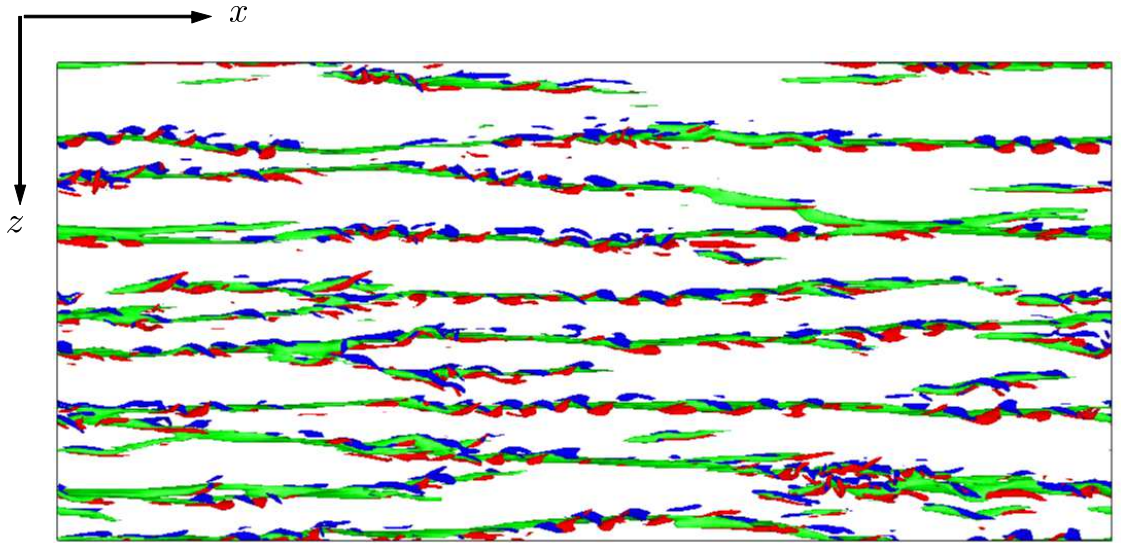


Figure 5.9 Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB50-075. Green: $u'^* = -3$, red: $II^* = 0.01$ and $\omega_x^* > 0$, blue: $II^* = 0.01$ and $\omega_x^* < 0$.

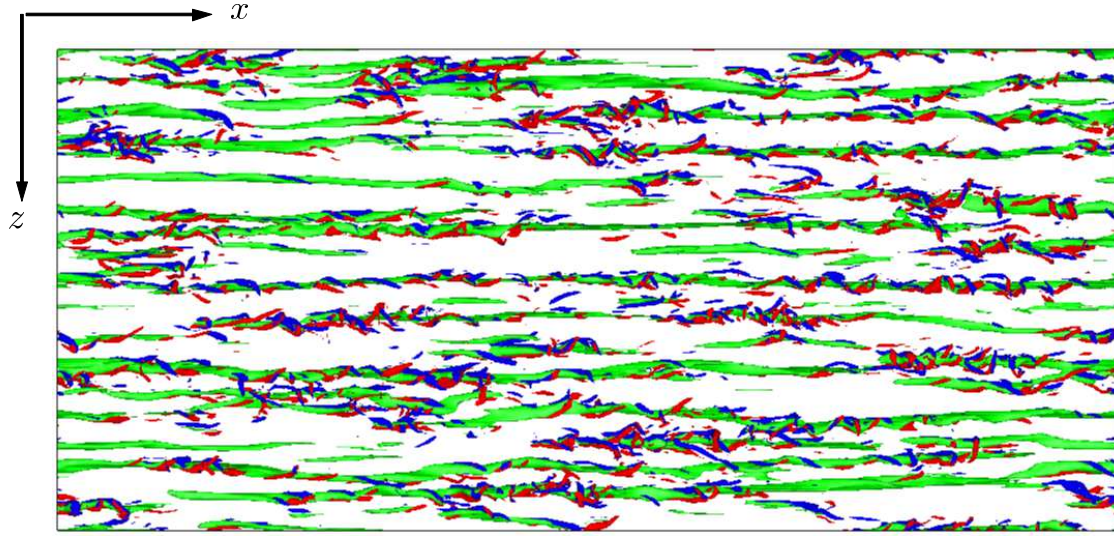


Figure 5.10 Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB60-025. Green: $u^+ = -3$, red: $II^+ = 0.01$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $II^+ = 0.01$ and $\omega_x^+ < 0$.

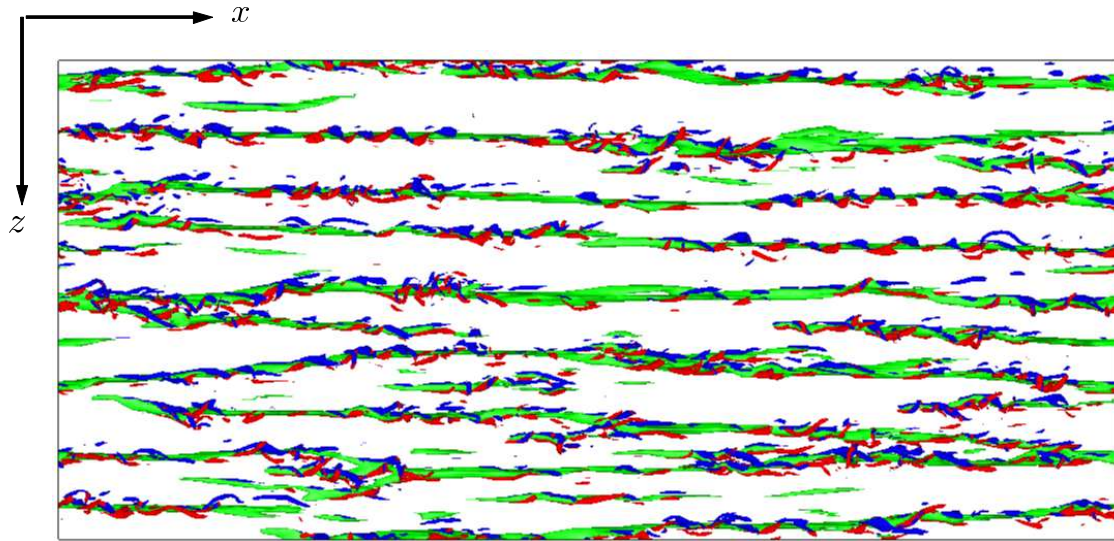


Figure 5.11 Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB60-075. Green: $u^+ = -3$, red: $II^+ = 0.01$ and $\omega_x^+ > 0$, blue: $II^+ = 0.01$ and $\omega_x^+ < 0$.

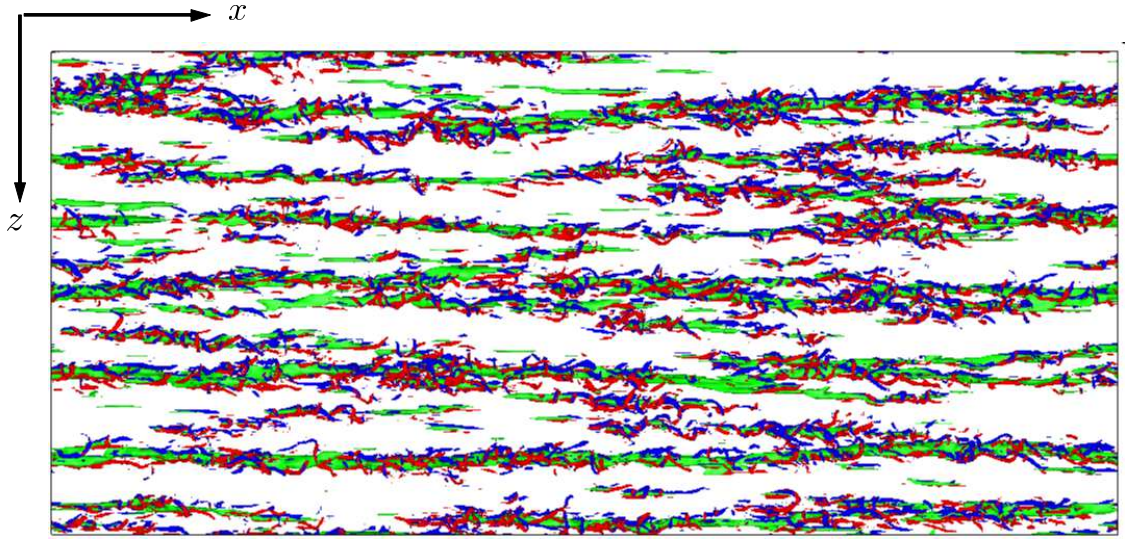


Figure 5.12 Iso-surfaces of second invariant of velocity gradient tensor and low-speed streaks in case LB80-075. Green: $u'^* = -3$, red: $II^* = 0.01$ and $\omega_x^* > 0$, blue: $II^* = 0.01$ and $\omega_x^* < 0$.

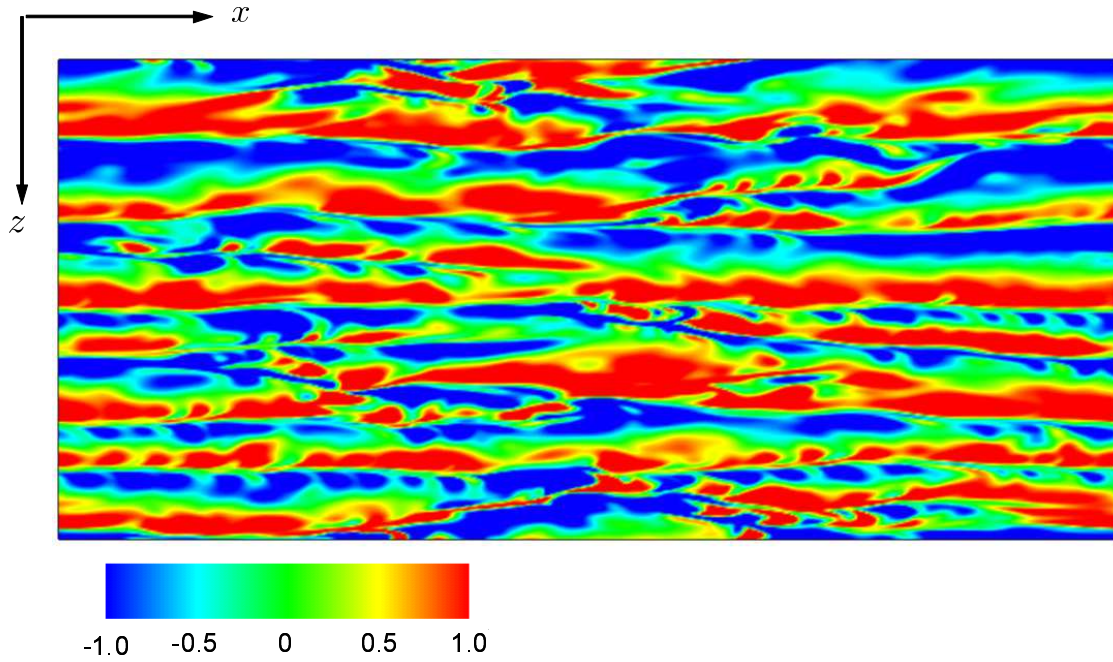


Figure 5.13 Distributions of streamwise vorticity on $x-z$ plane at $y^* = 5$ in case LB40-075. The streamwise vorticity is normalized by its r.m.s. value on the same plane.

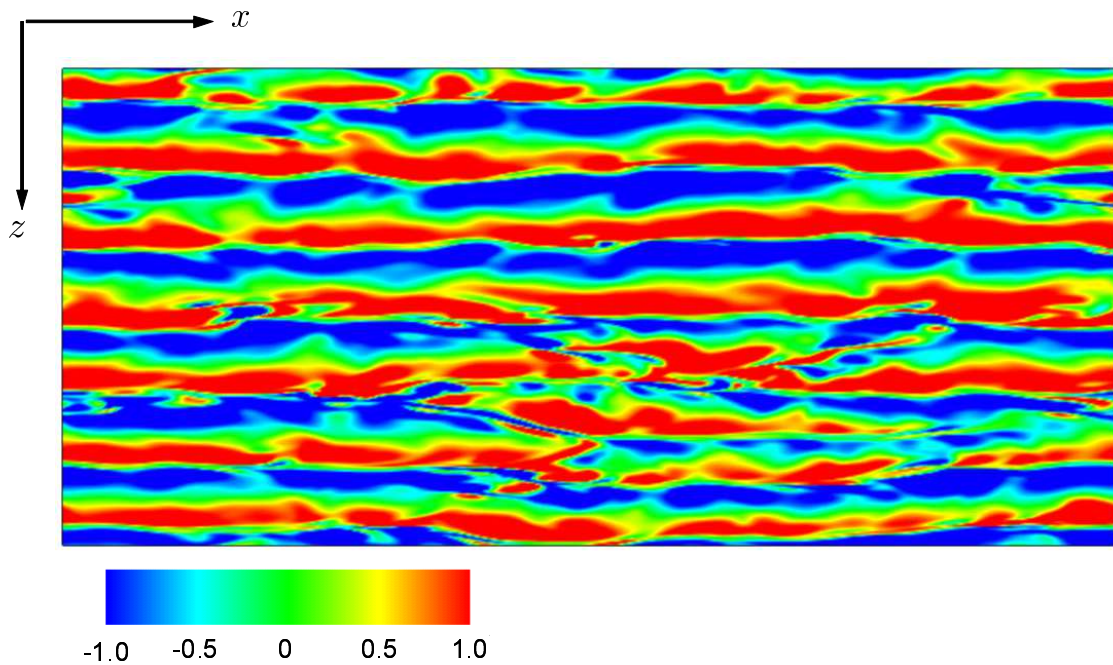


Figure 5.14 Distributions of streamwise vorticity on $x-z$ plane at $y^* = 5$ in case LB40-15. The streamwise vorticity is normalized by its r.m.s. value on the same plane.

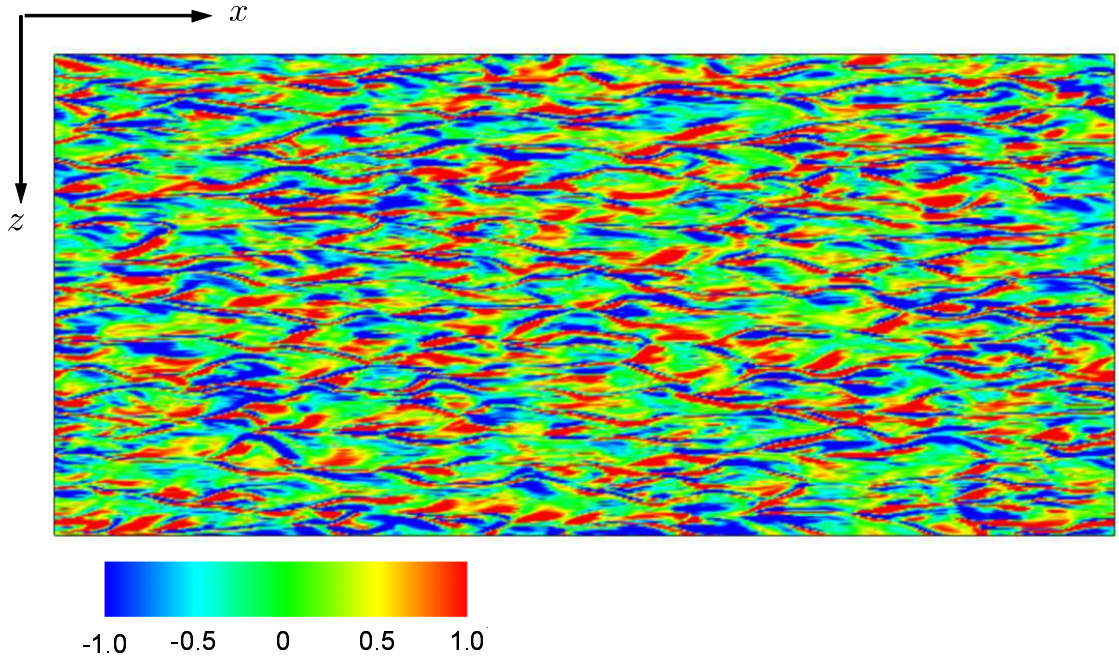


Figure 5.15 Distributions of streamwise vorticity on $x-z$ plane at $y^* = 5$ in case LB40-100. The streamwise vorticity is normalized by its r.m.s. value on the same plane.

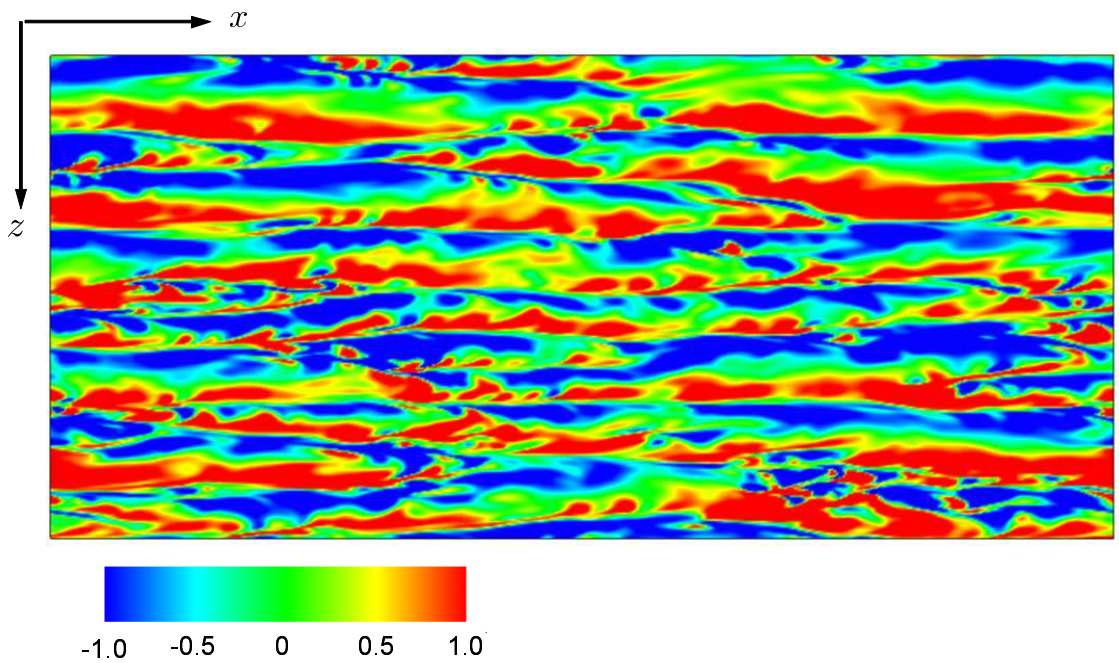


Figure 5.16 Distributions of streamwise vorticity on $x-z$ plane at $y^* = 5$ in case LB50-075. The streamwise vorticity is normalized by its r.m.s. value on the same plane.

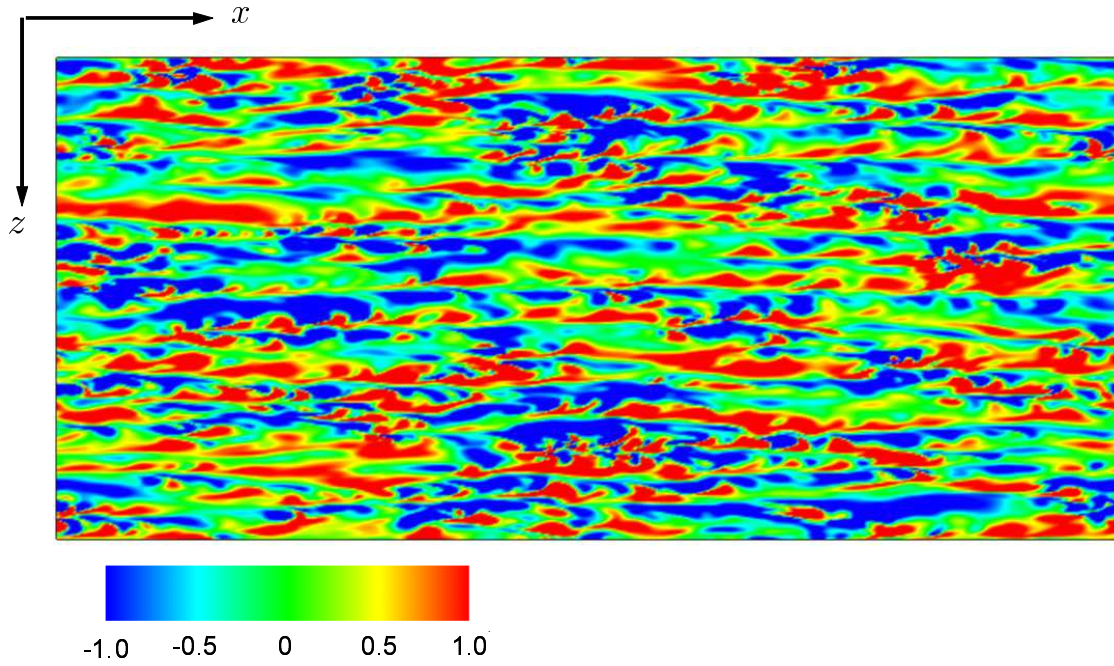


Figure 5.17 Distributions of streamwise vorticity on $x-z$ plane at $y^* = 5$ in case LB60-025. The streamwise vorticity is normalized by its r.m.s. value on the same plane.

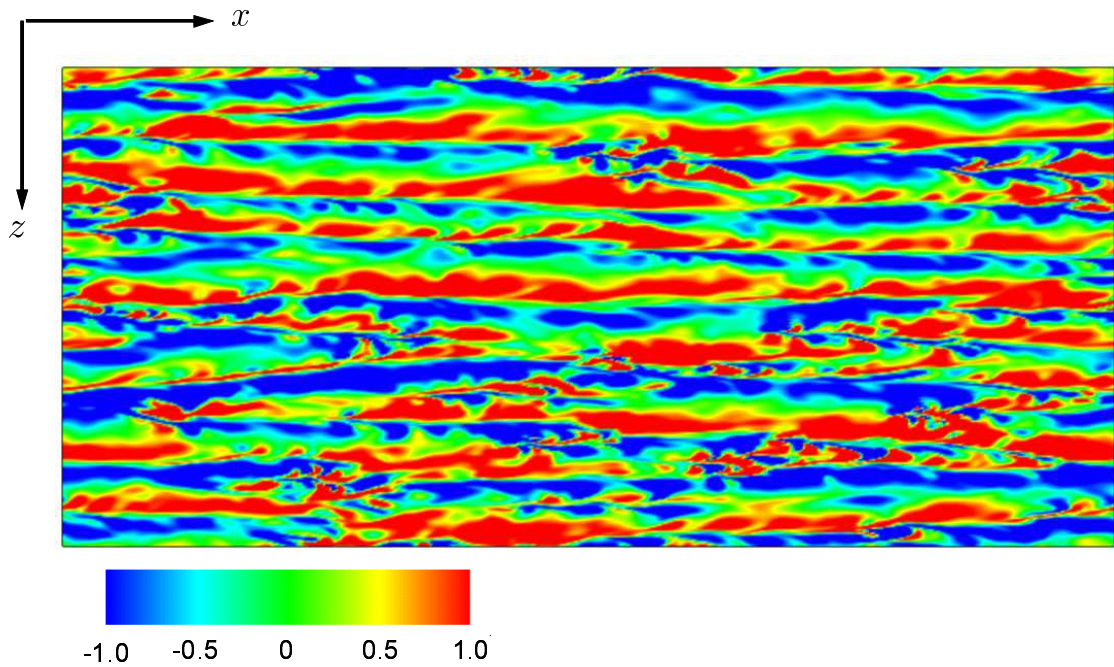


Figure 5.18 Distributions of streamwise vorticity on $x-z$ plane at $y^* = 5$ in case LB60-075. The streamwise vorticity is normalized by its r.m.s. value on the same plane.

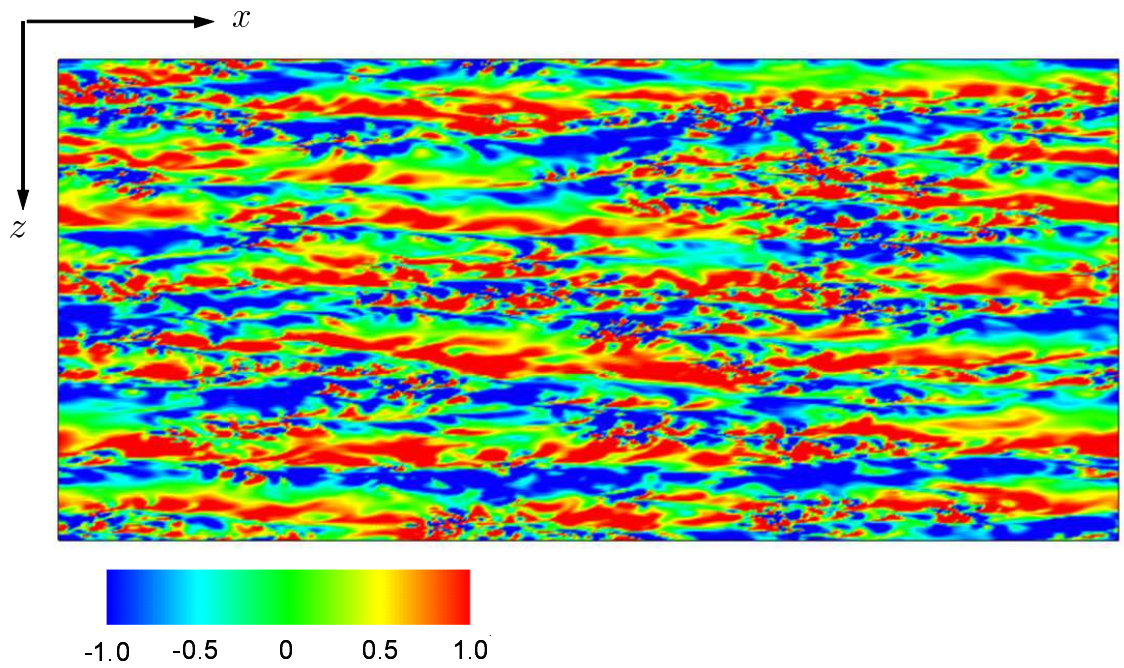


Figure 5.19 Distributions of streamwise vorticity on $x-z$ plane at $y^* = 5$ in case LB80-075. The streamwise vorticity is normalized by its r.m.s. value on the same plane.

第6章

結言

本研究では、低レイノルズ数ポアズイユ乱流に生じる乱流 - 層流パターンの維持機構についての知見を得るため、スペクトル法による低レイノルズ数ポアズイユ乱流の直接数値計算を従来に比べ大規模な計算領域を用いて行った。

以下に、本研究の結果および考察により得られた結言を章ごとにまとめて記述する。

- 第3章では、乱流 - 層流パターンが発生する計算領域 (LB) と発生できない小さな計算領域 (MB) を比較することで、大規模構造の種々の乱流統計量への影響を調べた。小計算領域 MB は、レイノルズ数が $Re_e = 100$ から $Re_e = 60$ へと低下すると、バルクレイノルズ数 Re_m と壁面摩擦係数 C_f が時間的に大きく振動することが分かった。この振動の振幅はレイノルズ数が小さくなるにつれ大きくなる。振動において C_f が増加する過程では、縦渦が多く集中した領域が流れ方向に傾いて存在する。これは乱流 - 層流パターンに似ているが、傾斜方向が変化し非定常性を持っている点で異なる。一方、 C_f が減少する過程では、縦渦が集中した領域の流れ方向への傾きが小さくなることがわかった。大計算領域 LB では、 Re_m と C_f のどちらにも時間的な振動は見られず、 $Re_e < 80$ において空間的に間欠的な流れ構造が得られた。すなわち、乱流 - 層流パターンと呼ばれる乱流領域と非乱流領域である準層流領域がそれぞれ帯状に明確に分離した状態があらわれ、チャンネルの両壁面に対称的に生じることを確認した。乱流領域は縦渦が集中し、低速ストリークの揺動が大きいのに対して、準層流領域では縦渦はあまり見られずストリークも流れ方向に長く伸びている。乱流 - 層流パターンが発生すると、乱れ速度の rms 値が壁面近傍とチャンネル中央において大きな相違が生じる他、レイノルズ応

力が大きくなり乱れエネルギーの生成が活発化，さらに乱流拡散による壁面へのエネルギー輸送も増大することがわかった．

- 第4章では，乱流 - 層流パターンの移流速度を求め，パターンの時空間的な平均を行うことで大規模な流れについての考察を得た．乱流 - 層流パターンの移流速度はチャンネル全体でほぼ一定であり，バルク速度とほぼ等しくなる．乱流領域は上流側の高速流体と下流側の低速流体に挟まれた領域と対応し，流れ方向速度からスパン方向速度への再分配が生じている．また，乱流領域上流でスウィープ，下流でイジェクションがそれぞれ大きいことも確認した．これらの結果は，クエット乱流およびポアズイユ乱流の先行研究と一致する．乱流領域のスパン方向速度は，領域全体を循環する二次流れを形成し，流れ方向渦度と壁垂直方向渦度を持つ．本研究では，流れ方向渦度の分布がスパン方向速度の流れ方向の勾配の分布と類似していることを明らかにした．これは，乱流領域における二次流れの時間スケールが大きいために，それを支配するダイナミクスが平均せん断（速度勾配）の線形項によるためと考察できる．すなわち乱流領域を特徴づける循環，流れ方向渦度および壁面垂直方向渦度が，平均せん断の傾斜と関連して維持されることが本研究により示された．また，流れ方向速度からスパン方向速度への再分配は，乱流領域が流れ方向に傾いて存在することで安定して生じることが考察された．最後に乱流領域の運動量輸送について本研究で詳細な考察がなされた．すなわち，乱流 - 層流パターンの移流速度が一定であることや局所平均で定義した摩擦レイノルズ数，バルクレイノルズ数の分布から，乱流領域の上流では乱流遷移のため乱流拡散が活発になると考察できる．一方，下流では流速が低下して再層流化が生じる．なお，壁面近傍では，平均速度がパターンの移流速度に比べ小さい．このため，乱流領域で生成された乱流構造は，より上流に取り残される．この結果，下流側のイジェクションにより発生した低速ストリークは上流に移動し，乱流遷移を助長する．一方，上流側の構造はさらに上流の準層流領域へ移動し減衰する．
- 第5章では，低レイノルズ数ポアズイユ乱流に剛体回転を加えて，平均速度および乱流構造への影響を調べた．本研究では，チャンネルの安定側は層流化するため，不安定側での回転の効果を調べた．低レイノルズ数では，回転の影響が増大すると，壁面近傍で壁へと向かう高速の流体運動（スウィープ）が減少する．このため，乱流拡散による乱れエネルギーの壁面近傍への輸送が抑制

され，壁面近傍での散逸率が乱れエネルギーの生成率に比べて減少する．一方，壁面近傍で生成された乱れエネルギーはチャンネル中央へと輸送され，平均速度分布に大きな変化が生じる．すなわち，チャンネル中央で平均速度勾配の符号が逆転する現象が本研究により明らかにされた．さらに回転数が増大すると圧力拡散により壁面近傍にエネルギーが輸送され，散逸率も増大した．このとき，チャンネル中央での平均速度勾配の符号がさらに逆転することも確認した．また，剛体回転を加えた場合には，乱流 - 層流パターンは消滅し，流れ方向ほぼ一様な乱流構造が生じることも本研究により明らかになった．この場合，レイノルズ数を増減させ変化させても乱流 - 層流パターンは現れなかった．これより，剛体回転が，乱流 - 層流パターンの発生を抑制していると考えられる．

謝 辞

本研究にあたり終始一貫してご指導してくださいました飯田雄章准教授に謹んで感謝の意を表します。乱流の数値計算を研究するに当たり、乱流と数値計算の基礎もない私に対して、一から丁寧に教えて頂き、結果について有益な考察をいただきました。心から感謝いたします。

本研究をまとめるにあたり、細部に渡る有益なご検討とご指摘を下さった田川正人教授、森西洋平教授に厚くお礼申し上げます。

また、同熱移動工学研究室の長野靖尚名誉教授、辻俊博教授、保浦知也准教授、服部博文技官に感謝の意を表します。いろいろとお世話になった研究室の先輩方・後輩の皆様にも合わせて感謝します。

また、この研究をまとめるにあたり励ましていただいた方々、厳しい指摘を下さった人々すべてに厚くお礼申し上げます。

最後に、私に大学院で7年間にわたり学ぶ機会を与えてくれた家族に感謝いたします。

Appendix A

非同次方程式の境界条件の決定法

式 (2.67) から式 (2.78) を満たすように ϕ_p, ϕ_1, ϕ_2 を求め, 次に v_p, v_1, v_2 から次の時間ステップの解 v が求められる.

式 (2.66) の両辺に ∇^2 を作用させると,

$$\phi^{n+1} = \phi_p^{n+1} + C_1 \phi_1^{n+1} + C_2 \phi_2^{n+1} \quad (\text{A.1})$$

よって, 境界条件の式 (2.69), (2.73), (2.77) より次式を得る.

$$\begin{cases} \phi^{n+1}(+1) = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2 \\ \phi^{n+1}(-1) = 0 + C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = C_1 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

両壁面でノンスリップであるため, 境界条件 $\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}(\pm 1) = 0$ を厳密に満足させなければならない. しかし, 式 (A.2) より壁面上で二階微分 $\nabla^2 v^{n+1}$ が存在しうることを示し, $\partial v^{n+1}/\partial y$ が存在しうることも意味する. そこで, $\phi_1^{n+1}(-1), \phi_2^{n+1}(+1) \neq 0$ とすることで ϕ に自由度を持たせ, $\partial v^{n+1}/\partial y(\pm 1) = 0$ を満たすように C_1, C_2 を決定し, 壁面垂直方向速度成分 v を解くことで境界条件を満足させることができる.

スペクトル空間で考えると, 式 (2.67), (2.71) の偶数モードと奇数モードは互いに独立しているため, 式 (2.67), (2.71) の解 $\hat{v}_{pm}, \hat{v}_{1m}$ に対して次のように考える.

$$\hat{v}_m = \hat{v}_{pm} + C_e \hat{v}_{1m} \quad (m : \text{even}) \quad (\text{A.3})$$

このとき Neumann 型境界条件として $\frac{\partial v}{\partial y}(-1) = \alpha, \frac{\partial v}{\partial y}(+1) = \beta$ とすると,

$$\frac{\partial v}{\partial y}(+1) \sim \sum_{n=1}^{N_2} \hat{v}_n \frac{\partial T_n}{\partial y}(+1) = \sum_{n=1}^{N_2} n^2 \hat{v}_n = \beta \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(-1) \sim \sum_{n=1}^{N_2} \hat{v}_n \frac{\partial T_n}{\partial y}(-1) = \sum_{n=1}^{N_2} (-1)^{n+1} n^2 \hat{v}_n = \alpha \quad (\text{A.5})$$

両辺の和，差より

$$\sum_{\substack{n=2 \\ n:\text{even}}}^{N_2} n^2 \hat{v}_n = \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2} n^2 \hat{v}_n = \frac{1}{2}(\beta + \alpha) \quad (\text{A.7})$$

ここで題意より $\beta = \alpha = 0$ として式 (A.3) を代入すると，

$$\sum_{\substack{n=2 \\ n:\text{even}}}^{N_2} n^2 \hat{v}_n = \sum_{\substack{n=2 \\ n:\text{even}}}^{N_2} n^2 (\hat{v}_{p_n} + C_e \hat{v}_{1n}) = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$C_e = - \left(\sum_{\substack{n=2 \\ n:\text{even}}}^{N_2} n^2 \hat{v}_{p_n} \right) / \left(\sum_{\substack{n=2 \\ n:\text{even}}}^{N_2} n^2 \hat{v}_{1n} \right) \quad (\text{A.9})$$

偶数モードと同様に，奇数モードの場合も，

$$\hat{v}_m = \hat{v}_p m + C_o \hat{v}_{1m} \quad (m : \text{odd}) \quad (\text{A.10})$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2} n^2 \hat{v}_n = \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2} n^2 (\hat{v}_{p_n} + C_o \hat{v}_{1n}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$C_o = - \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2} n^2 \hat{v}_{p_n} \right) / \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{odd}}}^{N_2} n^2 \hat{v}_{1n} \right) \quad (\text{A.12})$$

以上により， C_e, C_o が式 (2.66) 中の C_1, C_2 に対応することから，結局，式 (2.67)，(2.71) の 2 式によって次のステップの解 v^{n+1} を求めることができる．なお，求められた解 v^{n+1} は壁面境界条件 $v^{n+1}(\pm 1) = 0$ ， $\partial v^{n+1}(\pm 1)/\partial y = 0$ を満たしていることになるので，式 (2.75) を解く必要はない．

• $\hat{\phi}_{p_m}^n$ の方程式

$$\begin{aligned}
& \beta^+ C_{m-2}(m+1) \hat{\phi}_{p_{m-2}}^{n+1} + \{4m(m-1)(m+1) - 2\lambda_m \beta^+ m\} \hat{\phi}_{p_m}^{n+1} \\
& \quad + \lambda_{m+2} \beta^+ (m-1) \hat{\phi}_{p_{m+2}}^{n+1} \\
& = \beta^- C_{m-2}(m+1) \hat{\phi}_{p_{m-2}}^n + \{-4m(m-1)(m+1) - 2\lambda_m \beta^- m\} \hat{\phi}_{p_m}^n \\
& \quad + \lambda_{m+2} \beta^- (m-1) \hat{\phi}_{p_{m+2}}^n + C_{m-2}(m+1) \widehat{H_{Rvp_{m-2}}} \\
& \quad - 2\lambda_m m \widehat{H_{Rvp_m}} + \lambda_{m+2}(m-1) \widehat{H_{Rvp_{m+2}}} \quad (A.13) \\
& \quad (m = 2, \dots, N_2)
\end{aligned}$$

$$\text{【B.C.】} \quad \sum_{\substack{l=0 \\ l:\text{even}}}^{N_2} \hat{\phi}_{pl}^{n+1} = 0 \quad , \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l:\text{odd}}}^{N_2} \hat{\phi}_{pl}^{n+1} = 0 \quad (A.14)$$

• $\hat{\phi}_{p_1}^n$ の方程式

$$\begin{aligned}
& \beta^+ C_{m-2}(m+1) \hat{\phi}_{1_{m-2}}^{n+1} + \{4m(m-1)(m+1) - 2\lambda_m \beta^+ m\} \hat{\phi}_{1_m}^{n+1} \\
& \quad + \lambda_{m+2} \beta^+ (m-1) \hat{\phi}_{1_{m+2}}^{n+1} = 0 \quad (m = 2, \dots, N_2) \quad (A.15)
\end{aligned}$$

$$\text{【B.C.】} \quad \sum_{\substack{l=0 \\ l:\text{even}}}^{N_2} \hat{\phi}_{1l}^{n+1} = 0.5 \quad , \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l:\text{odd}}}^{N_2} \hat{\phi}_{1l}^{n+1} = -0.5 \quad (A.16)$$

また, $\hat{\phi}_m = \nabla^2 \hat{v}_m$ の関係より,

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_m = \nabla^2 \hat{v}_m & = \{(ik_x)^2 + (ik_z)^2\} \hat{v}_m + \hat{v}_m^{(2)} \\
& = (-k_x^2 - k_z^2) \hat{v}_m + \hat{v}_m^{(2)} \\
& = \alpha \hat{v}_m + \hat{v}_m^{(2)} \quad \text{ただし} \quad \alpha = (-k_x^2 - k_z^2) \quad (A.17)
\end{aligned}$$

したがって, 上式より次の方程式を得る.

• $\hat{\phi}_m^n - \hat{v}_m$ の方程式

$$\begin{aligned}
& \alpha C_{m-2}(m+1) \hat{v}_{m-2}^{n+1} + \{4m(m-1)(m+1) - 2\lambda_m \alpha m\} \hat{v}_m^{n+1} \\
& \quad + \lambda_{m+2} \alpha (m-1) \hat{v}_{m+2}^{n+1} \\
& = C_{m-2}(m+1) \hat{\phi}_{m-2}^{n+1} - 2\lambda_m m \hat{\phi}_{m+1}^{n+1} + \lambda_{m+2}(m-1) \hat{\phi}_{m+2}^{n+1} \quad (A.18) \\
& \quad (m = 2, \dots, N_2)
\end{aligned}$$

$$\text{【B.C.】} \quad \sum_{\substack{l=0 \\ l:\text{even}}}^{N_2} \hat{v}_l^{n+1} = 0 \quad , \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l:\text{odd}}}^{N_2} \hat{v}_l^{n+1} = 0 \quad (A.19)$$

以上の3方程式を用いて, 行列計算を行うことにより \hat{v}_m^{n+1} が求まる.

Appendix B

初期場の作成法

ポアズイコ乱流において，初期場の作成は重要である．一般的に層流のポアズイコ流に Orr-Sommerfeld 方程式から導出される 3 次元の線形攪乱を用いる方法が望ましいとされている．これは，層流の流れ場に線形的な周期攪乱を与えることによって乱流遷移させることにより初期場を作成するものであるから，実際の自然界で発生する乱流遷移を擬似したものと考えられるためである．一方，速度場にランダム関数を用い，その後時間発展させることで初期場を得る方法が Gavrilakis(1992) によって示されている．ランダム関数を用いただけでは，非物理的であるが，時間発展させることでその影響はなくなり，過去の実験と一致する流れ場が得られる．今回は，後者のランダム関数を用いる方法を採用し，その方法を示す．

速度場 u_i にランダム関数を用いて，乱れを生成させる．このとき，速度場 u_i は連続の式を満たす必要がある．そして，定常状態に早く収束させるため，流れ方向速度 u には層流ポアズイコ流の速度分布を用いる． z 方向速度 w にランダム変数を Box-Muller 法を用いて，標準正規分布の乱れを代入し，壁面垂直方向速度 v は，連続の式を満たすように定める．よって，まとめると，以下のようになる．

u に層流のポアズイコ流の速度分布を代入する．

$$u^\times = -\frac{1}{2}Re_e \{1 - y^{\times 2}\} \quad (\text{B.1})$$

w にランダム変数を Box-Muller 法を用いて，標準正規分布の乱れを代入する．壁面上はノンスリップ条件を適用する．

$$\begin{aligned} w^\times &= \text{Gaussrand}(-1, 1) \\ &= \sqrt{-2 \log \text{rand}(0, 1)} \cos \{2\pi \text{rand}(0, 1)\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$w^\times(\pm 1) = 0 \quad (\text{B.3})$$

v^\times は、二次精度の中心差分を用い、連続の式と壁面粘着条件を満足するように与える。この物理空間で与えられたデータを波数空間に変換することで、初期場を得る。

初期場作成の一例として、 $Re_\tau = 100$, 計算領域を $(L_1, L_2, L_3) = (5\pi\delta, 2\delta, 2.5\pi\delta)$, 格子点数を $(N_1, N_2, N_3) = (64, 65, 64)$ とした結果を図 B.1 に示す。初期場では、 u に層流速度分布を代入しているため、 Re_m と C_f は層流の値となる。時間が経過するごとに、 Re_m の減少と C_f の増加が見られ、 $t^+ \geq 10000$ で時間変化がなくなる。 Re_m が変化しないのは、レイノルズ応力の変化がなく、定常乱流になったと考えられる。この得られた速度場の格子点数を十分な解像度まで徐々に増加させ、定常状態を得る。

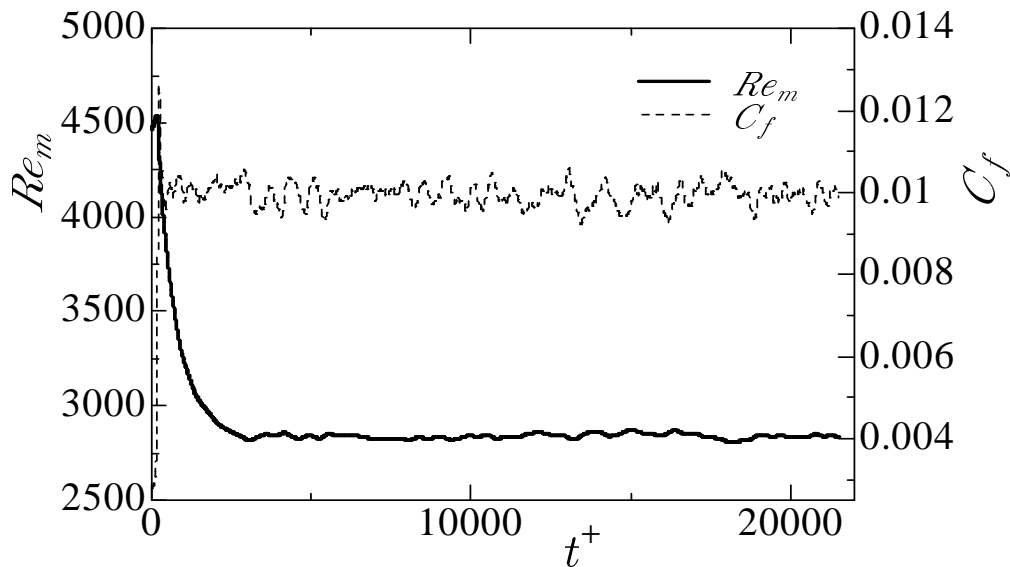


Figure B.1 Time evolution of bulk Reynolds number in case of $Re_\tau = 100$; flow is evolved from artificial turbulence.

Appendix C

計算領域におけるアスペクト比の影響

異なるアスペクト比による大規模計算を2つの計算領域において行った．各計算は， $Re_e = 80$ で初期場を作成し (Appendix B)，系統的にレイノルズ数を低下させ $Re_e = 60$ を得た．計算条件を表 C.1 に示す．正方形の計算領域 $15\pi\delta \times 2\delta \times 15\pi\delta$ (以下，LB15SQ と記述) と，流れ方向に長い $65\pi\delta \times 2\delta \times 3\pi\delta$ (以下，LB65VO と記述) について行った．バルクレイノルズ数の振動は，LB15SQ において約 10 (バルクレイノルズ数に対する比率で 0.6 %)，LB65VO において 50 (バルクレイノルズ数に対する比率で 2.8 %) であった．

図 C.1 に LB15SQ の瞬時場構造を示す．縦渦は局在し，縦渦が多く見られる乱流領域とあまり見られない準層流領域がはっきりと観察され，乱流 - 層流パターンの存在が確認できる．乱流領域の上流に白で示す高速流体，下流に黒で示す低速流体が多く存在し，定性的な構造は図 3.11 と同じである．黄色のラインは乱流領域の傾きを示し，流れ方向に対して約 31.2 度傾いて存在する．これは計算領域 $22\pi\delta \times 2\delta \times 10\pi\delta$ と比較して大きい．

図 C.2 に LB65VO の瞬時場を示す．図 C.1 と同様に乱流 - 層流パターンが観察される．黄色のラインで示す乱流領域の傾きは流れ方向に対し約 12.2 度であった．ただし，スパン方向の計算領域が比較的短いため，乱流領域が途切れることや乱流領域の上流と下流で高速流体と低速流体の大規模な塊が見られないなどの点で図 C.1 と異なる．

以上のように，乱流 - 層流パターンの傾きは計算領域の大きさに影響を受ける．しかし，流れ方向に計算領域が十分大きい場合には，乱流 - 層流パターンが確認され，流れ方向に対して傾きを持って存在する．ただし，スパン方向に計算領域の小さい LB65VO では，バルクレイノルズ数の振動が大きく非定常性が生じる．沼野

ら (2008) や Tsukahara et al.(2010) の実験および, LB に比べさらに大規模な計算領域 (Tsukahara et al, 2009) から, 乱流 - 層流パターンの傾きは流れ方向に対して約 20 度から 30 度であることが示されている. 本論文では, これらの先行研究の結果と一致するようにアスペクト比を予め決めている. これは, 本論文の目的が乱流 - 層流パターンの傾きの角度を定量的に議論することではなく, 傾く結果生じる現象を明らかにし, パターンが維持されるメカニズムを考察するためである.

Table C.1 Computational conditions for Poiseuille flows in the computational domains of different aspect ratio.

	LB15SQ	LB65VO
Computational domain ($L_1 \times L_2 \times L_3$)	$15\pi\delta \times 2\delta \times 15\pi\delta$	$65\pi\delta \times 2\delta \times 3\pi\delta$
$Re_e (= u_e\delta/\nu)$	60	
Grid points ($N_1 \times N_2 \times N_3$)	$384 \times 65 \times 432$	$1536 \times 65 \times 96$
L_1^+	2827	12252
L_3^+	2827	565
Δx^+	7.36	5.89
Δy^+	0.07 ~ 2.94	0.07 ~ 2.94
Δz^+	6.54	5.89
$\Delta t^+ (= \Delta t u_\tau^2/\nu)$	0.03	

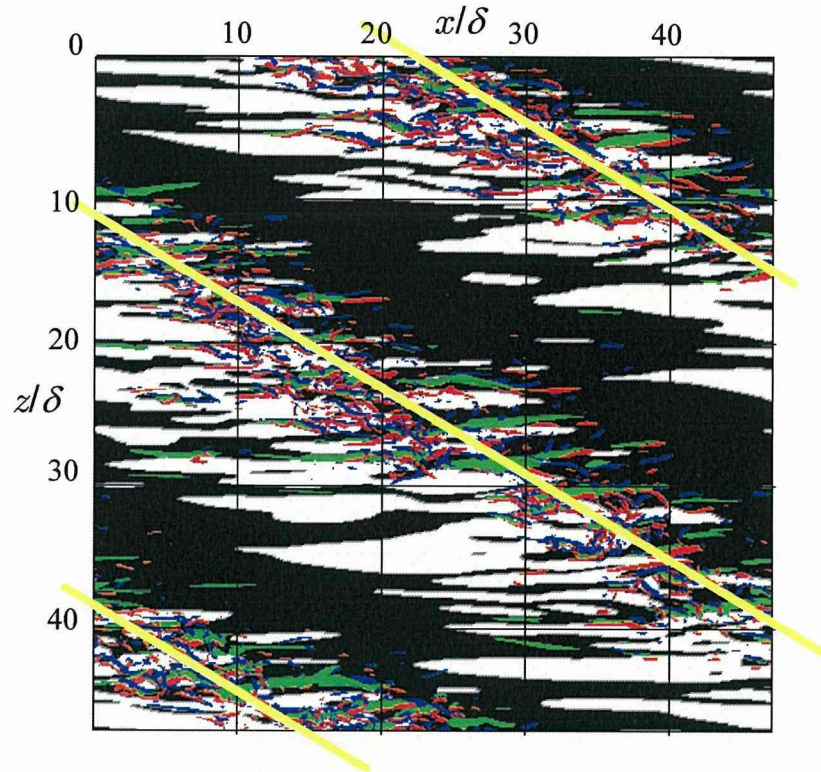


Figure C.1 Turbulent-laminar pattern in computational domain of $(15\pi\delta \times 2\delta \times 15\pi\delta)$. Green: $u'^+ = -3.0$, Black region: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, Red: $II^+ > 0.005$ and $\omega_x^+ > 0$, Blue: $II^+ > 0.005$ and $\omega_x^+ < 0$. Yellow lines represent the inclination of the turbulent region. The visualized volume is the lower half of the computational box.

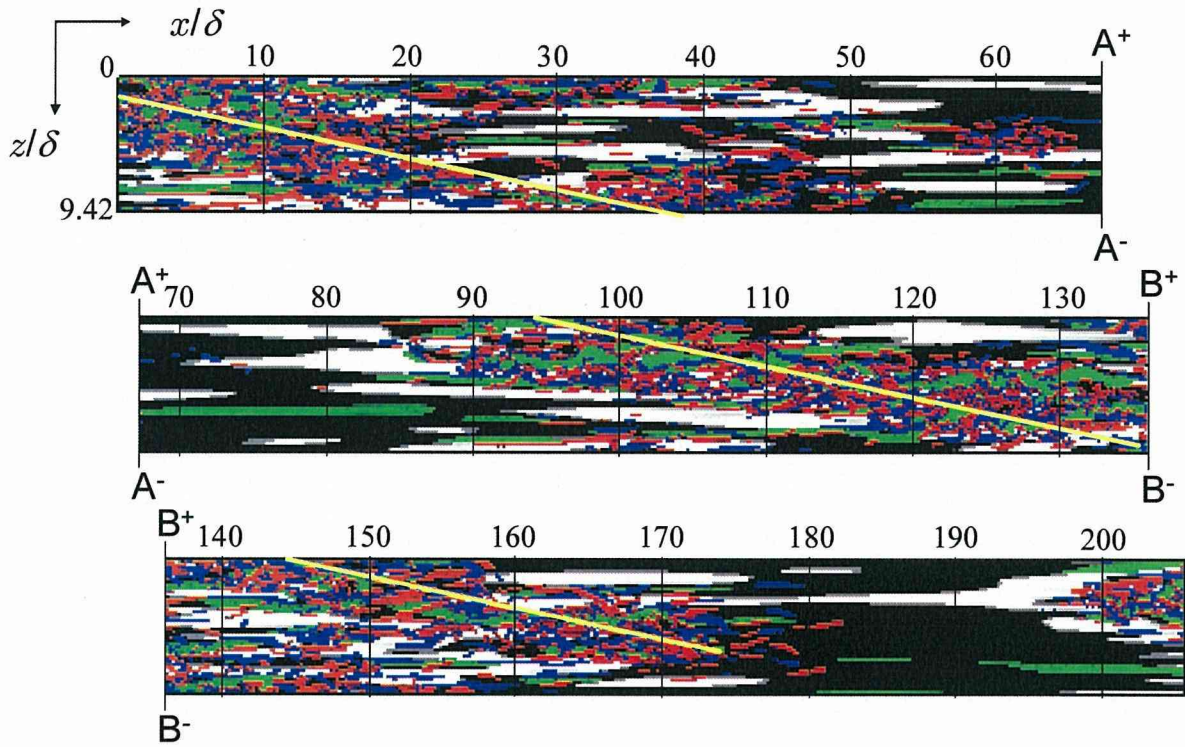


Figure C.2 Turbulent-laminar pattern in computational domain of $(65\pi\delta \times 2\delta \times 3\pi\delta)$. Green: $u'^+ = -3.0$, Black region: $u'^+ \leq 0$ at $y^+ \approx 10$, Red: $II^+ > 0.005$ and $\omega_x^+ > 0$, Blue: $II^+ > 0.005$ and $\omega_x^+ < 0$. Yellow lines represent the inclination of the turbulent region. The visualized volume is the lower half of the computational box.

参考文献

- AVILA, K., MOXEY, D., LOZAR, A., AVILA, M., BARKLEY, D. & HOF, B. 2011 The onset of turbulence in pipe flow. *Science Magazine.*, **333**, 192–196.
- BARKLEY, D. & TUCKERMAN, L. 2007 Mean flow of turbulent-laminar patterns in plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, **576**, 109–137.
- BRETHOUWER, G., DUGUET, Y. & SCHLATTER, P. 2012 Turbulent-laminar coexistence in wall flows with Coriolis, buoyancy or Lorentz forces. *J. Fluid Mech.*, **704**, 137–172.
- BROOKE, J. W. & HANRATTY, T. J. 1993 Origin of turbulence producing eddies in a channel flow. *Phys. Fluids A*, **5**, (4), 1011.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T. A. 1988 *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York.
- CARLSON, D. D., WIDNALL, S. S. & PEETERS, M. F. 1982 A flow-visualization study of transition in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, **121**, 487–505.
- CHOI, H., MOIN, P. & KIM, J. 1993 Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. *J. Fluid Mech.*, **255**, 503–539.
- CHOI, H., MOIN, P. & KIM, J. 1994 Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows. *J. Fluid Mech.*, **262**, 75–110.
- CROS, A. & LE, G. P. 2002 Spatiotemporal intermittency in the torsional Couette flow between a rotating and a stationary disk. *Phys. Fluids.*, **14**, 3755.

- CROS, A. & LE, G. P. 2006 The transition to turbulence of the torsional couette flow. *In: Sixth IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition Fluid Mechanics and Its Applications.*, Ed. Govindarajan, Roma, **78**, 311–316, Springer, the Netherland.
- DEAN, R. B. 1978 Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow. *J. Fluid Mech.*, **100**, 215–223.
- DONG, S. & ZHENG, X. 2011 Direct numerical simulation of spiral turbulence. *J. Fluid Mech.*, **668**, 150–173.
- DUGUET, Y., SCHLATTER, P. & HENNINGSON, D. S. 2010 Formation of turbulent patterns near the onset of transition in plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, **650**, 119–129.
- HAMILTON, J. M., KIM, J. & WALEFFE, F. 1995 Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.*, **287**, 317–348.
- HAMMOND, E. P., BEWLEY, T. R. & MOIN, P. 1998 Observed mechanisms for turbulence attenuation and enhancement in opposition-controlled wall-bounded flows. *Phys. Fluids*, **10**, (9) , 2421–2423.
- IIDA, O. & NAGANO, Y. 1998 The relaminarization mechanisms of turbulent channel flow at low reynolds numbers. *Flow, Turbulence and Combustion*, **60**, 193–213.
- JEONG, J., HUSSAIN, F., SCHOPPA, W. & KIM, J. 1997 Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, **332**, 185–214.
- JIMENEZ, J. & MOIN, P. 1991 The minimal flow unit in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, **225**, 213–240.
- JIMENEZ, J. & PINELLI, A. 1999 The autonomous cycle of near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, **389**, 335–359.
- KASAGI, N., SUMITANI, Y., SUZUKI, Y. & IIDA, O. 1995 Kinematics of the quasi-coherent vortical structure in near-wall turbulence. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **16**, (1), 2–10.

- KAWAHARA, G. 2005 Laminarization of minimal plane Couette flow: Going beyond the basin of attraction of turbulence. *Phys. Fluids*, **17**, (4) , 04172.
- KIM, J., MOIN, P. & MOSER, R. 1987 Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **177**, 133–166.
- KLINE, S. J. & REYNOLDS, W. C. 1967 The structure of turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, **30**, 741–773.
- NISHI, M., UNSAL, B., DURST, F. & BISWAS, G. 2008 Laminar-to-turbulent transition of pipe flows through puffs and slugs. *J. Fluid Mech.*, **614**, 425–466.
- NISHIOKA, M. & ASAI, M. 1985 Some observations of the subcritical transition in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, **118**, 341–377.
- PATEL, V. C. & HEAD, M. R. 1969 Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows. *J. Fluid Mech.*, **38**, 181–201.
- PRIGENT, A., GREGOIRE, G., CHATE, H., DAUCHOT, O. & SAARLOOS, W. S. 2002 Large-scale finite-wavelength modulation within turbulent shear flows. *Phys. Rev. Lett.*, **89**, 014501.
- PRIYMAK, V. G. & MIYAZAKI, T. 2004 Direct numerical simulation of equilibrium spatially localized structures in pipe flow. *Phys. Fluids*, **16**, (12) , 4221.
- ROBINSON, S. K. 1991 The kinematics of turbulent boundary layer structure. *NSASA Technical Memorandum*, **103859**.
- SHIMIZU, M. AND KIDA, S. 2009 A driving mechanism of a turbulent puff in pipe flow. *Fluid Dyn. Res.*, **41**, 1–27.
- SIBILLA, S. & BERETTA, C. P. 2005 Near-wall coherent structures in the turbulent channel flow of a dilute polymer solution. *Fluid Dyn. Res.*, **37**, 183–202.
- TOH, S. & ITANO, T. 2003 A periodic-like solution in channel flow. *J. Fluid Mech.*, **481**, 67–76.

- TSUKAHARA, T., SEKI, Y., KAWAMURA, H. & TOCHIO, D. 2005 DNS of turbulent channel flow with very low Reynolds numbers. *Proc. 4th Int. Symp. on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, USA, 935–940.
- TSUKAHARA, T., IWAMOTO, K., KAWAMURA, H. & TAKEDA, T. 2006 DNS of heat transfer in a transitional channel flow accompanied by a turbulent puff-like structure. *Proc. 5th Int. Symp. on Turbulence, Heat and Mass Transfer*, Croatia, 193–196.
- TSUKAHARA, T. & KAWAMURA, H. 2007 Turbulent heat transfer in a channel flow at transitional Reynolds numbers. *Proc. 1st Asian Symp. on Computational Heat Transfer and Fluid Flow*, China, 18–21.
- TSUKAHARA, T., KAWAGUCHI, Y., KAWAMURA, H., TILLMARK, N. & ALFREDSSON, P. H. 2010 Turbulence stripe in transitional channel flow with/without system rotation. In: *Seventh IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, IUTAM Bookseries*, Ed. Schlatter, P and Henningson, D. S., **18** 421, Springer Science + Business Media B.V..
- WALEFFE, F. 2001 Exact coherent structures in channel flow. *J. Fluid Mech.*, **435**, 92–102.
- WYGNANSKI, I. J. & CHAMPAGNE, F. H. 1973 On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *J. Fluid Mech.*, **59**, 281–335.
- WYGNANSKI, I. J., SOKOLOV, M. & FRIEDMAN, D. 1975 On transition in a pipe. Part 2. The equilibrium puff. *J. Fluid Mech.*, **69**, 283–304.
- XU, J., MAXEY, M. R. & KARNIADAKIS G. E. 2002 Numerical simulation of turbulent drag reduction using micro-bubbles. *J. Fluid Mech.*, **468**, 271–281.
- YU, B. & KAWAGUCHI, Y. 2006 Parametric study of surfactant-induced drag-reduction by DNS. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **27**, (5), 887–894.
- 塚原 隆裕 2007 大規模直接数値シミュレーションによる低レイノルズ数平行平板間乱流の研究．東京理科大学博士論文．

沼野 貴之 & 松原 雅春 2008 二次元チャンネル流の再層流遷移過程に見られる攪乱構造の可視化およびLDVによる測定．日本流体力学会年会 2008, 29．

吉澤 徹, 村上 周三, 小林 敏雄, 谷口 信行, 戴 毅, 黒田 明慈, 亀本 喬司, 加藤 信介, 長野 靖尚, 辻 俊博 2003 乱流解析．数値流体力学シリーズ3．東京大学出版会, 19 - 135

吉野 正人, 関 大輔, 田中 義人 & 松原 雅春 2008 Lattice Kinetic スキームを用いた二次元チャンネル乱流の再層流化現象の解析．計算数理工学論文集 7, 255 - 260．