

博士論文

光格子上の冷却原子系による量子シミュ
レーションの研究

Study on quantum simulation of cold atom
systems in an optical lattice

久野義人
Yoshihito Kuno

2016/1

Contents

| | |
|---|----|
| I. はじめに | 4 |
| II. 極低温原子系と光格子 | 5 |
| A. 磁気トラップ | 6 |
| B. レーザートラップ | 7 |
| C. 光格子 | 8 |
| D. 人工磁場-回転編 | 11 |
| E. Bose-Hubbard モデル | 12 |
| F. 光格子上の Bose-Hubbard モデル | 14 |
| G. 光格子上の Bose-Hubbard モデルの人工磁場 | 16 |
| H. 量子 vortex の存在 | 19 |
| References | 21 |
| III. 格子ゲージ理論導入 | 23 |
| A. Quantum Electrodynamics | 23 |
| B. ゲージ理論の格子化 | 23 |
| C. U(1) lattice gauge theory | 26 |
| D. Kogut-Susskind ハミルトニアンにおける static charge の閉じ込め相 | 28 |
| E. Higgs 場の存在について | 30 |
| References | 32 |
| IV. Random Field Induced Order | 33 |
| A. Bosonic t-J Hamiltonian | 33 |
| B. Bosonic t-J モデルとその有効理論 | 37 |
| C. レプリカ平均場理論による RFIO の存在 | 39 |
| D. Monte-Carlo シミュレーション | 42 |
| E. RFIO 相の安定性 | 46 |
| F. RFIO 相におけるトポロジカル励起 | 46 |
| References | 49 |
| V. Bosonic t-J model with dipole-dipole interaction | 50 |

| | |
|---|-----|
| A. Extended Quantum XY model の導出 | 50 |
| B. Bosonic t-J model と slave-particle 表現 | 54 |
| C. dipole-dipole 相互作用より生成される擬スピン相互作用 | 55 |
| D. Gutzwiller 変分法 | 57 |
| E. Quantum Monte-Carlo simulation | 59 |
| F. 超固体相における人工磁場の効果 | 66 |
| References | 67 |
| VI. Atomic Quantum Simulation for U(1) lattice gauge-Higgs model | 69 |
| A. 量子シミュレーションとは何か | 70 |
| B. U(1) lattice gauge-Higgs モデルの量子シミュレーション | 70 |
| C. 拡張 Bose-Hubbard モデルから記述される U(1) gauge-Higgs モデル | 71 |
| D. U(1)lattice gauge-Higgs モデルの有効作用 | 73 |
| E. 相構造と出現する状態相の物理的意味 | 74 |
| F. ダイナミクスを決定する方程式 | 77 |
| G. 閉じ込め電束の初期設定 | 78 |
| H. 数値計算結果 | 79 |
| I. Gauss 則を実験的に構築する一つの提案 | 82 |
| J. 具体的なチューニング例 | 89 |
| References | 89 |
| VII. 人工磁場下の Bose Hubbard モデルの vortex 状態相の研究 | 91 |
| A. 人工磁場下の Bose Hubbard モデルとその有効作用 | 91 |
| B. Extended Quantum Monte-Carlo simulation | 93 |
| C. Duality 変換による vortex モデル | 97 |
| D. Vortex 固体 $f = 1/q$ ルール | 100 |
| References | 101 |
| VIII. Honeycomb 光格子中の Bose-Hubbard モデルの研究 | 103 |
| A. Haldane Bose Hubbard モデル | 103 |
| B. 相構造とエッジ状態 | 105 |
| References | 108 |

| | |
|-------------------|-----|
| IX. まとめと今後の展望 | 109 |
| X. Acknowledgment | 111 |

I. はじめに

近年、極低温原子系の物理は目覚ましい成果を挙げている。特に 2003 年にはじめて実験に成功した光格子上極低温原子系はその物理系の制御性の高さから実験、理論の両面から非常に多くの研究が近年、特に 21 世紀に入り目覚ましい勢いで進んでいる。その進展は実験技術の向上等技術進歩を求める研究から、一般には原子系のもつ物性的な側面の研究、さらには量子コンピューティング等の応用的側面の研究をも含む幅広い一大分野を光格子という土台を中心に形成しつつある。

本博士論文ではそのような情勢にのり、光格子極低温原子系上での広い範囲の物理について著者の研究をまとめたものである。特に光格子上原子系の物性的側面についての内容を多く含んでいる。さらには光格子上の物理系をより一般的な物理系、つまりは量子シミュレーションとしてとらえ、これまでの様々な理論的に深く研究されてきた物理モデルを光格子上で再構成しその物理を探求することに研究の力点を置いた。

さて、本博士論文は以下のように構成される。

I 章は極低温原子系かつ光格子について理論的な基礎事項をまとめた。II 章は極低温原子系の物理から離れて格子ゲージ理論を中心とした純粋に場の理論的に側面について著者の研究に関連のあるトピックをまとめた。III 章では光格子上 2 成分 Bose 粒子系についてランダム Rabi 振動の効果に生じる新奇秩序状態について述べる。IV 章では光格子上 2 成分原子系において超流動状態と固体状態の共存状態である超固体相を調べる。特に原子がもつ dipole 相互作用の効果により誘発する超固体相についての有無を理論的に検証する。V 章では、ごく最近になって研究が始まった光格子上での格子ゲージ理論、特に $U(1)$ ゲージヒッグスモデルに対応する冷却原子量子シミュレータの構築について、最近我々のグループが行った理論的研究を述べる。VI 章では光格子上 Bose 原子系での人工磁場による研究について、特に外的なレーザーによって人工的に誘起されるゲージ場が寄与する量子 vortex が織りなす新奇状態相について述べる。

本論文では最新の研究トピックについて著者の関係のある分野についてまとめたものである。内容のほとんどは凝縮系における場の理論を基礎とした研究であり、場の理論の基礎的事項、特に既存の教科書の内容と重なる部分については記述や説明が少ないことを承知していただきたい。

先に本博士論文の内容に関連する著者の関わった論文を示す。

1. Phase diagram of Bose-Hubbard model with complex hopping amplitudes in square and honeycomb lattices, , Yoshihito Kuno, Takashi Nakafuji Ikuo Ichinose, accepted in Phys. Rev. A (2015).
2. Two-component Bose gas trapped by harmonic and annular potentials: Supercurrent, vortex flow and instability of superfluidity by Rabi coupling , Hayato Ino, Yoshihito Kuno, Ikuo

- Ichinose, arXiv:1503.08906 (2015).
3. Proposal for feasible experiments of cold-atom quantum simulator of U(1) lattice gauge-Higgs model , Yoshihito Kuno, Kenichi Kasamatsu, Yoshiro Takahashi, Ikuo Ichinose, Tetsuo Matsui, New J. Phys. **17** 063005 (2015).
 4. Superfluidity and solid orders in two-component Bose gas with dipolar interactions in an optical lattice , Yoshihito Kuno, Keita Suzuki, Ikuo Ichinose, Phys. Rev. A **90**, 063620 (2014).
 5. Random-field-induced order in bosonic t-J model , Yoshihito Kuno, Takamasa Mori, Ikuo Ichinose, New J. Phys. **16** ,083030 (2014).
 6. Superfluid, Supersolid and Checkerboard Solid in Two-Component Bosons in an Optical Lattice: Study by Means of Gross-Pitaevskii Theory and Monte-Carlo Simulations , Yoshihito Kuno, Keita Suzuki, and Ikuo Ichinose, J. Phys. Soc. Jpn. **83**, 074501 (2014).
 7. Effective field theory for two-species bosons in an optical lattice: Multiple order, the Nambu-Goldstone bosons, the Higgs mode and vortex lattice , Yoshihito Kuno, Keita Suzuki, and Ikuo Ichinose, J. Phys. Soc. Jpn. **82**,124501 (2013).
 8. Effective field theories for two-component repulsive bosons on lattice and their phase diagrams , Yoshihito Kuno, Keisuke Kataoka, and Ikuo Ichinose, Phys. Rev. B **87**, 014518 (2013).
 9. Bosonic t-J Model in a stacked triangular lattice and its phase diagram , Keisuke Kataoka, Yoshihito Kuno, Ikuo Ichinose, J. Phys. Soc. Jpn. **81** (2012).
 10. Crystal, Superfluids, Supersolid and Hetero-Structure in System of Two-Component Strongly-Correlated Bosons in a Cubic Optical Lattice , Ikuo Ichinose, Takumi Ishima, Naohiro Kobayashi, Yoshihito Kuno, arXiv:1112.5516 (2012).

II. 極低温原子系と光格子

本章では近年急速に発展してきている極低温原子系の実験について、基礎的かつ重要な理論的な側面を簡潔に述べていくことにする。特にこの分野を先行しているのはヨーロッパの大学の実験グループである。本章における多くの内容は、文献 [1, 2] に記述されていることが多いことを先に宣言

しておく. また、この論文を書いている間にも実験において多くのブレークスルーが起きているのは自明である. 以後、本論文における理論の土台となる実験的事柄を記述することにする.

A. 磁気トラップ

1995 年、Cornell, Ketterle, Wieman らはレーザー冷却と蒸発冷却法を用いてアルカリ原子系を数百 nK オーダーまで冷却し、アルカリ原子 Bose-Einstein-Condensation (BEC) を実現させた [3]. ここで、原子を補足する一つの手法として磁気トラップを紹介する.

原子は電子の spin 磁気モーメントと核 spin をもつ複合的磁気モーメントを持つ. ここで、多くの実験ではその最外殻電子が一つであり、シンプルであるがゆえアルカリ原子が用いられている. 以下ではアルカリ原子を例に説明する.

一般的なアルカリ原子の状態は $(ns)^2S_{1/2}$ と表記できる. ここで例えば n は $n = 2$ は Li 原子に対応する. ここで、原子のトータルスピン F は以下のように表記できる.

$$F = I \pm 1/2. \quad (2.1)$$

ここで I は核スピンの大きさを $1/2$ はもちろん最外殻電子の spin doublet 状態を表す. ここで、外部磁場 B の存在を考えるとすると、Zeeman 効果によるエネルギー分裂がトータルスピン F の z 方向成分 m_z (つまりは核スピン z 成分と電子スピン z 成分の和) に依存して起こる. ここで外部磁場が大きいつき (Paschen-Back regime)、そのエネルギーレベルは以下ようになる.

$$E(I, m_z) = \pm |\mu_B| \left[B + \frac{2}{2I+1} m_z B_{hf} \right]. \quad (2.2)$$

ここで、 μ_B は Bohr 磁子で、 B_{hf} は最外殻電子の spin doublet 状態のエネルギーに依存する定数である. この分裂を hyperfine atomic level と呼ぶ.

ここで、この分裂を利用して、捕獲されるアルカリ原子の運動エネルギーが十分小さいとき、つまり系が極低温状態の時、空間的に変調する外部磁場を入れると、アルカリ原子は空間的に依存したポテンシャルを感じるようになる. こうして、ある一つの hyperfine state の原子に対して、

$$V_i(r) = E_i(|\mathbf{B}(r)|), \quad (2.3)$$

と書くことができるポテンシャルを考えることができる. ここで、 i は hyperfine index である. また $E_i(B)$ は Eq.(2.2) で与えられるポテンシャルカーブである. このようにして空間的に磁場を変調させてポテンシャルをつくる. また多くの実験では、トラップする磁場には原子の中心質量速度よりも激しく振動する交流磁場を用いて harmonic trap を構築し原子 gas 全体がパンケーキ型になるような形でトラップする.

B. レーザートラップ

磁場で原子をトラップするのではなくレーザーを用いて原子をトラップする手法が存在する。この技術はのちの光格子の原理をなす手法である。このようなトラップ技術は1980年代に発展し特に、Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji, William D. Phillips ら三者には1997年にノーベル賞が贈られている [4]。近年の冷却原子系の実験ではレーザートラップのほうが多く使われている傾向が経験則から言える。これは、後述の Feshbach 共鳴等で多体粒子系の相互作用をコントロールするために外部磁場は使われてしまうからである。

今から、アルカリ原子、特に ^{87}Rb を代表的例として説明する [5]。レーザートラップの本質は原子の電気双極子モーメントとレーザーの電場のとの相互作用を二次摂動としてとらえ、そこから誘発されるエネルギーシフトの時間平均をとることである。

まず簡単のため原子の核スピン $I = 0$ の場合を考える、ここでアルカリ原子の最外殻電子の状態は $^2S_{1/2}$ であり、適当な周波数のレーザーを照射すると、 $(np)^2P_{1/2}$ あるいは $^2P_{3/2}$ というエネルギー準位とカップルする、ここでそれらのエネルギーギャップを以下 ns-np splitting と呼び、そのエネルギーギャップを ω_{sp} とする。そして、レーザーの振動数 ω_0 は ω_{sp} に近い値で調整する。このような設定をしたとき、 2S と 2P 状態の間で、電気双極子モーメントと電場の相互作用

$$H_d = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.4)$$

を介した、行列要素が存在する。

次に、この効果を2次摂動として取り入れることを考える。電場 $\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}(\omega_0)e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{E}(-\omega_0)e^{i\omega_0 t}$ の表現を用いて、光子の一つの吸収と放出を介した、二次摂動エネルギーは、

$$\Delta U = - \sum_e \frac{|\langle e | H_d | s \rangle|^2}{\omega_{sp}}, \quad (2.5)$$

と評価できる。ここで $|s\rangle$ と $|e\rangle$ は s 状態と p 状態とである。ここで、光子の一つの吸収と放出を詳細に記述すると、 $|s\rangle$ 状態のエネルギー E_s 、 $|e\rangle$ 状態のエネルギー E_e とすると、式 (2.5) は、

$$\begin{aligned} \Delta U &= \sum_e \langle e | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\omega_0) | s \rangle \frac{1}{E_e - E_s + \hbar\omega_0} \langle e | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(-\omega_0) | s \rangle \\ &+ \sum_e \langle e | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(-\omega_0) | s \rangle \frac{1}{E_e - E_s - \hbar\omega_0} \langle e | \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\omega_0) | s \rangle \\ &= I(\omega_0) E^2(\omega_0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} I(\omega_0) &= \sum_e |\langle e | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e} | s \rangle|^2 \frac{2(E_e - E_s)}{(E_e - E_s)^2 - (\hbar\omega_0)^2} \\ &\sim \sum_e |\langle e | \mathbf{d} \cdot \mathbf{e} | s \rangle|^2 \frac{1}{\Delta} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで、 \mathbf{e} は電場の単位ベクトル、 $\Delta \equiv E_e - E_s - \hbar\omega_0$ と定義しこれを detuning parameter とよぶ。さらに、原子の中心運動速度 (center of mass motion) が光子の放射プロセスの時間 $\sim 10^{-15}$ msec とに比べ十分長いとき、このエネルギーシフトは時間的に変動する電場の時間平均をとったものに近似できる。つまり、

$$\Delta U = \frac{1}{2} \langle E(r, t)^2 \rangle_t \frac{1}{\Delta}, \quad (2.8)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle_t$ は時間平均である。これより、二次摂動によって誘発エネルギーシフトは電場の時間平均振幅に依存する。このようなエネルギーシフトを AC-Stark shift と呼ぶ。ここで、エネルギーシフト ΔU は detuning parameter Δ によって正負のコントロールが可能である。 $\Delta < 0$ red-detuning と呼ばれ引力ポテンシャルに、一方 $\Delta > 0$ のとき blue-detuning と呼ばれ斥力ポテンシャルになる。

このようにして位相コヒーレンスの高いレーザーを用いて空間変調した電場の振幅を実験的に構築してやれば自在に原子に対して引力、斥力ポテンシャルを構築することが可能である。

C. 光格子

前節で、レーザーの振幅により電気双極子 (electric dipole) をもった原子が有効的なエネルギーシフトを持つことが示された。以下ではこの原理を用いて光格子 (optical lattice) と呼ばれる、レーザーの定常波による周期ポテンシャル生成について説明する [1, 2].

光格子は IV 章以降すべての理論モデルの実験的土台を提供しており、光格子上でのモデルを今後扱っていく。

まず、一つの偏光レーザーを考える

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \quad (2.9)$$

前節で示したようにこのレーザー電場による電気双極子を持つ原子が受けるポテンシャル $V(\mathbf{r})$ は ω_0 が原子の ns-np splitting のエネルギーギャップ $E_e - E_s$ に近いとき、

$$\Delta U = \frac{1}{2} \langle E(r, t)^2 \rangle_t \frac{1}{\Delta}, \quad (2.10)$$

となる。つぎに、2本の異なるレーザーを重ね合わせた場合を考えると、その合成電場は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}t) = 2\mathbf{E}_0 \cos\left[\frac{(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}}{2} - \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right] \times \cos\left[\frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}}{2} - \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right], \quad (2.11)$$

となる、ここで電場の振動が非常に早いとき、つまり $\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$ が非常に大きいとき上記の電場は AC stark shift の考えより、

$$V(\mathbf{r}t) = \frac{2\langle E(r, t)^2 \rangle_t}{\Delta} (1 + \cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} - (\omega_1 - \omega_2)t)), \quad (2.12)$$

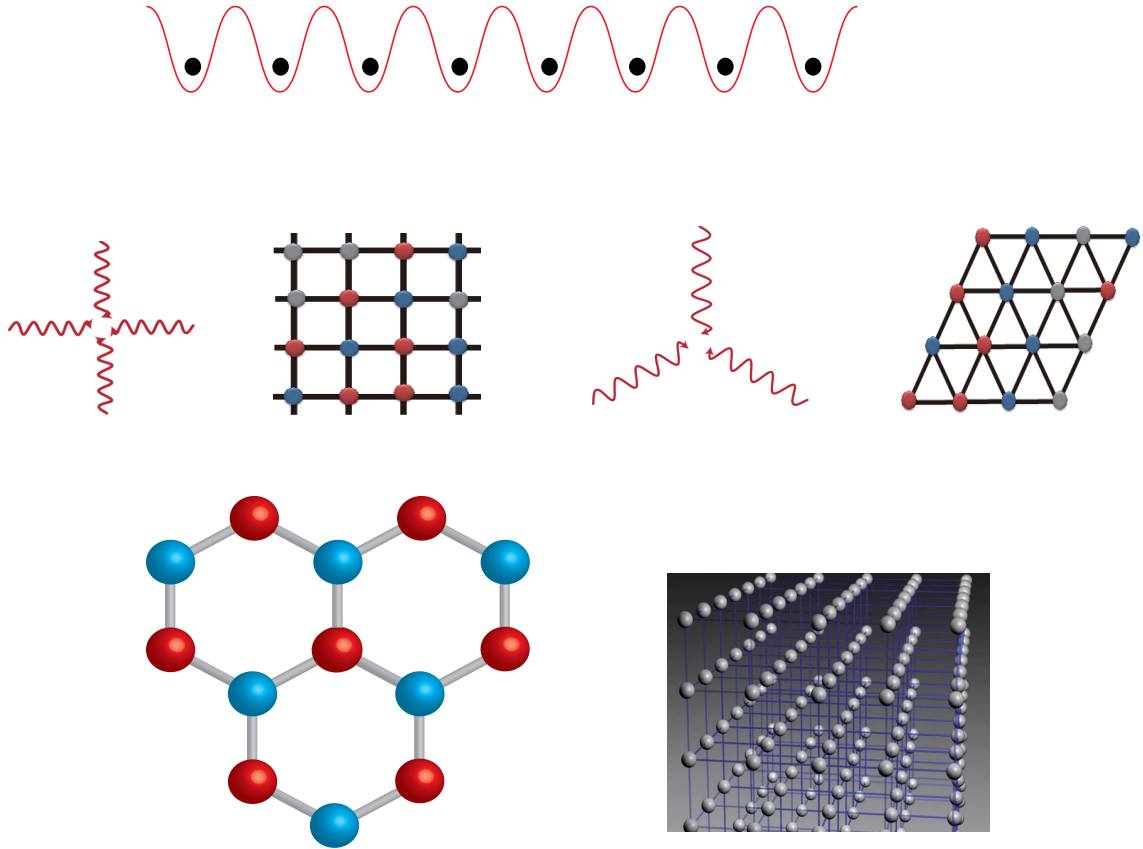


FIG. 1: (Color online) 様々な光格子、上段の図は空間方向1次元の光格子ポテンシャル、中段図は空間2次元の正方形光格子と三角光格子、特に三角光格子系は量子スピン系と関連した研究でよく想定される。下段は空間2次元の Honeycomb 光格子と空間3次元立方光格子系。

となる。ここで、もし二つのレーザーが対向するものであるならば定常波が生成し電場の強度は空間的に周期的になる。これより、もし対向レーザーのペアを三つ用いて x, y, z 方向それぞれに電場強度を周期的にすると以下の周期ポテンシャルが得られる。

$$V(\mathbf{r}t) = \frac{1}{2}V_0(\cos 2kx + \cos 2ky + \cos 2kz). \quad (2.13)$$

これが、光格子ポテンシャルである。ここで V_0 はレーザーの強度に比例する量である。ここで、もし原子の運動エネルギー $E_R = \hbar^2\omega_0^2/(c^2M)$ (M は原子の質量) が V_0 より十分小さいとき、原子は周期ポテンシャルのある一つの谷にトラップされる。多くの光格子の実験やそれに関連する理論では E_R をエネルギー単位にしてこれを recoil energy と呼んでいる。特に典型的な ^{87}Rb 原子を考えると $\sim 2\text{kHz}$ のエネルギースケールを持つ。典型的な光格子の概略図を Fig. 1 に示す。

光格子を用いた実験における最初の成功は Ref[7] 文献である。現実に空間3次元光格子を用いた1成分の Bose 粒子系の超流動-Mott 量子相転移現象 (Quantum phase transition) が観測された。具体的には、

蒸発冷却法とレーザー冷却法を併用して絶対零度不付近 (数 10 nK) まで系の温度を下げ、温度を変えて古典的な熱ゆらぎを変えて相転移を観測するのではなく、ハミルトニアンのもつパラメータを絶対零度化で動かし量子ゆらぎによる量子相転移現象 [8] を実現した。

空間 3 次元光格子上の最もシンプルかつ基礎的なモデルとして Bose-Hubbard モデル [8, 9] を再現した。

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} a_i^\dagger a_j + \sum_i \epsilon_i n_i + \frac{1}{2} U \sum_i n_i (n_i - 1) \quad (2.14)$$

記述される。実際に実験では光格子ポテンシャルの高さを準静的に変えることにより SuperFluid 相 (SF 相) から Mott 絶縁体相への相転移現象を実現した。この転移は tunneling のパラメーター J と粒子間の反発力 U のパラメーターとの競合で操作されると考えられる。

また、実験における状態相の識別は time of flight method [7, 18] 用いて光格子ポテンシャルから原子系を解放したときどのように原子雲が膨らんでいくのかで系の運動量分布を測定する。もし、系の状態が BEC のパラメータ領域であるときはその運動量分布は $k = 0$ 状態にピークをもつ、一方、Mott 絶縁体相のとき、その運動量分布は拡がりを見せる。

さらに詳細な現実の実験セットアップを述べると、一つのサイトにトラップされる粒子は平均 1 - 3 個 (現在ではサイト一つに一つの原子をトラップでき更にそれをその場観測 (*in-situ* observation) が可能である [10])。磁気トラップされた ^{87}Rb はレーザー冷却と蒸発冷却で約 2×10^5 個の原子 gas を形成している。

また、空間 3 次元光格子を作るとき原子 gas に向けて、直交する三方向 (x, y, z 方向) から波長 $\lambda = 852\text{nm}$ のレーザーを照射する。各レーザーの照射方向の側には反射鏡を設置する。これで磁気トラップ内に光学格子を導入する。そして、トラップのポテンシャルは $V(x, y, z) = V_0(\sin^2(kx) + \sin^2(ky) + \sin^2(kz))$, ここで $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ である。 V_0 は調整可能である。またこの格子系は計 150,000 サイトを持つ格子を作り出す。(一方向で 65 サイト) そして、 V_0 を大きくしていき一つのサイトに平均 2.5 個の原子をトラップした。また近年の実験では $200 \times 200 \times 200$ 程度の 3 次元光格子も構築できる。

以下では、周期ポテンシャルを光学格子で作りに出し格子モデルつくる利点を列挙しておく、

1. 格子形状: 周期ポテンシャルをレーザーの照射方向や本数、偏光方向を上手く変えることで 1D, 2D, 3D のシステムを自在に構成できる、基本的には 10^3nm スケールの波長をもつレーザーで作られる。例えば、十字方向に二つの直交する定在波を作り出すと、1次元のポテンシャルチューブが構成できそのチューブ一本一本に粒子をトラップできる。これは1次元系の量子多体系を作り出したことに等しい。また、三つの直交する定在波を作り出すことは立方格子を構成することに等しい。近年、三つのレーザーを各入射方向を 120° ずらして周期ポテンシャルを構成すると 2D 三角格子、ないし 2D Honeycomb 格子を作り出すことが可能となっている [11].

またカゴメ格子 [12] も作り出されている. このようにレーザーの作り出す原子を感じるポテンシャルエネルギーを上手く制御して望む格子形状を作ることができる.

2. 光格子では通常の強相関系物質とくらべて格子欠陥や不純物の影響をほとんど受けないハイパークリーンな系である. また人工的に欠陥を入れてやったり、疑似的なランダムポテンシャルをレーザーによって作り疑似的に不純物効果をシミュレートできる.

D. 人工磁場-回転編

この節では、格子系を離れて磁気トラップされた原子系を考える、もちろんその系は連続的な系である. 実験において磁気トラップされる多くの原子は Boson である (Na, Rb 等). しかしながら、系を回転させることで一様な磁場の加えたような効果を得ることができる [15].

またこの節の内容は VII 章と VIII 章の内容と密接に関係しており、VII 章ではこのような人工磁場の効果による極低温原子系の基底状態が調べられる.

harmonic 磁気トラップされた回点原子系は 1 粒子ハミルトニアンで記述すると

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2 r^2}{2} - \Omega L_z = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A})^2}{2M} + \frac{1}{2}M(\omega^2 - \Omega^2)r^2. \quad (2.15)$$

ここで、 ω は harmonic トラップの曲率、 r は系の中心からの距離、 Ω は回転速度であり、さらに

$$\mathbf{A} = M\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}. \quad (2.16)$$

として、ベクトルポテンシャルに対応する量が回転による z 方向の角運動量作用より導かれる. これはコリオリ的なものである. このベクトルポテンシャルより、一様な人工磁場 (artificial magnetic field) が生成できる.

$$B_z = 2M\Omega. \quad (2.17)$$

ここで、式 (2.15) の最右辺第二項より、回転によって発生した遠心ポテンシャルは harmonic トラップポテンシャルの差として記述できる. これより、harmonic トラップの曲率と回転速度を上手くチューニングすることで ($\omega \sim \Omega$) 系の密度はおよそ一様でさらに一様な磁場が入った系と等価になる. このような系では強磁場の生成は難しいものの、極低温原子系における超流動体に弱い一様磁場の生成が可能であり、これによって発生する量子渦 (vortex) が盛んに研究されている [16]. とくに理論研究において、このような系は Gross-Pitaevskii (GP) 方程式による膨大な量の数値計算の研究がなされている [17, 18]. そのような数値計算による解析は実験と非常に良い一致をみせ非常に多くの成功を収めている.

後の章にて量子 vortex の生成原理については説明する.

弱磁場領域では回転による方法で磁場生成は可能であるが、量子ホール効果や分数量子ホール効果等の物理を Boson 系で再現しようとするのに必要な強磁場領域までは届かない。しかしながら、Raman レーザーによる人工磁場生成法も構築されておりこの方法の方が強磁場領域の状態まで到達できる可能性がある [19]。次の節以降で Raman レーザーを使って光格子上 Bose Hubbard モデルに人工磁場 (Piers 位相) を作り出す方法の紹介をする。

E. Bose-Hubbard モデル

この節では強相関系における代表的なモデルである Bose Hubbard (BH) モデルについて光格子上の代表的モデルとして説明する。本来、BH モデルは 1980 年代、2 次元超伝導薄膜のクーパーペア場による強相関モデルとして理論的に興味を持たれていたモデルある [3]。本論文において BH モデルは我々は光格子上で扱う種々のモデルに関係した最も基本的なモデルであり IV 章以降様々な形でその拡張モデルが示され極低温原子系の解析に用いられる。

さて、これから格子上の BH モデルの導出を紹介する、もちろん Fermion 系と導出過程はほとんど同じである。

まず最も基本的な一般的な 4 体相互作用する多体系ハミルトニアン $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{int}$ を書くと。

$$\hat{H}_0 = \int d^d r a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] a_{\sigma}(\mathbf{r}), \quad (2.18)$$

$$\hat{V}_{ee} = \frac{1}{2} \int d^d r \int d^d r' V_{int}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') a_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) a_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}') a_{\sigma'}(\mathbf{r}') a_{\sigma}(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

ここで、 V_{int} は一般的には複雑なノンローカルなポテンシャルであり、 $V_{ext}(\mathbf{r})$ は Boson が感じるローカルなポテンシャルである。このポテンシャルは前節の原子系の実験に対応させれば、harmonic トラップや、光格子ポテンシャルとみなすことができる。

また \hat{V}_{int} は一般的な 4 体相互作用で、おおくの極低温原子系の問題では s 波散乱 (ローカルな接触相互作用) であったり、原子の磁気モーメントから誘発される dipole-dipole 相互作用に対応する [21]。例えば s 波散乱の相互作用を考える場合 $\hat{V}_{int} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(r - r')$ (ここで a は s 波散乱長、 m は原子の質量) となる。

さらに σ は原子の種類 (内部自由度の異なり、原子番号など)、あるいは、スピン z 成分のインデックスである (この場合は擬スピンとしてとらえることも可能、さらにはゲージ理論からの視点だとフレーバーと考えることも可能 [9])。

このモデルの大まかな振る舞いを分類するためには、注目箇所を分割して考えていくことが役に立つ、まずはじめに、自由粒子の振る舞いをするパート \hat{H}_0 の性質に注目をしてそれから残りの相互作用パート \hat{V}_{int} を扱っていくことにする。ここでは我々は極低温化での系の振る舞いに興味がるの

で、 \hat{V}_{int} は運動エネルギーに比べて同程度か大きいと考える、この際、系を摂動論的に扱って多数の興味ある物理量を、ファインマングラフを処理し近似的に算出する [23, 24] という方針は考えない。

さて、量子系において、自由粒子の波動関数は運動量一定の状態でありそれは考える系の全空間に広がった平面波として記述できる。このようなことから運動量空間における場の演算子の表現を扱うことのほうが便利であることが推測できるであろう。したがって \hat{H}_0 を運動量空間表示にフーリエ変換を用いて移行すると、

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}^2}{2m} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma} \quad (2.20)$$

となる。

4 体相互作用項についての運動量表示は

$$\hat{V}_{int} = \frac{1}{2L^d} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} V_{int'}(\mathbf{q}) a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\sigma'}^\dagger a_{\mathbf{k}'\sigma'} a_{\mathbf{k}\sigma} \quad (2.21)$$

となる。ここでもし、クーロン型 ($1/r^2$) の相互作用を想定したら $V_{ee}(\mathbf{q}) = \frac{e^2}{q^2}$ である。電子系の場合、このモデル $\hat{H}_0 + \hat{V}_{ee}$ は Jellium model と呼ばれる。1950 年代以降、弱領域相互作用を想定した、摂動論を用いた解析が膨大に行われてきた [25]。

つぎに、tight-binding システムを説明していく。つまり、粒子が各格子点上に強く束縛された場合を想定する。格子点上に定義される波動関数の広がりよりも、格子間隔が広い状態を想定する。これを atomoc limit と呼ぶ。このような強相関領域においてミクロスコピックな理論を構成するためにはそれぞれ孤立した格子点上に定義される局所的な基底状態に対してハミルトニアンを展開することが便利である (固体中の電子のモデルと対して、光格子においては、設置したレーザー波の定在波によってできる potential well に陽イオンが対応する)。

そのような基底は Wannier 基底状態によって表現できる。それは以下のようなものである。

$$|\Psi_{\mathbf{R}n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}}^{B.Z} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} |\Psi_{\mathbf{k}n}\rangle, \quad (2.22)$$

$$|\Psi_{\mathbf{k}n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} |\Psi_{\mathbf{R}n}\rangle, \quad (2.23)$$

ここで \mathbf{R} は格子の中心座標を示す、 $B.Z$ は第一 Brillouin zone である。

Wannier 関数 $\Psi_{\mathbf{R}n}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \Psi_{\mathbf{R}n} \rangle$ は中心座標 \mathbf{R} に位置する、 n 番目のバンドで収束する。この Wannier 状態を使って低エネルギー状態での一般的な有効ハミルトニアンを得ることができる。まず、Wannier 状態はハミルトニアン of the 正規直行基底を構成する。つまり実空間と Wannier 表現の間の変換はユニタリーである、 $|\mathbf{r}\rangle = \sum_{\mathbf{R}} |\Psi_{\mathbf{R}}\rangle \langle \Psi_{\mathbf{R}} | \mathbf{r} \rangle = \sum_i \Psi_{\mathbf{R}_i}^*(\mathbf{r}) |\Psi_{\mathbf{R}_i}\rangle$ 。そうしたことから、ある変換が導入できる。

$$a_{\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_i \Psi_{\mathbf{R}_i}^*(\mathbf{r}) a_{i\sigma}^\dagger, \quad (2.24)$$

となる。一方、運動量空間内では、そのユニタリー変換は、 $a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(\text{Bloch}) = a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger(\text{Wannier})$ という関係式を第一 Brillouin zone 内で満たす。ここで、極低温原子系の場合、各サイトのバンドは最も低い状態のみ占有すると近似する (lowest band approximation)。このとき、上記の関係式を使って、相互作用項を含んだハミルトニアン tight-binding 表現が得られる。

$$\hat{H} = \sum_{ii',\sigma} a_{i\sigma}^\dagger t_{ii',\sigma} a_{i'\sigma} + \sum_{ii'jj',\sigma,\sigma'} U_{ii'jj',\sigma,\sigma'} a_{i\sigma}^\dagger a_{i'\sigma'}^\dagger a_{j\sigma} a_{j'\sigma'}. \quad (2.25)$$

ここで、最低バンドの波動関数をあらわに $\omega_{0i,\sigma}(\mathbf{r})$ とした。さらに、 $t_{ii',\sigma}$ と $U_{ii'jj',\sigma,\sigma'}$ はコントロールパラメータとしてみなすことができ

$$t_{ii',\sigma} = \int d\mathbf{r} \omega_{0i,\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar\nabla^2}{2M} + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \omega_{0i',\sigma}(\mathbf{r}). \quad (2.26)$$

さらには、

$$U_{ii'jj',\sigma,\sigma'} = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \omega_{0i,\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \omega_{0i',\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}') V_{int}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \omega_{0j,\sigma}(\mathbf{r}) \omega_{0j',\sigma'}(\mathbf{r}') \quad (2.27)$$

である。さらに、化学ポテンシャル項は、

$$t_{ii} \equiv \mu_i = \int d\mathbf{r} \omega_{0i,\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar\nabla^2}{2M} + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \omega_{0i,\sigma}(\mathbf{r}). \quad (2.28)$$

となる。

最終的には、もし格子間隔が atomic limit のとき、隣り合うサイトの波動関数のオーバーラップは小さい。つまりは、行列要素 $t_{i,j}$ は指数関数的にサイト間距離に応じて小さくなる。この極限で on-site 相互作用 $U_{iiii} = \frac{U}{2}$ が支配的な相互作用のメカニズムである。さらには最近接サイト間 (nearest neighbor(NN)) の行列要素 $t_{i,j}$ のみが粒子のホッピングとして寄与するものとみなすと、有効ハミルトニアンは Hubbard モデルと呼ばれるモデルになる。

$$\hat{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} t_{ij} a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma} + \sum_i \mu_i a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} + \sum_i U a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} a_{i\sigma}. \quad (2.29)$$

$$(2.30)$$

このモデルについて、演算子 a_i を Boson 演算子とみなすと、光格子上 Bose-Hubbard モデルになる。

F. 光格子上の Bose-Hubbard モデル

前節で示した、BH モデルは光格子を用いてはじめて実験的に構築され、かつ、これまで理論上予言されされていた多くの物理的事象、特に超流動-Mott 転移をシミュレートできた、いわゆる”量子シミュレーション” (quantum simulation) [13] の最初の成功例であるといつてよいだろう。

この節では具体的に光格子上的 BH モデルについて、理論と実験の対応について簡潔に紹介する。単一原子系（ここでは ^{87}Rb を想定した）、Bose-Hubbard モデル [7] を Eq. (2.30) から再定義する。まず、BH モデルは、 E_R を Recoil エネルギー、 V_0 を光格子ポテンシャルの最大高さとして、 $E_R \gg V_0$ のとき Wannier states が各ポテンシャル最低値に局所的に定義できる状態になり、厳密に BH モデルを定義できる。この条件 $E_R \gg V_0$ は系の温度を nK オーダーまで冷却すれば容易に達成できる。また、各サイトに定義される Wannier states に考えると、周期ポテンシャルの極小値近傍ではポテンシャルカーブが二次曲線的に近似できるので、Wannier states は調和振動子型の波動関数で近似的に記述できる。このときその最低エネルギー状態においても零点エネルギーが存在し、その零点エネルギー E_0 と光格子ポテンシャルの最大高さ V_0 の比 $E_0/V_0 \ll 1$ とセットする必要がある。さらに、各サイトで定義できる最低エネルギー状態の波動関数の広がり a_z と光格子の格子間隔 a とすると $a_z/a = \pi^{-1} E_R/V_0$ [1] となり、この比もある程度小さくする必要がある。

このような状況のとき、BH モデルの hopping については、

$$t \equiv \int d\mathbf{r} \omega_{0,i}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar \nabla^2}{2M} + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \omega_{0,j}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{const.} \omega_0 \exp \left[(8V_0/E_R)^{-1/2} \right]. \quad (2.31)$$

となる。

一方、4 体相互作用については、光格子中の原子系は極低温では原子同士の s 波散乱（接触相互作用）のみを考えれば十分であり、この相互作用は局所的であると近似できる。よって Eq. 2.27 において $V_{int}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \rightarrow g\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ となり、サイト間の寄与は無視できる。これより 4 体相互作用は on-site 相互作用となる。

$$U = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \omega_{0,i}^\dagger(\mathbf{r}) \omega_{0,i}^\dagger(\mathbf{r}') g \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \omega_{0,i}(\mathbf{r}) \omega_{0,i}(\mathbf{r}'), \quad (2.32)$$

であり、もし各サイトに粒子が 2 個存在するとき、

$$U \propto (V_0/E_R)^{3/4}. \quad (2.33)$$

となる。光格子上的 Bose Hubbard モデルをはっきりと記述すると、

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} a_i^\dagger a_j + \sum_i \epsilon_i n_i + \frac{1}{2} U \sum_i n_i (n_i - 1), \quad (2.34)$$

となる。さらに光格子上では on-site 相互作用と hopping の比は $U/J \propto \exp(2\sqrt{V_0/E_R})$ として与えられこれは実験において自在に制御できる。

次に、BH モデルの状態相について紹介する。BH モデルでは U/J のパラメーター比で超流動相と Mott 絶縁体相が出現すると理論的には予言されていた [3]。

まず、on-site 相互作用 $U \sim 0$ で理想的な BEC 状態のとき、超流動状態は以下の波動関数で記述できる。

$$|\psi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\frac{1}{\sqrt{N_L}} \sum_{\mathbf{R}} \hat{a}_{\mathbf{R}}^\dagger \right)^N |0\rangle. \quad (2.35)$$

ここで、 N は系全体の粒子数、 N_L は光格子のサイト数である。もし、ここで $N, N_L \rightarrow \infty$ を想定すれば (現実の実験では $N \sim 10^5$ [7])、式 (2.35) はコヒーレント状態と一致し、各サイトの量子位相は同じ値を取る ($U(1)$ 対称性の破れ)、このとき、各サイトでの粒子密度は位相-粒子の不確定性関係から平均粒子濃度周りでゆらぎが大きくなる。この状態は off-diagonal long range order (ODLRO) を持つことが知られている [26]、つまり $\langle a_i^\dagger a_{i+r} \rangle \neq 0$ である。また、Gross-Pitaevskii 方程式による数値解法が有効であることが知られている [16, 18]。

一方、 $J \sim 0$ のとき、系の状態は各サイト決まった粒子数をもつ Mott 絶縁体状態で記述できる。

$$|\psi_{N=N_L}\rangle = (\prod_{\mathbf{R}} \hat{a}_{\mathbf{R}}^\dagger) |0\rangle \quad (2.36)$$

ここで $N \sim N_L$ を想定した (filling factor = 1)、この波動関数は 1 サイトに 1 粒子が存在するローカルな Fock 状態の積で表現される。この状態は、各サイト粒子数がはっきりと決まっているため非圧縮性 (incompressibility)

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = 0, \quad (2.37)$$

を持つ。このとき非圧縮性は状態の励起エネルギースペクトルにギャップをもつ。また、超流動層は系のグローバルな $U(1)$ 対称性が破れた相であるため、Nambu-Goldstone モードと呼ばれるギャップレスな励起モードが出現する。

BH モデルのパラメーター比 U/J を変えることで、超流動-Mott 絶縁体転移が出現することが知られている。理論でははじめ [3] らの平均場理論により、filling = 1 のときその相転移臨界点はおよそ $U/J = 5.8z$ (z は一つのサイトから伸びるリンク数) と予想された。光格子の実験においても adiabatic に U/J を変えていくことで量子相転移を見出している、実験値は filling=1 のとき、 $E_R/V_0 = 11.58$ [7] であった。また量子モンテカルロ法を用いた数値計算では $U/J = 29.36$ [27] という結果も出ている。これら解析的理論、実験、数値シミュレーションともにある程度的一致が見られ、光格子は現実に量子シミュレーションとして非常に信頼性の高い実験システムであると考えられる。

G. 光格子上の Bose-Hubbard モデルの人工磁場

この節では文献 [28] の理論的提案より、光格子 BH モデルに人工磁場 (artificial gauge field) の理論的に構成について説明する。

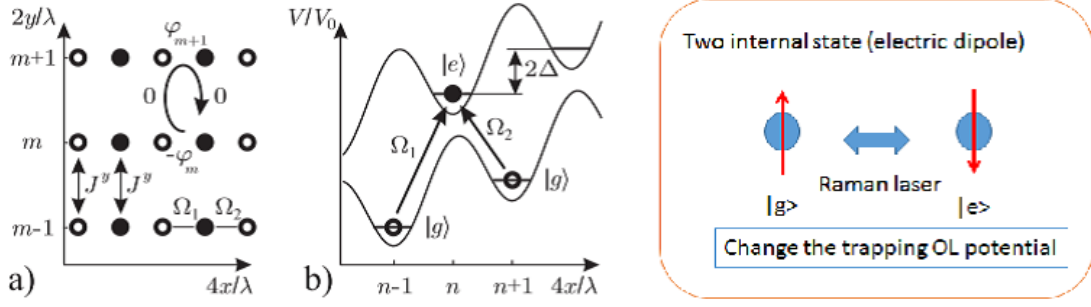


FIG. 2: (Color online) (a),(b) は文献 [28] より、

この節の内容は VII 章で扱われるモデルの基礎をなす実験的側面の記述であり、この人工磁場の想定のもと極低温原子系の解析が行われる。

まず、図 2 に示したような光格子系を考える、ここで、 x 座標が odd site が even site でそれぞれ違うエネルギーレベル ($|g\rangle, |e\rangle$) の原子をトラップできるように光格子を設定する。このとき、 y 方向の hopping は通常のポテンシャル障壁をこえる tunneling で、一方、 x 方向の hopping はポテンシャル障壁が高く禁止されている場合を考える。さらに、外部から $|g\rangle, |e\rangle$ の遷移を促すような Raman レーザーを照射してやればエネルギーレベルの違う x 方向に隣り合うサイトに hopping を起こすことができる。また、系全体に x 方向かかる傾斜ポテンシャルをかけると x 方向の隣り合うサイトにはさらに Δ のエネルギー差が図 2 のようにできる。このセットアップは系に大きさ $\alpha = q\lambda/4\pi$ (q は Raman レーザの波数、 λ は光格子の波長) の磁場のある系に等価になる。

この系の BH モデルは最低 Bloch バンド状態のみで考えると以下のように定義できる

$$H_{latt} = \sum_{n,m} J^y a_{n,m}^\dagger a_{n,m-1} + \sum_{n \in \text{even}, m} \omega_{eg} a_{n,m}^\dagger a_{n,m} + \sum_{n,m} U_n a_{n,m}^\dagger a_{n,m}^\dagger a_{n,m} a_{n,m} + W_x \sum_{n,m} a_{n,m}^\dagger a_{n+1,m}^\dagger a_{n+1,m} a_{n,m}. \quad (2.38)$$

ここで、サイトラベル $r = (n, m)$ 、 J^y は y 方向 hopping の大きさ、 ω_{eg} は $|g\rangle, |e\rangle$ 間のエネルギーギャップ、 W_x は x 方向の格子間距離が小さいことから波動関数のオーバーラップから生じる再隣接 (NN) 相互作用である、 U_n は on-site 相互作用で座標 x で異なる散乱長もつ場合を考慮している。

さらに、図 2 で示したような傾斜ポテンシャルについて考える。傾斜ポテンシャルは電場勾配を系にかけることで実装できる。これより第二量子化表示で、勾配ポテンシャルは

$$H_{acc} = \Delta \sum_{n,m} n a_{n,m}^\dagger a_{n,m}. \quad (2.39)$$

ここで、 $\Delta = \mu\delta E\lambda/4$ であり (δE は電場勾配)、かつ摂動計算の取り扱いができる領域 $\Delta \ll \nu_x = \sqrt{4E_R V_{0x}}$ (ν_x は最低 Bloch バンドレベルからの励起ギャップである) をみताす。

つぎに、2本 Raman レーザーの作用を考える。これらのレーザーは $|g\rangle, |e\rangle$ のラマン遷移を引き起こす。これらのレーザーは平面波として以下のように記述できる。

$$\Omega_{1,2} = \Omega e^{\pm qy}, \quad (2.40)$$

ここで、 Ω はラビ振動の大きさである。このラビ振動の大きさには最低 Bloch バンドから次のバンドに励起されることを防ぐために $\Omega \ll \Delta \ll \nu_x$ の制限がある。このときこのレーザー $\Omega_{1,2}$ は x 座標について odd site と even site 間の遷移を引き起こすことができる。よって、以下のハミルトニアンがレーザー $\Omega_{1,2}$ によって加えられる。

$$H_{las} = \sum_{m,n} (\gamma_{n,m} a_{n,m}^\dagger a_{n-1,m} + h.c.) - \Delta \sum_{n,m} n a_{n,m}^\dagger a_{n,m}, \quad (2.41)$$

ここで、 x 方向の遷移は $\gamma_{n,m}$ の行列要素によって決まる。

x 座標 n が even のとき、

$$\gamma_{n,m} = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{w}^\dagger(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n,m}) \Omega_1 \mathbf{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n-1,m}), \quad (2.42)$$

x 座標 n が odd のとき、

$$\gamma_{n,m} = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{w}^\dagger(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n,m}) \Omega_2^\dagger \mathbf{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{n-1,m}), \quad (2.43)$$

となる。ここで、 $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = w(x)w(y)w(z)$ は光格子ポテンシャルで決まる Wannier 関数である。

さらに、 $\gamma_{n,m}$ をあらわに記述すると、

$$\begin{aligned} \gamma_{n,m} &= \frac{1}{2} e^{2\pi i \alpha m} \Gamma_y(\alpha) \Gamma_x, \quad (2.44) \\ \Gamma_x &= \int dx \omega^\dagger(x) \omega(x - \lambda/4), \\ \Gamma_y(\alpha) &= \int dy \omega^\dagger(y) \cos(4\alpha\pi y/\lambda) \omega(x - \lambda/4), \end{aligned}$$

となる。ここで $\alpha = q\lambda/4\pi$ であり、 Γ_x と $\Gamma_y(\alpha)$ は光格子のポテンシャル深さによって決まる。ここで重要なことは $\Gamma_y(\alpha)$ の計算の際 $w(y)$ 関数の積分区間を Ω_2 の挟んで積分するために生じる位相因子 $e^{2\pi i \alpha m}$ の出現である、これは実際には積分区間を変更する際に生じる位相因子であり数学的なトリックである。この位相因子がまさに格子上で作用するベクトルポテンシャルと等価の働きをする。この、位相因子は Landau ゲージに対応した効果を生み出し光格子上に一樣な磁場を人工的に生成する。

これより、 H_{las} はよりシンプルにかけて、

$$H_{las} = \sum_{m,n} (J^x e^{2\pi i \alpha m} a_{n,m}^\dagger a_{n-1,m} + h.c.) - \Delta \sum_{n,m} n a_{n,m}^\dagger a_{n,m}, \quad (2.45)$$

となり. さらにトータルハミルトニアン $H = H_{latt} + H_{acc} + H_{las}$ は、

$$H = J \sum_{m,n} (J^x e^{2\pi i \alpha m} a_{n,m}^\dagger a_{n+1,m} + a_{n,m}^\dagger a_{n,m+1} h.c.). \quad (2.46)$$

となる. これは一様磁場の中の Boson が格子上を動くモデルである.

H. 量子 vortex の存在

さてこの節では極低温原子系が Bose-Einstein 凝縮 (BEC) にあるとき人工磁場等の人工ゲージ場によって量子的な渦、量子 vortex が存在することが知られている、ここではその生成原理を簡潔に説明する. このような量子 vortex は IV, VII, VIII 章において取り扱われる内容である.

極低温原子系において、連続理論さらには格子モデルであっても系全体の粒子系全体が少数の量子状態に巨視的な数の原子が収まるとき、系は BEC にある. さらに系全体の波動関数の位相が一定に固まるとき超流動状態が出現する. このとき、系全体は単一の波動関数 $\Psi(x)$ で表現できる. このような状況を考えるとき、もし空間上に定義される波動関数 $\Psi(x)$ がある点 x' に欠陥 (defect) が存在し、波動関数 $\Psi(x)$ が定義できないときその欠陥 (topological defect[29]) を囲む閉曲線 C をとってある量子条件が存在する.

$$\oint_C \mathbf{v}(x) \cdot d\mathbf{l} = \frac{n\hbar}{2m}, \quad (2.47)$$

$$(2.48)$$

ここで、 $\mathbf{v}(x) \equiv \frac{\hbar}{2m} \nabla \theta(x)$ は超流動速度であり、 $\theta(x)$ は波動関数 $\Psi(x)$ の位相である. これは Feynman-Onsager 量子化条件 [26] と呼ばれる. さて、この条件の出現理由は、以下の積分を考える

$$\oint_C \mathbf{v}(x) \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.49)$$

Fig.3(b) より、もし閉曲線 C 内において波動関数が単連結に定義できるとき、この積分は Stokes の定理が適用でき、

$$\oint_C \mathbf{v}(x) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{v}(x) dS = 0, \quad (2.50)$$

となる. しかしながら、波動関数が単連結に定義できず、Fig.3(a) のように、閉曲線 C 内の波動関数が単連結でないとき Stokes の定理は使えずにそのまま線積分を実行する必要がある.

$$\oint_C \mathbf{v}(x) \cdot d\mathbf{l} = \theta_s - \theta_e, \quad (2.51)$$

ここで、 θ_s と θ_e は閉曲線 C の始点上の波動関数の位相、終点の位相である. このとき経路 C にそって波動関数の変化は式 (2.51) から、

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) \equiv e^{i(\theta_s - \theta_e)} \Psi(x), \quad (2.52)$$

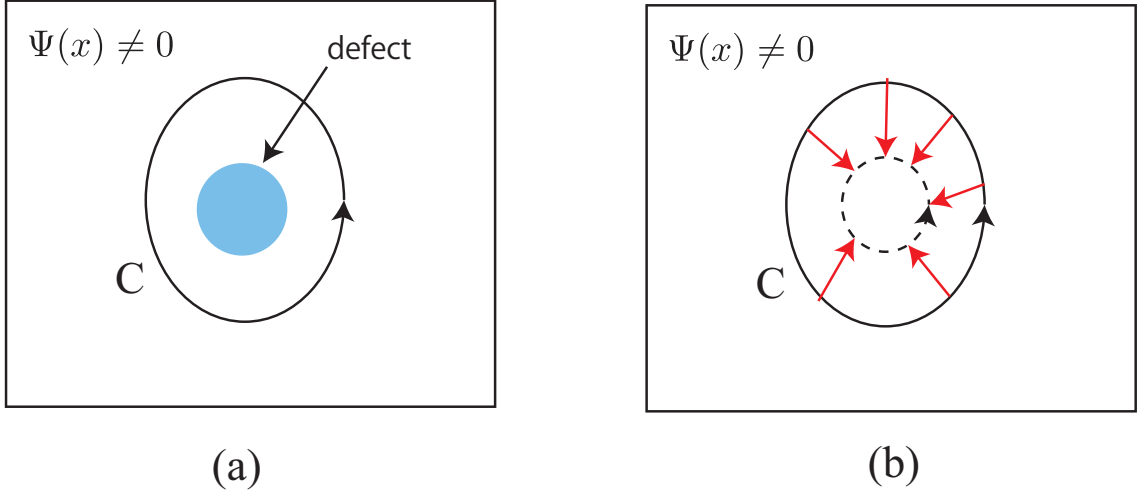


FIG. 3: Stokes の定理の有効性 (a),(b)

であり、波動関数は同一点で一価関数でなければならないので、

$$\theta_s - \theta_o = 2\pi n, \quad (2.53)$$

とならなければならない。ここで $n \in \mathbf{Z}$ である。これが Feynman-Onsager 量子化条件を導く。

さて、この Feynman-Onsager 量子化条件より、空間上に定義された波動関数が外的な要因で何らかの位相欠陥 [29] を持つとき、topological object として量子 vortex が存在する。

磁場が入った場合での量子 vortex の存在を紹介する、これは磁束の量子化に対応する。まず、局所相互作用、一様磁場下での Boson 系は一般的に、

$$H = \int dx \left[\Psi^\dagger(x) \left(-\frac{\hbar \nabla}{2m} - iq\mathbf{A}(x) \right)^2 \Psi(x) - U \Psi^\dagger(x) \Psi^\dagger(x) \Psi^\dagger(x) \Psi^\dagger(x) \right], \quad (2.54)$$

であり、この系が BEC 状態である時、 $\Psi(x) = \rho_0^{1/2} e^{i\theta(x)}$ を代入して、超流動カレントをもとめると、

$$\mathbf{j}(x) = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{A}(x)} = \frac{\hbar \rho_0}{2m} \left(\nabla \theta(x) - \frac{2q\mathbf{A}(x)}{\hbar} \right) \equiv \rho_0 \mathbf{v}(x), \quad (2.55)$$

となる。ここで、もし波動関数が定義できない欠陥 (vortex core) のようなものが存在しその周りにそった経路 C で積分すると、

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{v}(x) \cdot d\ell &= \oint_C \frac{\hbar}{2m} \left(\nabla \theta(x) - \frac{2q\mathbf{A}(x)}{\hbar} \right) \cdot d\ell \\ &= \frac{\hbar}{2m} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \end{aligned} \quad (2.56)$$

となる。ここで 2 行目は前述の Feynman-Onsager 量子化条件を位相の積分には適用し、ベクトルポテンシャルの積分は C 内を貫く磁束 Φ である、また、 $\Phi_0 = h/2q$ である。

この表式からわかることは磁束 Φ は波動関数の定義できない欠陥の付近に量子化され $\Phi = n\Phi_0$ なる磁束量子が存在することである。なぜなら式 (2.56) の最左辺からみてとれるが、経路 C にそった Boson カレントの和である。これは Boson の運動エネルギーに対応する。系が低温のとき、このカレントエネルギーは系のエネルギーを下げるため、0 になる。このとき、 $\Phi = n\Phi_0$ ($n \in \mathbb{Z}$) であればよい。よって、 Φ が 0 でなくとも $\Phi = n\Phi_0$ で量子化されていれば系は最低エネルギー状態である。この、磁束量子を発生させる欠陥 (topological defect) に対応するものを量子 vortex と呼び、磁束量子に対応する整数 n で量子 vortex は存在する。ここで n を winding number と呼ぶ。winding number = n の量子 vortex の周りには Feynman-Onsager 量子化条件から位相が $2\pi n$ 回っている。これは量子 vortex の core を囲むパス C ならばどんな形のパスをとって位相の変化を追っても $2\pi n$ の変化量をもつ *topological* に安定な構成物である [29].

-
- [1] A. J. Leggett, *Quantum Liquids: Bose Condensation And Cooper Pairing in Condensed-matter Systems*, Oxford Graduate Texts (2006).
- [2] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [3] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269** (1995); K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995).
- [4] Steven Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, Alex Cable, and A. Ashkin, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 48-51 (1985); *Phys. Rev. Lett.*: 57 (1986) 314-317 (Chu); Paul D. Lett, Richard N. Watts, Christoph I. Westbrook, William D. Phillips, Phillip L. Gould, and Harold J. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **61** 169-172 (1988); A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1688 (1986).
- [5] 片岡啓介, 博士論文 場の量子論的手法による光学格子にトラップされた極低温原子系の研究 (2013).
- [6] D. Jaksch and P. Zoller, *Annals of Physics Volume 315, Issue 1* (2005).
- [7] M. Greiner, et al, *Nature* **415**, 39 (2002); I. Bloch, *Nature Physics* **1**, 23 - 30 (2005).
- [8] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge University Press (2011).
- [9] M. Endres, *Probing Correlated Quantum Many-Body Systems at the Single-Particle Level*, (Springer, 2014).
- [10] J. F. Sherson, C. Weitenberg, M. Endres, M. Cheneau, I. Bloch, S. Kuhr, *Nature* **467**, 68 (2010).
- [11] C. Becker, P. Soltan-Panahi, J. Kronjager, S. Dorscher, K. Bongs, K. Sengstock, *New J. Phys.* **12** 065025 (2010).
- [12] G. Liu, S.-L. Zhu, S. Jiang, F. Sun, and W. M. Liu, *Phys. Rev. A* **82**, 053605 (2010).
- [13] J. I. Cirac and P. Zoller, *Nat. Phys.* **8**, 264-266 (2012).
- [14] I. M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 153 (2014).

- [15] K. W. Madison et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000).
- [16] C. J. Pethick, H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, (2008).
- [17] K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. A **67**, 033610 (2003).
- [18] F. Dalfovo, Stefano Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [19] Y.-J. Lin, R. L. Compton, K. Jimenez-Garcia, J. V Porto, and I. B. Spielman, Nature **462**, 628 (2009).
- [20] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, J. Watson, and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **40**, (1989).
- [21] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein, and T. Pfau, Reports Prog. Phys. **72**, 126401 (2009).
- [22] 青木慎也, 格子上的場の理論, springer (2012).
- [23] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Dover Books on Physics (1975).
- [24] A. L. Fetter, and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Dover Books on Physics (2003).
- [25] A. Altland, and B. D. Simons, *Condensed Matter Field Theory*, Cambridge University Press (2010), sec.4.
- [26] C. N. Yang, Rev. Mod. Phys. **34**, 694 (1962); O. Penrose and L. Onsager, Phys. Rev. **104**, 576 (1956).
- [27] B. Capogrosso-Sansone, N. V. Prokof'ev, and B. V. Svistunov, Phys. Rev. B **75**, 134302 (2007).
- [28] D. Jaksch and P. Zoller, New J. Phys. **56**, (2003).
- [29] N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **51**, 591 (1979).

III. 格子ゲージ理論導入

この章では格子ゲージ理論についての特に VI 章の内容に関連した格子ゲージ理論についての基礎的な事柄をまとめて記述したものである。格子ゲージ理論は連続空間上定義されるゲージ理論のもつ困難を打開するために構築された理論であり、詳細な内容は文献 [1-3] にあたると非常に良い。

A. Quantum Electrodynamics

連続理論の QED(Quantum electrodynamics) のラグランジアンから説明を始める。

$$S = \int dx L_{QED}(x),$$

$$L_{QED}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \bar{\psi}(x)\gamma^\mu[\partial_\mu - iqA_\mu(x)]\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x). \quad (3.57)$$

ここで、 γ^μ は Dirac ガンマ行列、 $\psi(x)$ は Dirac スピノール場である。

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x). \quad (3.58)$$

で U(1) ゲージ場の強さである。

この L_{QED} はローカルゲージ変換、

$$\psi'(x) = \Omega(x)\psi(x), \quad (3.59)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + i\Omega(x)\partial_\mu\Omega^*(x), \quad (3.60)$$

に対して不変である。例えば、共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu(x)$ のかかった Dirac スピノールの変換は、

$$D'_\mu\psi'(x) = \Omega(x)D_\mu\psi(x), \quad (3.61)$$

$$\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu D'_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\psi(x). \quad (3.62)$$

よって、物質場と電磁場のカップリング項は不変である。

ここで、U(1) ゲージ変換が定義づけるチャージ q の量子化について簡潔に述べる [3]。U(1) 群は一価関数でなければならない、(compact 群) 要請からその、U(1) 群の表現 $\Omega = e^{i\omega T}$ は U(1) 群パラメータがコンパクトのとき $\omega(-\pi \leq \omega \leq \pi)$ そこにかかる実数 T は整数でなければ群の公理 $\Omega_1\Omega_2 = \Omega_3$ かつ U(1) 変換の一価性を満たさない。この実数 T がいわゆる物質場のチャージに相当し電子場の場合は $T = -q = -1$ となっている。

B. ゲージ理論の格子化

ここでは、連続理論が格子上にどうマッピングされるか、そして、格子上にゲージ場がどのように出現し、表現されるかを説明していく。

一般的にゲージ場は物質場を記述する理論に対して local ゲージ変換をかけたとき、理論が不変であることを要請した時に出現する場である。まず、物質場として fermion 場 ψ'_x を考える、ここで $x_\mu = m_\mu a$ (a:格子間隔) であるとする。この場は local ゲージ変換のもとで、

$$\psi'_x = \Omega_x \psi_x. \quad (3.63)$$

ここで、 Ω_x はあるゲージ群の既約表現である。

この場に対して共変微分を考えると、

$$D_\mu \psi_x = \frac{1}{a}(\psi_{x+a\hat{\mu}} - \psi_x) - iC_{\mu x} \psi_{x+a\hat{\mu}}. \quad (3.64)$$

という形式を考えることができる、ここで $C_{\mu x}$ は格子差分の埋め合わせで出現するファクターである [3]。ここで、この共変微分は local ゲージ変換に不変である要請を課すと、

$$D'_\mu \psi'_x = \Omega_x D_\mu \psi_x, \quad (3.65)$$

を満たさなければならない。このとき、式 (3.64) を式 (3.65) に代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a}(\psi'_{x+a\hat{\mu}} - \psi'_x) - iC'_{\mu x} \psi'_{x+a\hat{\mu}} \\ &= \Omega_x \left[\frac{1}{a}(\psi_{x+a\hat{\mu}} - \psi_x) - iC_{\mu x} \psi_{x+a\hat{\mu}} \right] \\ &+ \Omega_x \left[\frac{1}{a}((\Omega^\dagger_{x+a\hat{\mu}} - \Omega^\dagger_x + \Omega^\dagger_x) \psi'_{x+a\hat{\mu}} - \Omega^\dagger_x \psi'_x) - iC_{\mu x} \Omega^\dagger_{x+a\hat{\mu}} \psi'_{x+a\hat{\mu}} \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

これより、以下の関係式が成り立つ、

$$\begin{aligned} C'_{\mu x} &= \Omega_x C_{\mu x} \Omega^\dagger_{x+a\hat{\mu}} + \frac{i}{a}(\Omega_x \Omega^\dagger_{x+a\hat{\mu}} - 1) \\ &= \Omega_x C_{\mu x} \Omega^\dagger_{x+a\hat{\mu}} + i\Omega_x \partial_\mu \Omega^\dagger_x. \end{aligned} \quad (3.67)$$

この $C_{\mu x}$ の変換はまさに連続理論のゲージ場のゲージ変換に一致している。

次に、ゲージ場の強さを連続理論に対応して定義すると、

$$C_{\mu\nu x} = D_\mu C_{\nu x} - D_\nu C_{\mu x}. \quad (3.68)$$

この量は、以下のようにゲージ変換が定義される、

$$C'_{\mu\nu x} = \Omega_x C_{\mu\nu x} \Omega_{x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}}. \quad (3.69)$$

ここで、ゲージ場の作用を、 $Tr(C_{\mu\nu x} C^\dagger_{\mu\nu x})$ とすると、この作用はゲージ変換に対して不変である。

$$Tr(C'_{\mu\nu x} C^\dagger_{\mu\nu x}) \rightarrow Tr(C_{\mu\nu x} C^\dagger_{\mu\nu x}). \quad (3.70)$$

さて、次に $C_{\mu x}$ をゲージ群に対応させることを考える。今、 $C_{\mu x} = 0$ を考え、それにゲージ変換をかけたとき、

$$C'_{\mu x} = i\Omega_x \partial_\mu \Omega_x^\dagger = \frac{i}{a} (\Omega_x \Omega_{x+a\hat{\mu}}^\dagger - 1), \quad (3.71)$$

と書け。これは、

$$C'_{\mu x} = i\Omega_x \partial_\mu \Omega_x^\dagger = \frac{i}{a} (U_{\mu x} - 1), \quad (3.72)$$

として、ゲージ群 U と対応付けされる。

つぎに、格子上 $U_{\mu x}$ とゲージポテンシャル $G_{\mu x}^k$ との対応は、

$$U_{\mu x} = e^{-iaG_{\mu x}^k T_k}, \quad (3.73)$$

と定義できる。ここから、さらに格子間隔 $a \rightarrow 0$ の極限を取り連続理論に移行すると $C_{\mu x}$ は、

$$C_{\mu x} = G_\mu^k(x) T_k(x), \quad (3.74)$$

となる。これより、一般的なゲージ群と fermion 場が相互作用する格子ゲージ理論作用は、

$$S = - \sum_x \left[\frac{1}{4\rho g^2} \text{Tr}(C_{\mu\nu x} C_{\mu\nu x}^\dagger) + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_x \gamma_\mu D_\mu \psi_x - \bar{\psi}_x \gamma_\mu \bar{D}_\mu \psi_x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \right]. \quad (3.75)$$

と定義できる。

さて、次に式 (3.75) を $U_{\mu x}$ で表記することを考える。以後、link 変数として、

$$U_{x, x+a\hat{\mu}} \equiv U_{\mu x}, \quad U_{x+a\hat{\mu}, x} \equiv U_{\mu x}^\dagger, \quad (3.76)$$

と再定義する。これより、

$$D_\mu \psi_x = \frac{1}{a} (U_{\mu x} \psi_{x+a\hat{\mu}} - \psi_x), \quad (3.77)$$

$$C_{\mu\nu x} = \frac{i}{a^2} (U_{\mu x} U_{\nu x+a\hat{\mu}} - U_{\nu x} U_{\mu x+a\hat{\nu}}). \quad (3.78)$$

となる。よって、式 (3.75) は、

$$S = - \sum_x \left[\frac{1}{2\rho g^2 a^4} \text{Tr}(1 - U_{\mu\nu x}) + \frac{1}{2a} (\bar{\psi}_x \gamma_\mu U_{\mu x} \psi_{x+a\hat{\mu}} - \bar{\psi}_{x+a\hat{\mu}} \gamma_\mu U_\mu^\dagger \psi_x) \right], \quad (3.79)$$

$$U_{\mu\nu x} \equiv U_{\mu x} U_{\nu x+a\hat{\mu}} U_{\nu x}^\dagger U_{\mu x+a\hat{\nu}}^\dagger, \quad (3.80)$$

となる。これが、ある一般的なゲージ群 U と結合する fermion 場の一般的な格子ゲージ理論作用である。

C. U(1) lattice gauge theory

この節では基本的な Abelian なゲージ理論である compact U(1) 格子ゲージ理論 (compact U(1) lattice gauge theory) について紹介する、特に (d+1) 次元の格子ゲージ理論から導くことができる d 次元の量子ハミルトニアンについて、U(1) 格子ゲージ理論から Kogut-Susskind ハミルトニアン [4, 5] を導く、そしてそのハミルトニアンから static charge ペアの閉じ込めの物理 [6] を紹介する。

まず、ゲージ群 U が compact U(1) 群のとき、格子 QED 作用の電磁場の項が U(1) 格子ゲージ理論となる。

$$U_{\mu x} = \exp(-iaA_{\mu x}), \quad (3.81)$$

$$U_{\mu\nu x} = \exp[-ia(A_{\mu x} + A_{\nu x+a\hat{\mu}} - A_{\mu x+a\hat{\nu}} - A_{\nu x})] = \exp(-iaF_{\mu\nu x}), \quad (3.82)$$

$$F_{\mu\nu x} = \partial_{\mu}A_{\nu x} - \partial_{\nu}A_{\mu x}, \quad (3.83)$$

$$S = -\frac{1}{4g^2a^4} \sum_{x\mu\nu} [2 - 2\cos(a^2F_{\mu\nu x})], \quad (3.84)$$

ここで、 $A_{\mu x}$ は U(1) ゲージポテンシャルである。また、 $U_{\mu x}$, $A_{\mu x}$ についてゲージ変換は以下のようになる。

$$U'_{\mu x} = \Omega_x U_{\mu x} \Omega_{x+a\hat{\mu}}^{\dagger}, \quad (3.85)$$

$$aA'_{\mu x} = aA_{\mu x} + \omega_{x+a\hat{\mu}} - \omega_x. \quad (3.86)$$

さて、この作用から、U(1) 格子ゲージ理論の量子ハミルトニアンを導くことを考える。一般的に、ある (d+1) 次元の古典統計力学モデルは d 次元の量子モデルに対応付けることができる。これを、鈴木-Torotter の定理と呼ぶ。物性理論における重要な例としては量子イジングモデルの導出等が代表的例である [7]。

今後の章で空間 2 次元の量子ハミルトニアンを扱うことが多いので 3 次元 U(1) 格子ゲージ理論作用から (2+1) 次元の量子ハミルトニアンを導く。

まず、3 次元 U(1) 格子ゲージ理論作用を、虚時間次元方向と空間方向に分けた形で表現すると、

$$S = -\beta_{\tau} \sum_{x\nu} [1 - \cos(a^2F_{0\nu x})] - \beta \sum_{x\mu\nu} [1 - \cos(a^2F_{\mu\nu x})], \quad (3.87)$$

となり、虚時間方向のカップリング β_{τ} 、空間方向のカップリングを β とした。また、虚時間方向 τ の link ラベルは 0 とした。さて、ここでゲージ場を扱うので、ゲージ固定として temporal ゲージをと

る. つまり, $A_{0x} = 0$ とする. このゲージをとったことにより, 式 (3.87) の第一項は,

$$-\beta_\tau \sum_{x\nu} [1 - \cos(a^2(A_{\nu x+a\hat{\tau}} - A_{\nu x}))], \quad (3.88)$$

となる. さらに, 虚時間方向に対して連続極限をとると,

$$-\beta_\tau [1 - \cos(a^2(A_{\nu x+a\hat{\tau}} - A_{\nu x}))] \sim \frac{\beta_\tau a_\tau^4}{2} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial \tau} \right)^2, \quad (3.89)$$

と変形される. ここで a_τ は虚時間方向の格子間隔である.

この操作から, 3次元 U(1) 格子ゲージ理論作用は,

$$S \rightarrow \int d\tau \left[\frac{\beta_\tau a_\tau^3}{2} \sum_{x\nu} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{a_\tau} \beta \sum_{x\mu\nu} \cos(a^2 F_{\mu\nu x}) \right], \quad (3.90)$$

となる. また, 虚時間方向の連続極限をとると同時に, カップリングを再定義しておく,

$$\begin{aligned} \beta_\tau &= g^2/a_\tau \rightarrow \infty, \\ \beta &= a_\tau/g^2 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.91)$$

この作用は2次元に存在するある虚時間 τ で定義される量子場モデルであり, $x = (\mathbf{n}, \tau)$ として位置座標をとらえることができる. \mathbf{n} は空間二次元の位置ベクトルであり, τ は虚時間の連続変数である. さて, この作用から, 共役な物理量を構築し, ハミルトニアンを求めることを考える. 共役な物理量は通常の解析力学の推測から, $L_i(\mathbf{n}) \equiv a_\tau \frac{\partial A_i}{\partial \tau}$ と $agA_k(\mathbf{n})$ となり, 量子力学の正準交換関係は,

$$[L_i(\mathbf{n}), agA_k(\mathbf{n}')] = i\delta_{ik}\delta_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}, \quad (3.92)$$

と定義される. これら正準共役量から, 量子ハミルトニアンはルジャンドル変換を用いて,

$$aH = \sum_{\mathbf{n},k} \frac{1}{2} g^2 L_k(\mathbf{n}) - \frac{1}{g^2} \sum_{\mathbf{n},ik} \cos(agF_{ik\mathbf{n}}), \quad (3.93)$$

となる. a は空間方向の格子間隔である.

次に, 正準交換関係 (3.92) から, $L_i(\mathbf{n}) = (a^2/g)E_i(\mathbf{n})$ とすると

$$[E_i(\mathbf{r}), A_j(\mathbf{r}')] = i\delta_{ij}\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}, \quad (3.94)$$

となり, $L_i(\mathbf{n})$ はベクトルポテンシャル $A_i(\mathbf{r})$ と共役な電場である. さらに, 電場はコンパクトなベクトルポテンシャルと共役であり, それは角運動量的な変数であるから,

$$L_i(\mathbf{n}) = (a^2/g)E_i(\mathbf{n}) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.95)$$

と量子化された変数となる. このような形式からはっきりと compact U(1) 格子ゲージ理論の量子ハミルトニアンを書き下すと、

$$H_{KS} = a^3 \sum_{\mathbf{nk}} \frac{1}{2} E_k^2(\mathbf{n}) - \frac{1}{g^2 a} \beta \sum_{\mathbf{n}\mu\nu} \cos(a^2 F_{\mu\nu}(\mathbf{n})), \quad (3.96)$$

となる. このハミルトニアンを *Kogut-Susskind*(KS) ハミルトニアンと呼ぶ [5]. 第一項は電場エネルギー項で、第二項は磁場のエネルギー項である. このモデルの連続極限は電磁場のエネルギー密度に対応する.

D. Kogut-Susskind ハミルトニアンにおける static charge の閉じ込め相

今から、KS ハミルトニアンの状態相について考えていく. その際、有効なのは電荷 $\pm q$ を持った静的なチャージペア (static charge pair) を考え、それらの距離が R のとき、そこに発生するであろうポテンシャル $V(R)$ を考える.

さて、これらのチャージを導入するためにまずは、あるサイト \mathbf{n} に存在する、位相場 $\theta(\mathbf{n})$ とそれに共役な角運動量 $L(\mathbf{n})$ を考える. このとき、それらの交換関係は、

$$[L(\mathbf{n}), \theta(\mathbf{n}')] = i\delta_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}, \quad (3.97)$$

となる. このとき、サイト \mathbf{n} に定義できる物質場は、

$$\exp(\pm i\theta(\mathbf{n})), \quad (3.98)$$

として、位相場 $\theta(\mathbf{n})$ の自由度のみで記述することができる. 振幅モードを固定しているのは十分に質量をもった重い物質場を考えているわけで、こうした意味で静的な物質場 (チャージ) を想定している.

さて、物質場がどのようにゲージ変換されるのかみてる、まず、一般的なゲージ変換は以下のように定義でき、

$$G(\chi) = \exp \left[i \sum_{\mathbf{n},j} L_j(\mathbf{n}) + i \sum_{\mathbf{n}} L(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n}) \right]. \quad (3.99)$$

これを、物質場かけると、

$$G(\chi) \exp(\pm i\theta(\mathbf{n})) G^{-1}(\chi) = \exp(\pm i\theta(\mathbf{n}) \pm i\chi(\mathbf{n})), \quad (3.100)$$

となり、通常のチャージをもった物質場と同じゲージ変換をし、よってチャージ $\pm q$ を運ぶことが推察できる.

次に、static charge pair を作る演算子を考える、ゲージ理論において、物理的に意味のある演算子は、つまりは観測量はゲージ不変な観測量である必要がある。ゲージ不変でない観測量の期待値は 0 になることが知られている、これを Elitzur の定理と呼び厳密な数学的証明が存在する [8].

ゆえに、ローカルゲージ対称な static charge pair を作る演算子は、

$$\theta_C(\mathbf{0}, \mathbf{R}) = e^{-i\theta(\mathbf{0})} \exp \left[i \sum_C \theta_i(\mathbf{n}) \right] e^{i\theta(\mathbf{R})}, \quad (3.101)$$

と考えることができる、ここで C は格子点 $\mathbf{0}$ と \mathbf{R} を結ぶパスである。さらに、 $e^{\theta_i(\mathbf{n})}$ の物理的意味は、交換関係、

$$[L_i(\mathbf{n}), e^{\pm i\theta_j(\mathbf{n}')}] = \pm \delta_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} e^{\pm i\theta_j(\mathbf{n}')}, \quad (3.102)$$

となるので、演算子 L_i の固有値を一つ上げる働きをもつ、つまり、電場のエネルギー固有状態を 1 レベル励起する働きをもつ。

ゆえに、演算子 (3.101) は static charge pair を作りその間を結ぶパス上の電場 E_i を励起する。これは Gauss 則を満たす演算である。これより、パスは電場の束つまりは電束 (electric flux) とみなすことができる。

この static charge pair 演算子を導入することにより、KS ハミルトニアン状態相を推測することができる。まず、電場の項が非常に大きい強結合領域 ($g \gg 1$) のときを考えると、第 0 次近似での KS ハミルトニアンは、

$$H_{KS,0} = \frac{1}{2} g^2 \sum_{\mathbf{nk}} L_k^2(\mathbf{n}), \quad (3.103)$$

であり、static charge がないときの基底状態 $|0\rangle$ は、

$$L_k^2(\mathbf{n})|0\rangle = 0, \quad (3.104)$$

として定義することができる。つまり強結合領域の基底状態は電場 $E_i(\mathbf{n})$ が空間的にすべて 0 となっている状態である。

次に static charge pair を結びつける演算子 $\theta_C(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ を考える。

$$\theta_C(\mathbf{0}, \mathbf{R})|0\rangle. \quad (3.105)$$

この状態はパス C 上での電場 $E_i(\mathbf{n})$ が励起されるので $H_{KS,0}$ のエネルギーを最小にするパスの形状は直線的になる。つまり、static charge pair 間に蓄えられるエネルギー $V(R)$ は、

$$V(R) \sim |R|, \quad (3.106)$$

となり、static charge pair 間のポテンシャルは linear になる。

この結果は static charge pair の距離を離すと系に距離に依存したエネルギーが蓄えられ、クーロン相互作用と比べ強い力が charge pair 間に働いていることが推察される。このような線型のポテンシャルを閉じ込めポテンシャル (confinement potential) と呼び、それが出現するゲージ理論の状態相を閉じ込め相 (confinement phase) と呼ぶ。

E. Higgs 場の存在について

後の節で我々は U(1)gauge-Higgs (U(1)GHM) モデルの量子シミュレーションについて述べていく予定である。その前段階の動機として、この節では簡潔に Higgs 場の存在について Anderson-Higgs 機構の説明からはじめて簡潔に述べていくことにする [9]。

我々の宇宙においてあるゲージ場に質量を与える機構を Anderson-Higgs 機構と呼ぶ、一つの代表的な例として、超伝導体内に存在する U(1) ゲージ場について述べる。通常 U(1) ゲージ場は本来それが質量のない光子であるにもかかわらず、超伝導体内では Cooper-pair 凝縮体の位相の自由度を吸収し、ゲージ場は質量を獲得する。これはマイスナー効果に他ならない。

まず始めに、超伝導体内の低エネルギー有効理論は BCS 理論からの帰結である Cooper-pair 凝縮場の集団励起モードとして Goldstone 位相場 $\theta(r)$ についての XY モデルとして表現されることから始める。

$$S[\mathbf{A}, \theta] = \frac{\beta}{2} \int d^d r \left[\frac{n_s}{m} (\nabla\theta - \mathbf{A})^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right], \quad (3.107)$$

ここで、 n_s はクーパーペア凝縮密度、 m は電子の質量、 \mathbf{A} は空間の U(1) ゲージ場 (ベクトルポテンシャル) である。ここでは簡単のため有限温度領域での議論について考えており、虚時間方向の量子ゆらぎは固まっているとし逆温度 β をモデルの係数とした。

さて、このモデルは local ゲージ変換 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\phi$, $\theta \rightarrow \theta + \phi$ に対して不変である。この作用を経路積分上で扱い集団励起モードの Goldstone 位相場 $\theta(r)$ の積分を実行してベクトルポテンシャルだけの有効理論を導くことを行うことにする。

このモデルをフーリエ変換表示し、位相場については Gauss 積分を容易に実行できるので

$$S[\mathbf{A}, \theta] = \frac{\beta}{2} \sum_{\mathbf{q}} \left[\frac{n_s}{m} (\mathbf{A}_{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{A}_{-\mathbf{q}}) - (1/q^2)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{q}}) \cdot (\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}_{-\mathbf{q}})) \right. \\ \left. + (\mathbf{q} \times \mathbf{A}_{\mathbf{q}})(\mathbf{q} \times \mathbf{A}_{-\mathbf{q}}) \right], \quad (3.108)$$

ここで、作用内第二項は θ 積分によって得られた項である。次にベクトルポテンシャルを縦波成分 $\mathbf{A}_{L\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{q}})}{q^2}$ と横波成分 $\mathbf{A}_{T\mathbf{q}} = \mathbf{A}_{\mathbf{q}} - \mathbf{A}_{L\mathbf{q}}$ として、モデルに代入しなおすと横波成分のみ作用が

現れる.

$$S[\mathbf{A}, \theta] = \frac{\beta}{2} \sum_{\mathbf{q}} \left[\left(\frac{n_s}{m} + q^2 \right) \mathbf{A}_{T\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}_{T-\mathbf{q}} \right], \quad (3.109)$$

となる. これは横波ゲージ場の量子化モデルであって、そのエネルギースペクトルは凝縮体の密度に比例した質量ギャップ n_s/m を持つ、これはゲージ場が質量を持つことを主張する. つまるところ、Goldstone 位相場 $\theta(r)$ の積分でゲージ場はその位相場を吸収しゲージ場質量を獲得したと解釈できる. これより、ゲージ場の伝搬関数は質量の存在から $\sim 1/r$ の長距離型から短距離型 $\sim e^{-\alpha r}$ になる. これは、超伝導体内に外部磁場が侵入できないマイスナー効果の微視的側面からの説明でもある.

さて、このような Anderson-Higgs 機構は local ゲージ対称性の破れがその発端となっていて、自発的 local ゲージ対称性の破れに起因してゲージ場の質量生成が起きる、これは一般的に成り立つ現象として捉えられる. 標準模型について Anderson-Higgs 機構を当てはめることができる.

素粒子標準模型 (standard model) はレプトンやハドロンを記述するモデルであり、それらは互いにあるゲージ場を介して相互作用している、しかしながら、オリジナルなモデルにおいて一つの重要な問題が存在した、それは理論ではゲージ粒子は質量を持たないのに、実験においてゲージ粒子は非常に重い質量 ($O(10^2 GeV/c^2)$) を持つということである.

たとえば、Yan-Mills 理論 [11] セクターをみると、

$$S[\Psi, W] = \int d^{d+1}x L(\Psi, (\partial_\mu - iW_\mu)) + S[W], \quad (3.110)$$

であり、ここで Ψ はアイソスピン、 W は $SU(2)$ ゲージ場である. その量子は vector bosons と呼ばれる. この作用だけだと vector boson は質量もたないので相互作用は長距離になる、しかしながら、現実の実験ではアイソスピン間の力は弱い力と呼ばれ、短距離 ($\sim e^{-90 GeV r}$) であった.

この食い違いを修正するために Wenberg, Salam [10] は以下のアイデアを考えた、

「Higgs boson 場 ϕ というスカラー場が空間全体に存在しその作用は ϕ^4 型で $SU(2)$ ゲージ場 W と相互作用する、

$$S[\phi, W_\mu] = \int d^{d+1}x \left[(\partial_\mu - W_\mu) \phi^\dagger (\partial_\mu - W_\mu) \phi - \frac{m^2}{2} \phi^\dagger \phi + \frac{g}{2} (\phi^\dagger \phi)^2 \right], \quad (3.111)$$

で記述される. この Higgs 作用のポテンシャル部分は $U(1)$ 対称性の破れを導き ϕ は空間的に凝縮する、故に Higgs 場は $\phi = \Delta e^{i\theta}$ として位相の自由度が出現する. これが Goldstone 位相場として働き、Anderson-Higgs 機構を経由して vector boson W に質量を与える.」

このような標準模型においてゲージ場に質量を与えるための説明として Higgs 場は理論上導入された、しかしながら、誰でも知っているであろうが、この Higgs boson は最近の実験でその存在が実

証された [12].

- [1] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theories: An Introduction (4th Edition)* (World Scientific Lecture Notes in Physics, 2012).
- [2] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, (Contemporary Concepts in Physics, 1987).
- [3] J. Smit, *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*, (Cambridge Lecture Notes in Physics, 2002).
- [4] J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 659 (1979).
- [5] J. B. Kogut, and L. Susskind, *Phys. Rev. D* **11**, 395 (1975).
- [6] K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **10**, 2445 (1974).
- [7] E. Fradkin and L. Susskind, *Phys. Rev. D* **17**, 2637 (1978).
- [8] S. Elitzur, *Phys. Rev. D* **12**, 3978 (1975).
- [9] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge) (1996).
- [10] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
- [11] C. -N. Yang and R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [12] ATLAS Collaboration, *Phys. Lett. B* **716** (2012).

IV. RANDOM FIELD INDUCED ORDER

この章では、光格子上原子系で実現されうる 2 成分 Boson 系についての物理について記述する。特に、2 成分 Boson モデルにおいて極低温で粒子間の相互作用が運動エネルギーに比べ同じか非常に大きいときの物理を考える。このような状況を想定するとき、2 成分 Boson 系は強く互いの原子が相互作用した有効モデルである *Bosonic t-J* モデル (B-tJ) によって表現される。この章では B-tJ モデルにおいて空間的ランダムに 2 成分原子間の交換作用を導入したときの物理を説明する。このような原子間交換効果は Random-Raman 散乱と呼ばれ、近年の光格子の実験技術でこの効果を系に導入することは可能である [1]。さて、この章においては上記の系での絶対零度近傍における新奇量子基底状態を述べ、その理論、数値計算による我々の研究結果を報告する。なお、本章の原著論文は以下のものである：

Random-field-induced order in bosonic t-J model,

Yoshihito Kuno, Takamasa Mori, Ikuo Ichinose, *New J. Phys.* **16**, 083030 (2014).

この章でははじめに B-tJ のモデルの導出について紹介することから始めることにする、

A. Bosonic t-J Hamiltonian

この章では 2 成分原子系の Bose Hubbard モデル

$$\hat{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} t_{ij} a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma} + \sum_i \mu_i a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} + \sum_i U a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma'}^\dagger a_{i\sigma} a_{i\sigma'}, \quad (4.112)$$

から、2 成分原子間相互作用、同種粒子相互作用が非常に大きい極限を考える。そのような物理を記述する有効的なハミルトニアンは Bosonic t-J モデルと呼ばれている。この Bosonic t-J モデルの導出を紹介する。簡単のため 2 成分原子間相互作用、同種粒子相互作用のカップリングの大きさは同じで、 U として考える。

我々は今後、各格子点上の粒子の占有数が 1 になるような強い斥力状況下を想定する。このような、斥力のコントロールは外部磁場による Feshbach 共鳴等で s 波散乱長を制御し達成可能である [3]。

さて、 $\frac{U}{t} \gg 1$ を想定するとき、hopping 項を摂動的な項とみなして、Hubbard モデルの有効理論を導出することができる。Wigner 摂動法等色々な導出が存在するが、ここでは、Schrieffer-Wolf 変換を使うものを紹介する [2]。

はじめに、Fock 空間を二つの sub-space に分けてスタートする。

$\forall i, n_{i,a} + n_{i,b} \leq 1$ に対して

$$S = |n_{1,a}, n_{1,b}, n_{2,a}, \dots\rangle, \quad (4.113)$$

$\exists i, n_{i,a} + n_{i,b} = 2$ に対して

$$D = |n_{1,a}, n_{1,b}, n_{2,a} \dots\rangle, \quad (4.114)$$

ここで、sub-space S はすべてのサイトについて、粒子が存在しない、あるいは1個存在するかのどちらかをとっている状態である。sub-space D は少なくとも一つは二重占有されたサイトが存在する状態である。

もし U が大変大きいとき、基底状態は S sub-space 内に存在するに違いない。この状況下で Hubbard モデルの hopping 項は以下のように分類できる。

$$H_t = H_{t,h} + H_{t,d} + H_{t,mix}, \quad (4.115)$$

$$H_{t,h} = \sum_{i,j,\sigma} t_{ij} (1 - n_{i\bar{\sigma}}) a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} (1 - n_{j\bar{\sigma}}), \quad (4.116)$$

$$H_{t,d} = \sum_{i,j,\sigma} t_{ij} n_{i\bar{\sigma}} a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} n_{j\bar{\sigma}}, \quad (4.117)$$

$$H_{t,mix} = \sum_{i,j,\sigma} n_{i\bar{\sigma}} a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} (1 - n_{j\bar{\sigma}}) + (1 - n_{i\bar{\sigma}}) a_{i\sigma}^\dagger a_{i\sigma} n_{j\bar{\sigma}}, \quad (4.118)$$

ここで、 σ と $\bar{\sigma}$ はお互い逆の原子種類を示す。また、分割された項はそれぞれ

(I). $H_{t,h}$; site i と j に b 原子が入っていない状況下での hopping 効果、 $H_{t,h}$ は S sub-space 内のみで働く。

(II). $H_{t,d}$; site i と j の両方に一つの b 原子が入っている状況下での hopping 効果、 $H_{t,h}$ は、D sub-space のみで働く。

(III). $H_{t,mix}$; site i か j のどちらかに一つの b 原子が入っている状況下での hopping 効果。それは、Fock 空間において、sub-space 間の飛び移り、 $D \rightarrow S$ あるいは、 $S \rightarrow D$ を表現する。

次に、有効ハミルトニアンを考える。

$$H = H_U + H_{t,h} + H_{t,d} + H_{t,mix}. \quad (4.119)$$

もし $U \gg 1$ (hard-core 条件) のときを考えるならば、二重占有状態は禁止されなければならない。つまり、基底状態は S sub-space 内に存在しなければならない。この制約により、有効ハミルトニアンには $H_{t,d}$ は含まれない。結局、hopping 項 $H_{t,mix}$ を H_U に対する摂動項としてみなすことができる。 $H_{t,mix}$ は状態空間を S から D に変えるので、この摂動は二次のオーダーから効く。

こうして、以下の変換を考える、

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= e^{-S} H e^S = H + [H, S] + \frac{1}{2} [[H, S], S] + \dots \\ &= H_0 + H^{(1)} + [H_0, S] + [H^{(1)}, S] + \frac{1}{2} [[H_0, S], S] + \dots,\end{aligned}\quad (4.120)$$

ここで、 S は任意のユニタリー変換である。

一次の摂動の影響を取り除くために、以下のように S を決める。

$$H^{(1)} + [H_0, S] = 0, \quad (4.121)$$

この制約から、 \tilde{H} は

$$\tilde{H} = H_0 + \frac{1}{2} [H^{(1)}, S] + O((t/U)^3), \quad (4.122)$$

であり、

こうして、有効ハミルトニアンは

$$H_{eff} = H_{t,h} + \tilde{H} = H_{t,h} + H_U + \frac{1}{2} [H_{t,mix}, S], \quad (4.123)$$

となる。

ここから、 $H_{int} = [H_{t,mix}, S]/2$ について考えていく

$$\begin{aligned}\langle f | H_{int} | i \rangle &= \frac{1}{2} \langle f | H_{t,mix} S - S H_{t,mix} | i \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} \langle f | H_{t,mix} | \alpha \rangle \langle \alpha | S | i \rangle - \langle f | S | \alpha \rangle \langle \alpha | H_{t,mix} | i \rangle \right),\end{aligned}\quad (4.124)$$

ここで、 $|f\rangle, |i\rangle$ は、終状態と始状態であり、それぞれの状態は S sub-space 内にある。また、 $|\alpha\rangle$ は中間状態である。摂動項 $H_{t,mix}$ は状態空間の間の遷移を引き起こすので、 $|\alpha\rangle$ は D sub-space に属す。関係式 (4.121) から

$$H_{t,mix} = S H_U - H_U S, \quad (4.125)$$

$$\langle \beta | H_{t,mix} | \gamma \rangle = \langle \beta | S H_U | \gamma \rangle - \langle \beta | H_U S | \gamma \rangle, \quad (4.126)$$

$$\langle \beta | H_{t,mix} | \gamma \rangle = \langle \beta | S | \gamma \rangle (E_{\gamma} - E_{\beta}), \quad (4.127)$$

$$\langle \beta | S | \gamma \rangle = \frac{\langle \beta | H_{t,mix} | \gamma \rangle}{(E_{\gamma} - E_{\beta})}, \quad (4.128)$$

ここで、 $|\beta\rangle, |\gamma\rangle$ はそれぞれ異なった sub-space に属す異なった状態である。また $E_{\beta(\gamma)}$ は H_U の固有値であり、それは $H_U |\beta(\gamma)\rangle = E_{\beta(\gamma)} |\beta(\gamma)\rangle$ を満たす。

$|\beta(\gamma)\rangle$ が S sub-space 内にあるとき、エネルギー固有値 $E_{\beta(\gamma)}$ はゼロになることに注意したい。こうして、中間状態は S sub-space 内の状態に対して $H_{t,mix}$ を作用させることで生成される状態とみなせ

る。つまり中間状態は二重占有状態が一つある状態であり。この事実から、もし $|\beta(\gamma)\rangle$ が S sub-space 内にあれば、エネルギー固有値 $E_{\beta(\gamma)}$ は U である。

この議論から、 H_{int} は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\langle f|H_{int}|i\rangle &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha}\frac{\langle f|H_{t,mix}|\alpha\rangle\langle\alpha|H_{t,mix}|i\rangle}{-U}-\frac{\langle f|H_{t,mix}|\alpha\rangle\langle\alpha|H_{t,mix}|i\rangle}{U}\right) \\ &= -\frac{\langle f|H_{t,mix}|\alpha\rangle\langle\alpha|H_{t,mix}|i\rangle}{U},\end{aligned}\quad (4.129)$$

$$H_{int} = -\frac{1}{U}H_{t,mix}H_{t,mix}.\quad (4.130)$$

H_{int} を S sub-space に作用させる。ここで、射影演算子 P_s を定義すると。

$$\begin{aligned}H_{int} &= -\frac{1}{U}P_s^\dagger H_{t,mix}H_{t,mix}P_s \\ &= -\frac{1}{U}P_s^\dagger\left(\sum_{i,j,k,\sigma,\sigma'}t_{i,j}t_{j,k}a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma}n_{jb}n_{ja}a_{j\sigma'}^\dagger a_{k\sigma'}\right)P_s.\end{aligned}\quad (4.131)$$

この表現から、t-J ハミルトニアン的一般形が得られる。

$$H_{tJ} = H_{eff} = \left[H_{t,h} - \frac{1}{U}P_s^\dagger\left(\sum_{i,j,k,\sigma,\sigma'}t_{i,j}t_{j,k}a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma}n_{jb}n_{ja}a_{j\sigma'}^\dagger a_{k\sigma'}\right)P_s\right].\quad (4.132)$$

H_{tJ} の一般形は psued-spin 表示を用いてさらにきれいな形に書き直せる。(4.137) を書き直すと

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma,\sigma'}a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma}n_{jb}n_{ja}a_{j\sigma'}^\dagger a_{k\sigma'} &= a_{ia}^\dagger a_{ja}n_{jb}n_{ja}a_{ja}^\dagger a_{ka} + a_{ia}^\dagger a_{ja}n_{jb}n_{ja}a_{jb}^\dagger a_{kb} \\ &+ a_{ib}^\dagger a_{jb}n_{jb}n_{ja}a_{ja}^\dagger a_{ka} + a_{ib}^\dagger a_{jb}n_{jb}n_{ja}a_{jb}^\dagger a_{kb},\end{aligned}\quad (4.133)$$

ここから、交換関係 $a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma'} + a_{j\sigma'}^\dagger a_{i\sigma} = \delta_{ij}\delta_{\sigma\sigma'}$ を (4.133) に対して使って

$$a_{ia}^\dagger a_{ka}n_{jb} + a_{ia}^\dagger a_{ja}a_{jb}^\dagger a_{kb}n_{ja} + a_{ib}^\dagger a_{jb}a_{ja}^\dagger a_{ka}n_{jb} + a_{ib}^\dagger a_{kb}n_{ja},\quad (4.134)$$

となり。ここで、三番目の項は $a_{ja}a_{jb}^\dagger$ に置き換えることができる。

$$a_{ia}^\dagger a_{ka}n_{jb} + a_{ia}^\dagger a_{ja}a_{jb}^\dagger a_{kb} + a_{ib}^\dagger a_{jb}a_{ja}^\dagger a_{ka} + a_{ib}^\dagger a_{kb}n_{ja}.\quad (4.135)$$

一方で、Spin 演算子と Boson 演算子の関係は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \frac{1}{4}n_i n_j &= \frac{1}{4}(2a_{ia}^\dagger a_{ib}a_{jb}^\dagger a_{jb} + 2a_{ib}^\dagger a_{ia}a_{ja}^\dagger a_{ja} - 2n_{ia}n_{jb} - 2n_{ib}n_{ja}) \\ &= \frac{1}{2}(-a_{ia}^\dagger a_{jb}a_{jb}^\dagger a_{ib} - a_{ib}^\dagger a_{ja}a_{ja}^\dagger a_{ib} - a_{ia}^\dagger a_{ia}a_{jb}^\dagger a_{jb} - a_{ib}^\dagger a_{ib}a_{ja}^\dagger a_{ja}).\end{aligned}\quad (4.136)$$

この関係式を使って、Bosonic t-J モデルは次のように得られる.

$$\begin{aligned}
H_{tJ} &= H_{eff} \\
&= P_s^\dagger \left[\sum_{i,j,\sigma} t_{ij} a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma} + \sum_{ij} \frac{1}{2} \left(J_{ij} \left(\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - \frac{1}{4} n_i n_j \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{U} \sum_{k \atop i \neq k} t_{ij} t_{jk} a_{i\sigma}^\dagger a_{j\sigma} n_{jb} n_{ja} a_{j\sigma'}^\dagger a_{k\sigma'} \right) \right] P_s, \tag{4.137}
\end{aligned}$$

ここで $J_{ij} = \frac{4t_{ij}^2}{U}$ である. このような摂動論的手法で Bose-Hubbard モデルから B-tJ モデルが導かれる.

B. Bosonic t-J モデルとその有効理論

はじめに、前節で導出した B-tJ モデルについて説明する. 光格子極低温原子系を考えると、2成分原子は互いに内部自由度の違い (光格子上の実験では *Rb* 原子などである)、あるいは原子番号の違いによって規定される. 以降、2成分原子は a-boson、b-boson と呼ぶことにする. また、2次元 (2D) の正方格子の光格子を考えていく.

B-tJ モデル

$$H_{EtJ} = H_{tJ} + H_V, \tag{4.138}$$

$$\begin{aligned}
H_{tJ} &= - \sum_{\langle i,j \rangle} (t_a a_i^\dagger a_j + t_b b_i^\dagger b_j + \text{h.c.}) - J_{xy} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) \\
&+ J_z \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^z S_j^z - \mu \sum_i (1 - a_i^\dagger a_i - b_i^\dagger b_i), \tag{4.139}
\end{aligned}$$

$$H_V = \frac{V_0}{4} \sum_i (a_i^\dagger a_i - \bar{\rho}_{ai})^2 + (b_i^\dagger b_i - \bar{\rho}_{bi})^2, \tag{4.140}$$

である. ここで、 $a_i^\dagger(a_i)$ と $b_i^\dagger(b_i)$ は a- (b-) boson の光格子上ある site i での生成消滅演算子である. t_a と t_b は隣接 (NN) サイト間 hopping 大きさである. また、擬スピン演算子 \vec{S}_i は $\vec{S}_i = \frac{1}{2} B_i^\dagger \vec{\sigma} B_i$ として与えられる. また、 $B_i = (a_i, b_i)^t$ であり、 $\vec{\sigma}$ は Pauli-spin 演算子である. さらに、 J_{xy} 、 J_z は元の Bose-Hubbard モデルから導かれるカップリングであり、それらは同じ成分間の斥力と異種成分間斥力の大きさに関連している. しかしながら本論文では J_{xy} 、 J_z は自由にパラメーター範囲を設定できるものとする、なぜなら、B-tJ モデルは Lieb 光格子 [5] 等から導出できる可能性があり、そのような場合 J_{xy} 、 J_z は広くコントロールできる可能性がある.

H_V は原子系の各サイトの密度ゆらぎ (量子ゆらぎ) をコントロールし、その平均値は $\bar{\rho}_{ai}$ と $\bar{\rho}_{bi}$ となるように設定される.

さて、以降の議論では $J_z = 0$ のときを考える、つまり原子系の平均密度はサイトに依存せず一様になる傾向のときを考える.

つぎに、我々は B-tJ モデルにクエンチ Random-Raman 場の効果を表す項を付け加える、

$$H_{\mathcal{T}} = H_{\text{EtJ}} + \sum_i (J_i^x S_i^x + J_i^y S_i^y), \quad (4.141)$$

ここで、 J_i^x 、 J_i^y は平均的にはゼロとなる Random カップリングの大きさである。これら、 J_i^x 、 J_i^y の値は以下のような分布関数 $P(J_i)$ で生成されることを考える、

$$P(J_i^x) = 1/\sigma_x \sqrt{\pi} \exp[-(J_i^x/\sigma_x)^2], \quad P(J_i^y) = 1/\sigma_y \sqrt{\pi} \exp[-(J_i^y/\sigma_y)^2], \quad (4.142)$$

ここで、 $\sigma_{x(y)}$ は正值で分散パラメーターとみなす。極低温原子系においては、上の項は Random Raman レーザーによる Rabi 振動で構築することができる [1, 6]、 $\Omega_i = \Omega_i^{\text{R}} + i\Omega_i^{\text{I}}$ 。このとき、 $J_i^x(J_i^y) \propto \Omega_i^{\text{R}}(\Omega_i^{\text{I}})$ と表記でき、 $S_i^x = a_i^\dagger b_i + b_i^\dagger a_i$ かつ $S_i^y = \frac{1}{i}(a_i^\dagger b_i - b_i^\dagger a_i)$ となる。

さて、次に Monte-Carlo(MC) 法による数値計算が可能になる有効モデルについて説明する。

スレーブ boson 法 [7] を用いると、スレーブ boson 演算子を $\phi_{ai}, \phi_{bi}, \phi_{hi}$ として、

$$a_i^\dagger = \phi_{ai}^\dagger \phi_{hi}, \quad b_i^\dagger = \phi_{bi}^\dagger \phi_{hi}, \quad (4.143)$$

として表現できる。また、この表現を導入したとき各サイトの物理状態 $|Phys\rangle$ は以下の条件を満たさなくてはならない

$$(\phi_{ai}^\dagger \phi_{ai} + \phi_{bi}^\dagger \phi_{bi} + \phi_{hi}^\dagger \phi_{hi})|Phys\rangle = |Phys\rangle. \quad (4.144)$$

このとき $H_{\mathcal{T}}$ の分配関数は、

$$Z = \int [d\phi_a d\phi_b d\phi_h] \exp \left[- \int d\tau \left(\sum_{\alpha=a,b,h} (\bar{\phi}_{\alpha i} \dot{\phi}_{\alpha i}) + H_{\mathcal{T}} \right) \right], \quad (4.145)$$

ここで、 τ 虚時間であり $\dot{\phi}_{\alpha i} = \frac{d\phi_{\alpha i}}{d\tau}$ そして、 $H_{\mathcal{T}}$ はスレーブボソン演算子で記述される。経路積分 (4.145) は、条件 $\bar{\phi}_{ai} \phi_{ai} + \bar{\phi}_{bi} \phi_{bi} + \bar{\phi}_{hi} \phi_{hi} = 1$ を満たすようにラグランジュ乗数 $\lambda_i(\tau)$ 、

$$\prod_{\tau} \delta(\bar{\phi}_{ai} \phi_{ai} + \bar{\phi}_{bi} \phi_{bi} + \bar{\phi}_{hi} \phi_{hi} - 1) = \int [d\lambda] e^{i \int d\tau (\bar{\phi}_{ai} \phi_{ai} + \bar{\phi}_{bi} \phi_{bi} + \bar{\phi}_{hi} \phi_{hi} - 1) \lambda_i}. \quad (4.146)$$

を導入する。

さて、ここから経路積分上の作用を正值にする有効理論を構築する、この作用は MC 法に載せることができる。

まず、 $\phi_{\alpha i} = \sqrt{\rho_{\alpha i}} e^{i\omega_{\alpha i}}$ ($\alpha = a, b, h$) と分割し振幅の自由度 $\rho_{\alpha i}$ については経路積分を解析的に実行する。 H_V 項は、密度ゆらぎ、 $\delta\rho_{\alpha i} = \rho_{\alpha i} - \bar{\rho}_{\alpha i}$ の項をだし、結果として Berry 位相項 $\sum_{\alpha} \bar{\phi}_{\alpha i} \dot{\phi}_{\alpha i}$ とともに $\delta\rho$ 積分が実行され結果として、 $\frac{1}{V_0} \sum_{\alpha} (\dot{\omega}_{\alpha i} + \lambda_i)^2$ とまとめられ有効作用となる。

このような計算より、虚時間方向も格子化して3次元(3D)格子としてモデルを考えるとその格子上に定義できる作用 A_{Lxy} として、

$$Z = \int [d\omega_{\alpha r} d\lambda_r] e^{-A_{Lxy}}, \quad (4.147)$$

が導かれ. ここで有効作用は

$$A_{Lxy} = A_{L\tau} + A_L(e^{i\theta_\sigma}, e^{-i\theta_\sigma}) + A_q, \quad (4.148)$$

であり、個別の項は

$$A_{L\tau} = -c_\tau \sum_r \sum_{\alpha=a,b,h} \cos(\omega_{\alpha, r+\hat{\tau}} - \omega_{\alpha r} + \lambda_r), \quad (4.149)$$

$$\begin{aligned} A_L(e^{i\theta_\sigma}, e^{-i\theta_\sigma}) = & - \sum_{\langle r, r' \rangle} \left(C_3^a \cos(\theta_{ar} - \theta_{ar'}) + C_3^b \cos(\theta_{br} - \theta_{br'}) \right. \\ & \left. + C_1 \cos(\theta_{sr} - \theta_{sr'}) \right), \end{aligned} \quad (4.150)$$

そして、

$$A_q = - \sum_{\langle r, r' \rangle} \left(\tilde{J}_i^x \cos(\theta_{sr} - \theta_{sr'}) + \tilde{J}_i^y \sin(\theta_{sr} - \theta_{sr'}) \right). \quad (4.151)$$

となる. この作用では、式(4.148) ~ (4.151) から、位相の自由度として

$$\theta_{sr} = \omega_{ar} - \omega_{br}, \quad \theta_{ar} = \omega_{ar} - \omega_{hr}, \quad \theta_{br} = \omega_{br} - \omega_{hr},$$

を定義した. そしてモデルの各パラメーターは、

$$\begin{aligned} c_\tau &= 1/V_0 \Delta\tau, \\ C_1 &= 4J \bar{\rho}_a^2 \bar{\rho}_b^2 \Delta\tau \propto J/(c_\tau V_0), \\ C_3^a &= t_a/2\bar{\rho}_a(1 - \bar{\rho}_a - \bar{\rho}_b) \Delta\tau \propto t_a/(c_\tau V_0), \\ C_3^b &= t_b/2\bar{\rho}_b(1 - \bar{\rho}_a - \bar{\rho}_b) \Delta\tau \propto t_b/(c_\tau V_0), \\ \tilde{J}^{x(y)} &= J^{x(y)} \Delta\tau = J^{x(y)}/(c_\tau V_0), \end{aligned} \quad (4.152)$$

として定義される. ここで $\Delta\tau$ は虚時間の格子間隔である.

C. レプリカ平均場理論による RFIO の存在

系にクエンチなランダム場が入ったときそれは非常に興味深い物理が出現することが知られている. 例えば、ランダムポテンシャルによって出現するアンダーソン局在 [8] などが代表例である. また、

古典スピンモデルにおいて、クエンチなランダム場が磁気秩序を破壊する数学的な厳密証明等も存在する [9]. しかしながら近年、クエンチなランダム場（磁場）が逆に系に秩序をもたらす現象が古典 XY スピンモデルなどを例として報告されている [14, 15]. このようなクエンチなランダム場が引き起こす秩序を Random Field Induced Order (RFIO) と呼ぶ.

さて、我々は式 (4.147) をもとに、Random Raman レーザーによる Rabi 振動によって生じる RFIO 状態が量子ゆらぎを含んだ B-tJ モデルの有効理論において出現するかどうかをレプリカ平均場理論によって解析的に検証する. 特に、ランダムネスが $\tilde{J}^x \neq 0$ and $\tilde{J}^y = 0$ に入るときに S^y は統計平均は有限値を持ち秩序化し、一方、 S^x の統計平均は 0 であることを示す. つまるところ、a-boson, b-boson の位相の位相差で表現される S^y がある値に秩序化されることをレプリカ法を用いて示す. ここで、系は簡単のため平均密度は各サイトあたり=1 であり、それぞれの原子の密度は 1/2 として考える.

レプリカ法 [?] では、まずレプリカインデックス $\nu = 1, 2, \dots, n$ をそれぞれの変数に対して導入する、現在の系においては、 $\omega_{\alpha i} \rightarrow \omega_{\alpha i}^\nu$ ($\alpha = a, b, h$) として導入され、そのときの分配関数はレプリカインデックスがついた $[Z^n]$ として、

$$[Z^n] = \int \left\{ \prod_i (d\tilde{J}_i^x) P(\tilde{J}_i^x) \right\} \left\{ \prod_{i,\nu} (d\omega_{ai}^\nu d\omega_{bi}^\nu) \right\} \exp \left[- \sum_\nu \left(A_S^\nu + \tilde{J}_i^x \int d\tau S_i^{x\nu} \right) \right],$$

$$A_S^\nu = \int d\tau \left[1/V_0 \sum_{i,\nu} (\dot{\omega}_{ai}^\nu + \dot{\omega}_{bi}^\nu) - C_1 \sum_{i,\mu} (S_i^{x\nu} S_{i+\mu}^{x\nu} + S_i^{y\nu} S_{i+\mu}^{y\nu}) \right], \quad (4.153)$$

ここで、 $\dot{\omega}_{ai}^\nu = d\omega_{ai}^\nu/d\tau$ などであり、また、 $[\dots]$ はランダム変数 \tilde{J}_i^x の $P(\tilde{J}_i^x)$ で重みづけされた平均を表す. これより、 $[Z^n]$ を計算して、 $n \rightarrow 0$ とするとき、 $[Z^n] \rightarrow (1 + n[\log Z])$ とすると、結果として $[\log Z]$ が得られる.

さて $[Z^n]$ において、 \tilde{J}_i^x の積分実行すると、

$$[Z^n] = \int \left\{ \prod_{i,\nu} (d\omega_{ai}^\nu d\omega_{bi}^\nu) \right\} \times \exp \left[- \sum_\nu A_S^\nu + \sigma_x^2/4 \sum_i \left(\int d\tau \sum_\nu S_i^{x\nu}(\tau) \right) \left(\int d\tau' \sum_{\nu'} S_i^{x\nu'}(\tau') \right) \right]. \quad (4.154)$$

式 (4.154) において、non-local な項は Hubbard-Storatonovich 変換により補助場 $m_i(\tau)$ を用いて、

$$\exp \left[1/4\sigma_x \sum_i \left(\int d\tau \sum_\nu S_i^{x\nu}(\tau) \right) \left(\int d\tau' \sum_{\nu'} S_i^{x\nu'}(\tau') \right) \right]$$

$$= \int [dm_i] \exp \left[- 1/\sigma_x^2 \sum_i m_i^2 + \sum_i m_i \left(\int d\tau \sum_\nu S_i^{x\nu}(\tau) \right) \right]. \quad (4.155)$$

さらに、平均場理論 (MFT) をスピン変数の箇所 A_S^ν に適応すると、

$$\sum_{i,\mu} (S_i^{x\nu} S_{i+\mu}^{x\nu} + S_i^{y\nu} S_{i+\mu}^{y\nu}) \rightarrow \sum_i \left(4\langle S^{x\nu} \rangle S_i^{x\nu} - 2\langle S^{x\nu} \rangle^2 + 4\langle S^{y\nu} \rangle S_i^{y\nu} - 2\langle S^{y\nu} \rangle^2 \right). \quad (4.156)$$

この平均場理論において、レプリカ系 $[Z^n]_{\text{MFT}}$ の分配関数は以下のように与えられる、

$$\begin{aligned}
[Z^n]_{\text{MFT}} = & \int [dm_i][d\omega_a][d\omega_b] \exp \left[-1/\sigma_x^2 \sum_i m_i^2 + \int d\tau \sum_{i,\nu} (m_i + 4C_1 \langle S^{x\nu} \rangle) S_i^{x\nu} \right. \\
& + \int d\tau \sum_{i,\nu} \{ -2C_1 \langle S^{x\nu} \rangle^2 + 4C_1 \langle S^{y\nu} \rangle S_i^{y\nu} - 2C_1 \langle S^{y\nu} \rangle^2 \} \\
& \left. -1/V_0 \int d\tau \sum_{i,\nu} ((\dot{\omega}_{a,i}^\nu)^2 + (\dot{\omega}_{b,i}^\nu)^2) \right]. \quad (4.157)
\end{aligned}$$

式 (4.157) において、 $\omega_{\alpha i}^\nu$ の積分を実行することで擬スピン秩序を判別する Ginzburg-Landau 理論 (GL theory) を求めることができる。

この目的のために、以下の十分低温の状況下での Green 関数を考える、

$$\langle e^{i\omega_{\alpha,i}^\nu(\tau)} e^{-i\omega_{\alpha,j}^{\nu'}(\tau')} \rangle = \delta_{\nu\nu'} \delta_{ij} e^{-V_0 |\tau - \tau'|}, \quad (\alpha = a, b). \quad (4.158)$$

そのとき、

$$[Z^n]_{\text{MFT}} = \int [dm_i] \exp \left[-1/\sigma_x^2 \sum_i m_i^2 - 2C_1 \int d\tau \sum_\nu (\langle S^{x\nu} \rangle^2 + \langle S^{y\nu} \rangle^2) \right] \quad (4.159)$$

$$+ \int d\tau \sum_{i,\nu} \left\{ (\gamma_i^\nu)^2 / 4V_0 + 4C_1^2 / V_0 \langle S^{y\nu} \rangle^2 \right\}, \quad (4.160)$$

となり、ここで、 $\gamma_i^\nu = m_i + 4C_1 \langle S^{x\nu} \rangle$ である。

我々は、レプリカ対称な解に興味があるので、 $\sum_\nu \langle S^{x\nu} \rangle = n \langle S^x \rangle$ のように置くことにする。

さらに、虚時間変数 τ においてカットオフ $\beta = 1/(k_B T)$ をとると、そのとき、 m_i の積分が実行できる、

$$\begin{aligned}
& \int dm_i \exp \left[-1/\sigma_x^2 m_i^2 + \beta n / 4V_0 (m_i + 4C_1 \langle S^x \rangle)^2 \right] \\
& = \exp \left[1/1/\sigma_x^2 - \beta n / 4V_0 \left(\beta n / V_0 C_1 \langle S^x \rangle \right)^2 + 4C_1^2 \beta n / V_0 \langle S^x \rangle^2 \right]. \quad (4.161)
\end{aligned}$$

最終的に、有効ポテンシャル V_{Rep} を $n \rightarrow 0$ とすることによって得ることができる、

$$\begin{aligned}
V_{\text{Rep}} & \equiv \lim_{n \rightarrow 0} \left(1 - [Z^n]_{\text{MFT}} / \beta n \right) \\
& = \left(2C_1 - 4C_1^2 / V_0 \right) \left(\langle S^x \rangle^2 + \langle S^y \rangle^2 \right) - \beta n / 1/\sigma_x^2 - \beta n / 4V_0 \left(C_1 / V_0 \langle S^x \rangle \right)^2. \quad (4.162)
\end{aligned}$$

ここで、二つの極限 $\beta \rightarrow \infty$ と $n \rightarrow 0$ の取り方の順序は交換しないことに注意。また、有限の σ_x と有限温度にたいして、 V_{Rep} (4.162) の最後の項は $n \rightarrow 0$ とすれば消える。 $\langle S^x \rangle$ と $\langle S^y \rangle$ は $C_1 > V_0/2$ の状況において有限の値をとる。このとき、スピン相互作用 J は密度ゆらぎ V_0 の低減に支配的な役割をする。

一方で、 $\sigma_x \rightarrow \infty$ のとき、 $\langle S^x \rangle$ の項は

$$\left(2C_1 - 4C_1^2/V_0\right)\langle S^x \rangle^2 - \beta n/1/\sigma_x^2 - \beta n/4V_0\left(C_1/V_0\langle S^x \rangle\right)^2 \rightarrow 2C_1\langle S^x \rangle^2, \quad \sigma_x \rightarrow \infty, \quad (4.163)$$

このとき、 S^x は秩序を持たない、一方、 S^y は秩序をもつ。 $T \rightarrow 0$ に対して、式 (4.162) 内の V_{Rep} の最後の項は σ_x に対して有限の寄与を与え、 S^x は秩序をもたない。

さて、MFT の範囲内で RFIO の存在が示されたわけだが、我々は以降の節で RFIO. の特性を数値計算で調べていく。

D. Monte-Carlo シミュレーション

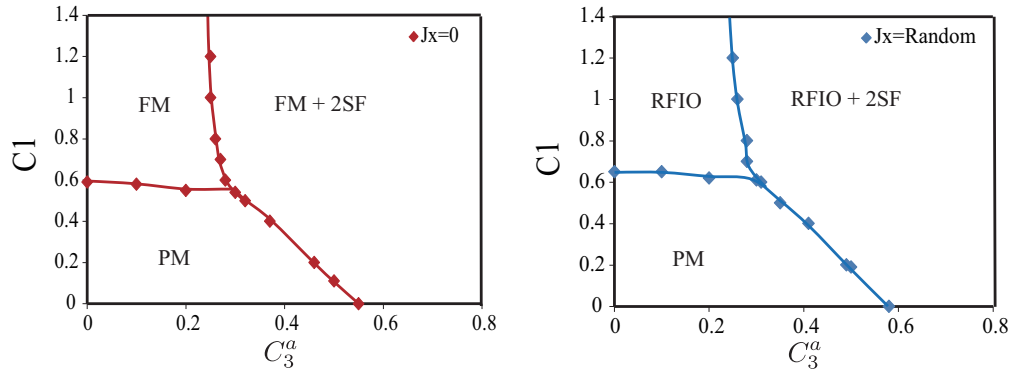


FIG. 4: (Color online) 系のグローバルな相構造: H_{EtJ} (左) and $H_{\mathcal{T}}$ (右)、ここで、 $c_{\mathcal{T}} = 2.0$, $C_3^a = C_3^b$, $\sigma_x = 0.3$ と $\sigma_y = 0$. RFIO は Random-field-induced order を示す. PM は無秩序状態, FM は擬スピン強磁性状態、SF は原子の BEC 状態に起因する超流動状態. すべての相転移線は 2 次相転移である。

この節では、Monte-Carlo(MC) 法による数値計算について述べる. Eqs.(4.147)~(4.151) によって定義されるモデルを、ランダム変数 $\{\tilde{J}_i^x\}$ ($\{\tilde{J}_i^y\}$) を固定した状態で (これはクエンチ状態である) ローカルアップデート MC 法により平衡状態の統計平均を求める. 典型的な sweep 数は $(30000 \sim 50000) \times (10 \text{ samples})$ であり、乱数受け入れ率は 40% ~ 50% である。

はじめに、ランダム Raman 場が入っていないときの相図を示す (Fig.4 左図). これは先行研究 [13] で得られたものである。

さて、 $t_a = t_b$ かつ $T = 0$ のとき、系の基底状態は 3 つの状態がある、それらは、no long-range order (LRO), FM 相、二成分 BEC 相 (2SF) である. 結果は Fig.4 右図に示す。

特に、FM 相に関しては擬スピン (S^x, S^y) が長距離秩序をもつ. つまりこれは、 $\langle S^y \rangle / \langle S^x \rangle = \tan \theta_s$ として表現される (θ_s は任意の角)

擬スピン秩序は以下の相関関数 $G_S^x(r)$ と $G_S^y(r)$ によって定量的に評価できる、

$$G_S^{x(y)}(r) = \frac{1}{L^3} \sum_{r_0} \langle S^{x(y)}(r+r_0) S^{x(y)}(r_0) \rangle, \quad G_S(r) = G_S^x(r) + G_S^y(r), \quad (4.164)$$

ここで、 L は 3D 格子の一辺の長さ、サイト r_0 と $r_0 + r$ は同じ空間平面上に定義される。

我々は虚時間方向の格子サイズを $N_\tau = L$ とおく。角度 θ は $U(1)$ 対称性の破れに起因する任意の値をとる。この $U(1)$ 対称性は系の作用 $A_{L\tau} + A_L$ における擬スピンの回転に関するものである。

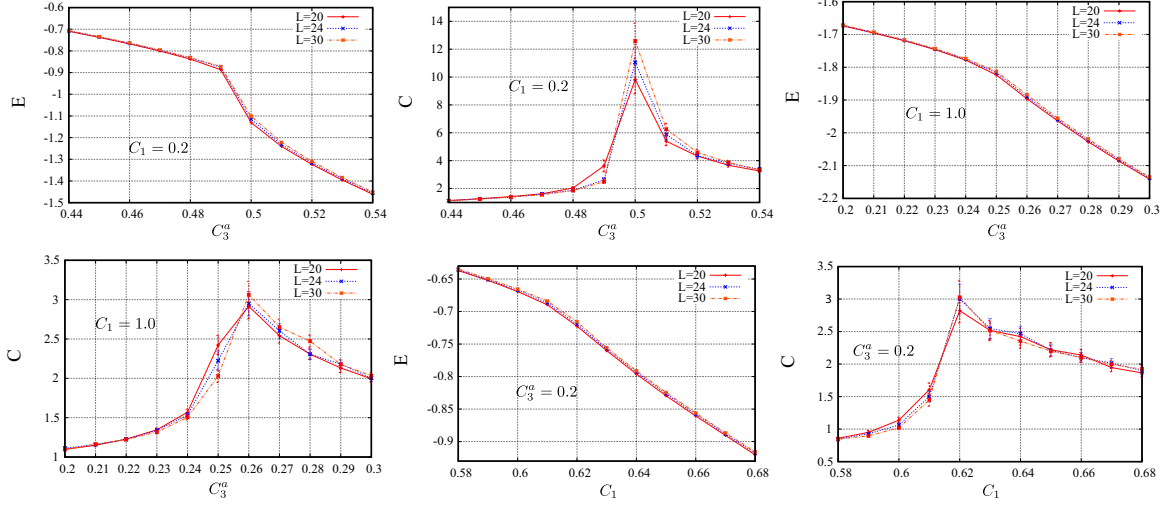


FIG. 5: (Color online) 内部エネルギー E と比熱 C . これらの結果は 2 次相転移を示している。 $C_3^a = C_3^b$, $\sigma_x = 0.3$.

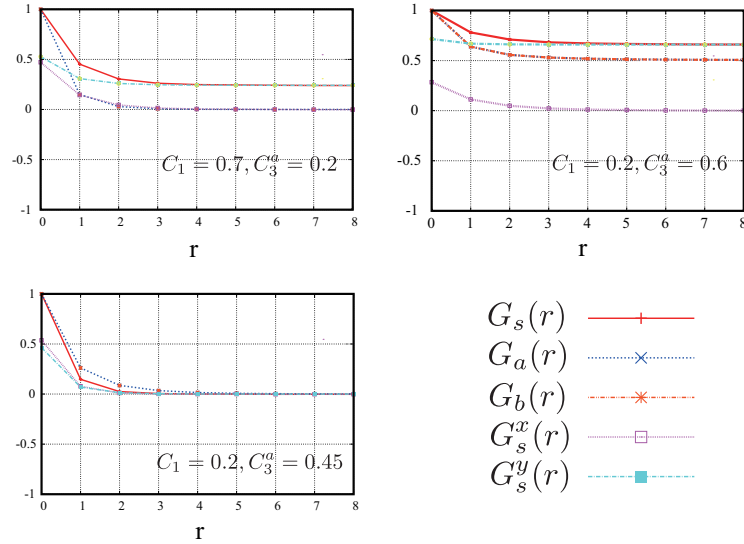


FIG. 6: (Color online) 相関関数の振る舞い、 $G_S(r)$, $G_a(r)$, $G_b(r)$, $G_S^x(r)$, と $G_S^y(r)$. $C_3^a = C_3^b$, $\sigma_x = 0.3$.

次にランダム Raman 場 (式 (4.151) における A_q) が印加されたときの相構造 (Fig.4 右図) をみていく。はじめに、 $\tilde{J}_i^y = 0$ の場合を考える。MC 法において、我々ははじめに、ランダム変数 $\{\tilde{J}_i^x\}$ を

分布 $P(\tilde{J}_x)$ (式 (4.142)) から生成する. そして、ランダムな値 $\{\tilde{J}_i^x\}$ を固定した状態で $\omega_{\alpha r}$ と λ_r のローカルアップデートを行い計算を実行する. 最終的な物理量はそれぞれサンプル (5 ~ 10 $\{\tilde{J}_i^x\}$) を平均してもとめる.

相境界は、系の内部エネルギー E と比熱 C を求めることで決定する.

$$E = \langle A_{Lxy} \rangle / L^3, \quad C = \langle (A_{Lxy} - E)^2 \rangle / L^3, \quad (4.165)$$

ここで、平均値 $\langle \cdot \rangle$ はランダム場のサンプル平均も含んでいる. さらに、状態相を特定するために、Boson 相関関数を計算する、

$$\begin{aligned} G_a(r) &= \frac{1}{L^3} \sum_{r_0} \langle e^{i\theta_{ar_0}} e^{-i\theta_{a,r_0+r}} \rangle, \\ G_b(r) &= \frac{1}{L^3} \sum_{r_0} \langle e^{i\theta_{br_0}} e^{-i\theta_{b,r_0+r}} \rangle, \end{aligned} \quad (4.166)$$

ここで、 $G_S^{x(y)}(r)$ と同じように、 r_0 と $r_0 + r$ は空間同一平面である.

Fig.4 において、 $\sigma_x = 0.3$ かつ $\sigma_y = 0$ における相構造を得た. 典型的な E と C の振る舞いは Fig.5 に乗せた、この結果を見てみると相転移前後でエネルギーに飛びがなく二次相転移を示すことがわかる.

オリジナルな B-tJ モデルと異なる点は FM 相が RFIO 相に置き換わったことである、これは Fig.6 における擬スピン相関をみるとわかる、RFIO 相では擬スピン x 成分のみが長距離相関を持っている、一方、 y 成分は急激に減衰しているのが見て取れる. RFIO 相では a-boson と b-boson の位相差は $\theta_s \simeq \pm \frac{\pi}{2}$ となっている. このことは、Fig.7 をみれば理解することができる. この RFIO 相の結果は古典系 XY モデルの結果と整合している [14, 15].

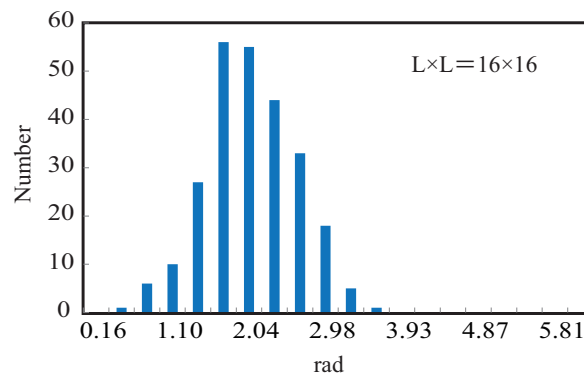


FIG. 7: (Color online) a-boson と b-boson の位相差 (relative phase) についてのヒストグラム、虚時間軸を固定して空間平面に存在する relative phase の値の分布をとった. およそ位相差の分布のピークは $\theta_s = \theta_a - \theta_b \simeq \frac{\pi}{2}$. ここで、 $C_1 = 2.0$, $C_3^a = C_3^b = 0.2$, $c_\tau = 2.0$ かつ $\sigma_x = 0.3$ である.

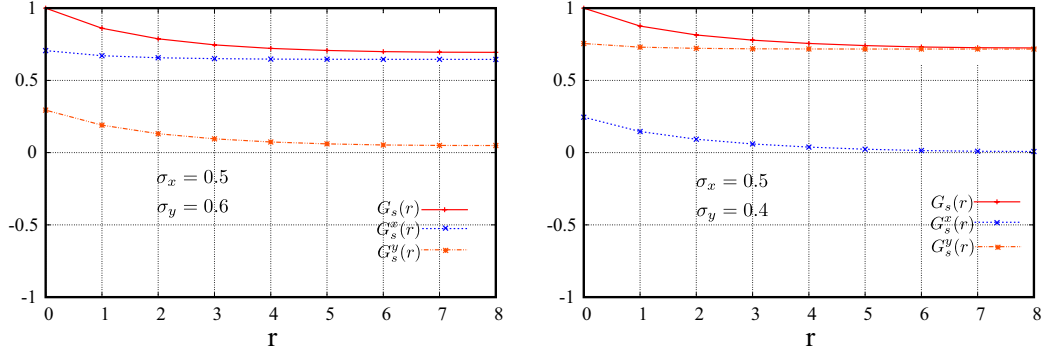


FIG. 8: (Color online) 擬スピン相関 $G_S(r)$, $G_S^x(r)$ と $G_S^y(r)$

ランダム場の成分比を変えてRFIO領域がどうなるかをみることは面白い、結果は σ_x/σ_y の比で決定されることがわかる、Fig.8をみよ。このことより、 θ_s の値は $\sigma_x/\sigma_y > 1$ (< 1) のとき $\pm\frac{\pi}{2}$ (0 or π) をとることがわかった。

さて次にある種の思考実験 “Gedanken experiment” を行った結果を示す。パラメータ V_0 を変えていくことである。 V_0 が大きいとき、原子の密度ゆらぎは抑えられ不確定性関係から位相の量子ゆらぎが大きくなる。実際、 Eqs.(4.149) と (4.152) における作用から、位相 $\omega_{\alpha r}$ はたとえ空間方向においての位相の相関が存在していても c_τ が小さいとき時間軸方向に対して相関はなくなるであろう。

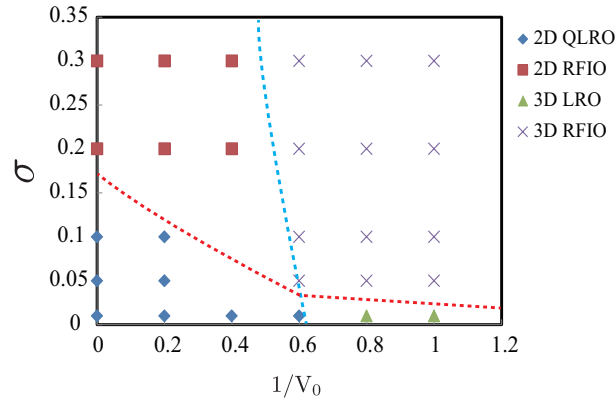


FIG. 9: (Color online) $(\frac{1}{V_0} - \sigma_x)$ 平面における相構造、ここで $C_1 = 2.0$ and $C_3^a = C_3^b = 0.2$ である。点線は相関関数から予想されるクロスオーバーな相境界である。

さて、 $(\frac{1}{V_0} - \sigma_x)$ 平面での相構造の結果を Fig.9 に示す V_0 が小さい3D領域において、3D XY スピン秩序は σ_x を大きくしていくにつれ3D RFIO 相に移る。一方、 V_0 が大きい領域では、系はより小さい σ_x に対して準長距離秩序をもつ、また σ_x が大きくなるにつれ系は本物の Z_2 長距離秩序をも

つ RFIO 相になる.

E. RFIO 相の安定性

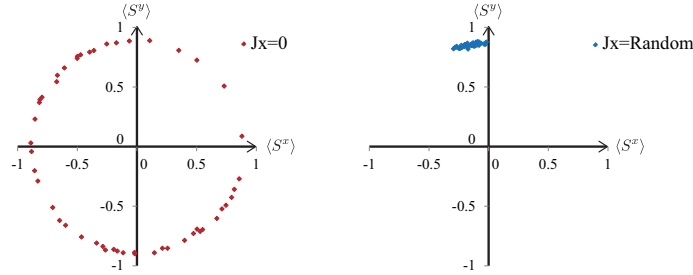


FIG. 10: (Color online) Behavior of the volume average of the pseudo-spin ($\langle S^x \rangle, \langle S^y \rangle$) under the MC local update. MC ローカルアップデートにおける擬スピン ($\langle S^x \rangle, \langle S^y \rangle$) の空間平均値の振る舞い. ランダム場がない場合 (左図) は、擬スピンは MC アップデートによって大きく揺らいでおり自発的 U(1) 対称性の破れを示している. 一方、ランダム磁場が入ると (右図) 擬スピンはイジングタイプの秩序で固定化される.

Fig.9 において得られた相図より、準長距離秩序は V_0 が大きい領域において σ_x を大きくしていくとイジングタイプの RFIO 相に変化する. この事実を詳しく調べるため、準長距離秩序相と RFIO 相において MC 法のアップデートに対してどのように変化していくのかを調べた. 結果は Fig.10 である.

パラメータ設定は $c_\tau = 2.0$, $C_1 = 2.0$ かつ $C_3^a = C_3^b = 0.2$ でシステムサイズは 10^3 である. $\sigma_x = 0.3$ における RFIO 相において、MC sweep の総数は 5×10^5 である. データは 10^4 sweep おきに測定した.

さて、Fig.10 からわかるようにランダム場がないとき擬スピン秩序の取りうる値は不安定になり、さまざまな値をとる. 一方、ランダム場が入ったときは、擬スピン秩序は極めて安定でありこのことから、RFIO 相は極めて安定であり量子情報分野における量子ビットの候補となる可能性がある.

F. RFIO 相におけるトポロジカル励起

この節では FM 相と RFIO 相でのトポロジカル励起を比較することに焦点を当てよう. RFIO 相境界近傍では、興味深いトポロジカル励起が存在する. それは、a-boson と b-boson の位相が形成する量子 vortex であり、さらにそれらの束縛状態である.

さて、a-boson と b-boson の位相が形成する量子 vortex は PM 相において増加することは双対描像でよく知られている. 一方で、FM 相において、それら二種類の vortex の空間的オーバーラップは増加する、それはスピン演算子 S_i^x と S_i^y のコヒーレントな凝縮の結果でそうなる..

さらに、外部磁場 \vec{h} 一定のもとで、ゼーマンカップリング $\vec{h} \cdot \vec{S}_i$ は a-boson と b-boson 量子 vortex 間に線形的なポテンシャルを作りだす。それによって、a-boson と b-boson 量子 vortex 間の”閉じ込め”が発生する。

たとえば、 $\vec{h} = (h, 0)$ のときゼーマンカップリングは $hS_i^x = h \cos(\theta_{ai} - \theta_{bi})$ (ここで θ_{ai} (θ_{bi}) は a(b)-boson の位相) となる、そのときペアの vortex がもつエネルギーは $h \cdot (\text{vortex ペア間の距離})$ となる。

このような、量子 vortex のペアは two-gap 超伝導体ないで形成される現象と類似した特性をもつ [16].

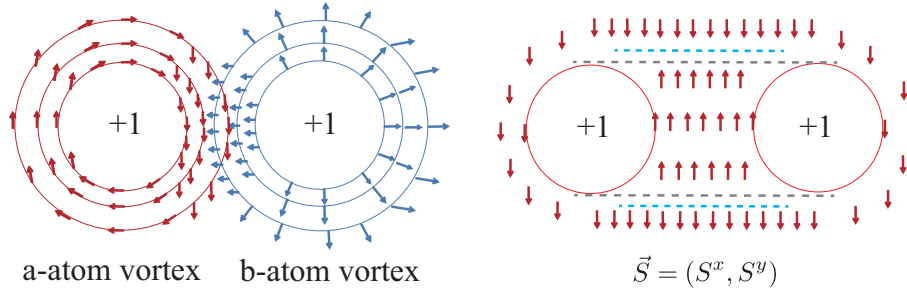


FIG. 11: (Color online) (左図) a-boson と b-boson 量子 vortex ペアの典型的な配位。矢印は BEC の位相 θ_{ai} と θ_{bi} を示す。(右図) vortex ペアに対応するスピン配置 $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y)$ 二つのドメインウォールが存在する。

さて、ランダムな外部磁場がある系で、ゼーマンカップリングは $\tilde{J}_i^x \cos(\theta_{ai} - \theta_{bi})$ となる。前の節でみたように、系の位相の状態は $(\theta_{ai} - \theta_{bi}) \sim \pm \frac{\pi}{2}$ が支配的である、これはゼーマンカップリングの効果と同じである。

それゆえ、RFIO 相において、a-boson と b-boson 量子 vortex の間には相互作用が存在するが、それは定磁場の場合のゼーマンカップリングが生み出す相互作用とは異なることが推測される。我々は、この問題について調べていく。まず、RFIO 相における予想される vortex ペアの配置は Fig.11 に示す。

我々は量子 vortex V_r^a と V_r^b を以下のように定義する、

$$V_r^A \equiv \begin{cases} v_{Ar}, & |v_{Ar}| \geq 1/2 \\ 0, & |v_{Ar}| < 1/2 \end{cases} \quad (4.167)$$

ここで、 v_{Ar} は 3 D 時空間格子のサイト r 上での渦である、

$$v_{Ar} \equiv \frac{1}{4} \left[\sin(\theta_{A,r+\hat{x}} - \theta_{A,r}) + \sin(\theta_{A,r+\hat{x}+\hat{y}} - \theta_{A,r+\hat{x}}) - \sin(\theta_{A,r+\hat{x}+\hat{y}} - \theta_{A,r+\hat{y}}) - \sin(\theta_{A,r+\hat{y}} - \theta_{A,r}) \right], \quad (4.168)$$

ここで $A = a, b$ である。さて、我々はその渦度に対し式 (4.167) のようにカットオフを導入した。このカットオフは vortex の場所をはっきりさせるためには有効である。式 (4.168) の vortex V_r^A から、

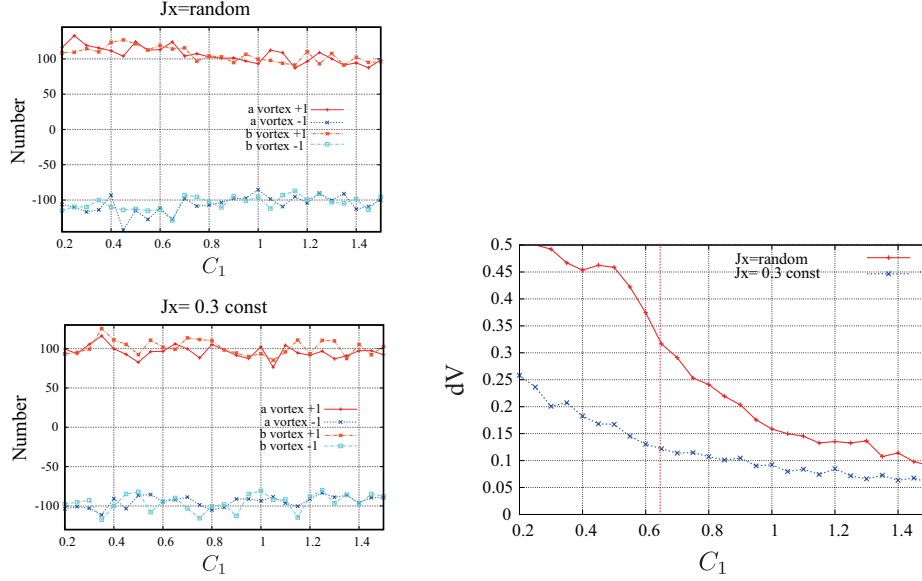


FIG. 12: (Color online) 量子 vortex の数 (左図) と式 (4.169) で示される dV (右図)、右図においては $\sigma_x = 0.3$ ランダム場のケースと $\tilde{J}_x = 0.3$ かつ $\tilde{J}_y = 0$ のケースを示す. 相転移はランダム場と定数場 \tilde{J}_x の両方のケースに対して $C_1 \sim 0.62$ で起きる. vortex の数は相転移前後で変化はないが dV に関しては変化が起きる. ここで、 $C_3^a = C_3^b = 0.3$ 、 $c_\tau = 2.0$. システムサイズは $L^2 = 16^2$ である.

我々は a-boson と b-boson 量子 vortex のオーバーラップを各タイムスライスで dV を計測することによって調べることができる、

$$dV = \frac{1}{N_v} \sum_{r \in \{\tau: \text{fixed}\}} (V_r^a - V_r^b)^2, \quad (4.169)$$

ここで、 N_v は空間平面全体に存在する vortex の数であり、 $N_v = N_v^{a+} - N_v^{a-} \simeq N_v^{b+} - N_v^{b-}$ 、 $N_v^{A+} = \sum_{r \in \{\tau: \text{fixed}\}} V_r^A \theta(V_r^A)$ 、かつ $N_v^{A-} = \sum_{r \in \{\tau: \text{fixed}\}} V_r^A \theta(-V_r^A)$ ($A = a, b$) となる (ここで $\theta(x)$ は Heaviside θ 関数である).

dV の計算と vortex と anti-vortex の総数 (N_v^{A+} , N_v^{A-}) の計算結果を Fig.12 に示す. dV の値が大きいときは a-boson と b-boson 量子 vortex のオーバーラップ、すなわち、a-boson と b-boson 量子 vortex の閉じ込め効果は小さい. PM 相から RFIO 相への相転移は $C_1 \simeq 0.62$ で起きる. vortex と anti-vortex の密度は相転移前後で変化はしないが、オーバーラップの度合 dV は大きく相境界で変化する (Fig.12). ランダム場でない場合でも同じような現象をみることができる. 結果をみるに、ランダム場システムにおいて vortex x ペアのエネルギーは定数場 $\tilde{J}_i^x = 0.3$ のシステムと比べて小さいことがみてとれる.

RFIO 相における、a-boson と b-boson 量子 vortex ペアは MC 計算からのスナップショットによる測定はそう容易でもないが、その Fig.12 で示された結果より、RFIO 相において、a-boson と b-boson

量子 vortex ペア間の brick wall の形は定数場の場合と比べて異なることが予想できる。

-
- [1] L. Sanchez-Palencia and M. Lewenstein, *Nature Phys.* **6**, 87 (2010); J.Wehr, A.Niederberger, L.Sanchez-Palencia, and M.Lewenstein, *Phys. Rev. B* **74** 224448.
- [2] 永井佑紀, 「Hubbard モデルを用いた t-J モデルと Heisenberg モデルの導出」, http://park.itc.u-tokyo.ac.jp/kato-yusuke-lab/nagai/note070828_ei.pdf.
- [3] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [4] M. Boninsegni, *Phys. Rev. Lett.* **87** 087201 (2001), M. Boninsegni *Phys. Rev. B* **65** 134403 (2001), E. Altman, W. Hofstetter, E. Demler and M. D. Lukin, *New J. Phys.* **5** 113 (2003), Y.Nakano, T.Ishima, N.Kobayashi, K.Sakakibara, I.Ichinose, and T.Matsui, *Phys. Rev. B* **83** 235116; Y.Nakano, T.Ishima, N.Kobayashi, T.Yamamoto, I.Ichinose, and T.Matsui, *Phys. Rev. A* **85** 023617.
- [5] S. Mukherjee, A. Spracklen, D. Choudhury, N. Goldman, P. Ohberg, E. Andersson, and R. R. Thomson, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 245504 (2015); T. Shintaro, O. Hideki, I. Tomohiro, N. Takuei, N. Shuta and Y. Takahashi, arXiv 1506.00587v1, (2015).
- [6] E.Lye, L.Fallain, M.Modugno, D.S.Wiersman, C.Fort, and M. Inguscio, *Phys.Rev.Lett.* **95** 070401; D.Clément, A.F.Varón, M.Hugbart, J.A.Retter, P.Bouyer, L.Sanchez-Palencia, D.M.Gangardt, G.V.Shlyanikov, and A.Aspect, *Phys.Rev.Lett.* **95** 170409; T.Schulte, S.Drenkelforth, J.Kruse, W.Ertmer, J.Arlt, K.Sacha, J.Zakrzewski, and M.Lewenstein, *Phys.Rev.Lett.* **95** 170411.
- [7] Y. Yu and S. T. Chui, *Phys. Rev. A* **71**, 033608 (2005).
- [8] P. W. Anderson, *Phys.Rev.* **109** 1492 (1958).
- [9] R.L.Greenblatt, M. Aizenman, J.L. Lebowitz, *Phys. Rev. Lett.* **103** 197201(2009).
- [10] J.Wehr, A.Niederberger, L.Sanchez-Palencia, and M.Lewenstein, *Phys.Rev.B* **74** 22444 (2006).
- [11] A.Niederberger, T.Schulte, J.Wehr, M.Lewenstein, L.Sanchez-Palencia, and K.Sacha, *Phys.Rev.Lett.* **100** 030403 (2008).
- [12] 西森秀稔, スピングラス理論と情報統計力学 (岩波書店, 新物理学選書, 1999). S.F. Edwards, P. W. Anderson, *J. Phys. F***5**, 965 (1975).
- [13] Y. Kuno, K. Suzuki, and I. Ichinose, *J. Phys. Soc. Japan* **82**, (2013).
- [14] J. Wehr, A. Niederberger, L. Sanchez-Palencia, and M. Lewenstein, *Phys.Rev.B* **74** 224448 (2006).
- [15] A. Niederberger, T. Schulte, J. Wehr, M. Lewenstein, L. Sanchez-Palencia, and K. Sacha, *Phys.Rev.Lett.* **100** 030403 (2008).
- [16] E. Babaev, *Phys.Rev.Lett.* **89** 067001(2002); *Nucl.Phys. B* **686** 397(2004); E. Babaev, A. Sudobø, and N. W. Ashcroft, *Nature* **431** 666(2004); J. Goryo, S. Soma, and H. Matsukawa, *Europhys.Lett.* **80** 17002(2007).

V. BOSONIC T-J MODEL WITH DIPOLE-DIPOLE INTERACTION

この章では、光格子上原子系で実現されうる 2 成分 Boson 系についての物理について紹介する。

なお、本章の内容は以下の原著論文の内容を含む:

Superfluidity and solid orders in two-component Bose gas with dipolar interactions in an optical lattice,

Yoshihito Kuno, Keita Suzuki, Ikuo Ichinose, Phys. Rev. A **90**, 063620 (2014).

この章では、2次元光格子上の 2 成分原子系において、それらの原子に双極子モーメント [1, 2] の効果を考えたときどのような状態相が出現するのかを問題とする。

原子が所持する双極子モーメントは磁氣的、あるいは分極的な電氣的なものが存在する、近年、*Cr, Er* など、光格子上に大きな双極子モーメントを持つ原子をトラップすることが実験的に可能になってきており、双極子モーメントにより発生する長距離相互作用 (dipole-dipole interaction (DDI)) が生み出す物理に注目が集まっている [2]。特に極低温 ($\sim O(10)nK$) 領域においては、その DDI は他の相互作用と運動エネルギーと同等な大きさの寄与を系に与える。

2 成分 Boson 原子系において一般的な双極子モーメントを考えると、興味深い状態相の出現が期待される。例えば、長距離相互作用が生み出す新種の固体相であったり超流動相内に長距離相互作用によってもたらされる超固体相 [4] と呼ばれるものであったりする。

本章ではこれらの物理について解析的には平均場近似をもちいて状態相をもとめる、さらに、拡張された MC 法を用いて量子ゆらぎを含みかつ原子密度の最適値を変分パラメーターとして求める複合的 MC 法を用いて固体の秩序等を精査した。

我々はこの手法によって量子ゆらぎの効果かつ DDI により出現する新種の超固体相の存在を突きとめた。

A. Extended Quantum XY model の導出

この節では有効理論の導出の例を示す。それは、2 成分 Bosonic t-J モデル Slave-particle 表示によって表現された t-J モデルから出発する。カップリング定数 $J_z = 0$ の制限のもと、Extended Quantum XY model (EQXYM) を導出する。

2 成分 Bosonic t-J モデルまず書いておくと。(スピン相互作用項の XY 成分と Z 成分は異方性を

持つとした)

$$A = A_s + A_h - \mu \sum_x \bar{\phi}_x \phi_x \quad (5.170)$$

$$A_s = -c_1 \sum_{x,\mu} (\alpha \vec{S}_{x+\mu} \vec{S}_x + (1-\alpha) S_{x+\mu,3} S_{x,3}) P_x P_{x+\mu} \quad (5.171)$$

$$A_h = \frac{c_3}{2} \left(\sum_{x,\mu} \bar{z}_{x+\mu} z_x \phi_{x+\mu} \bar{\phi}_x + c.c \right) \quad (5.172)$$

$$P_x = 1 - \bar{\phi}_x \phi_x \quad (5.173)$$

$$(5.174)$$

それぞれの場、 z_1, z_2 と ϕ は a 粒子の場、b 粒子の場、そしてホールの場である。

次に、それぞれの場は複素場であるため二つの実数場を導入できる。つまり、振幅場と位相場である。

$$z_{1,x} = (\sqrt{\rho_{1,x} + \delta\rho_{1,x}}) e^{i\phi_{1,x}} \quad (5.175)$$

$$z_{2,x} = (\sqrt{\rho_{2,x} + \delta\rho_{2,x}}) e^{i\phi_{2,x}} \quad (5.176)$$

$$z_{3,x} = \phi_x = (\sqrt{\rho_{3,x} + \delta\rho_{3,x}}) e^{i\phi_{3,x}} \quad (5.177)$$

$$(5.178)$$

ここで、 $a = 1, b = 2, hole = 3$ とした。

$\sqrt{\rho_{i,x}}$ はそれぞれの格子点上での粒子とホールの平均濃度である。これらは、我々が想定する秩序状態に対して調整可能なパラメータとみなす。

さらに、このモデルに対して濃度が一樣になるように働くポテンシャルを付け加える。

$$A_N = \int d\tau \sum_x \frac{V_0}{4} \{ (|z_{1,x}|^2 - \rho_0)^2 + (|z_{2,x}|^2 - \rho_0)^2 + (|z_{3,x}|^2 - \rho_0)^2 \} \quad (5.179)$$

このポテンシャル項を導入する動機は次の二つである；

1. 先行研究 [5, 6] において行ってきた MC シミュレーションによる解析によれば、系は全格子点一様な粒子濃度のパターンを好む傾向にある。
2. この項は濃度ゆらぎ $\delta\rho$ に対して二次式になっており、量子多体系における汎関数経路積分形式においてスタンダードなアプローチである”Gaussian Integration”が解析的に実行できる [3].

これよりモデルの経路積分形式は

$$Z = \int [D\rho_i][D\phi_i] \exp[-S_\tau - A + A_N] \quad (5.180)$$

$$S_\tau = \int d\tau \sum_{x,i} \bar{z}_{i,x} \partial_\tau z_{i,x} \quad (5.181)$$

ここで、 S_τ は Berry 位相項と呼ばれているものである。この項は Heisenberg 不確定性関係に起因する量子効果を表現したものである。(前節の経路積分の構築を参照)

次に、 $S_\tau + A_N$ に対して無限重の Gaussian Integration を実行できる。経路積分形式で、 $S_\tau + A_N$ を、先ほど定義した振幅場と位相場で $S_\tau + A_N$ を書き直すと。

$$S_\tau = \int_0^\infty d\tau \sum_x (\bar{z}_{1,x} \partial_\tau z_{1,x} + \bar{z}_{2,x} \partial_\tau z_{2,x} + \bar{z}_{3,x} \partial_\tau z_{3,x}) \quad (5.182)$$

$$\begin{aligned} S_{\tau,1} &\sim \int_0^\infty d\tau \sum_x (\sqrt{\rho_{1,x}} + \frac{1}{2\sqrt{\rho_{1,x}}} \delta\rho_{1,x}) e^{-i\phi_{1,x}} \partial_\tau (\sqrt{\rho_{1,x}} + \frac{1}{2\sqrt{\rho_{1,x}}} \delta\rho_{1,x}) e^{i\phi_{1,x}} \\ &\sim \sum_x \int_0^\infty d\tau \left(\frac{1}{2} \partial_\tau \delta\rho_{1,x} + \rho_{1,x} i(\partial_\tau \phi_{1,x}) + \frac{1}{2} \delta\rho_{1,x} \partial_\tau \phi_{1,x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\rho_{1,x}} \delta\rho_{1,x} \partial_\tau \delta\rho_{1,x} + \frac{1}{2} \delta\rho_{1,x} \partial_\tau \phi_{1,x} \right) \\ &= \int_0^\infty d\tau \sum_x i\delta\rho_{1,x} (\partial_\tau \phi_{1,x}) \end{aligned} \quad (5.183)$$

ここで、 $\delta\rho_{1,x}(0) = \delta\rho_{1,x}(\infty)$ 、 $\phi_{1,x}(0) = \phi_{1,x}(\infty)$ という絶対零度下における周期的境界条件を用いた。よって S_τ は

$$S_\tau \sim \int_0^\infty d\tau \sum_{k=1}^3 \sum_x i\delta\rho_{k,x} (\partial_\tau \phi_{k,x}) \quad (5.184)$$

ここで、 S_τ と A_N をまとめて、 $\delta\rho_{k,x}$ を積分実行して。

$$\begin{aligned} Z_{\delta\rho,\tau} &= \int [D\delta\rho] \exp \left(- \int_0^\infty d\tau \sum_{k=1}^3 \sum_x \left\{ i\delta\rho_{k,x} (\partial_\tau \phi_{k,x}) + \frac{V_0}{4} \delta\rho_{k,x}^2 \right\} \right) \\ &= \int [D\delta\rho] \exp \left(- \int_0^\infty d\tau \sum_{k=1}^3 \sum_x \left\{ \frac{V_0}{4} \left(\delta\rho_{k,x} - \frac{2i\partial_\tau \phi_{k,x}}{V_0} \right)^2 + \frac{1}{V_0} (\partial_\tau \phi_{k,x})^2 \right\} \right) \\ &= C \exp \left(- \int_0^\infty d\tau \sum_{x,k} \frac{1}{V_0} (\partial_\tau \phi_{k,x})^2 \right) \end{aligned} \quad (5.185)$$

ここで C は本質的でない定数で分配関数の定義上無視できる。また、その定数は分配関数 Z に物理的な影響は与えない。ここで注目すべきことは、複素数で定義されていた作用関数が Euclidean にできたことである。これは量子効果からくる粒子密度のゆらぎを有効的に取り入れた実数で定義された作用関数である。

さて、作用 A_s, A_h における項も位相場で書き換えなければならない。単純化のため位相の場を新しく以下のような場で再定義する。

$$\phi_{12,x} = \phi_{1,x} - \phi_{2,x}$$

$$\phi_{13,x} = \phi_{1,x} - \phi_{3,x}$$

$$\phi_{23,x} = \phi_{2,x} - \phi_{3,x}$$

こうして、スピン相互作用項 A_s は

$$\begin{aligned}
A_s &= -c_1 \int d\tau \sum_{x,\mu} \left\{ (\alpha \vec{S}_{x+\mu} \vec{S}_x + (1-\alpha) S_{x+\mu,3} S_{x,3}) \right\} P_x P_{x+\mu} \\
&\sim -c_1 \int d\tau \sum_{x,\mu} \left[\sum_{i,j=1}^2 J_s \left\{ \exp[i(\phi_{ij,x} - \phi_{ij,x+\mu})] \right\} - 1 \right] P_x P_{x+\mu} \\
&\quad - \int d\tau \sum_{x,\mu} J_z S_{z,x+\mu} S_{z,x} \\
&\sim -c_1 \int d\tau \sum_{x,\mu} \left[\sum_{i,j=1}^2 J_s \left\{ \exp[i(\phi_{ij,x} - \phi_{ij,x+\mu})] \right\} - 1 \right] P_x P_{x+\mu} \\
&\quad + \int d\tau \sum_{x,\mu} \left[J_z \left((\rho_{1,x+\mu} \rho_{1,x} - \rho_{1,x+\mu} \rho_{2,x} - \rho_{2,x+\mu} \rho_{1,x} + \rho_{2,x+\mu} \rho_{2,x}) \right. \right. \\
&\quad + 2(\rho_{1,x+\mu} - \rho_{2,x+\mu}) \sqrt{\rho_{1,x}} \delta \rho_{1,x} + 2(\rho_{1,x} - \rho_{2,x}) \sqrt{\rho_{1,x+\mu}} \delta \rho_{1,x+\mu} \\
&\quad \left. \left. + 2(\rho_{2,x+\mu} - \rho_{1,x+\mu}) \sqrt{\rho_{2,x}} \delta \rho_{2,x} + 2(\rho_{2,x} - \rho_{1,x}) \sqrt{\rho_{2,x+\mu}} \delta \rho_{2,x+\mu} \right) + o(\delta \rho^2) \right] \quad (5.186)
\end{aligned}$$

であり。ここで、

$$J_s = 2\alpha(\rho_0^2 + \rho_0^{\frac{2}{3}}(\delta\rho_{j,x} + \delta\rho_{j,x+\mu} + \delta\rho_{i,x+\mu} + \delta\rho_{i,x})) \quad (5.187)$$

$$J_z = c_1 P_x P_{x+\mu} \sim c_1(1-\alpha)(1-2\rho_{3,0} + \rho_{3,0}^2) \quad (5.188)$$

$$P_x P_{x+\mu} \sim 1 - 2\rho_{3,0} + \rho_{3,0}^2 \quad (5.189)$$

である。さらに ホッピング項 A_h は

$$\begin{aligned}
A_h &= \int d\tau \frac{c_3}{2} \left(\sum_{x,\mu} \bar{z}_{x+\mu} z_x \phi_{x+\mu} \bar{\phi}_x + c.c \right) \\
&= \int d\tau \sum_{x,\mu} J(\delta\rho) \left(e^{i(-\phi_{13,x+\mu} + \phi_{13,x})} + e^{i(-\phi_{23,x+\mu} + \phi_{23,x})} + c.c \right) \quad (5.190)
\end{aligned}$$

であり。ここで、

$$J(\delta\rho)_h = \left(\rho_0^2 + \rho_0^{\frac{2}{3}}(\delta\rho_{1,x+\mu} + \delta\rho_{1,x} + \delta\rho_{3,x} + \delta\rho_3) \right) (1 \Rightarrow 2) \quad (5.191)$$

$$\sim \rho_0^2 \quad (5.192)$$

となる。我々は $\delta\rho$ によらない主要な寄与を与える項を残すことで結局、2成分 Bosonic t-J モデルの第一有効作用を導出した。それはスピン z 成分項を無視したモデルであり ($\alpha = 1$)。この有効作用を Extended Quantum XY model(EQXYM) と我々は呼ぶことにする。経路積分形式は

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi_i] \exp[-H_{EXY}] \quad (5.193)$$

その有効作用の中身は

$$\begin{aligned}
H_{EXY} = & -\frac{1}{V_0} \sum_{x,\tau,i} \cos(\phi_{i,x+\tau} - \phi_{i,x}) + \sum_{x,\mu,\tau} \left[C_1 \cos(\phi_{12,x} - \phi_{12,x+\mu}) \right. \\
& - C_2 \cos(\phi_{13,x} - \phi_{13,x+\mu}) \\
& \left. - C_3 \cos(\phi_{23,x} - \phi_{23,x+\mu}) \right]
\end{aligned} \tag{5.194}$$

となる。ここで、以下の関係式を用いた

$$\begin{aligned}
(\partial_\tau \phi_{i,x})^2 &= (\partial_\tau e^{-i\phi_{i,x}})(\partial_\tau e^{-i\phi_{i,x}}) \\
&= (\nabla_\tau \cos \phi_{i,x})^2 + (\nabla_\tau \sin \phi_{i,x})^2 \\
&= -2\cos(\phi_{i,x+\tau} - \phi_{i,x}) + \text{const.}
\end{aligned} \tag{5.195}$$

さらに、 C_1, C_2, C_3 は MC シミュレーションにおけるフリーパラメータとして扱う変数であり。これらのパラメータの定義は

$$C_1 = -c_1 \alpha \sqrt{\rho_{1,x+\mu} \rho_{1,x} \rho_{2,x+\mu} \rho_{2,x}} (1 - \rho_{3,x} - \rho_{3,x+\mu} + \rho_{3,x} \rho_{3,x+\mu}) \tag{5.196}$$

$$C_2 = \frac{c_3}{2} \sqrt{\rho_{1,x+\mu} \rho_{1,x} \rho_{3,x+\mu} \rho_{3,x}} \tag{5.197}$$

$$C_3 = \frac{c_3}{2} \sqrt{\rho_{2,x+\mu} \rho_{2,x} \rho_{3,x+\mu} \rho_{3,x}} \tag{5.198}$$

である。

これらのパラメータは我々が想定する卑近濃度に依存して設定される。特に、もし平均粒子濃度が各サイト一様なら、psuedo spin の描像においては z 方向のスピン成分は各サイトすべてゼロである。

Extended Quantum XY model(EQXYM) は有用なモデルである。なぜなら、二成分粒子の量子力学的自由度である位相の秩序状態を特定することができる。

1. 2成分粒子の位相の秩序状態を特定することができる。
2. $T = 0$ における相構造を探索できる。
3. 位相場で書かれたモデルであるため Vortex など従来の一様な場を仮定した古典モデルとは異なった状態相の出現を精査できる。

B. Bosonic t-J model と slave-particle 表現

我々はまず、前章でも紹介した強い on-site 相互作用下での有効モデルである Bt-J モデルを出発点とする。BtJ モデルは同種原子間と異種原子間の on-site 相互作用 (s-波散乱、接触相互作用) が非

常に大きい場合の有効モデルである、我々はこの章の後半でそれらの相互作用に加えてさらに2成分原子それぞれがもつ双極子モーメントが生み出す相互作用を考慮する。

さて、B-tJ モデルは以下のように与えられる [5-7, 10?],

$$H_{tJ} = - \sum_{\langle i,j \rangle} t(a_i^\dagger a_j + b_i^\dagger b_j + \text{h.c.}) + J_z \sum_{\langle i,j \rangle} S_i^z S_j^z - J_{XY} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y) \quad (5.199)$$

ここで、 a_i^\dagger and b_i^\dagger は2成分原子 a-boson、b-boson の生成消滅演算子 [?] で格子サイト i に定義される。擬スピン演算子は $\vec{S}_i = \frac{1}{2} B_i^\dagger \vec{\sigma} B_i$ として、2成分原子 $B_i = (a_i, b_i)^t$ をもちいて表示される(ここで、 $\vec{\sigma}$ は Pauli パウリ行列である)、また、 $\langle i, j \rangle$ は再隣接 (NN) サイトのペアを示す。

この B-tJ モデルの第1項 t -term は原子の NN サイト間の hopping(つまりはトンネル効果)を表し、第2項 J_z -term は NN サイト間の粒子の相互作用を表す。第3項 J_{XY} -term は a and b -boson 場の位相差が揃う効果を示す擬スピン XY 相互作用項である。

特に、 J_z -term は同種原子間の on-site 相互作用が斥力で異種原子間のそれが引力のときそのカップリングが $J_z > 0$ となる。

さて、本研究において興味があるのは原子の持つ運動エネルギーより s 波散乱の粒子間相互作用が大きい場合であり、そのような状況下を考えると光格子の各サイトにトラップすることができる粒子数には制限がかかる、特に、B-tJ モデルにおいて各サイトに a-boson、b-boson それぞれの粒子数が1個以下の状況を考え、それを各サイトの Hilbert 空間に対する制限とする、これは a-boson、b-boson のハードコア極限を考えているに等しく、それは fermion の相関効果と同様の制限を Hilbert 空間に与えるに等しい。

各サイトに対して粒子数のローカルな制限を取り入れるために、我々は slave-particle 描像を用いる [6, 7].

$$a_i = \phi_i^\dagger \varphi_{i1}, \quad b_i = \phi_i^\dagger \varphi_{i2}, \quad (5.200)$$

$$\left(\phi_i^\dagger \phi_i + \varphi_{i1}^\dagger \varphi_{i1} + \varphi_{i2}^\dagger \varphi_{i2} - 1 \right) |\text{phys}\rangle = 0, \quad (5.201)$$

ここで ϕ_i はホールを消す boson 演算子、一方、 φ_{1i} と φ_{2i} は a-boson、b-boson の生成消滅演算子の自由度である。|phys> は slave-particle Hilbert 空間の物理状態である。

C. dipole-dipole 相互作用より生成される擬スピン相互作用

さて、この節では、前節で説明した B-tJ モデルに原子自身が持つ双極子モーメントが引き起こす DDI の影響を組み込む [1].

我々はまず、 a -boson が光格子平面に対して垂直な上向き双極子を持ち、 b -boson が光格子平面に対して垂直な下向き双極子を持つ場合を考える。

このような配置は、磁気的な双極子モーメントを考えた場合、実際にレーザーとの相互作用を引き起こして、光格子トラップに適合する。Fig.13 をみよ。

さて、DDI は一般的には以下のように与えられる、

$$\hat{H}_d = d \frac{\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 - 3(\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{S}}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{4\pi r^3}, \quad (5.202)$$

ここで、 $d = \mu_0(g\mu_B)$, $\hat{\mathbf{S}}_j$ ($j = 1, 2$) は j 番目の原子の双極子モーメントベクトルである。 $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ は原子間の相対座標である。

今考えている原子の双極子モーメントの向きは、 $\hat{\mathbf{S}}_1 // \hat{\mathbf{S}}_2$ かつ $\hat{\mathbf{S}}_1, \hat{\mathbf{S}}_2 \perp \mathbf{r}$ である。故に、Eq.(5.202) の右辺第 1 項のみが寄与を持つ。

さて、Fig.13 において、実験的に実現可能な双極子モーメントのセットアップ手法を示す、

1. はじめに、上向き双極子を持つ a -boson をトラップするハーモニック磁気トラップの系と下向き双極子を持つ b -boson をトラップするハーモニック磁気トラップの系を準備する。
2. それぞれのトラップに対して光格子を入れる。
3. 最後に、それら 2 つの光格子を温度を下げつつ準静的に重ね合わせる。

原子間の強い斥力と有限のホッピング効果の結果として、光格子上の各サイトの全粒子数は 1 以下になる。さらに、角運動量保存則により、双極子の向きはたとえホッピングプロセスを経ても変わらない。

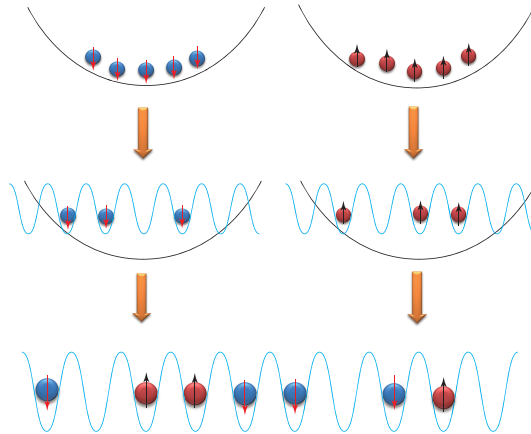


FIG. 13: (Color online) 2 成分双極子原子の光格子上の実験におけるセットアップ。DDI は長距離相互作用を 2 成分原子間に引き起こす。

DDI の長距離特性を通して、今回の研究では NN サイト間と次再隣接 (NNN) サイト間での DDI カップリングを考慮する.

今考えている双極子モーメントの方向から、その DDI は異種原子間には引力として、同種原子間では斥力として働く. そのとき、Eq.(5.202) における \hat{H}_d は以下の第二量子化された相互作用項をつくりだす、

$$\begin{aligned} V_{\text{DDI}} &= \sum_{\langle i,j \rangle} V_{\text{NN}}(n_{ai}n_{aj} + n_{bi}n_{bj} - n_{bi}n_{bj}) \\ &\quad + \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} V_{\text{NNN}}(n_{ai}n_{aj} + n_{bi}n_{bj} - n_{bi}n_{bj}) \\ &= \sum_{\langle i,j \rangle} V_{\text{NN}}S_i^z S_j^z + \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} V_{\text{NNN}}S_i^z S_j^z, \end{aligned} \quad (5.203)$$

ここで、粒子数演算子 $n_{ai} = a_i^\dagger a_i$ であり、擬スピン表示 $S_i^z = \frac{1}{2}(n_{ai} - n_{bi})$ であり、さらに $\langle\langle i,j \rangle\rangle$ は NNN サイトペアを表す. パラメーター V_{NN} と V_{NNN} は光格子のサイトに局在する最低レベルの Wannier 波動関数のオーバーラップ積分で計算される.

さて、この V_{DDI} 項は B-tJ モデルに付け加えられる. これ以降、我々が考えるモデルは $H_{\mathcal{T}} \equiv H_{\text{tJ}} + V_{\text{DDI}}$ である.

D. Gutzwiller 変分法

平均場理論 (Mean Field Theory (MFT)) は物性系の平衡状態における相構造を調べるためによく使われる解析的手法である. この節では Gutzwiller 変分法 [11] を用いる. これは、MFT の一種である. この手法で絶対零度 ($T = 0$) の場合の相構造をもとめていく. 様々な先行研究より [4]、我々は checkerboard-solid 相 (CBSo) と stripe-solid 相 (SSo) があるパラメータ領域で存在していると予想する.

これら二つの秩序は固体的なものであり空間的に原子の密度パターンに現れる. この固体的秩序は B-tJ モデルにおける擬スピン描像で言えば S_i^z で表現される長距離秩序である ($S_i^z = \frac{1}{2}(n_{ai} - n_{bi})$).

今考えているモデルにおいて、同種粒子下における強い斥力を考えているので各サイトの波動関数の基底状態は粒子数表示で考えるとたった 3 つに制限ができる: $|a\rangle$ (single a -boson), $|b\rangle$ (single b -boson), $|0\rangle$ (empty=hole).

これら 3 つの基底状態を用いて、SF(2SF)-CB 状態間をつなげる変分波動関数を構成する、

$$\begin{aligned}
& |\Phi_{2\text{SF-CB}}\rangle \\
&= \prod_{i \in A} \left[\sin \frac{\theta_i}{2} \left(\sin \frac{\chi_i}{2} a_i^\dagger + \cos \frac{\chi_i}{2} b_i^\dagger \right) + \cos \frac{\theta_i}{2} \right] |0\rangle \\
&\times \prod_{i \in B} \left[\sin \frac{\theta_i}{2} \left(\cos \frac{\chi_i}{2} a_i^\dagger + \sin \frac{\chi_i}{2} b_i^\dagger \right) + \cos \frac{\theta_i}{2} \right] |0\rangle,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

ここで、ラベル A(B) は even(odd) サイトの副格子を示す、 (θ_i, χ_i) は変分パラメータである。MFT の想定下では、サイト変数 θ_i や χ_i は各副格子系で均一であると近似するつまり、 (θ_A, θ_B) として (χ_A, χ_B) 自由度を一気に少なくする。この波動関数 (5.1) は各副格子上での離散並進対称性を持っていることに注意しておく。

もう一つの可能な固体的秩序は SSo 相ある。変分波動関数は SSo 相と SF 相を記述するものとして与えられる、

$$\begin{aligned}
& |\Phi_{2\text{SF-SSo}}\rangle = \\
& \prod_{i \in x_o} \left[\sin \frac{\theta_i}{2} \left(\sin \frac{\chi_i}{2} a_i^\dagger + \cos \frac{\chi_i}{2} b_i^\dagger \right) + \cos \frac{\theta_i}{2} \right] |0\rangle \\
& \times \prod_{i \in x_e} \left[\sin \frac{\theta_i}{2} \left(\cos \frac{\chi_i}{2} a_i^\dagger + \sin \frac{\chi_i}{2} b_i^\dagger \right) + \cos \frac{\theta_i}{2} \right] |0\rangle,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで、サイトラベル $x_o(x_e)$ は odd(even) ラインの副格子を示し、それはストライプパターンと一致する。この波動関数も各副格子上での離散並進対称性を持っていることに注意しておく。

2 つの変分波動関数 Eqs.(5.1) と (5.2) から、ハミルトニアン $H_\mu \equiv H_T - \mu \sum (a_i^\dagger a_i + b_i^\dagger b_i)$ (ここで μ は化学ポテンシャルであり) の期待値を計算することで系のエネルギー期待値を求めることができる、

$$\begin{aligned}
\frac{E_{\text{CS}}}{J_{\text{XY}}N} &\equiv \langle \Phi_{2\text{SF-CB}} | H_\mu | \Phi_{2\text{SF-CB}} \rangle / (J_{\text{XY}}N) \\
&= -\tilde{t} \sin^2 \theta \sin \chi + 2(-\tilde{J}_{z\text{NN}} + \tilde{J}_{z\text{NNN}}) \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \chi \\
&\quad - \frac{1}{8} \sin^4 \theta \sin^2 \chi - \mu \sin^2 \frac{\theta}{2},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{E_{\text{SS}}}{J_{\text{XY}}N} &\equiv \langle \Phi_{2\text{SF-SSo}} | H_\mu | \Phi_{2\text{SF-SSo}} \rangle / (J_{\text{XY}}N) \\
&= -\frac{1}{2} \tilde{t} \sin^2 \theta (1 + \sin \chi) - 2\tilde{J}_{z\text{NNN}} \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \chi \\
&\quad - \frac{1}{8} \sin^4 \theta \sin^2 \chi - \mu \sin^2 \frac{\theta}{2}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

さて、上の二つの変分波動関数から求めた変分エネルギーは $J_{\text{XY}}N$ で規格化して表現すると、 $\tilde{t} \equiv$

t/J_{XY} , $\tilde{J}_{zNN} \equiv J_{zNN}/J_{XY}$ かつ $\tilde{J}_{zNNN} \equiv J_{zNNN}/J_{XY}$ であり、ここで $J_{zNN} \equiv J_z + V_{NN}$ と $J_{zNNN} \equiv V_{NNN}$ である.

また、Eq.(5.3) と (5.4) を使うことによってパラメータ θ と χ によって与えられる最低エネルギー状態を求めることができる. こうして系の相構造が得られる. このような手法により得られた相構造を Fig.14 の上図に示す、ここで $v_2 = J_{zNNN}/J_{zNN}$ である. Fig.14 の下図は μ - \tilde{J}_{zNN} 平面での相構造である. MFT レベルにおいて、超固体 (SS) 相は存在せず直接的に CBSo 相と SSo 相という固体相がホール濃度 0% 下で存在する. 一方、2 成分超流動 (2SF) 相は有限のホール濃度をもち、特にその最大濃度は 30% である. このようにして得られた相構造は 1 成分 Bose-Hubbard モデル [?]、あるいは 2 成分 Bose-Hubbard モデル [8] に対しておこなわれた MFT の結果とよく一致する、それらの研究ではやはり SS 相は MFT のレベルでは存在せずダイレクトに超流動相から固体相に相転移するという結論が得られている.

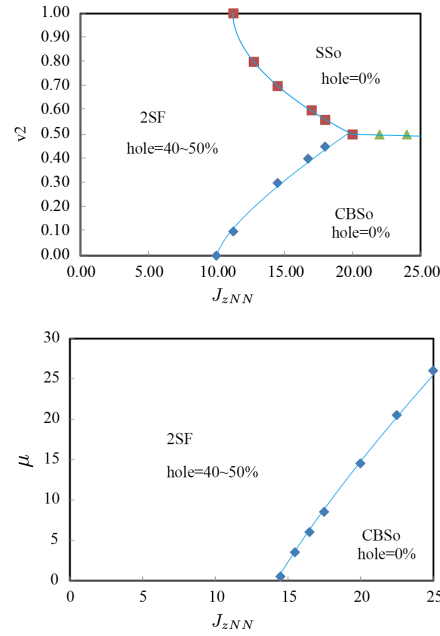


FIG. 14: (Color online) $T = 0$ での MFT による相構造、上図は $\mu = 0$ の $(\tilde{J}_{zNN} - v_2)$ 平面. 一方、下図は $(\mu - \tilde{J}_{zNN})$ 平面の相構造で $v_2 \equiv J_{zNNN}/J_{zNN} = 0.3$ のラインでみている. MFT レベルでの相構造では超固体 (SS) 相は存在しない.

E. Quantum Monte-Carlo simulation

この節では主に量子ゆらぎを取り込んだ経路積分モンテカルロ (MC) 法によって系の相構造を精査したい、その目的のため我々は DDI を含んだ BtJ モデルの有効作用を導出する.

系の多くのパラメータ領域において原子の密度ゆらぎは現象論的にも大きく揺らいでいるということはほとんどない、そのような実験的な事実から、我々は有効的に以下の項が出現すると予想する、

$$H_V = \frac{V_0}{4} \sum_i \left((\varphi_{1i}^\dagger \varphi_{1i} - \rho_{1i})^2 + (\varphi_{2i}^\dagger \varphi_{2i} - \rho_{2i})^2 + (\phi_i^\dagger \phi_i - \rho_{3i})^2 \right), \quad (5.1)$$

ここで、 ρ_{1i} はサイト i での a -boson と b -boson の粒子密度をコントロールするパラメータである、そして $V_0 (> 0)$ はそれら粒子密度の平均値からの揺らぎをコントロールするパラメータである。

さて、 V_0 と $\rho_{\sigma i} (\sigma = 1, 2, 3)$ は原理上、カップリング t , J_z , J_{XY} かつ filling factor から決定されるべきものである、しかし、ここで現象論的に H_V to H_{tJ} を加え、そして、 H_V 中のカップリング V_0 をフリーパラメータとみなす。一方、 $\rho_{\sigma i} (\sigma = 1, 2, 3)$ は H_{tJ} によって決定される。

さて、経路積分表式によって系の分配関数 Z は虚時間 τ を用いて以下のように表現される、

$$Z = \int [D\phi D\varphi_1 D\varphi_2] \exp \left[- \int d\tau \left(\bar{\varphi}_{1i}(\tau) \partial_\tau \varphi_{1i}(\tau) + \bar{\varphi}_{2i}(\tau) \partial_\tau \varphi_{2i}(\tau) + \bar{\phi}_i(\tau) \partial_\tau \phi_i(\tau) + H_{tJ} + H_V \right) \right], \quad (5.2)$$

ここで、 H_{tJ} と H_V は slave 粒子表示で表される。

さて、 H_V の存在から、経路積分上の変数 φ と ϕ について以下のように分割する、

$$\begin{aligned} \varphi_{1i} &= \sqrt{\rho_{1i} + l_{1i}} \exp(i\omega_{1i}), \\ \varphi_{2i} &= \sqrt{\rho_{2i} + l_{2i}} \exp(i\omega_{2i}), \\ \phi_i &= \sqrt{\rho_{3i} + l_{3i}} \exp(i\omega_{3i}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

そして、振幅の揺らぎの自由度について積分を実行する。さて、ここで $l_{1i} + l_{2i} + l_{3i} = 0$ の制限が存在するが、これはラグランジアルチプライヤー $\lambda_i(\tau)$ を導入することで経路積分内に入れることができる、

$$\prod_\tau \delta(l_{1i} + l_{2i} + l_{3i}) = \int d\lambda_i e^{i \int d\tau (l_{1i} + l_{2i} + l_{3i}) \lambda_i}.$$

ここで我々は $\sqrt{\rho_{\sigma i}} \exp(i\omega_{\sigma i})$ に注目すると、振幅ゆらぎの積分後は以下のようにまとまる、

$$\begin{aligned} & \int d\lambda_i d l_i e^{i \int d\tau \sum_{\sigma=1}^3 (-V_0 (l_{\sigma,i})^2 + i l_{\sigma,i} (\partial_\tau \omega_{\sigma,i} + \lambda_i))} \\ &= \int d\lambda_i e^{-\frac{1}{4V_0} \int d\tau \sum_{\sigma} (\partial_\tau \omega_{\sigma,i} + \lambda_i)^2}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで、 $\int d\tau \partial_\tau \omega_{\sigma,i}$ のような項は場の虚時間方向の周期的境界条件より無視できる。ここで重要なことは振幅の揺らぎを実行したことで虚数である Berr 位相項が除去され作用が実数になる事実である。これによって我々は MC 法を実行できる。

分配関数 $Z(\text{Eq.}(5.4))$ は各サイト上の boson 密度 $\rho_{\sigma i}$ に依存する. 有限の J_z に対して、MC 法を実行する際において、以後 a-boson と b-boson の各サイトでの密度差 $\Delta\rho_i \equiv \rho_{1i} - \rho_{2i}$ を変分変数として扱う、この取り扱いは各サイトで粒子濃度が 1 であるという制限と、かつ、相分離の可能性が除外されるという先行研究によって保障されている [13].

今から具体的に DDI 項を含んだ B-tJ モデル H_T を MC 法に載せる説明をし、具体的な測定物理量を紹介する. 特に、我々が興味があるのは超固体相など新奇な量子相が出現するかどうかを、全体の相構造を明らかにすることによって調べることがしたい. 前節の MFT の解析結果から 2 種類の固体的秩序の存在は確認したが、それらの固体的秩序と超流動性が共存するような状態相が出現するのを見たい.

以降、実際の数値計算では光格子の格子間隔 a_L は単位化されているものとして扱う. また経路積分表示において虚時間 τ 方向は連続的理論であるが、現実の数値計算では虚時間方向の次元においても格子化を実行する. その格子間隔は $\Delta\tau$ とおく. そのとき、我々は空間 2 次元と時間 1 次元の 3 次元格子のうえにモデルを定義している、以降、3 次元格子のサイトを i, j と表記する.

以前の B-tJ モデルの先行研究 H_{tJ} [13] ではホールは一様に分布する傾向があることが示されている、それより我々はホール濃度を各サイト 30%、つまり、 $\rho_{3,i} = \rho_3 = 0.3$ と設定する. 一方、a-boson 間の密度差 $\Delta\rho_i = \rho_{1i} - \rho_{2i}$ は変分パラメータとしてと考え、それらは MC アップデートによって各サイトの最適値が決定される. これについては以後説明する.

さて、DDI を含んだ B-tJ モデル H_T の分配関数は以下のように与えられる [9, 13]

$$\begin{aligned} Z_{\text{qXYZ}} &\equiv \int \Pi_{\alpha=1,2,3} [d\omega_{\alpha,i}] [d\lambda_i] e^{A_{\text{qXYZ}}}, \\ A_{\text{qXYZ}} &= A_\tau + A_L(e^{i\Omega_\sigma}, e^{-i\Omega_\sigma}) + A_{\text{zNN}}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

ここで、

$$A_\tau = -c_\tau \sum_i \sum_{\sigma=1}^3 \cos(\omega_{\sigma,i+\hat{\tau}} - \omega_{\sigma,i} + \lambda_i), \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} A_L &= \sum_{\langle i,j \rangle} (C_1 \cos(\Omega_{1,i} - \Omega_{1,j}) + C_2 \cos(\Omega_{2,i} - \Omega_{3,j}) \\ &\quad + C_3 \cos(\Omega_{2,i} - \Omega_{3,j})), \end{aligned} \quad (5.7)$$

であり. さらに、

$$\begin{aligned} A_{\text{zNN}} &= -J_{\text{zNN}} \sum_{\langle i,j \rangle} \Delta\rho_i \Delta\rho_j \\ &\quad - J_{\text{zNNN}} \sum_{\langle\langle i,l \rangle\rangle} \Delta\rho_i \Delta\rho_l, \end{aligned} \quad (5.8)$$

である. ここで、 $\langle \dots \rangle$ は空間 2 次元平面上 NN サイトのペアを表し、 $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ は同平面の NNN サイトペアを示す. ダイナミカルな変数 $\Omega_{\alpha,i}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) は、

$$\Omega_{1,i} = \omega_{1,i} - \omega_{2,i},$$

$$\Omega_{2,i} = \omega_{1,i} - \omega_{3,i},$$

$$\Omega_{3,i} = \omega_{1,i} - \omega_{3,i}.$$

となる. さらに、この作用の各係数は変分パラメータ $\Delta\rho_i$ に依存した形で以下のように与えられる、

$$\begin{aligned} c_\tau &= \frac{1}{V_0 \Delta\tau}, \\ C_1 &= J_{XY} \rho_3 \Delta\tau \sqrt{((1 - \rho_3)^2 - (\Delta\rho_i)^2)((1 - \rho_3)^2 - (\Delta\rho_j)^2)}, \\ C_2 &= t \rho_3 \Delta\tau \sqrt{(1 - \rho_3 + \Delta\rho_i)(1 - \rho_3 + \Delta\rho_j)}, \\ C_2 &= t \rho_3 \Delta\tau \sqrt{(1 - \rho_3 - \Delta\rho_i)(1 - \rho_3 - \Delta\rho_j)}. \end{aligned}$$

ここで、 $1/(k_B T) = L \cdot \Delta\tau$ の関係があることに注意する、 L は系の 1 辺の格子サイズであり、 $\Delta\tau$ は $1/(\text{energy})$ の次元を持ち、低エネルギー領域で $L \rightarrow \infty$ となる. 以後の数値計算では、 $c_\tau = 2$ とおく、ゆえに $k_B T = (c_\tau V_0)/L = 2V_0/L$ である.

さて、今から変分パラメータ $\Delta\rho_i$ の最適値決定のプロセスを含んだ拡張 MC 法を説明する.

分配関数 Z_{qXY} (Eq.(5.5)) は $\Delta\rho_i$ の汎関数であり、つまり、 $Z_{qXY} = Z_{qXY}(\{\Delta\rho_i\})$ である. 我々は変分パラメータ $\Delta\rho_i$ はエネルギー最小の条件から決定されるものと予想する. 実際の MC 計算では、 $\Delta\rho_i$ もローカルアップデートし

$$[Z_{qXY}] \equiv \int [d\Delta\rho_i] Z_{qXY}(\{\Delta\rho_i\}). \quad (5.9)$$

を得る、しかしここで $\{\Delta\rho_i\}$ のアップデートは作用 A_{qXYZ} のパラメータの値に対してかなり安定的であることが経験的にわかっている.

さて、このようなスキームでこの系の MC 計算を実行する、我々は、今回の数値計算では ground-canonical アンサンブルを適応する. つまり、各 MC アップデートで a-boson, b-boson の粒子数は保存されない状況である.

MC 計算ではスタンダードなメトロポリスローカルアップデート法を用いる [17]. 典型的なスイープ数は $(50000-100000) \times (10 \text{ samples})$ とし受け入れ率は 40-50 % である.

通常の MC 計算と同様に、系の内部エネルギー E 、比熱 C を以下に定義される形で求める、

$$\begin{aligned} E &= \langle (A_L + A_z) \rangle / L^3, \\ C &= \langle ((A_L + A_z) - E)^2 \rangle / L^3. \end{aligned} \quad (5.10)$$

また、系の様々な状態相を判定するため、擬スピン相関、boson 相関、更には、a-boson と b-boson の粒子密度差の相関を計算する。

$$\begin{aligned}
 G_S(r) &= \frac{1}{L^3} \sum_{i_0} \langle e^{i\Omega_{1,i_0}} e^{-i\Omega_{1,i_0+r}} \rangle, \\
 G_a(r) &= \frac{1}{L^3} \sum_{i_0} \langle e^{i\Omega_{2,i_0}} e^{-i\Omega_{2,i_0+r}} \rangle, \\
 G_b(r) &= \frac{1}{L^3} \sum_{i_0} \langle e^{i\Omega_{3,i_0}} e^{-i\Omega_{3,i_0+r}} \rangle, \\
 G_{dd}(r) &= \frac{1}{L^3} \sum_{i_0} \langle \Delta\rho_{i_0} \Delta\rho_{i_0+r} \rangle,
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

ここで、サイト i_0 と $i_0 + r$ は同じ空間 2 次元平面上をとる。

さらに、相転移があったときその転移次数を調べるものとして、以下のエネルギー状態数 $N(E)$ を定義する、

$$[Z_{qXYZ}] = \int dE N(E) e^{-E}. \tag{5.12}$$

もし、 $N(E)$ の分布がシングルピークを持てばそれは二つの状態相がエネルギー的に連続につながっていることを示し二次転移であると考えられる。一方、 $N(E)$ がダブルピークを持つときは二つの状態相がエネルギー的には分離しており、それは一次転移であると考えられる。

さて、Fig.32 が MC 計算による相構造の結果である。ここで各パラメータは、 $c_\tau = 2.0$, $C_1 = 2$, かつ $t = 20$ とした。さらに、状態数 $N(E)$ を計算してやることで各相境界での相転移次数を決めた。それらは Fig.32 に示されている。

典型的な比熱 C と内部エネルギー C の振る舞いを Fig.16 に示す。また、典型的な臨界点上での状態数 $N(E)$ を Fig.17 に示す。

さらには、先ほど定義した各種相関関数を Fig.18 に示す、これら相関関数から状態相は決定された。

Fig.32 の相図が示しているように、この系の相構造は 5 つの状態相をもつ。2SF 相、チェッカーボード超固体相 (CBSS)、ストライプ超固体相 (SSS)、CBS₀ 相と SS₀ 相である。特に、2 種類超固体相が超流動相と固体相の間に形成される。各相の相関関数を Fig.18 に示す。

さて、MFT でもとめた相構造と比べて MC 法で求めた Fig.14 の相構造では超固体相が広い領域で出現することが明らかになった。これは、量子揺らぎというものが超流動状態と固体状態の共存に本質的な重要な役割を果たしていると考えられる。また、SSS 相の領域のほうが CBSS 相の領域より広いことは興味深い事実である。1 次元的なストライプ固体構造の方が超流動状態とより共存できると考えることができる。

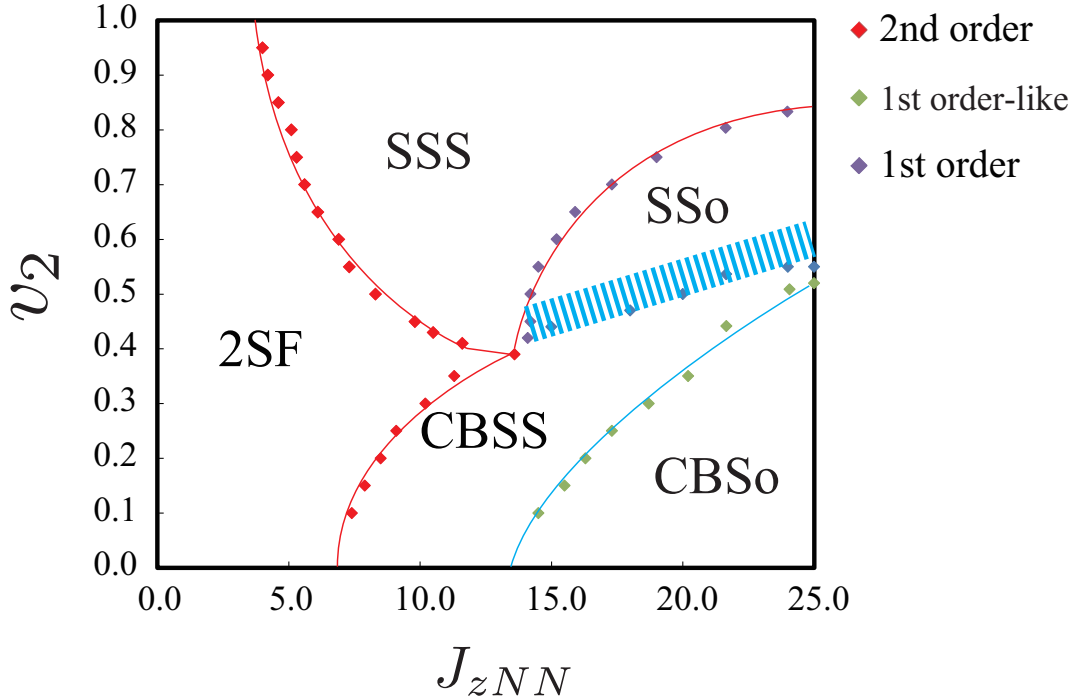


FIG. 15: (Color online) MC 法によって得られた $T = 0$ 相構造、この相構造は量子ゆらぎを含むと考えられる。ここで、我々はホール濃度一様 $\rho_3 = 0.3$ な場合を考えた、さらに $c_\tau = 2.0$, $C_1 = 2$ かつ $t = 20$ とした。縦軸は $\nu_2 = J_{zNNN}/J_{zNN}$ とした。この相構造には 2 つの SS 相、つまり CBSS 相と SSS 相が出現する。青色の罫線は CBSS 相と SSo 相の共存領域である。

さらに相構造 Fig.32 が示す興味深いことは、CBSO 相と SSo 相において直接的な転移が起きないことである。例えば文献 [15] においても 1 粒子 Bose-Hubbard モデルたいして似たような相構造が報告されている。その文献では CBSO 相と SSo 相は SF 相によって隔てられている。一方、我々の系の相構造では CBSO 相と SSo 相の間に CBSS 相が出現している。さらに、CBSO 相と SSo 相の相境界近傍では何らか興味深い状態相が出現している。それは、相構造 Fig.32 内の青色の罫線部分である。この境界近傍での比熱 C の振る舞いを Fig.19 に示す。 $\nu_2 = \frac{J_{zNN}}{J_{zNNN}} \simeq 0.47$ で一次転移が存在しており一様な CBSO 相はその転移点で消滅する。さらに ν_2 の値を大きくしていくと、いくつかのピークが比熱に出現し、それは $\nu_2 \simeq 0.54$ あたりまで続く。

この領域での a-boson と b-boson の粒子密度差のスナップショットを Fig.19 に示す。CBSO 相と SSo 相が小さい領域で共存しているのがわかる、これらは明らかに相分離状態を示している。Fig.19 の三つのスナップショットに示されているようにいくつかの準安定的な共存固体状態が存在する。

また、2次元 J_1 - J_2 Heisenberg モデルにおいても似たような状況が存在していることが知られて

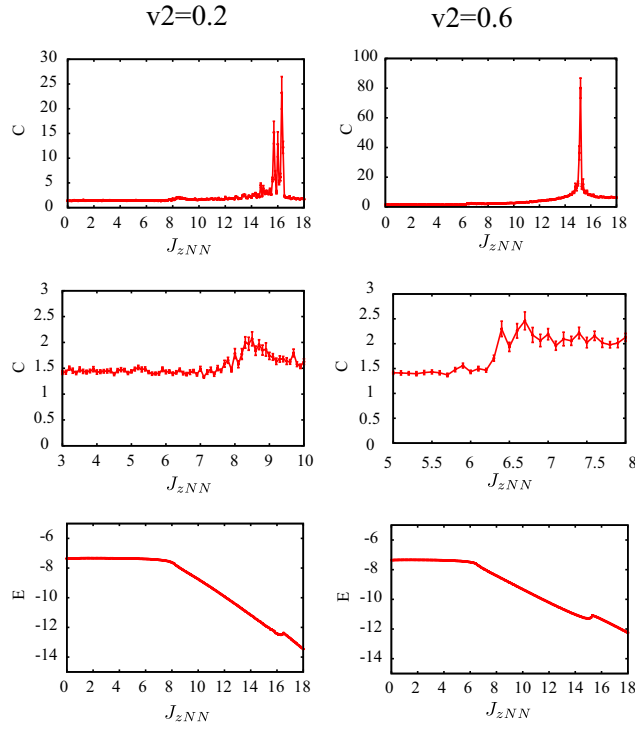


FIG. 16: (Color online) $\nu_2 = 0.2, 0.6$ に対する比熱 C と内部エネルギー E . 両方の場合で2つの相転移が存在するシステムサイズは $L = 16$

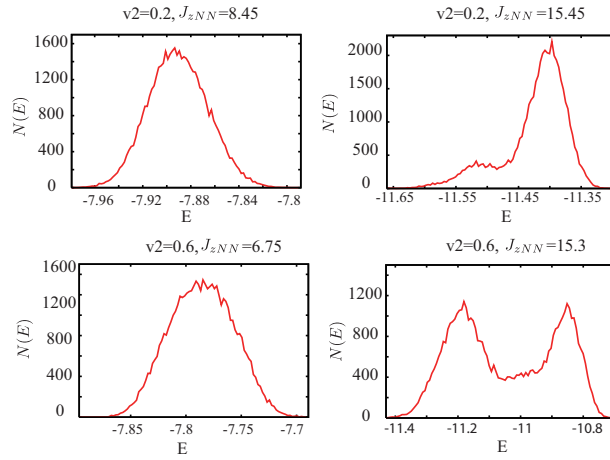


FIG. 17: (Color online) 相転移次数を決定するための状態数 $N(E)$. $N(E)$ のシングルピークは2次相転移を示し、ダブルピークは1次相転移を示す.

いる、それは Néel 相とストライプ反強磁性相の間にスピン液体相が存在するという報告がある [16]. Eq.(5.203) に示される DDI は J_1 - J_2 Heisenberg モデルと似たような長距離相互作用を持っているが我々の系では空間的に安定な構造物が出現しており、それは量子液体的な相ではないということは言える. このような相違は V_{DDI} が Ising 的なスピン相互作用であることに起因すると考えられる.

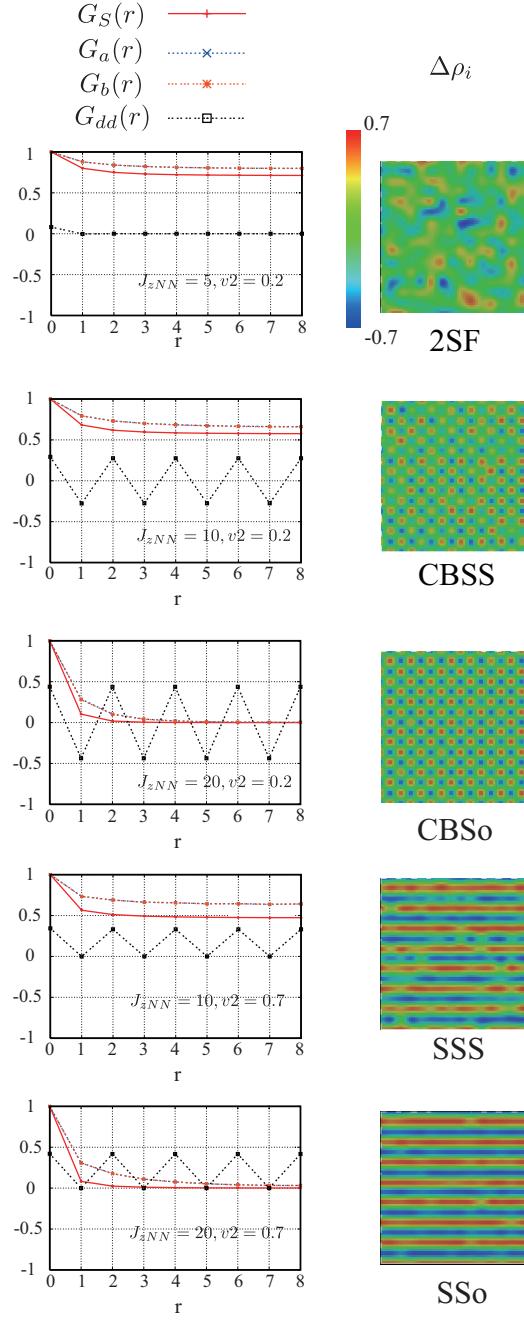


FIG. 18: (Color online) 各種相関関数と原子密度差 $\Delta\rho_i \equiv n_{a,i} - n_{b,i}$ のスナップショット

F. 超固体相における人工磁場の効果

近年、光格子上 Boson 原子系において人工磁場を生成することが可能である、このことは前章で説明した。系を回転させたり、Raman レーザーを照射することで人工磁場をつくることができる。

さて、我々は現在の系において、超固体相に磁場を印加していったときその安定性はどうかについて MC 法により計算をおこなった。この安定性は固体秩序の種類によって違うことが予想さ

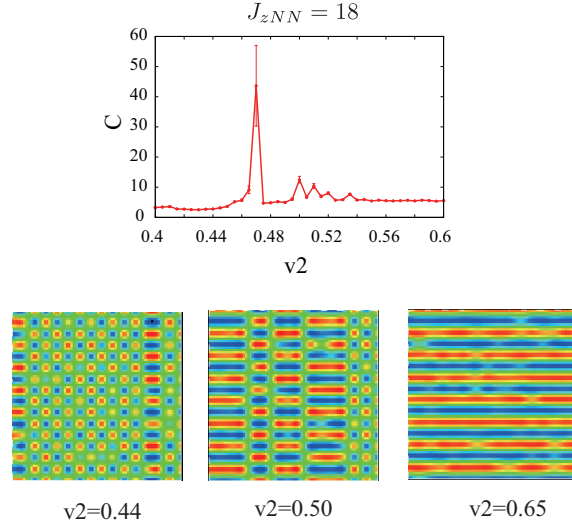


FIG. 19: (Color online) $J_{zNN} = 18$ に対して ν_2 を動かしたときの比熱 $\nu_2 \simeq 0.47$ で大きなピークがみられる、それは1次相転移である。さらに、 $\nu_2 = 0.48$ から 0.54 までの間にいくつものピークが存在する。スナップショットは $\nu_2 = 0.50$ の場合の様子である、この領域ではCBSS相とSSo相が分離して出現する(相分離相)。

れる。

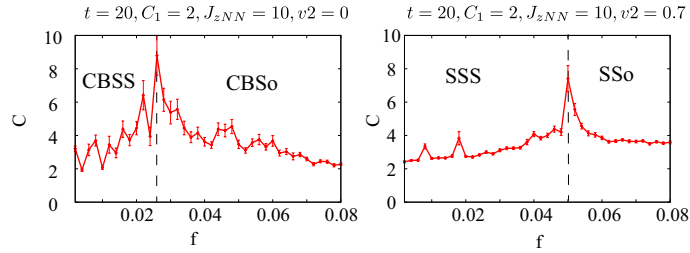


FIG. 20: (Color online) 1 プラケットあたりの磁束量子の本数 f の変化に伴う、比熱 C の振る舞い。 f の値が大きくなるにつれ超流動秩序は次第にきえる。一方、固体秩序は磁場に対して安定的に存在する。

1 プラケットあたりの磁束量子の本数 f の変化に伴う、比熱 C の振る舞いについて、Fig.20 に計算結果を示す。CBSS 相に対して磁場を印加したとき SF 秩序は $f \simeq 0.025$ あたりで消える。SSS 相に対しては $f \simeq 0.055$ で SF 秩序は消える。この結果より SSS 相のほうが CBSS 相より安定的な相であることがわかる。このことは全体の相構造 Fig.32 から推測できる。

[1] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein and T. Pfau, Rep. Prog. Phys. **72**, 126401 (2009).

- [2] A. de Paz, A. Sharama, A. Chotia, E. Maréchal, J.H. Huckans, P. Pedri, L. Santos, O. Gorceix, L. Vernac, and B. Laburthe-Tolra, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 185305 (2013); B. Yan, S.A. Moses, B. Gadway, J.P. Covey, K.R.A. Hazzard, A.M. Rey, D.S. Jin, and J. Ye, *Nature (London)* **501**, 521 (2013).
- [3] M P. A. Fisher, P B. Weichman, G. Grinstein, and D S. Fisher, *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989).
- [4] K. Góral, L.Santos, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 170406 (2002); V. W. Scarola and S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 033003 (2005); C. Menotti, C. Trefzger, and M. Lewenstein, *Phys.Rev. Lett.* **98**, 235301 (2007); K.-K. Ng and Y.-C. Chen, *Phys.Rev. B.* **77**, 052506 (2008); I. Danshita and C.A.R. Sa de Melo, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 225301 (2009); B. Capogrosso-Sansone, C. Trefzger, M. Lewenstein, P. Zoller, and G. Pupillo, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 125301 (2010); K.-K. Ng, *Phys.Rev. B.* **82**, 184505 (2010); H. Ozawa and I. Ichinose, *Phys.Rev. A.* **86**, 015601 (2012).
- [5] M. Boninsegni, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 087201 (2001); *Phys. Rev. B* **65**, 134403 (2002).
- [6] Y. Nakano, T. Ishima, N. Kobayashi, K. Sakakibara, I. Ichinose, and T. Matsui, *Phys. Rev. B* **83**, 235116 (2011).
- [7] Y. Nakano, T. Ishima, N. Kobayashi, T. Yamamoto, I. Ichinose, and T. Matsui, *Phys. Rev. A* **85**, 023617(2012).
- [8] E. Altman, W. Hofstetter, E. Demler, and M. D. Lukin, *New J. Phys.* **5**, 113 (2003).
- [9] Y. Kuno, K. Kataoka and I. Ichinose, *Phys. Rev.* **B**, 014518(2013).
- [10] A. B. Kuklov and B. V. Svistunov, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 100401 (2003); L. M. Duan, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 090402 (2003).
- [11] D. S. Rokhsar and B. G. Kotliar, *Phys. Rev. B.* **44**, 10328 (1991).
- [12] K. Kataoka, Y. Kuno, and I. Ichinose, *J. Phys. Soc. Jpn.* **81** 124502 (2012).
- [13] Y. Kuno, K. Suzuki and I. Ichinose, *J. Phys. Soc. Jpn.* **83**, 074501 (2014).
- [14] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. M. Teller, and E. Teller, *J. Chem. Phys.***21**, 1087(1953); J. M. Thijssen, “*Computational Physics*”, (Cambridge University Press, 1999).
- [15] F. Hebert, G. G. Batrouni, R. T. Scalettar, G. Schmid, M. Troyer, and A. Dorneich, *Phys. Rev. B.* **65**, 014513 (2001).
- [16] H.-C. Jaing, H. Yao, and L.Balents, *Phys. Rev. B.* **86**, 024424 (2012).

VI. ATOMIC QUANTUM SIMULATION FOR U(1) LATTICE GAUGE-HIGGS MODEL

この章では光格子上極低温原子系を用いた格子ゲージ理論の量子シミュレーションについて、特に、著者が携わった共同研究者方々との研究プロジェクトについて記述する。なお、この章の内容については、

Real-time dynamics and proposal for feasible experiments of lattice gauge-Higgs model simulated by cold atoms,

Yoshihito Kuno, Kenichi Kasamatsu, Yoshiro Takahashi, Ikuo Ichinose and Tetsuo Matsui, New J. Phys. 17 063005 (2015).

に論文として掲載された内容である。

近年、光格子上の極低温原子系はその制御性の高さから、理想的な格子モデルシミュレータとして注目を集め始めている。これまで理論的研究の範囲内であった多くの *toy* モデルを現実の実験系に原子モデルで mimic して構築し、その諸性質を解明していこうとする研究を、ヨーロッパの研究グループ等が取り組み始めている [1].

実験的検証が非常に困難なモデル、つまりゲージ理論の範疇に存在すスタンダードモデルを頂点とする一連のゲージ理論モデルの物理的性質は未だに未開な部分が多い [2]. たとえば、ゲージ理論の中でとりわけ研究の対象になっているのは摂動展開では取り扱いができない諸問題、閉じ込め問題や物質場を高密度に含んだ QCD の詳細な相構造 [3] 等がある。このような非摂動領域のゲージモデルを扱う際、数値的にあるいは繰り込み群の概念をうまく利用し連続時空上に定義されたゲージモデルを解くために考えだされた分野として格子ゲージ理論がある。格子ゲージ理論は高温超伝導体や他の物性理論においても有用な理論である [4, 5]

格子ゲージ理論は、離散化された時空にゲージモデルを再構築し数値的にモデルを厳密に解く試みであり、1980年に Michael Creutz が MC シミュレーションを用いて SU(2) 格子ゲージ理論の数値計算 [8] に成功して以来、おおくの素粒子論分野の研究者が格子ゲージ理論の数値計算の研究に多大なエネルギーを費やしてきた。しかしながら、そのような過程で多くの困難が生じてきた、例えば、物質場としてゲージ場と相互作用する fermion をモンテカルロ法で解くときに出現する負符号問題や、連続モデルを離散化することで生じるダブリング問題などである [9]. このように、数値計算を格子化されたモデルで直接的にカップリングの大きさに関係なく実行するのも困難であり現在でも、大型の計算機 (日本では KEK を筆頭に) を用いた大規模数値計算による研究が続いている。

こうした中で実際に格子ゲージ理論のモデルの検証のもう一つの手法として光格子上の極低温原子系の制御性の高さから、理想的な格子ゲージモデルに対応する原子系シミュレータを構築しようとする研究がごく最近になって提唱され始めている [10]-[20]. これにより数値計算上の困難を回避することができる。

A. 量子シミュレーションとは何か

量子シミュレーションとは何か、以下にその概念を列挙してみよう.

1. これまで凝縮系物理学において深く研究されてきたモデル、特に強相関系のモデルについて、従来の化合物を用いた実験的検証を超えて、光格子上的冷却原子系を用いて人工的にモデル構築し、そのモデルのパラメーターを自在に制御し、これまでの莫大な理論的研究の検証をしようとする試みである.
2. 対象とするモデルにおいて、従来の理論研究では関心のなかったパラメーター領域まで、例えば、モデルの相互作用の大きさなど冷却原子の制御技術を用いて探究することができ、未知の量子状態相を探ることができる. このような量子シミュレータで再現可能な新奇量子状態相を探る理論的研究は未だ莫大な発見があると著者は考えている. ゆえに、たとえあるモデルが古くから凝縮系物理学の範疇でその諸性質が深く研究されていたとしても、光格子上的冷却原子系の人工モデルとして捉え直し、再度モデルの諸性質を理論的に議論することは価値のあることであると考えている.
3. 量子シミュレータは実験的に従来構築できなそうもない物理モデルの現実的構築を可能とする. 例えば、高エネルギー物理における種々のゲージ理論はそのモデル自体はすべて理論で語られたいわば現実の実験システムもたないモデルである. しかしながら、冷却原子系の制御性を用いて擬似的にそれらモデルを構築しパラメータ等を自在に制御すれば、その物理を検証することが可能になる. すなわち、これまで純粋に academic な興味で語られてきた数々の toy モデルを現実の世界で擬似的に再現することに対応する.

本章では特に 3 の問題意識を根底にした量子シミュレーションの理論研究について説明する. それは格子ゲージ理論の冷却原子系を用いた量子シミュレーションである. 特に我々の研究成果である $U(1)$ gauge-Higgs モデルの量子シミュレータの理論研究をまとめる形で本論を展開する.

B. $U(1)$ lattice gauge-Higgs モデルの量子シミュレーション

本博士論文において、光格子上的格子ゲージ理論の量子シミュレータとして $U(1)$ gauge-Higgs モデル ($U(1)$ GHM) を取り上げる. このモデルは格子ゲージ理論のモデルの中でもとりわけ重要なモデルである. それは超伝導、標準模型、さらには初期宇宙のインフレーションプロセス [21, 22] などに関連しており、アンダーソンヒッグス機構 [23] を引き起こすモデルである.

我々はこのモデルを光格子上的極低温原子系上の Bose-Hubbard モデルから対応づけを行う. さらにそのモデルの実験的構築法を提案する. また、MC 法による数値計算で平衡基底状態相構造を明ら

かにし、そして各相でのゲージ変数の実時間ダイナミクス測定を行う、それによって static チャージ間の閉じ込め電束の実時間発展の様子を明らかにする。

C. 拡張 Bose-Hubbard モデルから記述される U(1) gauge-Higgs モデル

さて、本研究において我々は (2+1)D U(1)GHM の量子シミュレータを構築することに取り組む。まず初めに 2 次元正方光格子上的拡張 (Extended) Bose-Hubbard モデル (EBH)

$$\hat{H} = - \sum_{k,a \neq b} J_{ab} \hat{\psi}_{r,a}^\dagger \hat{\psi}_{r,b} + \frac{V_0}{4} \sum_{k,a} \hat{\rho}_{r,a}^2 + \sum_{k,a \neq b} \frac{V_{rarb}}{2} \hat{\rho}_{r,a} \hat{\rho}_{r,b}, \quad (6.13)$$

から始める。ここで、Boson 場 $\hat{\psi}_{r,a}$ 、Boson 場の密度 $\hat{\rho}_{r,a}$ 、サイト間ホッピング係数 J_{ab} 、on-site 相互作用 (s 波散乱) V_0 、長距離相互作用 V_{rarb} である。また、場のラベル $(r, a(b))$ は Fig.21 に示したように定義される。

この EBH モデルの Boson 場 $\hat{\psi}_{r,a}$ は lowest バンドのワニア波動関数を想定している。第 1 項のホッピング項は光格子上的 NN サイト間ホッピングのみを今回は想定し $J_{ab} = J$ とする。第 3 項の長距離相互作用項は光格子上的 NN サイト間と NNN サイト間までが有効なものを想定する、このような長距離相互作用の代表格は dipole-dipole 相互作用 (DDI) である [24]。長距離相互作用 V_{ab} は Fig.21 単位胞内で $V_{12} = V_{23} = V_{34} = V_{14} = \gamma^{-2}$ 、 $V_{13} = V_{24} = \gamma^{-2}$ 、 $V_{15} = V_{46} = 0$ を想定する。このような長距離相互作用をどのように構成するのは後の節で述べる。

次に、上記のようなカップリング係数をもつ光格子上に定義された EBH モデルにおいて低エネルギー有効理論を考える、極低温 $\sim 100\text{nK}$ において原子系は光格子各サイトで空間的に密度が一般的な BEC 状態であると考えられる、その密度を $\rho_0 \equiv \hat{\rho}_{r,a} \gg 1$ であるとする。このとき、Boson 場 $\hat{\psi}_{r,a} = \exp(i\hat{\theta}_{ra}) \sqrt{\rho_0 + \hat{\eta}_{r,i}}$ として、Boson 場を平均粒子密度 ρ_0 とそこからの揺らぎ場 $\hat{\eta}_{r,i}$ で表現する、つまりダイナミカルな変数は $\hat{\theta}_{ra}$ と $\hat{\eta}_{r,i}$ である。

この分解を EBH モデル Eq.(6.13) に代入して $O(\eta^2)$ までを残して展開すると、

$$\hat{H} \simeq \frac{1}{2\gamma^2} \sum_r \left[\sum_i (\hat{\eta}_{r,i} + \hat{\eta}_{r-i,i}) \right]^2 + \frac{V'_0}{2} \sum_{r,i} \hat{\eta}_{r,i}^2 - \rho_0 J \sum_{r,i,\delta} \cos(\hat{\theta}_{r,i} - \hat{\theta}_{r,\delta}), \quad (6.14)$$

となる低エネルギー有効理論が導かれる。ここで、 $V'_0 \equiv V_0 - 2\gamma^{-2} > 0$ でありかつ、ラベル δ は光格子上的 NN リンクを示す。このモデルの U(1) 格子ゲージ理論対応は BEC の位相 $\hat{\theta}_{r,i}$ はベクトルポテンシャル (U(1) コンパクトゲージ場) であり、それと共役な原子の密度ゆらぎ場 $\hat{\eta}_{r,i}$ は電場 $-\hat{E}_{r,i}$ [18–20] とマップすることができる。ここで光格子上の odd サイトと even サイトで各変数の符号の読み替え、 $\hat{\eta}_{r,i} \rightarrow (-)^r \hat{\eta}_{r,i}$ 、 $\hat{\theta}_{r,i} \rightarrow (-)^r \hat{\theta}_{r,i}$ (ここで $(-)^r \equiv (-)^{r_1+r_2}$) を想定する。このようなマッピングのもとで Eq.(6.14) は U(1) 格子ゲージヒッグスモデルとみなすことができる。第 1 項は Gauss 則

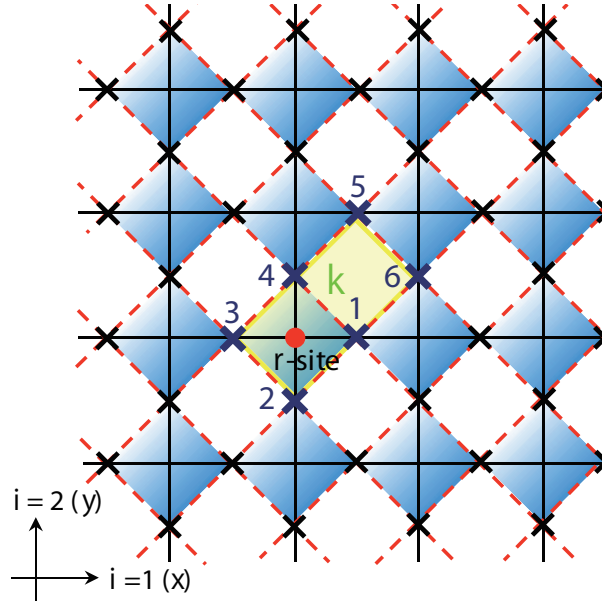


FIG. 21: 2次元正方光格子と格子ゲージ理論格子の関係. 赤い点線が2次元正方光格子を示す、赤い点線の交点に原子がトラップされる. このシステムでの単位胞は黄色の領域である. 黒線は2次元の格子ゲージ理論格子である、この格子に $U(1)$ GHM は定義される. このようなセットアップにおいて、黒線格子のリンク上には原子がトラップされている状況になる. このリンク上の原子場がゲージ場の役割を果たす. さてゲージ理論格子のサイト r に関連している単位胞は光格子でみると6つの原子がトラップされたサイトがある、それを $a = 1 \sim 6$ のように r からのラベリングとし $a = 1 = (r, 1)$, $2 = (r - 2, 2)$, $3 = (r - 1, 1)$, $4 = (r, 2)$, $5 = (r + 2, 1)$, $6 = (r + 1, 2)$ と定義する.

をコントロールする項としてみることができ、 $\gamma^2 \rightarrow 0$ のとき、 $\sum_i (\hat{n}_{r,i} - \hat{n}_{r-i,i}) = \text{div} \mathbf{E} \rightarrow 0$ となり各サイトでチャージがゼロになるような Gauss 則が課せられる、これはもちろんエネルギー最小の要請からである. 一方、 $\gamma^2 \rightarrow \text{finite}$ のとき、 $\sum_i (\hat{n}_{r,i} - \hat{n}_{r-i,i}) = \text{div} \mathbf{E} = \phi$ となるようなチャージ ϕ の揺らぎが出現し Gauss 則の破れがゆらぎ的に出現する. このようにして、本来の格子ゲージ理論のように [7]、Hilbert 空間の状態ベクトルに対して Gauss 則を要請するのではなく直接的にモデルの中に Gauss 則をコントロールする項として作用に寄与する. ゆえに、Eq.(6.14) は通常の見慣れた格子ゲージ理論のモデルとは異なる. しかしながら、この違いは物理的本質を変えることはない. 第2項は電場のエネルギー密度として解釈することができる. これは、KS ハミルトニアン [7] の電場の項に対応する. さて、第3項目は説明を要する項である. これは、BH モデルの hopping 項であるが、L字型に結合する Higgs 結合項として解釈することができる. まず、格子ゲージ理論格子のサイトに、Higgs 場が存在していると考え.

$$\phi_r = e^{i\varphi_r}, \quad (6.15)$$

ここで、想定している Higgs 場は非常に重く、場としての自由度は位相場のみが物理に影響を与える

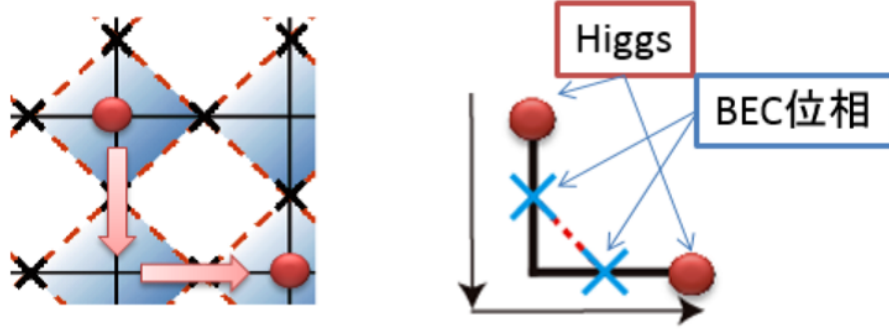


FIG. 22: Higgs 位相場と結合する U(1) ゲージ場. 左図が赤点が格子ゲージ理論格子のサイトに定義される Higgs 場である. 右図は Higgs 場とその L 字型経路のリンク上で相互作用する BEC 位相である. BEC 位相は U(1) ゲージ場であるとみなせる. このような L 字型の Higgs 結合項はローカルゲージ変換に対して不変なので存在してもよい.

[25] と想定する (london limit). このような Higgs 場がもし、Fig.22 のように L 字型に U(1) ゲージ場と相互作用しているとすると、たとえば

$$\rho_0 J \sum_{r,i,\delta} \cos(-\varphi_{r+i} + \hat{\theta}_{r,i} - \hat{\theta}_{r,\delta} + \varphi_{r+\delta}), \quad (6.16)$$

のようにカップルする、ここでローカルゲージ変換

$$\begin{aligned} \varphi_r &\rightarrow \varphi_r + \lambda_r, \\ \theta_{r,i} &\rightarrow \theta_{r,i} - (\lambda_{r+i} - \lambda_r), \end{aligned}$$

を Eq.(6.16) に適用しても不変である、故に Eq.(6.16) はローカルゲージ不変な項であり、ゲージ理論において物理的に意味のある Higgs 場とゲージ場との相互作用を記述している項である. 最後に、Eq.(6.16) を BH モデルの hopping 項に帰着するには、Higgs 位相場のユニタリーゲージ $\varphi_r = 0$ をとればよい.

D. U(1)lattice gauge-Higgs モデルの有効作用

さて、前節で BH モデルの低エネルギー有効理論として U(1)GHM を導出した. まず、興味があるのはこのモデルの平衡状態下絶対零度のグローバルな基底状態相構造である. さて、U(1)GHM(Eq.(6.14)) は今、ダイナミカルな変数として、互いに正準共役な $\theta_{r,i}$ と $\eta_{r,i}$ である. ただし、この U(1)GHM はハミルトニアン形式なので経路積分に実装すると、Berry 位相として量子効

果を表す

$$\int d\tau \sum_{r,i} i\eta_{r,i} \partial_\tau \theta_{r,i}, \quad (6.17)$$

なる位相因子も含んだ作用となる。よって、作用は複素数となり直接的な MC 計算が実行できない、しかしながら、 $\eta_{r,i}$ についての変数を解析的に経路積分上での積分として積分を実行し変数 $\theta_{r,i}$ のみからなる実数の作用で定義できる。これにより MC 計算を実行できる。このような手順で、U(1)GHM(Eq.(6.14)) は以下のような有効作用に帰着される

$$\begin{aligned} Z_{\text{GH}} &= \int [dU][d\phi] \exp(A_I + A_P + A_L), \\ A_I &= \frac{1}{2} \sum_{r,\mu} c_{1\mu} (\bar{\phi}_{r+\mu} U_{r,\mu} \phi_r + \text{c.c.}), \\ A_P &= \frac{1}{2} \sum_{r,\mu<\nu} c_{2\mu\nu} (\bar{U}_{r,\nu} \bar{U}_{r+\nu,\mu} U_{r+\mu,\nu} U_{r,\mu} + \text{c.c.}), \\ A_L &= \frac{c_3}{2} \sum_x \left[\bar{\phi}_{r+1+2} U_{r+1,2} U_{r,1} \phi_r \right. \\ &\quad + \bar{\phi}_{r+2} \bar{U}_{r+2,1} U_{r+1,2} \phi_{r+1} + \bar{\phi}_r \bar{U}_{r,2} \bar{U}_{r+2,1} \phi_{r+1+2} \\ &\quad \left. + \bar{\phi}_{r+1} U_{r,1} \bar{U}_{r,2} \phi_{r+2} \right]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

ここで、 r は (2+1) 次元格子のサイトである、虚時間方向も離散化されており $\Delta\tau$ の格子間隔をもつ。また、 μ, ν についてはあるサイトからの方向ベクトルを表しており $\mu, \nu = (0, 1, 2)$ をとり、それぞれ虚時間軸方向、空間 x 方向、空間 y 方向を表す。 $U_{r,\mu} = e^{i\theta_{x,\nu}}$ は U(1) ゲージ場 (BEC の位相) である。もちろん、上記の作用はローカルゲージ変換に不変である。次にこの作用についての各項の定数は、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} c_{10} = c_1 &\equiv \frac{\gamma^2}{\Delta\tau}, & c_{11} = c_{12} &= 0, \\ c_{201} = c_{202} = c_2 &\equiv \frac{1}{\Delta\tau V'_0}, & c_{212} &= 0, \\ c_3 &= 2J\rho_0\Delta\tau. \end{aligned} \quad (6.19)$$

これより、モデルのパラメーターは c_1, c_2 , そして c_3 にまとめられる。

E. 相構造と出現する状態相の物理的意味

前節で示した有効作用での相構造を MC 法でもとめた結果をこの節では紹介する。まずは (2+1) 次元 U(1)GHM が持つ状態相のについて Fradkin と Shenker の解析による議論 [25] をもとに紹介する。

(2+1) 次元モデルにおいて、2 つの状態相が期待される。



FIG. 23: static チャージ間に現れる電場のパターン. 電場は極低温原子系では平均粒子密度からの揺らぎの大きさである. Higgs 相では Higgs の凝縮によりゲージボソンは mass を持ち電場は $\sim \frac{e^{-mr}}{r}$ で減衰する. 閉じ込め相はゲージ理論で言えばメソン励起に対応する.

(1)Higgs 相 : Higgs 場 ϕ_r がノンゼロの期待値を持つ相である. これはつまり、Higgs 場の長距離相関関数を考えると

$$\langle \phi_0 \phi_r^\dagger \rangle = \rho_0^2 \langle e^{i(\varphi_0 - \varphi_r)} \rangle = \rho_0^2 \exp \left[\frac{const.}{|\mathbf{r}|^{2-d}} \right], \quad (6.20)$$

となるような漸近的ふるまいを持つ. このような振る舞いは解析的にはスピン波近似で求めることができる. $\frac{const.}{|\mathbf{r}|^{2-d}}$ なる振る舞いは Nambu-Goldstone モードの存在の結果である. さらに、この相ではゲージボソンは Higgs 場の凝縮により massive であり、ゲージボソンを介在して起きるチャージ間の相互作用は短距離である. さらに Wilson ループは周回則 [6, 7] をなる振る舞いをもつ. 極低温原子系の BH モデルの状態相に対応させると Higgs 相は $\varphi_r = 0$ のユニタリーゲージより逆に BEC の位相に長距離相関が現れる. これは位相の非対角長距離秩序に対応し系全体が位相コヒーレンスをもった超流動状態に対応する.

(2) 閉じ込め (Confinement) 相 : 閉じ込め相は前節の KS ハミルトニアンからも推測ができる電場エネルギー密度が最小になるように振る舞う相である. Wilson ループは面積則に従う [6, 7]. ゲージボソンは massive であり、長距離力は示さない.

このような 2 つの状態相における static チャージ間での電場の励起の様子を Fig.23 に示す. これは、極低温原子系の量子シミュレータでは原子密度の平均値からの揺らぎ励起により実際に観測可能な量にマップされる.

さて、次に有効作用 Eq.(6.18) の $T = 0$ 相構造を MC 法によって解析した. $c_1 - c_3$ 平面のグローバルな相構造は Fig.24 に示す.

相構造を決定する際、相転移点は内部エネルギー $U = \langle A \rangle$ と比熱 $C = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ を測定することにより決定した. MC 法は標準的なメトロポリスローカルアップデート法を用いた. 系は周期的境界条件を課し、格子サイズは $V = L^3$ で一辺 L は 40 までのサイズを計算した. 典型的な sweep 数は $100000 + 10000 \times 10$ である.

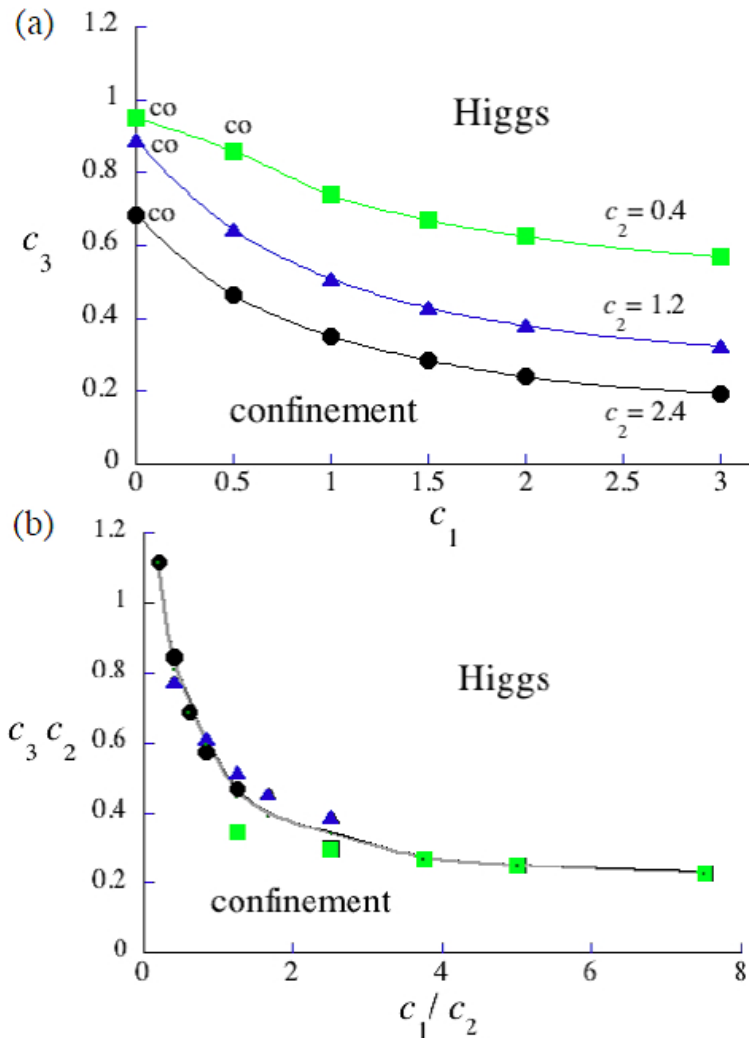


FIG. 24: U(1) 格子ゲージ Higgs モデルの $c_1 - c_3$ 平面のグローバルな相構造. Higgs 相と閉じ込め相が確かに存在する

c_3 が大きい領域では Higgs 結合項が系に大きく寄与し、Higgs 相が出現する. この相では BEC の位相がグローバルにある方向に揃っている. 一方、 c_3 が小さいときは系は閉じ込め相にある. このような、Higgs-閉じ込め相転移は様々な相転移に対応する. 例えば、標準理論における質量生成、あるいは初期宇宙における相転移等である [21, 22].

この相構造について注目すべき点の一つある、Higgs 結合項 (ホッピング項 (c_1 項)) はゲージ不変性を破る項であるとも解釈できる. さて、Foerster, Nielsen, Ninomiya [26] らの 1980 年の有名な論文と我々の結果を対応させると面白い.

彼らは以下のような主張を証明した、

「ゲージ不変なセクター S_{inv} とゲージ不変性を破る項 S_{noninv} を加えたゲージ不変でない作用 $S = S_{inv} + S_{noninv}$ の作用を考える、 S_{noninv} が S_{inv} に比べて十分に小さいときに、 S_{noninv} の効果

を評価すると、長距離領域での有効作用 S_{eff} が $S_{eff} = S_{inv} + S'_{inv}$ とゲージ不変な有効作用に対応し、さらに S'_{inv} は局所相互的な項となる」

これは我々のモデルの対応させると、

「 c_1 などの破れの項が小さいとき、その破れの影響は小さく閉じ込め相の実現する。破れの項が大きくなると場合、その結果、相転移が起り面白い現象が見える。（冷却原子系ではそれが自然なパラメータ領域）」

ということになり我々の相構造は Foerster, Nielsen, Ninomiya [26] らの主張の一つの実例になっている。

F. ダイナミクスを決定する方程式

さて、これまでの章では光格子上 BH モデルから U(1)GHM の対応関係を低エネルギー有効理論で説明し、さらに原子の密度ゆらぎを trace-out した有効理論のグローバルな相構造を MC 法によって明らかにした。相構造は予想された通り Higgs 相と閉じ込め相が存在した。

状態相がわかったとき、さらに興味をもたれるのは各状態相での何らかの物理量の振る舞いである。特に、ゲージ理論の状態相ははっきりといえ、ゲージ粒子を媒介としたチャージ粒子の力の法則の状態を示しているものである。つまり、ゲージ理論の各状態相でゲージ場がチャージ粒子とどのように物理的に関係しあうかのダイナミクスに非常に興味がある。我々はこのゲージ理論における何らかの物理量のダイナミクスについて、一つの興味の対象として static チャージペアが各状態に存在したときどのようにゲージ場つまりは電場が振る舞うのかについてこの節で明らかにする。

このような格子ゲージ理論のモデルから記述されるのある物理量のダイナミクスもとめる研究は未だほとんど手の付けられていない領域である。我々はゲージ理論における閉じ込め電束のダイナミクスを世界で初めてシミュレートした。これは冷却原子系での BEC 凝縮体のダイナミクスをシミュレートできる Gross-Pitaevskii (GP) 方程式を用いることで解析できる。さて、系のダイナミクスを決定する近似的な方程式として二つの方程式がある。

一つは U(1)GHM のモデルに対応するパラメータに BH モデルを設定してその GP 方程式を求めると、

$$i \frac{\partial \psi_{r,i}}{\partial t} = -J(\psi_{r,\bar{i}} + \psi_{r-\bar{i},\bar{i}} + \psi_{r+i,\bar{i}} + \psi_{r+i-\bar{i},\bar{i}}) + \left[\left(V'_0 + \frac{2}{\gamma^2} \right) |\psi_{r,i}|^2 + \frac{1}{\gamma^2} (|\psi_{r,\bar{i}}|^2 + |\psi_{r-\bar{i},\bar{i}}|^2 + |\psi_{r+i,\bar{i}}|^2 + |\psi_{r+i-\bar{i},\bar{i}}|^2 + |\psi_{r-i,i}|^2 + |\psi_{r+i,i}|^2) \right] \psi_{r,i}, \quad (6.21)$$

となる。ここで、格子ゲージ理論格子のリンク方向ベクトル $i = 1, 2$ である。また、 $\bar{1} \equiv 2, \bar{2} \equiv 1$ を表す。この方程式を以後、Full-GP 方程式と呼ぶ。

二つ目の方程式は直接 U(1)GHM から導出される方程式であり、変数 η と θ に関する Euler-Lagrange 方程式 $L = -\sum_{r,i} \eta_{r,i} (d\theta_{r,i}/dt) - H$ として導かれるものである。

$$\frac{d\eta_{r,i}}{dt} = 2J\rho_0 \sum_j \sin(\theta_{r,i} - \theta_{r,j}), \quad (6.22)$$

$$\frac{d\theta_{r,i}}{dt} = -V_0' \eta_{r,i} - \frac{1}{\gamma^2} (\eta_{r,i} + \eta_{r-i,i} + \eta_{r,\bar{i}} + \eta_{r-\bar{i},\bar{i}}) - \frac{1}{\gamma^2} (\eta_{r+i,i} + \eta_{r,i} + \eta_{r+i,\bar{i}} + \eta_{r+i-\bar{i},\bar{i}}). \quad (6.23)$$

ラベルは Full-GP と同じである。この方程式を以後、GH 方程式と呼ぶ。

Full-GP 方程式と GH 方程式の違いは、原子の平均粒子密度を固定するかしないかの点である。これは物理的にはゲージ場の $U_{r,i}$ の振幅が揺らぐか揺らがないかに対応する。そのゲージ場の揺らぎはホッピング項において特に重要な寄与を及ぼす、そのゲージ場の揺らぎは Higgs 場の振幅の揺らぎに対応付けも可能であり、Higgs 場の London 極限の条件を緩める。このような Higgs 場の効果が Gauss 型で導入されている先行研究が存在する [27]。ここでは ϕ^4 型ポテンシャルによって Higgs 場の凝縮振幅の揺らぎが許される状況下で U(1) 格子ゲージ Higgs モデルの相構造を調べられており、その揺らぎが Higgs 相と閉じ込め相の相境界が明確化することを示している。一方、Fradkin と Shenker[25] らの解析的議論では Higgs 場が London 極限をとるとき、Higgs 相と閉じ込め相は連続的につながっていることを示唆している。このような先行研究の示唆により、Full-GP 方程式はパラメータ設定に応じて Higgs 相と閉じ込め相での振る舞いが大きく違うことが予想される。一方、GH 方程式では Higgs 相と閉じ込め相での振る舞いが相境界近傍ではかなりあいまいになる可能性がある。これらの違いについては実際に次節の閉じ込め flux のダイナミクスを解析する上で明らかになる。

G. 閉じ込め電束の初期設定

この節では前節で導いた Full-GP 方程式と GH 方程式をつかって、どのような物理量のダイナミクスを見るのか、その設定を説明する。

Kogut のレビュー論文 [7] にある未解決問題が存在する。

「ある static チャージペアが存在したとき、もちろん強結合領域での強い閉じ込め相において、閉じ込め flux は直線的に static チャージペアを束縛する。しかしながら、その flux を乱すような作用 (磁場ブラケット項や Higgs 結合項) の寄与が摂動論的に扱えない大きさのとき、どのように flux は振る舞うのか全く定かではない」

我々はこの問いに Full-GP 方程式と GH 方程式を用いてその振る舞いを明らかにする。さらにこれらのダイナミクスは極低温原子系の物理量に対応していて将来観測可能である。

我々は Fig.25 のように static チャージペア間の閉じ込め flux を Full-GP 方程式と GH 方程式初期条件として設定する。このような初期条件を設定し、さらに MC 法で求めた相構造から様々なパラメータで設定して二つの方程式を解く。

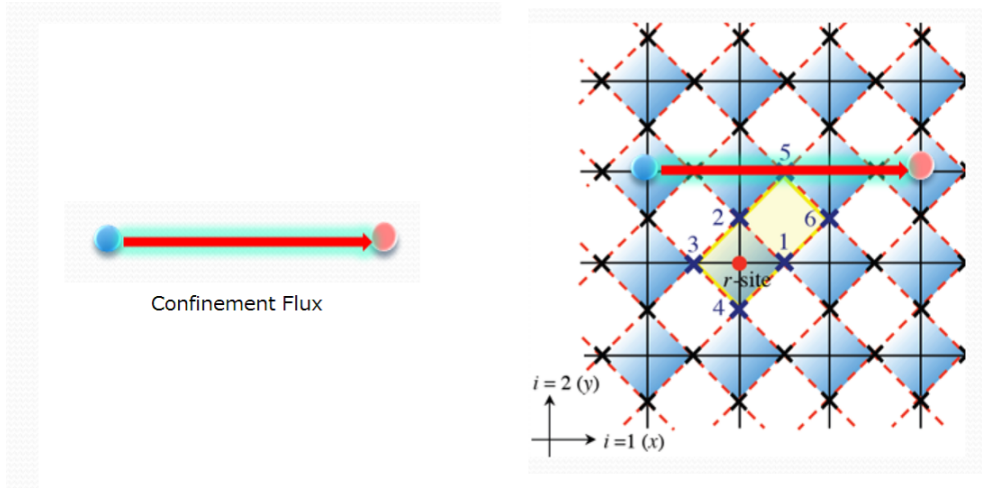


FIG. 25: 閉じ込め flux の設定、左図は static チャージペアを束縛する閉じ込め flux の概念図、これはメソン励起に対応する。右図は格子上にセットされる static チャージペアと閉じ込め flux であり、我々はこれを初期設定として運動方程式を解く

H. 数値計算結果

二つの方程式を解く際、 200×200 の格子系を考え、さらに自由端境界条件を用いた。時間微分項を離散化した際の単位時間ステップは $\Delta t = 10^{-4}$ とした。平均原子密度は一様で $\rho_0 = 1$ とした。前の節でも紹介したように、閉じ込め flux の安定性を見るために、閉じ込め flux が置かれるサイトには $\eta_{r,1} = (-)^r 0.1$ とした初期励起を設定する。ここで、初期励起を設定するサイトは $-R \leq r_1 \leq R-1$ である。今回は長さ $R = 10$ の flux とする。static チャージペアが存在していることを仮定しているので、たとえ方程式を時間発展させても、 $\eta_{R,1} = 0.1$ と $\eta_{-R-1,1} = -0.1$ とし static チャージペアから湧き出ている電場を固定する。

時間発展下で系が閉じ込め相か Higgs 相かを判定するために、以下の量 $\sigma(t)$ を計算する

$$\sigma(t) = \sum_{\ell \in \text{initial flux line}} [\eta_{\ell}^2(t) - \eta_{\ell}^2(0)]^2. \quad (6.24)$$

この量を計算することにより、閉じ込め flux の振る舞いが明らかになる。

まず、GH 方程式の結果について、時間発展の時間単位として $\sim \hbar/V'_0 = 0.7\text{msec}$ とした。

Fig.26 は、閉じ込め相のパラメータ領域として GH 方程式 (6.23) において $\gamma^2 = 2$, $V'_0 = 1$, $J = 0.1$ と固定したときの閉じ込め flux の振る舞いであり、電場の 2 乗 $\eta_{r,i}^2$ をプロットしたものである。 $t \sim 100\text{sec}$ までの振る舞いを示す。ここで、閉じ込めの flux は安定的に存在するが、揺らぐ。この揺らぎは閉じ込め flux が Higgs 結合項により、切れたり繋がったりする現象と理解することが可能である。

次に、Higgs 相のパラメータ領域として GH 方程式 (6.23) において $\gamma^2 = 2$, $V'_0 = 1$, $J = 1$ と固定

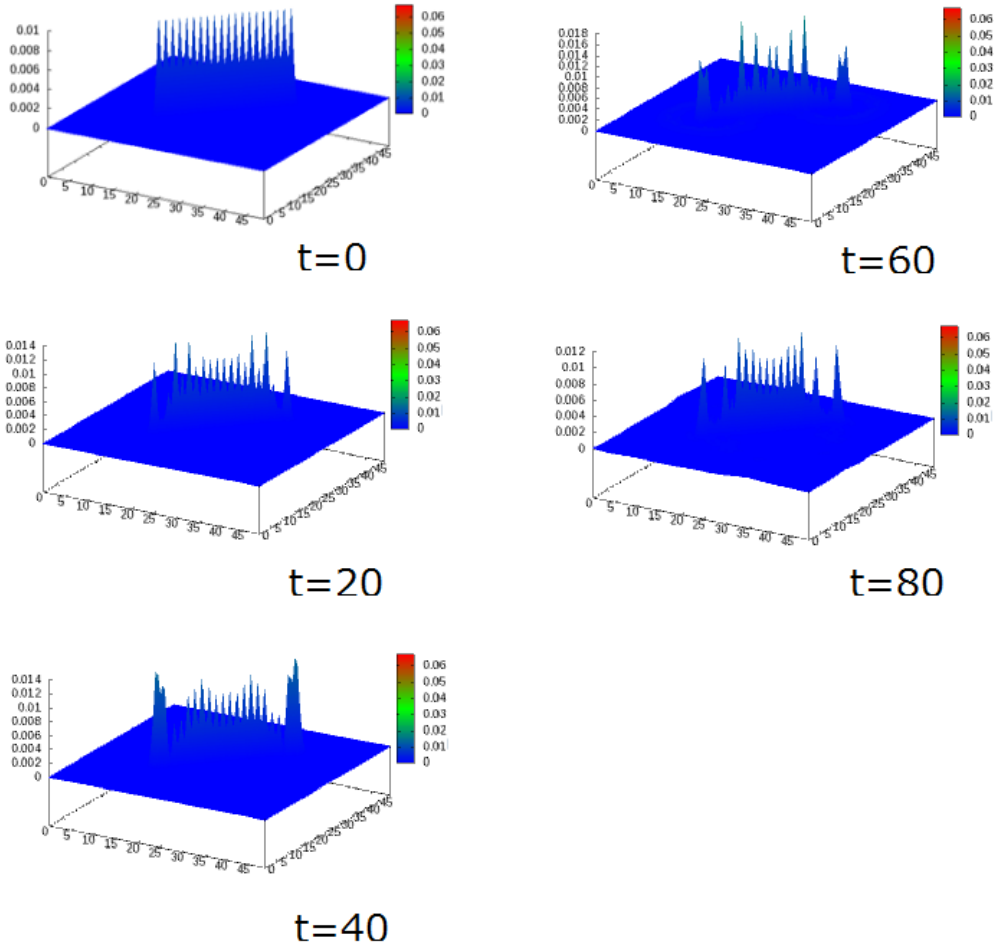


FIG. 26: 閉じ込め相での GH 方程式による閉じ込め flux のダイナミクス、時間単位は $t = 1 \sim 0.7\text{msec}$ であり、この時間間隔は十分に実験でも測定可能である。閉じ込めの flux は安定的に存在するが振動をする。

したときの閉じ込め flux の振る舞いを Fig.27 に示す。

Higgs 相であろうパラメータ領域では閉じ込め相のときと比べて振る舞いが明らかに異なる、閉じ込め flux ははじめ揺らぎながら存在するがある瞬間に消失する。その際、原子密度波が static チャージから発生するこれは理論的に予想される Higgs 相との振る舞いと似ている。しかしながら、閉じ込め相と Higgs 相の相境界は GH 方程式の振る舞いだけで決定することが困難であった。これは Fradkin と Shenker[25] らの解析的議論と同じ現象が現れると言える。

次に、Full-GP 方程式の結果について、時間発展の時間単位として $\sim \hbar/V'_0 = 0.7\text{msec}$ とした。

Fig.28 は、閉じ込め相のパラメータ領域として Full-GP 方程式 (6.21) において $\gamma^2 = 0.5$, $V'_0 = 1$, $J = 0.1$ と固定したときの閉じ込め flux の振る舞いであり、電場の 2 乗 $\eta_{r,i}^2$ をプロットしたもので

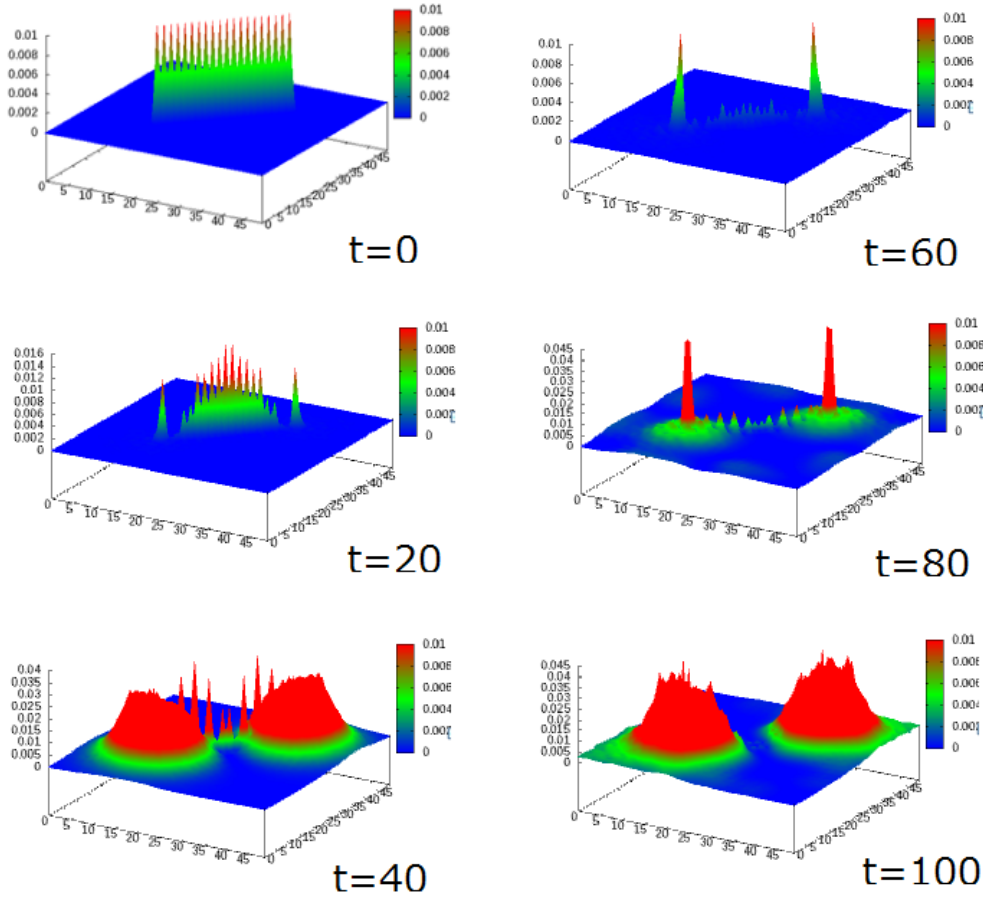


FIG. 27: Higgs 相での GH 方程式による閉じ込め flux のダイナミクス、閉じ込め相のときと同じ時間単位で $t = 1 \sim 0.7\text{msec}$ である。Higgs 相であろうパラメータ領域では閉じ込め flux が消失する際、原子密度波が static チャージから発生する。

ある。 $t \sim 100\text{sec}$ までの振る舞いを示す。

ここでも、GH 方程式の場合と同様に閉じ込めの flux は安定的に存在するが揺らぐ。閉じ込め flux の揺らぎ現象の周期は Higgs 結合項の違いにより異なる。

次に、Higgs 相のパラメータ領域として Full-GP 方程式において $\gamma^2 = 1.2$, $V_0' = 1$, $J = 1$ と固定したときの閉じ込め flux の振る舞いを Fig.29 に示す。Higgs 相であろうパラメータ領域では閉じ込め相のときと比べて振る舞いが明らかに異なる、閉じ込め flux は徐々に消失し、連続的に原子密度波が static チャージから発生する。閉じ込め相と Higgs 相の相境界は GH 方程式の振る舞いよりよりはっきりする。これは Higgs 結合項の振幅ゆらぎが入ることにより London 極限が弱められた結果である。このような現象は文献 [27] のモンテカルロ法シミュレーションでも予言されていたことと対応する。

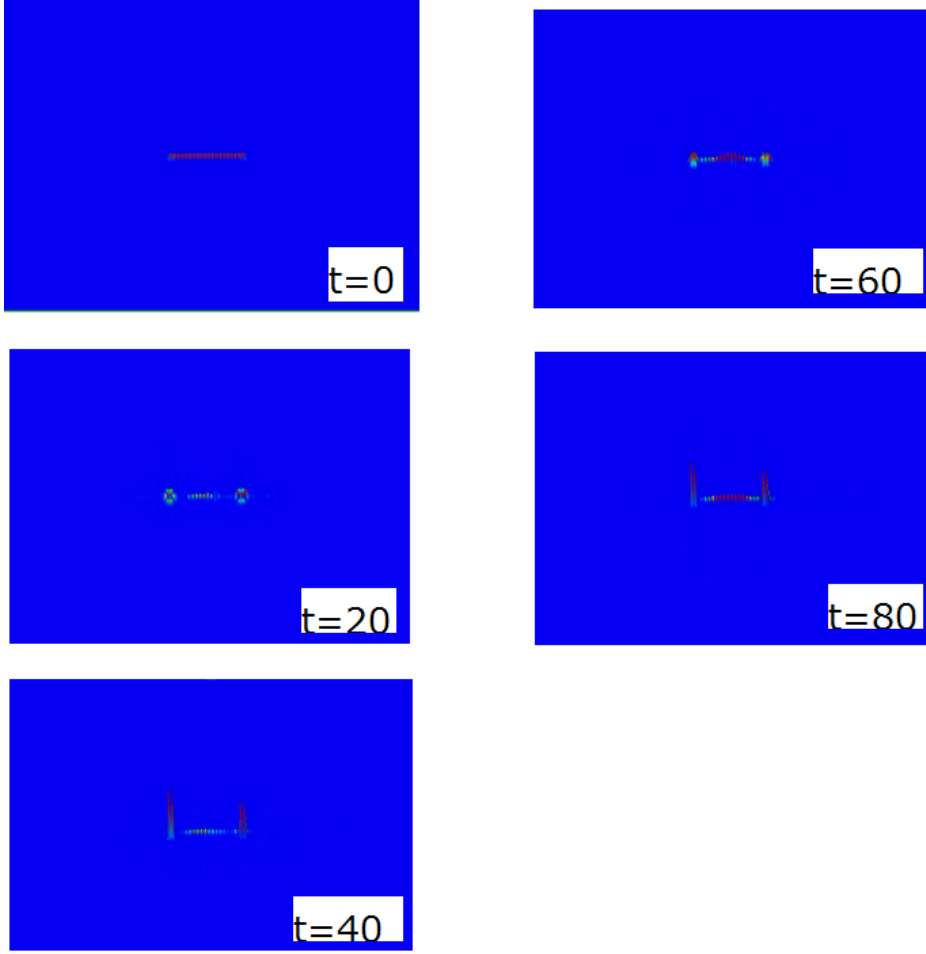


FIG. 28: 閉じ込め相での Full-GP 方程式による閉じ込め flux のダイナミクス、時間単位は $t = 1 \sim 0.7\text{msec}$ であり、この時間間隔は十分に実験でも測定可能である。閉じ込めの flux は安定的に存在するが、振動をする。これは GH 方程式と全く同じ振る舞いである。ただし、閉じ込め flux の揺らぎ現象の周期は Higgs 結合項の違いにより異なる。

I. Gauss 則を実験的に構築する一つの提案

U(1)GHM における Gauss 則を BH モデルから構築するためには、長距離相互作用 V_{ab} は Fig.21 単位胞内で $V_{12} = V_{23} = V_{34} = V_{14} = \gamma^{-2}$ 、 $V_{13} = V_{24} = \gamma^{-2}$ 、 $V_{15} = V_{46} = 0$ にチューニングする必要があった。このような長距離相互作用を単一原子系で構築するのは非常に困難である。このような困難を回避し実験的に相互作用をチューニングする理論的な提案として、他の原子系の長距離相互作用の影響を考えた有効相互作用によるチューニングについて説明する。

単一原子系での相互作用チューニングが困難であり、これを回避するために我々は他の原子系の相互作用をつかって対象とする二次元原子系に対し有効相互作用を考える。つまり、他の原子系との

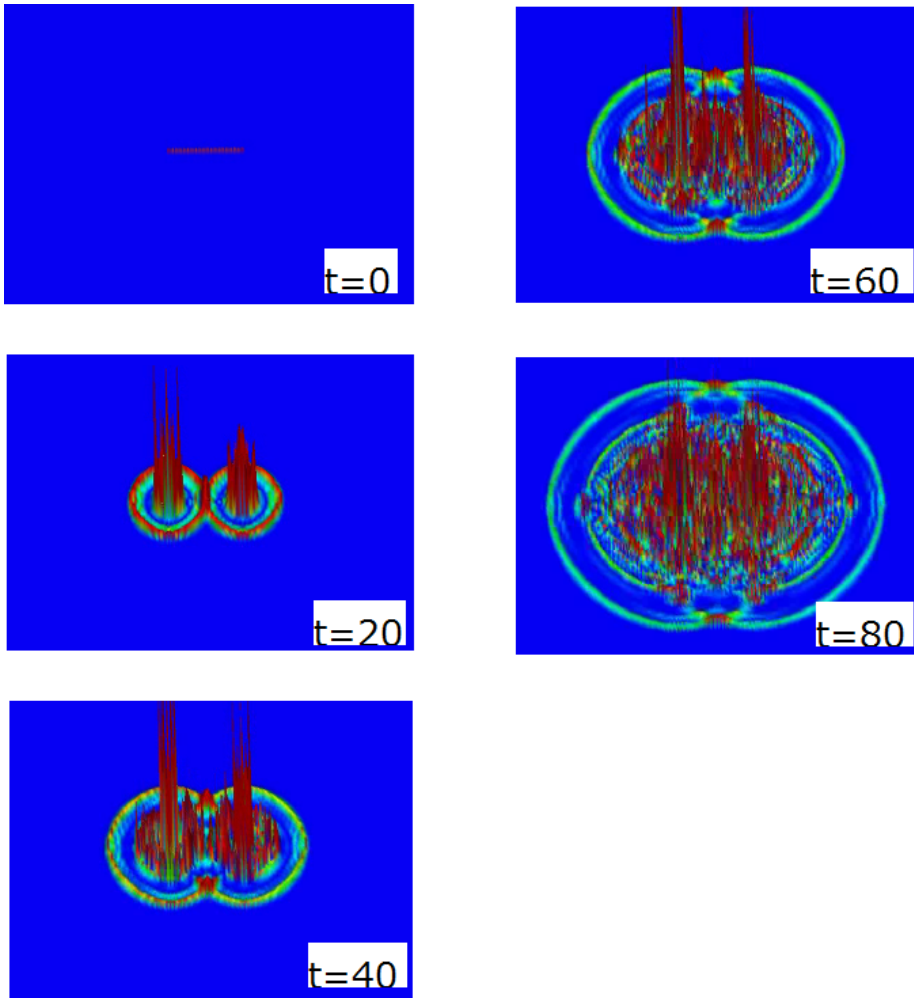


FIG. 29: Higgs 相での Full-GH 方程式による閉じ込め flux のダイナミクス、閉じ込め相のときと同じ時間単位で $t = 1 \sim 0.7\text{msec}$ である。Higgs 相であろうパラメータ領域では閉じ込め flux は徐々に消失し、連続的に原子密度波が static チャージから発生する。

相互作用項を経路積分上で trace out して対象とする原子系での有効相互作用を摂動論的に導く。これによって、対象とする原子系において単独で存在する長距離相互作用を上手く干渉させる。このようにして、Gauss 則を導く相互作用チューニングを導く。

まず始めに、3層構造の光格子系を考える、Fig.30 が三層光格子の概略図である。layer1 には Mott 状態の b-boson、layer2 では $U(1)$ GHM を構築する二次元平面で、そこにトラップされる原子を a-boson、さらに layer3 にも Mott 状態の c-boson をおく (layer2, 3 にトラップされる原子系で Mott 状態相を想定しているがこれは layer2,3 の光格子を構成するレーザーの振幅を大きくすれば可能である)。このような設定でさらに、トラップされる a-, b-, c-boson それぞれが大きさの違う dipole モーメント (電気、磁気どちらでもよい) を持つと考える。それらの全ての原子の dipole は layer にたいし

て垂直方向に向いているとする.

このような想定をしたとき、長距離相互作用である dipole-dipole 相互作用 (DDI) が各 layer 内かつ layer 間内に存在している [28].

また、各 layer での光格子の構造は異なり、Fig.30 のような構造を持つ. これらも違う波長のレーザーとそれらの入射方向、さらには原子の吸収スペクトルを考慮すれば原理上可能である (より詳しい説明は後で述べる).

さて、まずは b-boson 原子系についての摂動論的経路積分の実行を紹介する. b-boson 系は Mott 状態であり、ホッピング項はほとんど寄与しないと考える. そのとき b-boson 系の分配関数 Z_b は以下のように与えられる、

$$\begin{aligned} Z_b &\equiv \int [db_k db_k^\dagger] \exp \left(\int_0^\beta d\tau \sum_k (-b_k^\dagger(\tau) \partial_\tau b_k(\tau) + \mu_b b_k^\dagger(\tau) b_k(\tau) \right. \\ &\quad \left. - U_b n_{b,k}(\tau) (n_{b,k}(\tau) - 1) + U_{ab} \sum_\delta (n_{b,k}(\tau) - \rho_b) n_{a,k+\delta}(\tau) \right) \\ &\equiv \int [db_k db_k^\dagger] e^{-\int_0^\beta d\tau (\sum_k b_k^\dagger(\tau) \partial_\tau b_k(\tau) + H_b + H_{int})} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$H_b \equiv \sum_k \left(-\mu_b b_k^\dagger(\tau) b_k(\tau) + U_b n_{b,k}(\tau) (n_{b,k}(\tau) - 1) \right), \quad (6.26)$$

$$H_{int} \equiv \sum_{k,\delta} U_{ab} (n_{b,k}(\tau) - \rho_b) n_{a,k+\delta}(\tau), \quad (6.27)$$

ここで、 U_b 項は on-site 斥力項、 U_{ab} 項は a-boson と b-boson との層間の DDI である (これらの結合定数はより詳細に後で示される)、 ρ_b は b-boson の平均粒子濃度でそれは $\rho_b = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}_b} \hat{n}_{b,k}]$ として与えられる. サイトのラベルは Fig.31 に示す. さらに、 H_{int} を以下のように展開すると

$$Z_b \sim 1 + U_{ab}^2 \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \sum_{k,l,(\delta,\delta')} \langle (n_{b,k}(\tau_1) - \rho_b) (n_{b,l}(\tau_2) - \rho_b) \rangle_0 n_{a,k+\delta}(\tau_1) n_{a,l+\delta'}(\tau_2), \quad (6.28)$$

となり. ここで、アンサンブル平均については $\langle A(\tau) B(\tau') \rangle_0 \equiv \text{Tr}(\rho_G T_\tau (\hat{A}(\tau) \hat{B}(\tau')))$ と表記し. 平衡状態の密度演算子 $\rho_G = e^{-\beta \hat{H}_b} / Z_b$ (有限温度) で重みづけされる. また、展開で生じる U_{ab} の一次の項は $\langle (n_{b,k}(\tau_1) - \rho_b) \rangle_0 = 0$ より消える. よってリーディング項は U_{ab}^2 であり、そのアンサンブル平均はハミルトニアンが b-boson に対して local なので計算できる.

$$\langle (n_{b,k}(\tau_1) - \rho_b) (n_{b,l}(\tau_2) - \rho_b) \rangle_0 = \langle n_{b,k}(\tau_1) n_{b,l}(\tau_2) \rangle_0 - \rho_b^2 \quad (6.29)$$

$$\langle n_{b,k}(\tau_1) n_{b,l}(\tau_2) \rangle_0 \equiv \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}_b} \hat{n}_{b,k}(\tau_1) \hat{n}_{b,l}(\tau_2)] / Z_b. \quad (6.30)$$

ここで、 n_b は H_b と可換であり時間順序積は考慮する必要がない. このアンサンブル平均は特定のサイト k, l のみによって記述される 1 粒子、2 粒子 Fock 空間によって記述され、そのウェイトは ρ_G で

計算される. さらに計算過程を記述すると、

$$\begin{aligned} \text{Tr}[e^{-\beta\hat{H}_b} n_{\hat{b},k}(\tau_1) n_{\hat{b},l}(\tau_2)]/Z_b &= \frac{\sum_{m_k, m_l} \langle m_k, m_l | e^{-\beta(\hat{H}_{b(k)} + \hat{H}_{b(l)})} | m_k, m_l \rangle m_k m_l}{\sum_{m_k, m_l} \langle m_k, m_l | e^{-\beta(\hat{H}_{b(k)} + \hat{H}_{b(l)})} | m_k, m_l \rangle} \\ &= \begin{cases} \left[\frac{\sum_{m_k} e^{-\beta E_{m_k}} m}{\sum_{m_k} e^{-\beta E_{m_k}}} \right]^2 = \rho_b^2 & (k \neq l) \\ \frac{\sum_{m_k} e^{-\beta E_{m_k}} m_k^2}{\sum_{m_k} e^{-\beta E_{m_k}}} & (k = l) \end{cases}, \end{aligned}$$

ここで、 $m_{k(l)}$ はサイト $k(l)$ の粒子数である、そして $\hat{H}_{b(k(l))}$ は 1 粒子ハミルトニアンである、そのハミルトニアンはローカルサイト i で表現されており $E_{m_{k(l)}}$ は $\hat{H}_{b(k(l))}$ の固有値である. ここで、 $E_{m_k} = -\mu_b m_k + U_b m_k (m_k - 1)$ となる. また $k \neq l$ の場合、アンサンブル平均はキャンセルされる、これは Eq.(6.29) の $-\rho_b^2$ があるからである. よって、分配関数 Z_b の 2 次摂動展開は、

$$\begin{aligned} Z_b &\sim 1 + U_{ab}^2 \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \sum_{k,l,(\delta,\delta')} C(\mu_b, U_b, \beta) n_{a,k+\delta}(\tau_1) n_{a,l+\delta'}(\tau_2) \\ &\sim 1 + U_{ab}^2 \int_0^\beta d\tau \sum_{k,(\delta,\delta')} \beta C(\mu_b, U_b, \beta) n_{a,k+\delta}(\tau) n_{a,l+\delta'}(\tau) \\ &\equiv e^{-\int_0^\beta d\tau H_{qV}}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

と計算でき、ここで H_{qV} は有効密度 密度相互作用項であり a-boson 系に寄与する. さらに、 $n_{a,k+\delta}(\tau_1) n_{a,k+\delta}(\tau_2)$ に対するリーディング項は以下のように展開することができる.

$$n_{a,k+\delta}(\tau) n_{a,k+\delta}(\tau + \tau') = n_{a,k+\delta}(\tau) \left(\sum_n \frac{\tau'^n}{n!} \left(\frac{d^n}{d\tau^n} n_{a,k+\delta}(\tau) \right) \right)_{\tau'=\tau}. \quad (6.32)$$

ここで、以下の有効相互作用係数を定義した、

$$C(\mu_b, U_b, \beta) \equiv \frac{\sum_{m_k} e^{-\beta E_{m_k}} m_k^2}{\sum_{m_k} e^{-\beta E_{m_k}}} - \rho_b^2 = \langle (\hat{n}_b - \langle n_b \rangle)^2 \rangle. \quad (6.33)$$

この $C(\mu_b, U_b, \beta)$ は平均粒子密度からの揺らぎ (*density fluctuation*) として解釈できる.

このようにして b- c-boson の部分分配関数を trace out すると、a-boson 系に作用する密度 密度有効相互作用が導出される. この相互作用は必ず引力的なものになる. この a-boson 系に現れる引力密度-密度有効相互作用は a-boson 同士の DDI に干渉する. これによって Gauss 則を満たす相互作用チューニングを達成する.

さて、さらに具体的な原子を例に挙げて、Gauss 則チューニングを説明する. b-boson は ^{52}Cr であるとする、これは大きな磁気モーメントを持つ ($6\mu_B$). さらに、a-boson は $^{87}\text{Rb}(\mu_B)$ で、c-boson は $^{168}\text{Er}(7\mu_B)$ であるとする. これらの原子は特定の波長の光に対して吸収長をもち、Fig.30 のような格子にトラップ可能である.

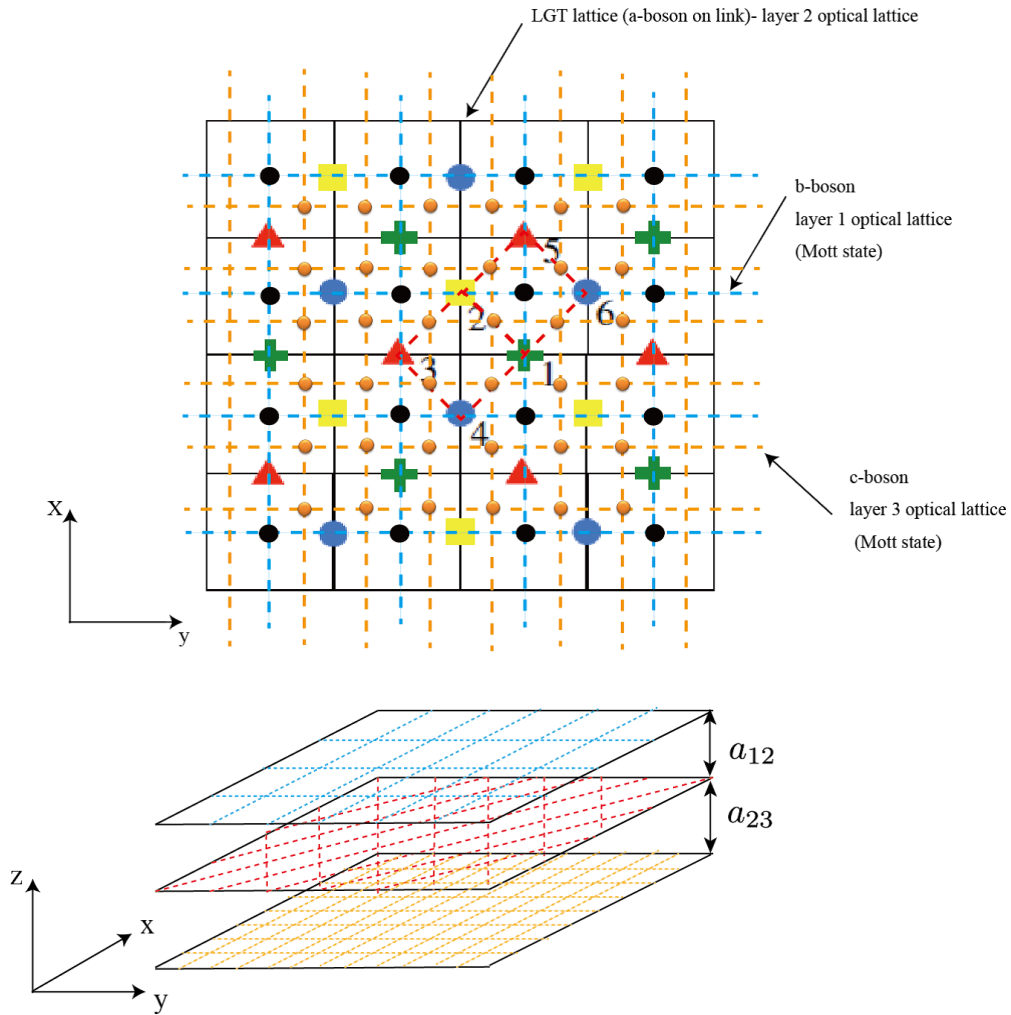


FIG. 30: 3層構造の光格子.

Fig.31 は b- c-boson を layer2 にマップしたものである． c-boson は layer2 のサイト間のリンクの真ん中に存在しているように見え、 b-boson は単位格子の真ん中に存在しているように見える．

全系のシステムに対して、以下のことを想定できる．

1. a-boson と b-boson は DDI によって層間で相互作用しているその相互作用は NN 相互作用である (k と $k + \delta_{x(y)}$ 、 Fig.31)． サイト k の b-boson は 4 つの NN サイトの a-boson と相互作用している． その NN 相互作用は layer1, layer2 の層間距離 a_{12} を調整して大きさをコントロールで

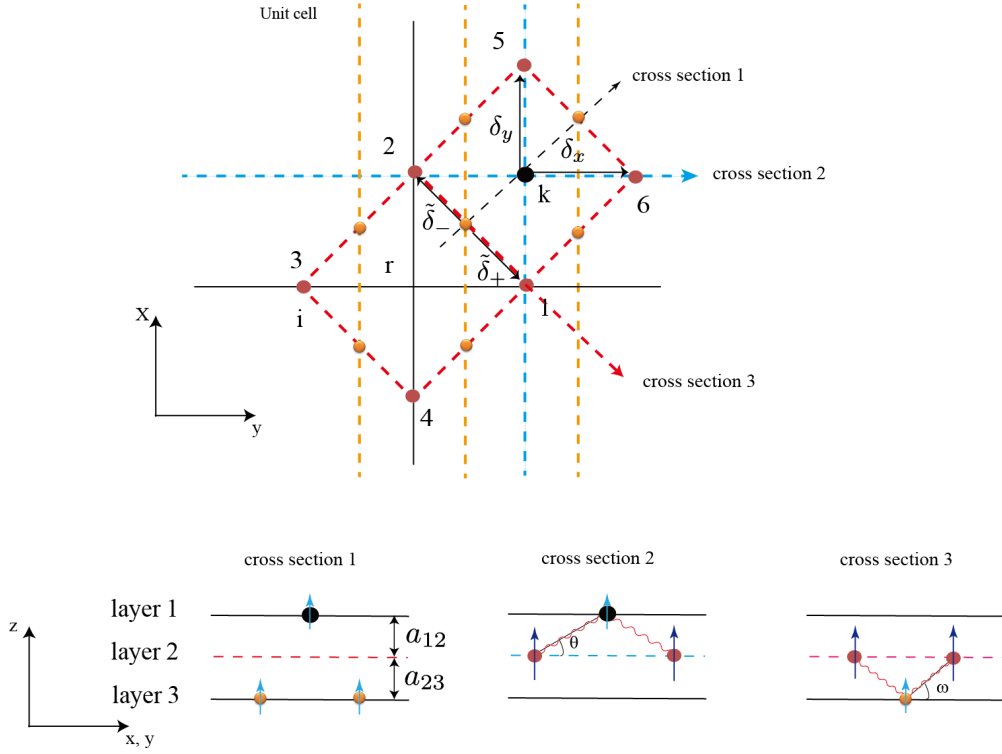


FIG. 31: layer2 光格子の単位格子とその三つの断面図

きる. さらにその相互作用の格子上でのカップリングの大きさ U_{ab} は Wannier 関数を使って,

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \frac{1}{2} \psi_b^\dagger(\mathbf{r}) \psi_a^\dagger(\mathbf{r}') U_{DDI}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi_b(\mathbf{r}) \psi_a(\mathbf{r}') \\ & \sim U_{ab} \sum_{k,\delta} a_{k+\delta}^\dagger a_{k+\delta} b_k^\dagger b_k = U_{ab} \sum_{k,\delta} n_{a,k+\delta} n_{b,k}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$U_{ab} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' w_{b,k}^2(\mathbf{r}) U_{DDI}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') w_{a,k+\delta}^2(\mathbf{r}'), \quad (6.35)$$

$$U_{DDI}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{d_{ab}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \left[1 - \frac{3a_{12}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right], \quad (6.36)$$

ここで, $d_{ab} = 6\mu_b^2$, そして Wannier 関数 w_a と w_b である.

2. a-boson と c-boson もまた DDI を layer2 と layer3 で持つ. その DDI もまた NN 相互作用である (l と $k + \tilde{\delta}_{+(-)}$, Fig.31). 一つのサイト l の c-boson は 2つのサイトの NN a-boson と相互作用する. その NN 相互作用もまた layer2, layer3 の層間距離 a_{23} を調整して大きさをコントロー

ルできる. (I) と同様に、相互作用の格子上でのカップリングの大きさ U_{ac} は

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' \frac{1}{2} \psi_c^\dagger(\mathbf{r}) \psi_a^\dagger(\mathbf{r}') U_{DDI}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \psi_c(\mathbf{r}) \psi_a(\mathbf{r}') \\ & \sim U_{ac} \sum_{l,\bar{\delta}} a_{l+\bar{\delta}}^\dagger a_{l+\bar{\delta}} c_l^\dagger c_l = U_{ac} \sum_{l,\bar{\delta}} n_{a,l+\bar{\delta}} n_{c,l}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$U_{ac} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' w_{c,l}^2(\mathbf{r}) U_{DDI}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') w_{a,l+\bar{\delta}}^2(\mathbf{r}'), \quad (6.38)$$

$$U_{DDI}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{d_{ac}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \left[1 - \frac{3a_{23}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]. \quad (6.39)$$

ここで、 $d_{ac} = 7\mu_b^2$ 、そして Wannier 関数 w_a と w_c である.

3. b-boson と c-boson の層間の DDIは無視できる、これは b-boson と c-boson 系がそれぞれ Mott 状態であることに起因する. また、層間 $a_{12} + a_{23}$ が大きい場合はもちろん無視できる.

ここで、c-boson 系から導出される a-boson 系に現れる引力密度-密度有効相互作用も同様に計算できることを紹介しておく、

$$\begin{aligned} Z_c & \equiv \int [dc_l dc_l^\dagger] \exp \left(\int_0^\beta d\tau \sum_l (-c_l^\dagger(\tau) \partial_\tau c_l(\tau) + \mu_c c_l^\dagger(\tau) c_l(\tau) \right. \\ & \quad \left. - U_c n_{c,l}(\tau) (n_{c,l}(\tau) - 1) + U_{ac} \sum_{\bar{\delta}} (n_{c,l}(\tau) - \rho_c) n_{a,l+\bar{\delta}}(\tau) \right) \\ & \equiv \int [dc_l dc_l^\dagger] e^{-\int_0^\beta d\tau (\sum_l c_l^\dagger(\tau) \partial_\tau c_l(\tau) + H_c + H'_{int})} \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$H_c \equiv \sum_l \left(-\mu_c c_l^\dagger(\tau) c_l(\tau) + U_c n_{c,l}(\tau) (n_{c,l}(\tau) - 1) \right) \quad (6.41)$$

$$H'_{int} \equiv \sum_{l,\bar{\delta}} U_{ac} (n_{c,l}(\tau) - \rho_c) n_{a,l+\bar{\delta}}(\tau). \quad (6.42)$$

ここで U_c 項は on-site 斥力、 ρ_c は c-boson の平均粒子密度であり $\rho_c = \text{Tr}[e^{-\beta \hat{H}_c} \hat{n}_{c,l}]$ で決まり、それはパラメータ μ_c と U_c に依存する. b-boson 系のとおり計算を実行して、 Z_c は以下ようになる

$$\begin{aligned} Z_c & \sim 1 + U_{ac}^2 \int_0^\beta d\tau \sum_{l,\bar{\delta}} \beta C(\mu_c, U_c, \beta) n_{a,l+\bar{\delta}}(\tau) n_{a,l-\bar{\delta}}(\tau) \\ & \equiv e^{-\int_0^\beta d\tau H_{qv,c}}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

ここで、係数 $C(\mu_c, U_c, \beta)$ は

$$C(\mu_c, U_c, \beta) \equiv \frac{\sum_{m_l} e^{-\beta E_{m_l}} m_l^2}{\sum_{m_l} e^{-\beta E_{m_l}}} - \rho_c^2 = \langle (\hat{n}_c - \langle n_c \rangle)^2 \rangle, \quad (6.44)$$

となり、 $E_{m_l} = -\mu_c m_l + U_c m_l (m_l - 1)$ 、 m_l はサイト l での c-boson の 1 粒子エネルギーである. ここで、 $C(\mu_c, U_c, \beta)$ 平均粒子密度からの揺らぎ (*density fluctuation*) として解釈できる. これより得られる有効密度-密度相互作用 $n_{a,l+\bar{\delta}}(\tau) n_{a,l-\bar{\delta}}(\tau)$ は layer2 の a-boson 系の NN 相互作用になる.

これより、b-boson 系と c-boson 系から得られた有効密度 密度相互作用 (6.31),(6.43) から a-boson 系の長距離相互作用をチューニングできる、a-boson 系の NN の DDI の大きさを V , NNN の大きさを V_N とすると、 $V_{12} = V_{23} = V_{34} = V_{14} = \gamma^{-2}$ 、 $V_{13} = V_{24} = \gamma^{-2}$ 、 $V_{15} = V_{46} = 0$ を満たすためには以下の *fine tuning relation* が必要である。

$$\begin{aligned} 2V - U_{ab}^2 \beta C(\mu_b, U_b, \beta) - U_{ac}^2 \beta C(\mu_c, U_c, \beta) &= 2V_N, \\ 2V_N - U_{ab}^2 \beta C(\mu_b, U_b, \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (6.45)$$

この関係を構築できれば a-boson 系に Gauss 則を要請する相互作用を与えることができる。この要請は二層間の距離 a_{12} と a_{23} 、かつ、b-boson 系と c-boson 系の密度ゆらぎ係数 $C(\mu_b, U_b, \beta)$ と $C(\mu_c, U_c, \beta)$ を調整して達成できる。

J. 具体的なチューニング例

3次元の三層構造システムは三つの対向レーザーセットで構築する。 $2\lambda_1 = \sqrt{2}\lambda_2 = \lambda_3$ とし、ここで $\lambda_1 = 410\text{nm}$, $\lambda_2 = 580\text{nm}$, $\lambda_3 = 820\text{nm}$ を想定する、これらのレーザーは $x-y$ 平面で最適な入射角度に調整される。さらに z 方向での層構造の構築のため λ_z 波長の z 方向定常波をセットする。

^{52}Cr , ^{87}Rb and ^{168}Er らはそれぞれ特定の吸収長、425nm, 780nm, 401nm を持つので先ほど示した三つの対向レーザーセットにおいてそれぞれのポテンシャルを感じ、各層に原子をトラップすることができる [?]。次に $a_{12} = 0$, $a_{13} = \ell_z$ とし有効的な二層構造を考える、最終的に前節のチューニング条件 Eq.(6.45) を満たすようなパラメータ候補の一つとして、 $V \sim \frac{36\mu_0\mu_{\text{BM}}^2}{4\pi\lambda_3^3}$, $\ell_{\text{AC}} = \ell_z \sim 580$ [nm], $\beta \sim \frac{1}{2V}$, $U_B \sim 0.3V$, $\mu_B \sim 2.5V$, $U_C \sim 1.3V$, $\mu_C \sim 2V$ 。ここで、平均粒子密度は1サイトあたり、b-boson ~ 560 、c-boson ~ 8 である。

-
- [1] I.M. Georgescu, S. Ashhab, and F. Nori, Rev. Mod. Phys. **86**, 153 (2014).
 - [2] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford Science Publications (1988).
 - [3] K. Fukushima and T. Hatsuda, Reports Prog. Phys. **74**, 014001 (2011).
 - [4] I. Ichinose, T. Matsui Mod. Phys. Lett.B **28**, 1430012 (2014).
 - [5] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics* (Cambridge, 2013).
 - [6] K. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974); A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **59**, 82 (1975).
 - [7] J. B. Kogut, Rev. Mod. Phys. **51**, 659 (1979); J. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D **11**, 395 (1975).
 - [8] M. Creutz, Phys. Rev. D **21**, 2308 (1980).
 - [9] 青木慎也, 格子上の場の理論, springer (2012).

- [10] U. -J. Wiese, *Annalen der Physik* **525**, 777 (2013); E. Zohar, J. I. Cirac, B. Reznik, arXiv:1503.02312v1 (2015).
- [11] E. Zohar, J. I. Cirac, and B. Reznich, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 125302 (2012).
- [12] D. Banerjee, M. Dalmonte, M. Müller, E. Rico, P. Stebler, U.-J. Wiese, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 175302 (2012).
- [13] E. Zohar, J. I. Cirac, and B. Reznich, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 055302 (2013).
- [14] E. Zohar, J. I. Cirac, and B. Reznich, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 125304 (2013).
- [15] D. Banerjee, M. Bögli, M. Dalmonte, E. Rico, P. Stebler, U.-J. Wiese, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 125303 (2013).
- [16] S. Chandrasekharan and U.-J Wiese, *Nucl. Phys. B* **492**, 455 (1997).
- [17] E. Zohar, J. I. Cirac, and B. Reznik *Phys. Rev. A* **88**, 023617 (2013).
- [18] E. Zohar and B. Reznik, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 275301 (2011).
- [19] S. Tewari, V. W. Scarola, T. Senthil, and S. Das Sarma, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 200401 (2006).
- [20] K. Kasamatsu, I. Ichinose, and T. Matsui, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 115303 (2013).
- [21] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [22] E. Kolb and M. Turner, *The Early Universe*, Westview Press, (1994).
- [23] P. W. Higgs, *Phys. Lett.* **12**, 132 (1964).
- [24] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein, and T. Pfau, *Rep. Prog. Phys.* **72**, 126401 (2009).
- [25] E. Fradkin and S. H. Shenker, *Phys. Rev. D* **19** (1979).
- [26] D. Foerster, H. B. Nielsen, M. Ninomiya, *Phys. Lett.* **94 B** 135 (1980).
- [27] S. Wenzel, E. Bittner, W. Janke, A. M. J. Schakel, and A. Schiller, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 051601 (2005).
- [28] A. Macia, G. E. Astrakharchik, F. Mazzanti, S. Giorgini, J. Boronat, arXiv:1407.6805 (2014).

VII. 人工磁場下の BOSE HUBBARD モデルの VORTEX 状態相の研究

この章の内容については、

Phase diagrams of Bose-Hubbard model and Haldane-Bose-Hubbard model with complex hopping amplitudes,

Yoshihito Kuno, Takashi Nakafuji, and Ikuo Ichinose, arXiv:1508.01275 (2015).

に投稿中の論文の前半パートの内容である。

光格子上の極低温原子系における人工磁場により生成される量子 vortex についての研究について記述する。我々は人工磁場下にさらされた Bose Hubbard(BH) モデルに焦点をあて研究を行った。人工磁場は II 章に紹介したように実験的に Bose 粒子系でありながら構築することができ [1, 3]、かつその大きさは格子上で自在に変えることが可能である。

これまでの研究は粒子濃度が薄い領域でかつ弱い磁場の状況下でのものが多かった [4, 5]。そこでは vortex 固体の形成が予測されていた。しかしながら、強磁場下でかつ強い相互作用下での量子 vortex の相構造の理解は未だに不足している。特に、格子モデルでの vortex の相構造は理解が不足している。

Choi と Doniach らの古典スピンモデルでの解析 [6] では、安定的な vortex 固体状態が $f = 1/2$, $1/3$ や $1/4$ のとき (f は 1 ブラケットあたりの磁束量子数) 存在することを予言している。また、MC 法を用いた研究 [7–9] や Gross-Pitaevskii 方程式を用いた研究 [10, 11] おいても特定の磁場の値で vortex 固体の存在が示された。また、以前の著者の研究においても MC 法と有効作用を用いた計算で 3 つの vortex 固体パターン $f = 1/2$, $1/3$ の存在を光格子上 2 成分 Bose 粒子系において提示している [12]。

我々はこの章で IV 章でも用いた拡張 MC 法を用いて人工磁場下での BH モデルを調べる。そして、広い磁場領域での vortex 固体状態相を明らかにする。我々の計算では、Hofstadter が 1976 年に提示した有名な論文 [13] において予言された基底状態とほぼすべて対応するような相構造を見出した。さらに出現した vortex 固体相から on-site 斥力の大きさを変えていくと新奇な vortex 量子液体相が出現する。これは虚時間方向の vortex line の揺らぎで特徴づけられる。さらに我々は、この vortex 状態相を duality 変換を用いて解析的に現象の理解を目指した。BH モデルに対応する量子 XY モデルの duality 変換は量子 vortex の状態相の変化を予言しそれは MC 法での数値計算結果と現象論的に一致する。

A. 人工磁場下の Bose Hubbard モデルとその有効作用

我々はこの章で取り上げる BH モデルを紹介し、前章と同じ形式で BH モデルの拡張 MC 法の為の有効作用についての導出をフォローしておく。

2次元正方光格子 BH モデルは、人工磁場のベクトルポテンシャル $A_\mu(r)$ とすると

$$H_{\text{BH}} = -J \sum_{r,\mu} a_r^\dagger e^{-iA_\mu(r)} a_{r+\mu} + \sum_r U n_r^2, \quad (7.46)$$

となる。ここでサイト r は光格子のサイトを示し、 $\mu = \hat{x}, \hat{y}$ は方向のインデックスである。 $a_r (a_r^\dagger)$ は Boson の消滅 (生成) 演算子であり、 $n_r = a_r^\dagger a_r$ は粒子数演算子である。 J はホッピングの大きさ、 U は on-site 斥力の大きさである。これらのパラメータは光格子では広い範囲でコントロール可能である。

さて、 $A_\mu(r)$ は光格子面に垂直な一様人工磁場を生み出すものとして定義される

$$A_\mu(r) = \begin{cases} -2\pi f y & (\mu = \hat{x}) \\ 0 & (\mu = \hat{y}) \end{cases}. \quad (7.47)$$

ここで、 $r = (x, y)$ は2次元光格子のサイト、 f は1プラケットあたりの磁束の大きさである。ここで、 f の取りうる範囲は位相のコンパクト性より $0 \leq f \leq 1$ である。このようにベクトルポテンシャル $A_\mu(r)$ を設定したとき、得られる磁場 B_z は $B_z = \sum_p A_p = 2\pi f$ となる。ここで p は1プラケットを周回するパスである。

以前の章や文献 [12, 16] で、我々は (7.46) と関連するモデルの有効作用を導いて、MC 法による計算を行ってきた。その有効作用は Berry 位相項の量子効果を含んだ実数で定義される作用である。さて、もう一度その有効作用の導出をフォローしておく。我々は経路積分上で定義された boson 場を $a_r = \sqrt{\rho_r + \delta\rho_r} e^{i\theta(r)}$ と分解する。ここで ρ_r はサイト r 上に定義される平均粒子密度である、それは、MC 計算では変分パラメータとしてみなすことができる。一方、変数 $\delta\rho_r$ は平均粒子密度からの量子ゆらぎを表現する。このような変換のもとで経路積分上の量子効果を表す Berry 位相項は $(\partial_\tau \theta(r)) \delta\rho_r$ として与えられる。前の章でも同様の計算を何度もしたように、上記の Boson 場の分解を BH モデル Eq.(7.46) に代入し、虚時間変数 τ を導入し分配関数表示にすると

$$Z_{\text{BH}} = \int [d\delta\rho_r][d\theta(r)] e^{-S_{\text{BH}}}, \quad (7.48)$$

$$S_{\text{BH}} = \int d\tau \left(\sum_r i(\partial_\tau \theta(r)) \delta\rho_r - \sum_{r,\mu} J \sqrt{\rho_r \rho_{r+\mu}} \cos(\theta(r) - \theta(r+\mu) + A_\mu(r)) \right. \\ \left. + JT(\rho, \theta) \delta\rho + \sum_r (U\rho_r^2 + U\delta\rho_r^2 + 2U\rho_r \delta\rho_r) \right). \quad (7.49)$$

ここで、 $JT(\rho, \theta) \delta\rho$ は量子ゆらぎ $\delta\rho_r$ の一次の項からの寄与であり、それはホッピング項 J から得られる。Eq.(7.49) での量子ゆらぎ $O(\delta\rho)$ の項はエネルギー最小の条件より、Berry 位相からの寄与以外は互いにキャンセルされる。こうして経路積分上で $\delta\rho_r$ の積分を実行し、実数の有効作用 S_{qXY}

を得る

$$Z_{\text{qXY}} = \int [d\theta(r)] e^{-S_{\text{qXY}}}, \quad (7.50)$$

$$S_{\text{qXY}} = \int d\tau \left(\sum_r \frac{1}{4U} (\partial_\tau \theta(r))^2 - J \sum_{r,\mu} \sqrt{\rho_r \rho_{r+\mu}} \cos(\theta(r) - \theta(r+\mu) + A_\mu(r)) + \sum_r U \rho_r^2 \right). \quad (7.51)$$

これ以降この有効作用を *quantum XY model* (qXYM) と呼ぶ。

この qXYM は *Lorentz* 対称性をもつ、それゆえ *Higgs* モード に対応する励起モードの存在が示唆される [12, 14]. 実際の実験でこの励起モードが測定されている [15].

B. Extended Quantum Monte-Carlo simulation

この節では、MC 計算の方法と測定物理量、さらに相構造の結果を示す。我々はベクトルポテンシャル $A_\mu(r)$ によってつくられる強磁場によって誘起される量子 vortex のダイナミクスに興味がある、我々は量子 vortex 状態のグローバルな相構造を求めらる。

実際の MC 計算では、光格子上的格子間隔 a_L を単位化し、さらに虚時間軸 τ についても $\Delta\tau$ の格子間隔で離散化する。このとき、qXYM は 3DXY モデルに似たモデルになる。

その格子モデルは以下ようになる

$$\begin{aligned} S_{\text{qXY}}^L &= \sum_r -\frac{1}{4U\Delta\tau} \cos(\theta(r) - \theta(r - \hat{\tau})) \\ &\quad - J\Delta\tau \sum_{r,\mu} \sqrt{\rho_r \rho_{r+\mu}} \cos(\theta(r) - \theta(r+\mu) + A_\mu(r)) + \sum_r U\Delta\tau \rho_r^2, \\ &\equiv \sum_r -\frac{1}{4U\Delta\tau} \cos(\theta(r) - \theta(r - \hat{\tau})) + H_{\text{qXY}}, \end{aligned} \quad (7.52)$$

ここで r は 3 次元格子の格子点である。

ここからは簡潔に MC 計算について説明する、以降この計算法を拡張量子 MC 法 (eQMC) と呼ぶことにする。eQMC では変分パラメータ $\{\rho_r\}$ を MC 法によってエネルギー最小をみつけ変数を決定する。それを分配関数 $[Z_{\text{qXY}}^L]$ を使って表現すると

$$\begin{aligned} [Z_{\text{qXY}}^L] &\equiv \int [d\rho_r] Z_{\text{qXY}}^L(\{\rho_r\}), \\ Z_{\text{qXY}}^L(\{\rho_r\}) &= \int [d\theta(r)] e^{-S_{\text{qXY}}^L}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

この分配関数 Eq.(7.53) の実際の取り扱いでは、 $\{\rho_r\}$ を遅く変動する変数として扱う。一方、より動的な変数 $\theta(r)$ については通常の MC 法のアップデート変数として扱う。実際には今回の計算で扱う BH モデルでは NN 相互作用等が入っていないので平均粒子濃度は系全体で一様な傾向になるである

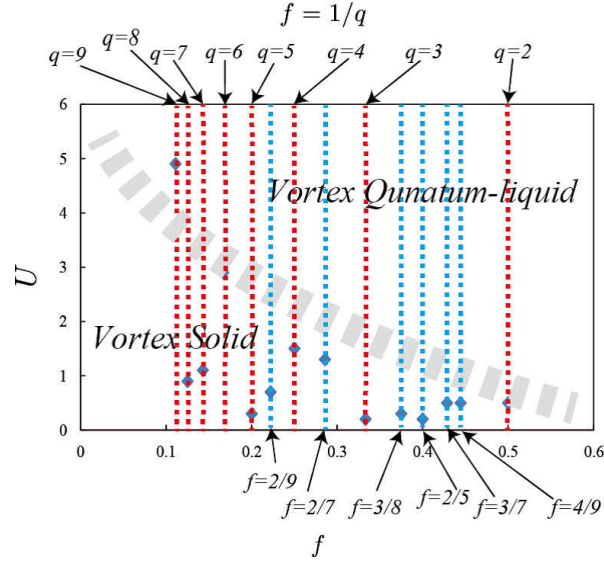


FIG. 32: (Color online) f - U 平面相構造. 赤い点線は $f = 1/q$ の vortex 固体状態を示す. 青い点線は $f = p/q$ vortex 固体状態を示す. vortex 固体-液体状態の相境界は虚時間方向に伸びるの vortex ラインの振る舞いによって決定される.

うことは容易に想定できる、しかしながら粒子密度の自由度を取り入れたアップデートによって、より厳密な基底状態相構造の探索が可能になる. 特に量子 vortex のパターン形成が密度の自由度により促進される.

今回の計算でも eQMC において、ローカルアップデートのメトロポリス法を用いた [17]. 典型的な sweep 数は $(50000 - 150000) \times (5 \text{ samples})$ として測定した (受け入れ率は 40-50%). さらに、*canonical ensemble* を適用し系全体の粒子数を保存した. これは平均粒子密度 $\sum_r \rho_r$ が系全体で一定であるということである. このような想定はもちろん光格子実験に即した系のセットアップである [18]. 系には周期的境界条件を課し、系のサイズは一辺 L の L^3 とする. このとき、虚時間方向については、虚時間の格子間隔 $\Delta\tau$ は $\Delta\tau L = 1/(k_B T)$ で特徴付けされる. これよりその次元は $1/(\text{energy})$ であり. 今回の計算では、 $\Delta\tau = 1$ とセットした.

また、相境界を特定するため、エネルギー C と比熱 E を測定する

$$E = \langle H_{\text{qXY}} \rangle / L^3, \quad C = \langle (H_{\text{qXY}} - EL^3)^2 \rangle / L^3, \quad (7.54)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle$ は Eq.(7.53) についてのアンサンブル平均である

さて、Fig. 32 において、eQMC によって得られた相構造を示す. ここで $J = 5.0$, $\bar{\rho} = 2.0$ ($\bar{\rho}$ は系全体での平均粒子密度) である. 相構造は $(f - U)$ 平面で表示した、特に磁場の強さは $1/9 \leq f \leq 1/2$ の間に注目した.

内部エネルギー E は Fig.33 において、 $f \simeq 0.02$ あたりで小さいピークがみとれる. これは超流動秩序が壊れる相転移を示している. Fig. 32 の相構造より、 f の値をさらに大きくしていくにつ

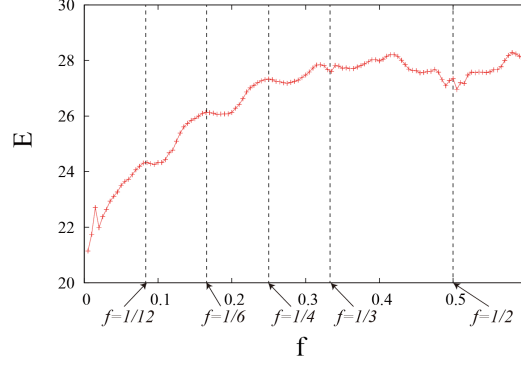


FIG. 33: (Color online) 磁場の強さ f に応じた内部エネルギー E . $f \simeq 0.02$ でエネルギーは小さいピークを示している. これは超流動状態が壊れる相転移を示しているものである. E の振る舞いは安定的な状態が特定の f の値で存在することを示している. 例えば $f = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ のローカルミニマムや, $f = \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ のプラトーなどがみとれる. システムサイズは $L = 12$.

れ、特定の磁場の値 $f = p/q$ で安定的な vortex 固体状態が形成されることがみとれる. ここで、 p と q は互いに素な整数である. 我々は特に $1/9 \leq f \leq 1/2$ の状態相を精査した、そして、そのパラメータ領域では 14 パターンの固体状態が出現することが明らかになった、これは $1/9 \leq f \leq 1/2$ において、 $f = p/q$ として互いに素な整数 p と q が取りうる場合の数に等しい. また、この vortex 固体出現数は格子上自由電子系での Hofstadter[13] が予言した状態数と同じである.

さて、量子 vortex の状態をみるには vortex を直接定義し計算すればよい、量子 vortex $\Omega(r')$ は光格子サイト r に対応する dual 格子上 r' で以下のように定義できる

$$\begin{aligned} \Omega(r') = & \frac{1}{4} \left[\sin(\theta(r + \hat{x}) - \theta(r) + A_{\hat{x}}(r)) \right. \\ & + \sin(\theta(r + \hat{x} + \hat{y}) - \theta(r + \hat{x}) + A_{\hat{y}}(r + \hat{x})) \\ & + \sin(\theta(r + \hat{y}) - \theta(r + \hat{x} + \hat{y}) - A_{\hat{x}}(r + \hat{y})) \\ & \left. + \sin(\theta(r) - \theta(r + \hat{y}) - A_{\hat{y}}(r)) \right]. \end{aligned} \quad (7.55)$$

これを計算して各 vortex 固体状態相の構造を示したのが Fig.34 での vortex スナップショットである. eQMC の vortex 固体状態の形成は格子サイズ L に依存して、その出現が決定される. $f = p/q$ の vortex 固体状態に対して、空間格子のサイズは $qN \times qM$ (N と M は自然数) にする必要がある.

Fig.34 でみとれるように、vortex は光格子の dual サイト上にピン止めされ、固体パターンを形成する. これまでの我々の研究 [12] では MC 計算を一様密度状態に固定して行っていたその為、特定のパターンの固体状態 $f = 1/2, 1/3$ と $1/4$ しか見つけていなかった. しかし、eQCM による今回の研究ではより一般的な $f = p/q$ vortex 固体パターンを見出した. これは、密度変調の自由度に起因する密度ゆらぎが取り入れられるため、不確定性関係から位相のゆらぎが抑えられるためであると考え

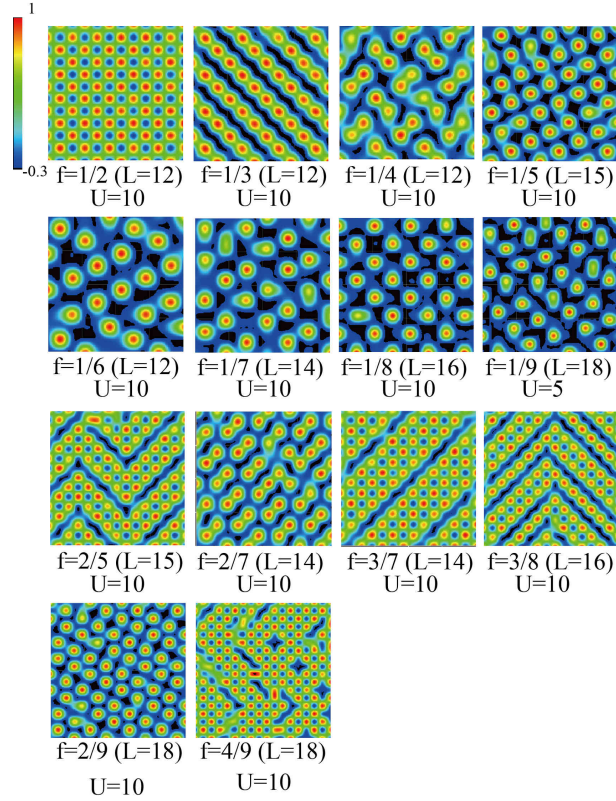


FIG. 34: (Color online) 量子 vortex $\Omega(r')$ のスナップショット. 14 パターンの vortex 固体状態 $f = p/q$ ($1/9 \leq f \leq 1/2$). $J = 5$.

られる. そのとき vortex 固体状態の安定性は高められる.

比熱 C の振る舞いをホッピング J の関数として Fig.35 に示す. $f = \frac{1}{2}$ と $\frac{1}{3}$ の代表的な磁場の値での変化を示した. ホッピング J が小さくなるにつれ vortex 固体状態から無秩序状態相への二次相転移が存在する.

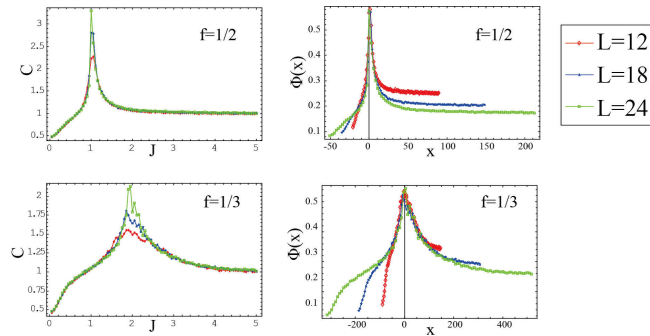


FIG. 35: (Color online) 比熱 C 、系のサイズは $L = 12, 18$ と 24 . 有限サイズスケーリング関数 $\Phi(x)$ 、 $f = \frac{1}{2}$ と $f = \frac{1}{3}$ のとき.

次に、この vortex 固体状態において on-site 斥力 U が系にどのような変化を与えるかをみること

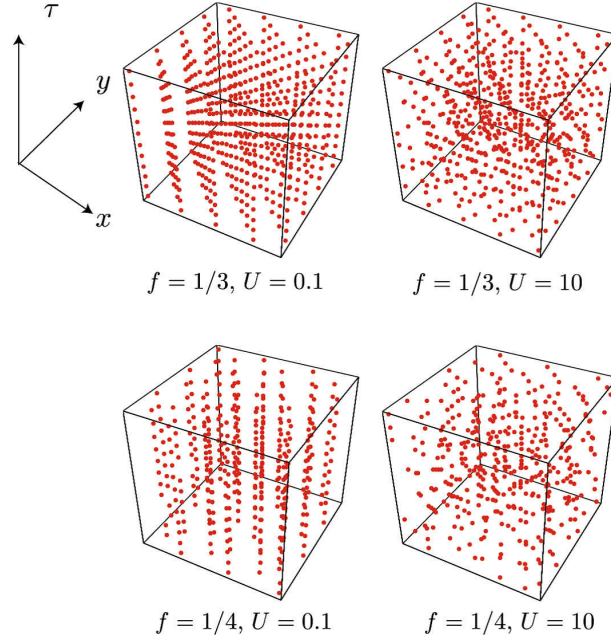


FIG. 36: (Color online) 虚時間方向 τ に沿った典型的な $f = 1/3$ と $1/4$ の vortex ライン赤い点は量子 vortex を示す、これは dual サイト r に定義される。on-site 斥力 U を大きくするにつれ、vortex ラインは絡み合う。 U が小さいとき、vortex 固体状態は虚時間方向に沿って変化しない。

にする。 $f = p/q$ vortex 固体状態に対して U の値を大きくしていくにつれ、虚時間方向に存在する vortex ラインが揺らぎ始める。 Fig.36 は典型的な例として $f = 1/3$ と $1/4$ の vortex ラインを示したものである。 $U = 0.1$ の小さな値のとき、vortex ラインは虚時間方向に対して直線的である。一方、 $U = 10$ の大きな値のとき、vortex ラインは互いに絡み合う。空間的な vortex 配位は固体状態を維持している。このような vortex ラインの異なる振る舞いは量子ゆらぎに起因している。これは空間 2 次元の vortex 固体状態の縮退が存在するかどうかを示したものである。空間 2 次元平面上の vortex 固体状態の縮退状態が重ね合わせの状態にあるときその状態を、vortex 量子液体状態とみなすことができる。

ここで、我々は以下の結論を示す

「on-site 斥力相互作用 U は虚時間方向に直線的な vortex ライン状態を融解し、量子的に揺らいだ vortex ライン状態相を導く」。

C. Duality 変換による vortex モデル

この節では、qXYM に duality 変換を適用して、前節の eQMC で得られた vortex の振る舞いについて解析的に現象の理解を進める。このアプローチは 2 次元の古典 XY モデルに対する解析の拡張である [19, 20].

qXYM の duality 変換は vortex 密度とその topological カレント場で表現される. この変換により vortex 固体形成から on-site 斥力 U によってコントロールされる虚時間方向の vortex ライン揺らぎの説明ができる.

dual-qXYM を導出するため、Eq. (7.52) の第一項と第二項に着目して議論を進める. 分配関数は

$$Z_{\tau+hop} = \int [d\theta(r)] e^{-S_{\tau+hop}}, \quad (7.56)$$

$$S_{\tau+hop} = - \sum_{r,\tau} \frac{1}{4U} \cos(\theta(r+\tau) - \theta(r)) - \sum_{r,\mu} J \cos(\theta(r+\mu) - \theta(r) + A_\mu(r)), \quad (7.57)$$

ここで、 $\Delta\tau \equiv 1$ と単位化し、簡単化のため $\rho_r = \langle \rho_r \rangle = 1$ とする. さらに作用 $S_{\tau+hop}$ を以下のように記法を簡単化する

$$S_{\tau+hop} = - \sum_{r,\mu} J_\mu \cos(\theta(r+\mu) - \theta(r) + A_\mu(r)), \quad (7.58)$$

ここで、格子上的方向ベクトル、カップリング、ベクトルポテンシャルを再定義する

$$\mu = 0, 1(\hat{x}), 2(\hat{y}), J_0 = \frac{1}{8U}, J_1 = J_2 = J \quad (7.59)$$

そして、ベクトルポテンシャルは Landau ゲージをとる and use the gauge

$$A_0(r) = 0, A_1(r) = 2\pi f y, A_2(r) = 0. \quad (7.60)$$

この分配関数 Eq.(7.56) の exponential パートに周期 Gauss 近似を適用して [19, 20],

$$\begin{aligned} & e^{J_\mu \cos(\theta(r+\mu) - \theta(r) + A_\mu(r))} \\ & \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{J_\mu} \exp \left[-\frac{J_\mu}{2} \left(\theta(r+\mu) - \theta(r) + A_\mu(r) - 2\pi n_\mu(r') \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (7.61)$$

となる. ここで、ベクトル場 $n_\mu(r')$ は 3D dual 格子のサイト r' に定義されるものである、この場合は $S_{\tau+hop}$ の \cos 項の 2π 周期性を表現している. Eq. (7.61) の近似を分配関数 Eq.(7.56) に代入して、さらに Poisson 和公式により以下の式を得る

$$\begin{aligned} Z_{\tau+hop} & \propto \int [d\theta(r)] \sum_{l_\mu(r')} \exp \left[- \sum_{r,\mu} \left(\frac{l_\mu^2(r')}{2J_\mu} - il_\mu(r')(\theta(r+\mu) - \theta(r) + A_\mu(r)) \right) \right] \\ & \propto \sum_{l_\mu(r')} \exp \left(- \sum_{r,\mu} \frac{l_\mu^2(r')}{2J_\mu} - il_\mu(r) A_\mu(r) \right) \Pi_r \delta \left(\sum_\mu l_\mu(r') - l_\mu(r' - \mu) \right), \end{aligned} \quad (7.62)$$

ここで、Hubbard-Stratonovich 変換を使った。整数ベクトル場 $l_\mu(r')$ は Boson カレント場として導入した。そして、Eq.(7.62) における δ 関数の拘束条件を解くため、新しいゲージ場 $\tilde{a}_\mu(r)$ を導入する。この場と $l_\mu(r')$ の関係は $l_\mu(r') \equiv \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu \tilde{a}_\lambda(r')$ である。

$l_\mu(r')$ の表現を作用に代入して、

$$Z_{\tau+hop} \propto \sum_{\tilde{a}_\mu(r)} \exp\left(-\sum_{r,\mu} \frac{(\epsilon_{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu \tilde{a}_\lambda(r))^2}{4\pi J_\mu} - i\epsilon_{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu \tilde{a}_\lambda(r) A_\mu(r)\right), \quad (7.63)$$

ここで、演算 ∇_μ は離散的なナブラで、 $\nabla_\mu A_\nu(r) \equiv A_\nu(r+\mu) - A_\nu(r)$ である。ここからさらに、Poisson 和公式を再び用いる。それより、整数場 $\tilde{a}_\mu(r')$ は連続変数 $\phi_\mu(r')$ に変換される。これより分配関数は、

$$\begin{aligned} Z_{\tau+hop} &\propto \int_{-\infty}^{\infty} [d\phi_\mu(r')] \sum_{m_\mu(r')} \exp\left(-\sum_{r,\mu} \frac{(\epsilon_{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu \phi_\lambda(r'))^2}{4\pi J_\mu} - i\epsilon_{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu \phi_\lambda(r') A_\mu(r) + 2\pi i m_\mu(r') \phi_\mu(r')\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [d\phi_\mu(r')] \sum_{m_\mu(r')} \exp\left(-\sum_{r,\mu} \frac{(\epsilon_{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu \phi_\lambda(r'))^2}{4\pi J_\mu} - 2\pi i f_\mu \phi_\mu(r') + 2\pi i m_\mu(r') \phi_\mu(r')\right) \\ &\equiv \sum_{m_\mu(r')} \int_{-\infty}^{\infty} [d\phi_\mu(r')] e^{-S_v}, \end{aligned} \quad (7.64)$$

であり。作用は

$$S_v(\tilde{j}_\mu(r'), \phi_\mu(r')) = \sum_{r',\mu} \left[-\frac{1}{4\pi J_\mu} (\epsilon_{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu \phi_\lambda(r'))^2 + i\phi_\mu(r') \tilde{j}_\mu(r') \right], \quad (7.65)$$

ここで、3成分の flux 場 $f_\mu(r)$ を導入した。 $2\pi f_0(r) = \epsilon_{0ij} \nabla_i A_j(r)$, $f_{1(2)}(r) = 0$, と $\tilde{j}_\mu(r') = 2\pi(m_\mu(r') - f_\mu(r))$ である。

最後にゲージ場 $\phi_\mu(r')$ を積分することで dual モデルを得ることができる。

作用 S_v Eq.(7.65) はローカルゲージ変換 $\phi_\lambda(r') \rightarrow \phi_\lambda(r') - \nabla_\lambda \alpha(r')$ に対して不変である。ここで $\alpha(r')$ は任意のスカラー場である。我々は $\phi(r')$ の積分を実行するためゲージを固定しなければならない。

この目的のため、 $J_\mu = J$ の場合を考える。そして Lorentz ゲージ $\sum_{\mu=0,1,2} \nabla_\mu \phi_\mu = 0$ を用いる。こうして、このゲージ条件は簡潔に経路積分上でゲージ固定項 $(\sum_\mu \nabla_\mu \phi_\mu)^2$ として導入される。

$$S_v - \frac{1}{4\pi J} (\sum_{r',\mu} \nabla_\mu \phi_\mu)^2 = \frac{1}{4\pi J} \sum_{r',\mu,\lambda} \phi_\lambda \nabla_\mu^2 \phi_\lambda + (\tilde{j} - \text{terms}). \quad (7.66)$$

Eq.(7.64) において $\phi(r)$ は積分できて vortex 密度とそのカレント $\tilde{j}_\mu(r')$ で表現される dual モデルを

得る

$$\begin{aligned} \sum_{m_\mu(r')} \int_{-\infty}^{\infty} [d\phi_\mu(r')] e^{-S_v} &= \sum_{m_\mu(r')} e^{-S_{\text{dual}}}, \\ S_{\text{dual}} &= -\frac{\pi}{J} \sum_{r', r''} \tilde{j}_\mu(r) (\sum_\mu \nabla_\mu^2)^{-1}(r, r') \tilde{j}_\mu(r'). \end{aligned} \quad (7.67)$$

ここから、我々は vortex 配位の静的な状態に着目して解析を進める。はじめに vortex 密度-密度相互作用に興味がある、それは Eq.(7.67) の \tilde{j}_0 成分間の相互作用である。それは以下ようになる

$$-\pi J \sum_{r'} \tilde{j}_0(r) \frac{1}{\nabla_1^2 + \nabla_2^2} \tilde{j}_0(r') = \pi J \sum_{\text{B.Z.}} \tilde{j}_0(k) \frac{1}{|k|^2} \tilde{j}_0(-k), \quad (7.68)$$

ここで、 $\tilde{j}_\mu(r) = \sum_{\text{B.Z.}} \tilde{j}_\mu(k) e^{ikr}$ (B.Z. は第一 Brillouin ゾーンを示す)、 $\tilde{k}_\mu = \frac{2}{a_L} \sin \frac{k_\mu a_L}{2}$ である。

さて、この相互作用において長距離領域 $|r' - r''| \gg a_L$ を考えると、Eq.(7.68) は

$$\begin{aligned} \pi J \sum_{\text{B.Z.}} \tilde{j}_0(k) \frac{1}{|k|^2} \tilde{j}_0(-k) &\sim \pi J \sum_{r', r''} \tilde{j}_0(r') \sum_k \frac{1}{k^2} e^{-ik(r' - r'')} \tilde{j}_0(r'') \\ &\propto \pi J \sum_{r', r''} \tilde{j}_0(r') \log |r' - r''| \tilde{j}_0(r'') + \alpha \left(\sum_{r'} \tilde{j}_0(r') \right)^2 = \pi J \sum_{r', r''} (j_0(r') - 2\pi f) \log |r' - r''| (j_0(r') - 2\pi f) \\ &+ \alpha \left(\sum_{r'} (j_0(r') - 2\pi f) \right)^2. \end{aligned} \quad (7.69)$$

ここで、赤外発散を正則化することによって α -項を導入した。 $\alpha \sim \ln(L/a_L)$ である。 current-current 相関 $(j_1 - j_1)$ や $(j_2 - j_2)$ 項も同様の計算で Eq.(7.69) と似た形が得られる、しかしその係数は $1/4U$ である。これより、 U を大きくすることによって current 相関は弱くなり current $\vec{j} = (j_1, j_2)$ の非自明な配置が現れる。

これは、虚時間方向の vortex 密度の相関が弱まることを意味していて、まさにこれは eQMC で得られた結果 Fig.36 の振る舞いと対応する。

D. Vortex 固体 $f = 1/q$ ルール

前節で dual-qXY モデルを導いた、そのモデルでは vortex 密度相互作用は log 型の長距離相互作用となる、さらにその大きさはホッピング J の大きさに比例する。さらに、赤外特異性は vortex 中性条件を与える

$$\left(\sum_{r'} \tilde{j}_0(r') \right)^2 \propto \left(\sum_r (2\pi m_0(r) - 2\pi f) \right)^2 \rightarrow 0. \quad (7.70)$$

それゆえ、ホッピング J が大きいとき、BEC が形成され上記の条件は系の vortex の個数を決定する。ここで再び vortex 密度相互作用を考えてみる

$$J \sum_{r,r'} (2\pi m_0(r) - 2\pi f) \log |r - r'| (2\pi m_0(r') - 2\pi f) + \alpha \left(\sum_r (2\pi m_0(r) - 2\pi f) \right)^2. \quad (7.71)$$

この相互作用から、前節の eQMC によって得られた vortex 固体のパターンについて説明が可能である。

定型的な例として磁場 $f = 1/q$ の場合について説明しよう。

1. 中性条件 Eq.(7.70) のもとで、 $f = 1/q$ と $m_0(r)/2\pi$ は整数である。隣接する q プラケットは $q \times 1/q = 1$ なるようにまとめられる、そのグループで 1 磁束量子を満たす。これを満たすために格子サイズは $qN_x \times qN_y$ である必要がある (N_x と N_y は自然数)。これが系の格子サイズの制約である。
2. 格子系は多数の隣接 q プラケットに分割される。1 量子 vortex は隣接 q プラケットのどこか一か所の dual サイトに配置される。そこから最低エネルギー状態を実現するため、vortex 密度相互作用が最少値を取る必要がある。この状況より vortex の配置パターンが決定される。
3. vortex の配置パターンは $f = 1/q$ vortex 固体状態の縮退数に対応する。原子粒子密度が十分大きいとき、vortex 固体状態の重ね合わせが実現される。それは vortex 間の長距離斥力によって起きる。

このシナリオは簡単に一般の $f = p/q$ 状態に拡張できる。

-
- [1] M. Aidelsburger, M. Atala, M. Lohse, J. T. Barreiro, B. Paredes, and I. Bloch, Phys. Rev. Lett. **111**, 185301 (2013); H. Miyake, G. a. Siviloglou, C. J. Kennedy, W. C. Burton, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **111**, 185302 (2013).
 - [2] D. Jaksch and P. Zoller, New J. Phys. **5**, 56, (2003).
 - [3] S. Tung, V. Schweikhard, and E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **97**, 240402 (2006); R. A. Williams, S. Al-Assam, and C. J. Foot, Phys. Rev. Lett. **104**, 050404 (2010).
 - [4] R. Bhat, M. Holland and L. Carr, Phys. Rev. Lett. **96**, 060405 (2006); R. Bhat, M. Kramer, J. Cooper and M. Holland, Phys. Rev. A. **76**, 043601 (2007); R. Bhat, B. Peden, B. Seaman, M. Kramer, L. Carr and M. Holland, Phys. Rev. A. **74**, 063606 (2007).
 - [5] E. Lundh, Europhys. Lett. **84**, 10007 (2009).
 - [6] M. Y. Choi and S. Doniach, Phys. Rev. B **31**, 4516 (1985).
 - [7] Y. Nakano, K. Kasamatsu, and T. Matsui, Phys. Rev. A **85**, 023622 (2012).

- [8] K. Kasamatsu, Phys. Rev. A **79**, 021604(R) (2009).
- [9] T. Duri and D. K. K. Lee, Phys. Rev. B **81**, 014520 (2010).
- [10] A. Kato, Y. Nakano, K. Kasamatsu, and T. Matsui, Phys. Rev. A **84**, 053623 (2011).
- [11] K. Kasamatsu, J. Low Temp. Phys. **150**, 593 (2007).
- [12] Y. Kuno, K. Suzuki, and I. Ichinose, J. Phys. Soc. Jpn. **82**,124501 (2013).
- [13] D. R. Hofstadter, Phys. Rev. B **14**, 2239 (1976).
- [14] S. D. Huber, B. Theiler, E. Altman, and G. Blatter, Phys. Rev. Lett. **100**, 050404 (2008); S. Gazit, D. Podolsky, and A. Auerbach, Phys. Rev. Lett. **110**, 140401 (2013).
- [15] U. Bissbort, S. Go. Ntze, Y. Li, J. Heinze, J. S. Krauser, M. Weinberg, C. Becker, K. Sengstock, and W. Hofstetter: Phys. Rev. Lett. **106**, 205303 (2011); M. Endres, T. Fukuhara, D. Pekker, M. Cheneau, P. Schau, C. Gross, E. Demler, S. Kuhr, and I. Bloch: Nature **487**, 454 (2012).
- [16] Y. Kuno, K. Suzuki, and I. Ichinose, J. Phys. Soc. Jpn. **83**, 074501 (2014); Y. Kuno, K. Suzuki, and I. Ichinose, Phys. Rev. A **90**, 063620 (2014).
- [17] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. M. Teller, and E. Teller, J. Chem. Phys. **21**, 1087 (1953); J. M. Thijssen, Computational Physics (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [18] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
- [19] R. Savit, Rev. Mod. Phys. **52**, 453 (1980); J.B.Kogut, T.Banks, and R.Myerson, Nucl.Phys. **B 129**, 493 (1977).
- [20] N. Nagaosa, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics* (Springer, 1999).

VIII. HONEYCOMB 光格子中の BOSE-HUBBARD モデルの研究

この章では前章と同様の解析手法を用いて honeycomb 格子上の Haldane-Bose-Hubbard model (HBHM) についての研究について述べる.

この章の内容については、

Phase diagrams of Bose-Hubbard model and Haldane-Bose-Hubbard model with complex hopping amplitudes,

Yoshihito Kuno, Takashi Nakafuji, and Ikuo Ichinose, arXiv:1508.01275 (2015).

に投稿中論文の後半パートの内容である.

Haldane モデル [1] は honeycomb 格子上で定義される fermion 場を対象としたモデルとして有名なモデルであり、このモデルは量子ホール効果を外部磁場の存在なしで持つことが知られている. これは、モデルが定義される格子形状とかつモデルのもつ時間反転対称性からくる励起スペクトルがバンド構造をもちかつそのバンド間にギャップが存在することからくる帰結である. このように理論的側面で多くの注目を集めてきたモデルである.

しかしながら、近年極低温原子系においても honeycomb 格子が構築可能となり、かつそこに boson 原子でも fermio 原子でもトラップが可能になった [2]. さらに、その格子をある周期と楕円軌道で揺らしてやるとその時間平均のハミルトニアンには人工的な flux を原子のホッピングに付加することができ実際に、boson 粒子系、fermi 粒子系ともに Haldane ライクな Hubbard モデルを原子系で構築することができる [2]. 我々は今回 boson 粒子系での Hubbard モデルつまりは Haldane-Bose-Hubbard model (HBHM) について研究をおこなった. HBHM は実験システムで構築が可能であるが未だ詳細な新奇秩序状態を含む相構造は明らかになっていない. 更には、励起モード、特に、もとの Haldane モデルから想定されるエッジモードの存在等についての研究は行われていなかった. 我々はこれまでの章で紹介してきた eQMC の手法をもちいて HBHM を解析する.

A. Haldane Bose Hubbard モデル

先行研究 [3] にあるように、honeycomb 格子上の HBHM のハミルトニアンは

$$H_{\text{HBH}} = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} a_i^\dagger a_j - J_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} e^{-i\phi} a_i^\dagger a_j + U \sum_i a_i^\dagger a_i a_i^\dagger a_i, \quad (8.72)$$

である. ここで、 $\langle i,j \rangle$ は honeycomb 格子 NN サイトを示し、 $\langle\langle i,j \rangle\rangle$ は NNN サイトを示す. パラメータ J_1 と J_2 は NN と NNN サイト間の hopping の大きさである. U は on-site 斥力である. また、 ϕ は NNN サイト間 hopping の際に付随する位相因子である、これは honeycomb 格子全体を早い周期で楕円軌道で揺らすことによって実験的に構築できる時間平均的な効果である [2].

さて、前章と同様に、HBHM の有効作用を導出すると、

$$S_{\text{HBH}} = \int d\tau \left(- \sum_i \frac{1}{4U} (i\partial_\tau \theta(i))^2 - J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \sqrt{\rho_i \rho_j} \cos(\theta_i - \theta_j) - J_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} \sqrt{\rho_i \rho_j} \cos(\theta_i - \theta_j + \phi) \right), \quad (8.73)$$

である。ここで、変数 θ_i は原子場の位相、 ρ_i はサイト i 上の原子の平均粒子密度である。

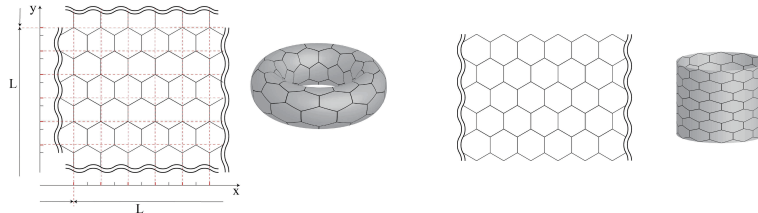


FIG. 37: 周期的境界条件の Honeycomb 格子、これは torus タイプである。一方、右図はジグザグ境界のシリンドラタイプである。系の大きさは A 副格子から決定される。 A 副格子は正方格子とみなせる、このサイズが $L \times L$ 格子として考える。虚時間 τ 方向の格子は $L_\tau = 8$ とし周期的境界条件を課す。

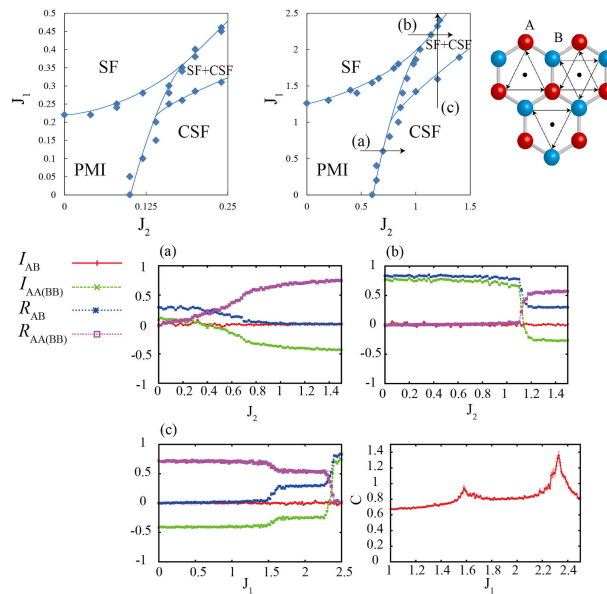


FIG. 38: BHM の相構造、 $U = 0.1$ (上段左図) のとき、 $U = 10$ のとき (上段中央)。特筆すべき点は SF 相と CSF 相の間に、SF+CSF 共存相が出現する。ライン (c) に沿った比熱は C (下段右) は $J_1 \simeq 1.6, 2.3$ の点でダブルピークで隔てられており共存相は安定に存在する。

B. 相構造とエッジ状態

前章から用いられている eQMC 法を用いて HBHM の相構造を調べるため、我々は以下のことを考慮する;

1. 全ての計算で各サイトの平均粒子濃度は unit-filling ケースを考える. つまり $\rho_i = \rho = 1$ とし
てセットする.
2. NNN サイト間 hopping に付随する flux は代表的な値として $\phi = \pi/2$ を取る. これは文献 [3]
と同じ設定である.
3. 系のジオメトリーは torus タイプとシリンダータイプを考える (Fig.37).
4. 状態相を分類するために以下のカレント演算子を測定する

$$I_{ij} \equiv 2 \operatorname{Im} \left(J_{ij} \langle e^{i(\theta_i - \theta_j)} \rangle \right), \quad (8.74)$$

また、以下のリンク間の位相相関も測定する

$$R_{ij} \equiv 2 \operatorname{Re} \left(J_{ij} \langle e^{i(\theta_i - \theta_j)} \rangle \right), \quad (8.75)$$

ここで、 J_{ij} はリンクが NN のとき J_1 であり、リンクが NNN のとき $J_2 e^{i\phi}$ に対応している.

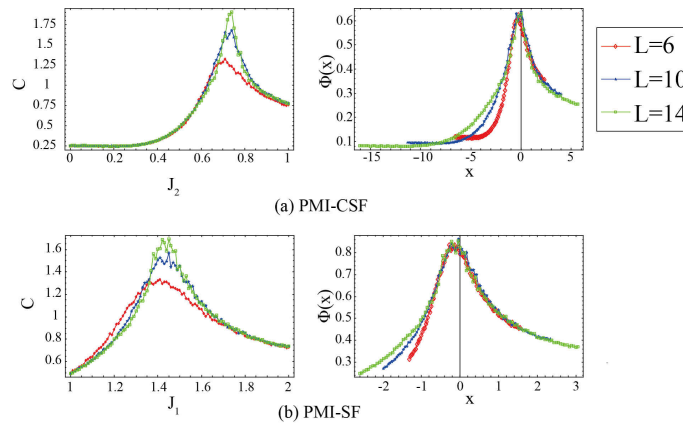


FIG. 39: 比熱 C と FSS のスケーリング関数 $\Phi(x)$. 上段図は、PMI-CSF 相転移. 下段図は、PMI-SF である. FSS は二次相転移の性質を示している. $U = 10$.

上記の設定のもと、我々は HBHM の相構造を eQMC 法を用いて明らかにする. 前章までと同じく内部エネルギー E と比熱を C 測定することで相境界を特定する. さらに各パラメータ固定化での

状態密度 $N(S)$ を測定することにより相転移次数を判別する

$$\begin{aligned} Z_{\text{HBH}} &= \int [d\theta(r)] e^{-S_{\text{HBH}}} = \int dS e^{-S} \int [d\theta(r)] \delta(S - S_{\text{HBH}}) \\ &= \int dS e^{-S} N(S). \end{aligned} \quad (8.76)$$

特に、相転移点直上で $N(S)$ を計算する。 $e^{-S}N(S)$ がダブルピークを持つときその状態相は一次転移であり、一方、シングルピークを持つとき二次転移を示す。

さて、ここからは得られた結果について述べていく。まず、Fig.38 に周期的境界条件のときのグローバル相構造を示す。ここで、on-site 斥力は $U = 0.1$ と $U = 10$ のときを調べた。相構造の中には、4つの状態相が存在することが明らかになった。そのうち3つの状態相は先行研究 [3] において明らかにされてた。 J_1/U と J_2/U が小さいとき、plaquette Mott insulator (PMI) と呼ばれる有限の局所相関 $I_{AA(BB)}^{\text{PMI}} \neq 0$ を持つ状態相、 $J_1 \gg J_2$ のときは、通常の superfluid 相 (SF) が出現する、それは $I_{AA(BB)}^{\text{SF}} > 0$ かつ $I_{AB}^{\text{SF}} = 0$ で特徴づけされる。 $J_1 \ll J_2$ のとき、HBHM の第二項 J_2 項の寄与が支配的になり chiral SF (CSF) が形成される、これは $I_{AA(BB)}^{\text{CSF}} < 0$ で特徴づけされる。

さて、我々の eQMC 法では第四の状態が出現する結果を得た、それは、SF 相と CSF 相の共存相である。その共存相付近の比熱 C の計算を Fig.38 に示す、これは明らかに二回相転移が存在し、SF 相と CSF 相の間に SF 相と CSF 相の共存相が出現していることを示唆している。

さらに、NN サイト間と NNN 間のカレントを状態相を決定するために計算した。その結果を Fig.38 に示す。SF 相において、同じ副格子間のカレントは $I_{AA}^{\text{SF}} > 0$ であり、一方 CSF 相においては、 $I_{AA}^{\text{CSF}} < 0$ を示す。これは先行研究 [3] と対応する。SF+CSF 共存相においては $I_{AA}^{\text{CSF}} < I_{AA}^{\text{co}} < I_{AA}^{\text{SF}}$ なる関係をもつ。

また、on-site 斥力 U の効果は Fig.38 をみてもわかるように相構造に大きな影響を及ぼさないことがわかった。しかしながら、on-site 斥力を弱くしていくと相境界はシフトする、これは密度の量子ゆらぎが大きくなりそれに連動して量子位相 θ_i の揺らぎが小さくなり位相の秩序状態を形成しやすくなるからである。

さらに、比熱 C と FSS のスケーリング関数を Fig.39 に示す。この結果より、PMI-SF かつ PMI-CSF の相転移は二次相転移であることがわかった。

さて次に、HBHM において NNN サイト間の hopping に位相因子、つまりは flux が付随してくるので、先ほど求めた各状態相での量子位相によって形成される vortex が出現するかどうかをみることは興味深い、とくに CSF 相での位相の分布を vortex 形成で識別することは興味深い。

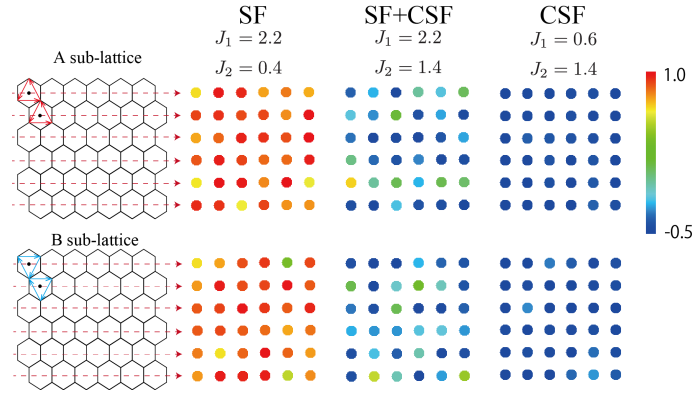


FIG. 40: Vortex Ω_A と Ω_B の SF 相, CSF 相と SF+CSF 相におけるスナップショット. CSF 相では, 120° -構造を形成する.

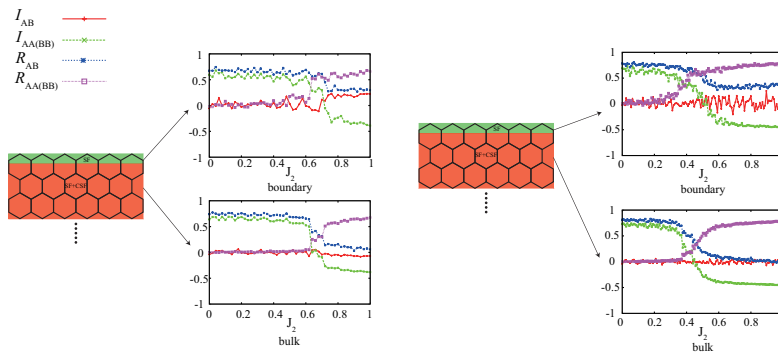


FIG. 41: ジグザグ境界条件におけるさまざまな物理量の振る舞い. ジグザグ境界近傍の擬 1 次元 SF 状態、バルク内部は CSF 状態である. 左図は $U = 0.5$ で右図は $U = 10$. システムサイズは $L = 6$

この目的のため、我々は以下に定義される三角 vortex $\Omega_{A(B)}(r)$ を各副格子に対して eQMC 法で測定した、

$$\Omega_{A(B)}(r) = \frac{1}{3} \left(\sin(\theta_2 - \theta_1 + \phi) + \sin(\theta_3 - \theta_2 + \phi) + \sin(\theta_1 - \theta_3 + \phi) \right), \quad (8.77)$$

ここで、Fig.40 をみればどのような三角形で vortex を計測したかをみることができる、また $\phi = \pi/2$ をもちろん考えている.

上記の式から三角 vortex は、一様な位相 $\theta_i(r)$ のときは $\Omega_{A(B)}(r) = 1$ となる、一方、 120° -構造のときは $\Omega_{A(B)}(r) = -1/2$ となるのが容易に想定できる.

Fig.40 に $\Omega_{A(B)}(r)$ のスナップショットを示す. 結果が示すように SF 相では一様な位相状態を持つ. 一方、 120° -構造は予想通り CSF 相で実現している. さらに、SF+CSF 共存相では vortex のパターンははっきりとしていない. しかしながら相分離が起きていないことはみてとれる.

最後に、シリンダータイプの系での HBHM について述べる. (Fig.37 をみよ). 特に、シリンダー系のジグザグエッジ近傍の BEC の振る舞いについて調べる. 最近の実験ではこのようなはっきりとした端境界も optical-box trap method[4] という手法で実験的に構築できる. また、最近、弱い斥力下での HBHM の SF 相に対して、端近傍での Bogoliubov 励起が調べられた [5].

一方で、我々は SF+CSF 相を対象とし eQMC 法を使った. エッジ近傍では擬一次元的な励起が形成され、HBHM の第一項 J_1 項が支配的になる. よって、SF 相がシリンダーのエッジ近傍で現れる. ここで Fig.41 は、 I_{ij} と R_{ij} をエッジ近傍で測定したものである. Fig.41 の概念図で示したように系のバルク内部で CSF 相であるがシリンダーのエッジ近傍では SF 相が出現することがわかる. このようにして、システム端の状態も eQMC 法で測定することができる.

-
- [1] F. D. M. Haldane, Phys.Rev.Lett. **61**, 2015 (1988).
 - [2] G. Jotzu, M. Messer, R. Desbuquois, M. Lebrat, T. Uehlinger, D. Greif, and T. Esslinger, Nature **515**, 237 (2014).
 - [3] I. Vasic, A. Petrescu, K. Le Hur, and W. Hofstetter, Phys. Rev. B **91**, 094502 (2015).
 - [4] A. L. Gaunt, T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic, Phys. Rev. Lett. **110**, 200406 (2013).
 - [5] S. Furukawa and M. Ueda, arXiv:1506.04556.

IX. まとめと今後の展望

さて最後に II 章から VIII でのまとめと今後の展望について書くことにする。

II 章では主に近年大きな成功を収めた光格子系の実験を焦点にあて、その理論的側面を簡潔に記した。原子の内部自由度をうまく用いたトラッピング技法の紹介から光格子系の構築法を簡潔に紹介した。また、光格子上の基本的モデルである Bose-Hubbard モデルを紹介し、そのモデルと性質と理論と実験の対応を紹介した。さらに、光格子上の人工磁場生成法など最新のトピックを理論的側面から紹介した。

III 章では主に場の量子論を基礎とした格子ゲージ理論の基礎的事項、特に compact $U(1)$ ゲージ理論に焦点を絞ってこれまでに知られている理論的側面について述べた。特に格子ゲージ理論において重要な帰結である物質場の閉じ込め、非閉じ込め現象を Kogut-Susskind Hamiltonian 形式で説明を試みた。この章の内容は VI 章での内容の理論的動機を与えるものであった。格子ゲージ理論は様々な数値計算上の困難や理論不整合が指摘されることがあるが、今でも大規模数値計算を用いた新しい進展や (特に QCD において)、極低温原子系を用いた量子シミュレーションの目標とすべきモデルを提供しており今後も重要な理論としての立場を保つであろう。

IV 章では前の章と変わって光格子上の 2 成分 Bosonic t -J モデルにおけるランダム Rabi 振動によって生じる新奇秩序状態を明らかにした。これは Random Field Induced Order (RFIO) 相と呼ばれ、2 成分原子間のランダムな Raman 遷移によって 2 成分原子位相差にグローバルな秩序状態が現れるものである。これまでの研究では古典的モデルでの RFIO 相は示唆されていたが、我々は量子効果を含んだ Monte-Carlo 法をもちいて量子系でも RFIO 相が存在することをはっきりと示した。また解析的なレプリカ法でも RFIO 状態を確認し、さらに、RFIO 相における vortex の閉じ込め現象も示した。今後の展望として、RFIO 相は二重縮退の線形結合で記述できる重ね合わせの状態が実現する可能性があり、かなり安定的な量子ビットの候補として期待することができる。そのような応用的側面の研究が望まれる。

V 章では、光格子格子上 2 成分 Bosonic t -J モデルにおける実験的に構築が可能な dipole-dipole 相互作用による基底状態相構造を探索した。ここでは原子の有効斥力と dipole-dipole 相互作用作用が生み出す新奇の超固体相を量子効果の含んだ Monte-Carlo 法で明らかにした。ここで、Checker-board 型超固体相と Stripe 型の超固体相が出現することがわかった。また、Gutzwiller 平均場法では超固体相が出現しなかったことからそれらは量子効果が発現の起源の可能性があると示された。また、この系の秩序状態に対して人工磁場に対する状態の安定性を調べた。今後の展望として、超固体相の有無を更に詳しく理論的に探索する必要がある、特に今後このような強い斥力効果のある格子系の数値解析は時系列量子 Monte-Carlo 法を用いることで更に詳しく調べることができる可能性がある。

VI 章では光格子系極低温原子系を用いた格子ゲージ理論の量子シミュレーションとして $U(1)$ gauge-

Higgs モデルの量子シミュレータについて説明した. 光格子上のある拡張 Bose-Hubbard モデルは低エネルギー有効理論として $U(1)$ gauge-Higgs モデルに対応する. ここで, $U(1)$ ゲージ理論の物理変数と原子系の物理変数の明確な対応を見た. さらに, その極低温原子系で構築される $U(1)$ gauge-Higgs モデルの基底状態を求め, Higgs 相と閉じ込め相を見出した. また, 各状態相での static チャージペア間に張られる閉じ込めの電束についての動力学を 2 種類の Gross-Pitaevskii 方程式で追った. 閉じ込め相と Higgs 相では理論的に予言される現象を確認し, 更に, 原子系で現実的に測定できる原子密度の振る舞いでゲージ理論における電場のダイナミクスを示した. また, $U(1)$ gauge-Higgs モデルを 2D 光格子系で構築するための提案を理論的におこなった, 特に Gauss 則を構築するための拡張 Bose-Hubbard モデルにおける相互作用のチューニング条件を経路積分形式の摂動論で三層構造の光格子系を想定して導出した, これは全く新しい原子間相互作用のチューニングアプローチである. 今後の展望として, $(1+1)$ 次元系の $U(1)$ gauge-Higgs モデルの構築に取り組む必要がある. 1 次元光格子系は制御性が高く, 2D モデルより簡単に Gauss 則を構築でき制御できる可能性がある. さらに 1 次元拡張 Bose-Hubbard モデルの基底状態において厳密なゲージ理論的解釈を与えることができるであろう.

VII 章, VIII 章では光格子上 Bose-Hubbard モデルにおける人工磁場が創り出す新奇 vortex 状態を明らかにした. 特に光格子系では人工磁場は非常に大きな領域まで実験的に構築でき磁場の広いパラメータ領域での状態相を経路積分量子 Monte-Carlo 法で明らかにした. ホッピングが大きいパラメータ領域で磁場を変えると特定の磁場の値 $f = p/q$ で量子 vortex の固体状態が現れることを見出した. これは 1976 年ホフスタッターが解析的に予言した状態と完全に一致した. さらに, この系について on-site 斥力を強くしていくと新奇な vortex 液体状態をみた. このような状態転移を解析的に duality 変換を用いて調べ, 数値計算結果の状態を解析し, その転移の機構を明らかにした.

また, ごく最近実験的に構築された Honeycomb 光格子上の Haldane-Bose-Hubbard モデルも解析した, 上述の経路積分量子 Monte-Carlo 法でのアプローチで未だ完全に知られていない基底状態相構造を明らかにした. また, Honeycomb 格子系の geometry に起因するエッジ状態を調べ, バルク内部とエッジで異なる状態相が出現することを見出した. 今後の展望として, さらに Honeycomb 格子系の物理に焦点を当て調べていく必要がある. 特に Haldane-Bose-Hubbard モデルは不思議な topological 状態やエッジ励起を持つ可能性がある. また, ホッピングの値を正にし hard-core boson 系の Haldane-Bose-Hubbard モデルを考えると Honeycomb 光格子上では強くフラストレートした反強磁性スピン XY モデルにマップできる, このモデルもまた多くの論争を呼んでるモデルである. 強いフラストレーションのため系の基底状態相構造がはっきりとにわかっていない. DMRG や厳密対角化法等の数値計算も多く行われているが, コンセンサスをもつ結論は出ていない.

更に大きな今後の展望について, 今後, 極低温原子系の非平衡ダイナミクスの研究に多くの研究者が興味を持ち始めている. そうした中で, 特に光格子原子系を open system としてとらえ, 場の理

論を用いて microscopic な視点からシステムを捉え直し、量子効果の絡んだ非平衡現象の解明に注目が集まるであろう。さらには極低温原子系でよく用いられる Gross-Pitevskii 方程式に対して、広い意味で外的な影響などからくるゆらぎを含んだ数値計算法の開発が望まれている。

X. ACKNOWLEDGMENT

6 年間、本研究を通して多大なご指導をいただいた一瀬郁夫教授には感謝申し上げます。様々な面で多大なサポートをしていただきました。博士課程生活において経済的には、名古屋工業大学のティーチングアシスタントやリサーチアシスタントの機会等を提供していただいたことにも感謝しています。

本研究活動におきましては、一瀬研究室の方々特に、片岡啓介博士、鈴木啓太氏、森 崇将氏、中藤 敬氏らに大変お世話になりました。

また、第 IV 章は森 崇将氏、第 V 章は鈴木啓太氏、VII 章と VIII 章では中藤 敬氏に多大な貢献をしていただきました。V 章では近畿大学の松居哲生教授、笠松健一准教授、京都大学の高橋義朗教授との共同研究であり多大なサポートをしていただきましたここにお礼申し上げます。

これまでの研究室のメンバー、小島康輔氏、小澤秀敏氏、野口剛裕氏、長谷川涼太氏、稲生隼人氏、牛龍基氏をはじめ、卒業された方々も含めてお世話になりました。

最後にこれまで支えてくれた両親に感謝します。

本研究は、日本学術振興会特別研究員 DC 2 (7370) における科研費 (No. 15J07370) で行われたものであり、ここに深く感謝します。