

電荷転送素子を用いた単一同調形回路の一設計法

正 員 岩波 保則†

正 員 吉田 文弥††

正 員 池田 哲夫††

A Design of Single-Tuned Band-Pass Filters
Using Charge Transfer Device

Yasunori IWANAMI†, Bunya YOSHIDA†† and

Tetsuo IKEDA††, Regular Members

あらまし 近年アナログフィルタの能動化, 小形化に伴い, 電荷転送素子(CTD)の信号遅延効果を利用した非巡回形トランスバーサルCTDフィルタや巡回形CTDフィルタを構成する試みが活発になされている。後者は前者に比べ, 巡回ループによる極を持つため安定性に問題を生じるが, 少ない次数で急しゅんな周波数特性を得ることができ, 高い Q の単一同調形回路などについては巡回形回路の方が適している。本論文では, 従来の2次形CTD単一同調形回路^{(6),(7)}に比べ, Q に対する安定度の一層優れたCTD単一同調形回路の一設計法を述べる。この設計法は, まず入力周波数に応じて Z 平面上のある閉路に沿って動く極および零点を仮想して低係数感度の伝達関数を設計し, 次にそれを経済的な標準形回路により構成するものである。又, 設計を行ったフィルタの実験による動作の確認も行う。更に, 本設計法の主題である, 極および零点が周波数に応じて動けるという概念の一般的な考察を付録に示す。

1. まえがき

電荷転送素子CTD(Charge Transfer Device)⁽¹⁾は本来アナログシフトレジスタの機能を有しナイキスト周波数の $1/2$ 以下で信号遅延効果を持つ。

この信号遅延効果を利用し, デジタルフィルタをシミュレートしたのがCTDフィルタであり, 設計理論は本質的にはデジタルフィルタ^{(2),(3)}と同じである。CTDフィルタはデジタルフィルタに比較すると次のような長所および短所を持つ。(長所): 信号をアナログ的に処理するため, 量子化過程の省略, 乗算や加減算などの演算の高速化および回路の簡略化などができる。(短所): 実現できる重み係数の最大最小比が十分大きくとれないため, 急しゅんなあるいは精密な周波数特性を実現しにくく, 温度変化, 経年変化などアナログ回路特有の弱点がある。

又, ここで述べるような巡回形CTDフィルタは, 現

在まで数多く研究されてきている非巡回形トランスバーサルCTDフィルタ^{(1),(4)}に比べると, 一般的に通過域での巡回ループ係数感度が大きく, 重み係数の変動による安定度が問題となる。従って, 零点しか持たないトランスバーサルCTDフィルタが, 重み係数の決定において従来のデジタルフィルタ理論における重み係数決定法^{(3),(5)}を直接応用できるのに対し⁽⁴⁾, 巡回形CTDフィルタにおいてそれを行うことは必ずしも適切ではない。それは, 巡回形CTDフィルタでは, 係数感度が大きいからといって, デジタルフィルタのように係数語長(係数の精度)を大きくとることができないからである。従って, 2次巡回形デジタルフィルタの回路をそのまま用いた従来のCTD単一同調形回路^{(6),(7)}は, 係数感度の点から高い Q を実現するには適していない。そこで, 本論文ではこの点を改良し, Q に対する安定度が優れた単一同調形回路の一設計法として, (i) 極および零点が入力周波数に応じて Z 平面上のある閉路に沿って動けるという考え方を採用することにより低係数感度の伝達関数を設計し, (ii) それを経済的な標準形回路(canonic circuit)⁽⁸⁾で構成するという方法を示す。又, CTDとしてBBB(Bucket Brigade Device)遅延線, 重み付け加減算器として演算増幅器を用いて実験を行い, 設計理論の確

† 東北大学工学部情報工学教室, 仙台市
Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai-shi,
980 Japan

†† 名古屋工業大学工学部電気工学科, 名古屋市
Faculty of Engineering, Nagoya Institute of Technology,
Nagoya-shi, 466 Japan

論文番号: 昭 55-158[A-40]

認も行う。更に、付録で本伝達関数設計法の主題である、極および零点が入力周波数に応じZ平面上のある閉路に沿って動くという概念の一般的な考察を行い、Z平面上で極および零点が動くことのできる軌跡や極の動く軌跡からの回路の安定判別法などを示す。

2. 予備的事項

2.1 Z平面における周波数応答の幾何学的解釈⁽²⁾

図1に文献(6)、(7)で示された単一同調形回路の極、零点配置を示す。この場合、伝達関数H(Z)は次式で与えられる。

$$H(Z) = \beta \frac{Z^2 - K_0 Z}{Z^2 - K_1 Z + K_2} \tag{1}$$

$$= \beta \frac{(Z - \delta_1)(Z - \delta_2)}{(Z - r_1)(Z - r_2)}$$

式(1)で、βは定数、r₁, r₂及びδ₁, δ₂はそれぞれ図1に示す複素共役極と零点である。

式(1)の周波数応答は、式(1)にZ=e^{jωT}を代入すれば求められる。ここでTは単位遅延時間、ωは角周波数である。この周波数応答を図1のZ平面上で考えると、周波数応答は極r₁, r₂, 零点δ₁, δ₂からZ=e^{jωT}で表される周波数点Zへのそれぞれのベクトルの絶対値d₁, d₂, l₁, l₂と偏角φ₁, φ₂, φ₁, φ₂で完全に決定される。すなわち、振幅応答および位相応答はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} |H(e^{j\omega T})| &= \beta(l_1 l_2) / (d_1 d_2) \\ \arg\{H(e^{j\omega T})\} &= (\phi_1 + \phi_2) - (\phi_1 + \phi_2) \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

2.2 素子感度について

回路の安定度を知るための素子感度として、本論文

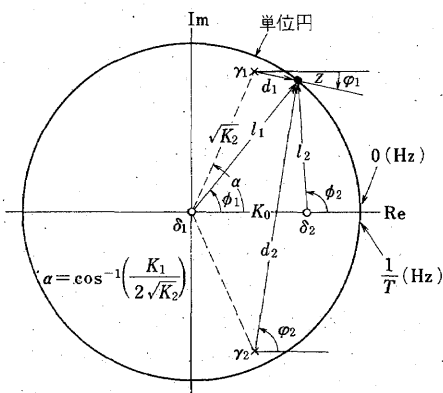


図1 Z平面における周波数応答の幾何学的解釈
Fig.1-Geometric interpretation of frequency response on Z plane.

では回路のQや利得などを表す関数fが変数x_i(i=1~k)の関数であるとき、fのx_iに対する感度として、

$$Sf_{x_i} = (\partial f / \partial x_i) \cdot (x_i / f) \tag{3}$$

を用いるものとし、変数x_i(i=1~k)の微小変化による関数fの最悪偏差を評価するのに、感度の絶対値和、

$$\sum_{i=1}^k |Sf_{x_i}| \tag{4}$$

を用いるものとする^{(9), (10)}。

3. 極r及び零点δを用いた単一同調形回路の設計法

3.1 極rのみを持つ伝達関数の設計

単一同調特性を持つ巡回形回路は、普通、式(1)の伝達関数の標準形回路 (canonic form circuit)[†]によって構成される^{(6), (7)}。しかし、高いQを実現するためには、図1の共振極r₁, r₂を単位円に極めて近づけなければならず、その場合、図6で示すように、安定度が極度に悪化してしまう。従って、式(1)の標準形構成による単一同調形回路は高いQの実現には適していない。そこで本論文では、安定度を一層改善した単一同調形回路の一設計法を以下に示す。

一般に、伝達関数H(Z)の極、零点配置は、S-Z変換による方法^{(2), (3)}、あるいはZ領域で直接H(Z)を設計する方法⁽³⁾などによって決定されるが、いずれにしても、あるQの高い周波数特性を実現する低係数感度の伝達関数の極、零点配置を直観的に見出すのは困難である。しかし、ここで述べるように、入力周波数に応じ周波数点のみならず極および零点がZ平面上のある閉路に沿って動けるという考え方を採用することにより、Z平面上で周波数応答を幾何学的に解釈し、Qが高く且つ低係数感度の伝達関数の形を容易に見出すことができ、更に、その伝達関数を経済的な標準形回路で構成することにより、Qに対する安定度の優れた単一同調形回路を得ることができる。

さて、図2のZ平面上で、単一の極rは、内円を周波数点Zの(2N-1)倍の角速度で時計方向に回転するものとする。この場合、極rは次式で表される^{††}。

$$\left. \begin{aligned} r &= K_2 Z^{-(2N-1)} - K_1, \quad Z = e^{j\omega T} \\ K_1, K_2 &\geq 0, \quad N = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

次に、極rのみを持つ伝達関数を、一般に、

† ある伝達関数を回路構成するのに、乗算器、加算器、遅延素子数が最小の回路⁽¹¹⁾。
†† 式(5)の導出は、図2から明らかであるが、正確には付録1によれば良い。

$$H(Z) = \beta \frac{Z}{Z-r}, \quad (\beta: \text{定数}) \quad (6)$$

で定義すると、式(6)は二つのベクトル Z と $(Z-r)$ の比になっているから、 Z 平面上で **2.1** と同様の幾何学的解釈ができる。今例として、式(5)で $N=2$ の場合を考えると、図2で、周波数点 Z が $f=0 \sim 1/T$ (Hz) で単位円周上を反時計方向に1回転するのに対応し、極 r は点 $(K_2 - K_1, j0)$ を始点とし内円を時計方向に3回転する。この極 r の3回転の中で周波数点 Z と極 r が最も接近するのは、極 r の第2回転目の $f=1/(2T)$ (Hz) であり、そこで式(6)の分母は極めて大きくなり共振を生じる。この共振点付近では、周波数点 Z と極 r が入力周波数の変化に対し高速度ですれ違うために、共振点における極 r と周波数点 (単位円) の距離 $\{1 - (K_1 + K_2)\}$ が多少大きくても選択度 Q を高くすることができる。これは共振点の利得が K_1, K_2 の変化に対して鈍感であるということであり、共振点の安定度を確保しつつ Q を高くできることに通じる。

又、図2より、共振点のほかに極 r の第1回転目の始めと終り近く、第3回転目の始め近くの計3箇所て極 r と周波数点 Z がやや接近してすれ違う地点があり、それらの地点で若干の共振現象、すなわち不要共振を生じることが分かる。更に図2より、これらの不要共振レベルは、 $(K_1 + K_2)$ が一定ならば、 K_1 が小さく K_2 が大きい程大きくなることも分かる。

さて、式(5)を式(6)に代入して整理すると、次のような Z の有理関数が得られる。

$$H(Z) = \beta \frac{Z^{2N}}{Z^{2N} + K_1 Z^{2N-1} - K_2} \quad (7)$$

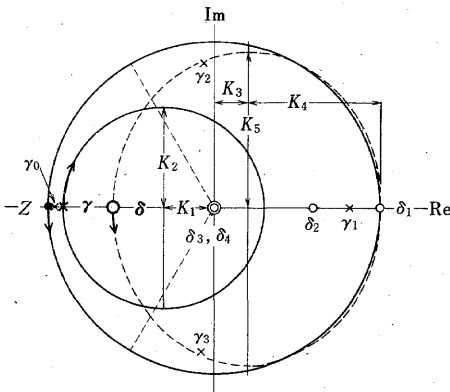


図2 極 r , 零点 δ の描く軌跡
Fig.2-Loci of a pole r and a zero δ .

式(5)、(6)と式(7)は全く同一であり、式(7)が共振特性を示す伝達関数であることは、上述の論議から明らかである。

ところで、式(7)の伝達関数の極は、 $2N$ 次の代数方程式、

$$Z^{2N} + K_1 Z^{2N-1} - K_2 = 0 \quad (8)$$

の $2N$ 個の根であり、これらの固定された $2N$ 個の極が単一の極 r と同じ働きをしていたことが分かる。

図2中の $r_0 \sim r_3$ は、 $N=2$ の場合の四つの極を表したものである。この中で単位円に一番接近している r_0 が共振極であるが、残りの $r_1 \sim r_3$ も単位円にやや接近して位置しており、これらの $r_1 \sim r_3$ により先に述べた不要共振が引き起されていたことになる。

さて、式(7)の共振周波数 f_0 は、以上の論議から、

$$f_0 = 1/(2T) \quad (9)$$

である。半値幅 B_w 及び Q は、式(8)の根 r_0 から、高い Q に対してはそれぞれ次のように近似される。

$$B_w = |\ln |r_0|| / (\pi T) \quad (10)$$

$$Q = f_0 / B_w = \pi / (2 |\ln |r_0||) \quad (11)$$

共振点における利得 G_v は、図2より明らかに、

$$G_v = \beta / \{1 - (K_1 + K_2)\} \quad (12)$$

となる。次に、回路の Q に関する安定度の評価であるが、伝達関数を標準形回路で構成する場合、回路の重み係数は伝達関数の係数そのものとなる。従って、中心周波数感度の絶対値とおよび共振点利得感度の絶対値和をそれぞれ、 $\Delta f_0 / f_0$ 及び $\Delta G_v / G_v$ と記すと、それらは、

$$\Delta f_0 / f_0 = |S_f^f| = 1 \quad (13)$$

$$\Delta G_v / G_v = |S_{K_1}^{G_v}| + |S_{K_2}^{G_v}| = (K_1 + K_2) / \{1 - (K_1 + K_2)\} \quad (14)$$

与えられる。式(14)より、共振点における利得の安定度は、図2の共振点における極 r と周波数点 Z の距離が大きい程良くなるが、これは先に述べたとおりである。

又、 Q 感度の絶対値 $\Delta Q / Q$ は、 $S_{K_i}^Q$ ($i=1, 2$) を数値的に計算すれば求められる。 Q に対する $\Delta Q / Q$ 及び $\Delta G_v / G_v$ を図6に示す。

3.2 極 r 及び零点 δ を持つ伝達関数の設計

式(7)の伝達関数で生じる不要共振は、 $N=1$ の場合と $N=2$ で $K_1 \ll K_2$ でない場合は、図2に示すような円周上を、周波数点 Z と共に、反時計方向に1回転する零点 δ ,

$$\delta = \frac{(K_4 + K_5)}{2} Z + \frac{(K_4 - K_5)}{2} Z^{-1} + K_3$$

(15)

を用いることで除去できる[†]。すなわち、極 r 及び零点 θ を持つ伝達関数を、式(6)に代って次式

$$H(Z) = \beta \frac{Z - \theta}{Z - r} \quad (16)$$

で定義すると[†]、式(16)についても、式(6)の場合と同様な Z 平面上での周波数応答の幾何学的解釈が成り立つ。従って、図2で、共振点以外のところで零点 θ を周波数点 Z に近接させて動かして式(16)の分子を小さくするようにすれば、共振点以外の不要な特性は除去できる。この場合、式(5)と式(15)を式(16)に代入することにより、伝達関数は次式のようになる。

$$H(Z) = \beta \frac{Z^{2N-2}(aZ^2 + bZ + c)}{Z^{2N} + K_1 Z^{2N-1} - K_2} \quad (17)$$

但し、 $N=1$ 、又は $N=2$ ($K_1 \ll K_2$)

$$a = 1 - \{(K_4 + K_5)/2\}, \quad b = -K_3, \quad c = (K_5 - K_4)/2$$

図2中の零点 θ_1, θ_2 は、式(17)の分子中の2次方程式、

$$aZ^2 + bZ + c = 0 \quad (18)$$

の2根を表したものであるが、これらの固定された零点が単一の零点 θ と等価な働きをしていたことが分かる。式(17)の回路を図3に示す。

さて、伝達関数式(17)の特性は、式(7)に比べ共振点利得 G_v のみ異なり、図2から明らかに、

$$G_v = \beta \frac{1 - (K_5 - K_4)}{1 - (K_1 + K_2)} = \beta \frac{a + c - b}{1 - (K_1 + K_2)} \quad (19)$$

となる。感度の絶対値 $\Delta G_v / G_v$ は、式(17)で、 $a, c > 0, b < 0$ として、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta G_v / G_v &= |S_{K_1}^{G_v}| + |S_{K_2}^{G_v}| + |S_{a+c}^{G_v}| + |S_{b}^{G_v}| + |S_{\beta}^{G_v}| \\ &= (K_1 + K_2) / \{1 - (K_1 + K_2)\} + 1 \end{aligned} \quad (20)$$

3.3 極 r により生ずる不要共振の伝送零点による打ち消し

3.1の考察から、共振点における利得の安定度を確保しつつ Q を高くするには、図2において、 $K_1 + K_2 =$

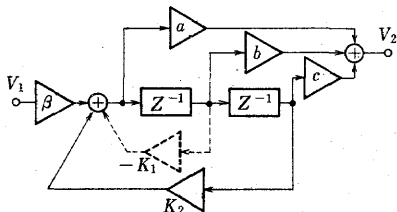


図3 式(17)の回路 ($N=1, K_1=0$)
Fig.3-Circuit of Eq.(17) ($N=1, K_1=0$).

一定のとき共振点における極 r と周波数点 Z のすれ違い速度を大きくすれば良く、そのためには次数 N を上げゲイン K_1 を小さく K_2 を大きくすれば良い。すると、先の考察より、不要共振レベルが極めて大きくなるが、3.2で述べたただ円上を動く零点 θ によって不要共振が打ち消されるのは、 $N=1$ の場合と $N=2$ で $K_1 \ll K_2$ でない場合である。従って、 $N \geq 3$ の場合や $N=2$ でも K_1 が小さく K_2 の大きい場合のように Q を高くしたいときは、不要共振を効果的に除去できなくなり不都合になる[†]。

さて、極 r により共振点における安定度を一定に保ちつつ Q を最も高くするため、 $K_1 + K_2 = \text{一定}$ という状態で $K_1 \rightarrow 0$ としたい場合は、零点 θ を考える代わりに、通常の伝送零点を各不要共振点に置き不要共振を抑圧すると考えるのが有効である。つまり、式(7)の分母で $K_1=0$ と置くと、不要共振は、例えば $N=2$ の場合は、単位円上の $\exp(j0)$ 、 $\exp(j\pi/2)$ 及び $\exp(j3\pi/2)$ の地点に生じるから、そこに伝送零点を置くのである。この場合、極、零点配置は図4のようになり、伝達関数は、

$$H(Z) = \beta \frac{\prod_{m=0}^{2N-1} Z \{Z - \exp(j\pi m/N)\}}{Z^{2N} - K_2} \quad (21)$$

と与えられる。図5に式(21)の回路、図9にその周波数特性を示す。

さて、式(21)の Q は、式(11)に $r_0 = \sqrt[2N]{K_2}$ を代入することにより、

$$Q = N\pi / |\ln K_2| \quad (22)$$

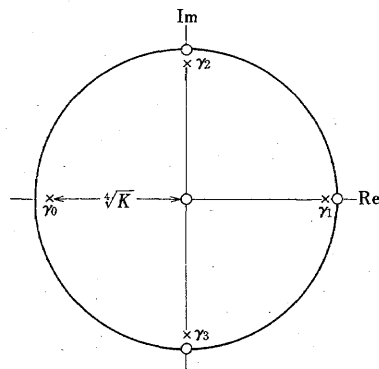


図4 式(21)の極、零点配置 ($N=2$)
Fig.4-Pole and zero positions of Eq.(21)($N=2$).

[†] 式(16)の導出は、正確には付録1に従えば良い。又、式(16)において零点 θ の Z の最高次数は、付録2に示した関係を満足する。この場合は、付録2のIIの場合に相当する。

[†] 不要共振を起す周波数付近で零点 θ を周波数点 Z に密接させて動かすことができないためである。

となる。又、共振点利得 G_v は、次式で与えられる。

$$G_v = \beta A / (1 - K_2) \quad (23)$$

但し、 A は零点の位置によって決まる定数である。

感度の絶対値和 $\Delta Q/Q$ 及び $\Delta G_v/G_v$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$\Delta Q/Q = |S_{K_2}^Q| = 1 / |\ln K_2| \quad (24)$$

$$\Delta G_v/G_v = |S_{K_2}^{G_v}| = K_2 / (1 - K_2) \quad (25)$$

Q に対する $\Delta Q/Q$ 、 $\Delta G_v/G_v$ を図6に示す。

図6より、従来の2次形フィルタ式(1)に比べ、同次数に対し式(17) (あるいは式(20)で $N=1$)を用いることにより Q に対する安定度を改善できること、又、式(21)を用い高次化することにより更に Q に対する安定度を改善できることなどが分かる。

3.4 伝達関数の安定、不安定について

3.1~3.3で設計した伝達関数式(7)、(17)、(21)の安定、不安定について検討を加える。一般に、最も直接的な伝達関数の安定判別法は、伝達関数の Z に関する分母多項式の根が Z 平面上の単位円内にあるかどうかを調べるものである^{(2),(4)}。この方法によれば、式(2)は明らかに $K_2 < 1$ ならば安定である。しかし、式(7)、(17)の場合は、根の位置を知るためには、普通、高次の代数方程式を解く必要がある。しかし、このような方法以外に、付録3に示した極 r の描く軌跡と回路の安定、不

安定の関係によれば、極 r の Z 平面上の動き方から容易に伝達関数の安定判別ができる。すなわち、式(7)、(17)の安定、不安定の判別は次のように行える。式(7)、(17)の場合、極 r は、

$$r = K_2 Z^{-(2J-1)} - K_1, \quad J = 1, 2, \dots \quad (26)$$

であるが、これは付録3の安定判別法のII)の $N=0$ の場合に相当し、 $Z = e^{j\theta}$ 、 $\theta = 0 \sim 2\pi$ の変化に対し、 $\arg(Z-r)$ が“ 2π ”変化すれば安定、変化しなければ不安定となる。これを図2上で幾何学的に考察すると、式(26)の J の値が何であっても、極 r の描く円が単位円内にある限りベクトル $(Z-r)$ の偏角は 2π しか変化しないから、極 r の描く円が単位円内にあることが式(7)、(17)の安定条件となる。すなわち、図2より、

$$0 \leq K_1 + K_2 < 1 \quad (27)$$

であれば式(7)、(17)は安定、そうでなければ不安定となる[†]。

4. 実験結果および二、三の考察

4.1 実験結果

3.で述べた単一同調形回路の設計法に基づいて実験を行い、設計理論を確認した。回路構成⁽⁶⁾、使用部品などを表1に、実験結果を図7~9に示す。

4.2 CTDの転送損の影響について⁽¹⁾

CTD遅延線の周波数特性は、非転送効率 ϵ によって劣化する。 M 段の遅延線の伝達関数 $D(Z)$ は、 $\epsilon \ll 1$ として、次のように表せる。

$$D(Z) = Z^{-M} \exp \{ M\epsilon (Z^{-1} - 1) \}, \quad Z = e^{j\omega T_s} \quad (28)$$

但し、 T_s は1段当りの遅延時間である。式(28)より、振幅特性および位相特性は、それぞれ、

$$|D(j\omega T_s)| = \exp \{ -M\epsilon (1 - \cos \omega T_s) \} \quad (29)$$

表1 回路構成、使用部品

	単位遅延回路	重み付け加減算回路
回路構成		
使用部品	BBD 遅延線: 松下電子工業 MN3003, 段数 $N_d=64$, クロック周波数 $f_{cp}=10\sim 200$ kHz, 遅延時間 $\tau = N_d/f_{cp}$ 緩衝増幅器: $\mu A709$ LPF: クロック周波数成分除去用, 高次共振抑圧用, 2次RC能動フィルタ, $f_c=1,500$ Hz, $Q=0.707$, 通過域遅延時間 $\tau_L=0.15\sim 0.18$ ms	R_f/a_1 R_f/a_2 R_f/a_3 R_f $\mu A741$ $v_3 = -a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$

† 一般には、極 r の描く軌跡が単位円内にあるからと言って、安定とはいえない。

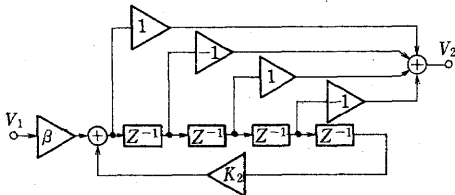


図5 式(21)の回路 ($N=2$)
Fig.5-Circuit of Eq.(21) ($N=2$).

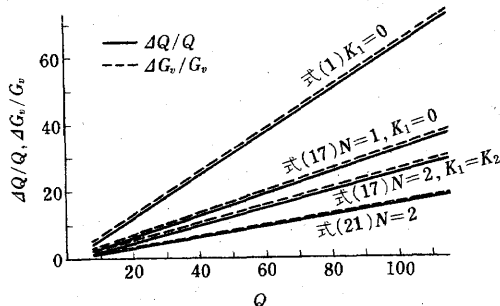


図6 種々の伝達関数の感度-Q特性の比較
Fig.6-Comparison of sensitivity-Q characteristics of various transfer functions.

$$\arg\{D(j\omega T_s)\} = -M\omega T_s \{1 + \varepsilon(\sin\omega T_s / \omega T_s)\} \quad (30)$$

となる。式(29), (30)において、通常は $\varepsilon < 10^{-3}$ であり、振幅特性はともかく、位相特性に対する転送損の影響は少ないといえる。

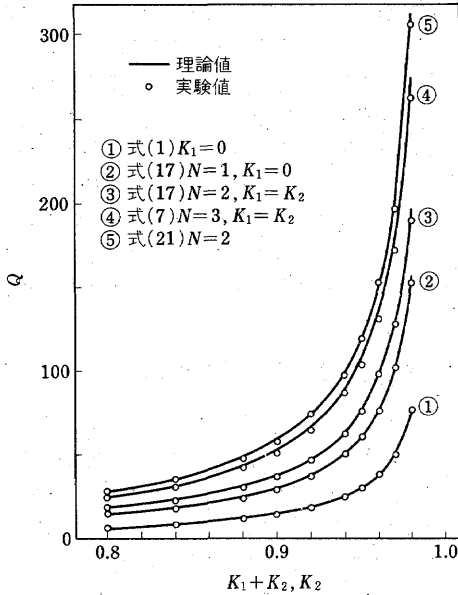


図7 ゲイン K_1+K_2, K_2 に対する Q
 Fig.7-Gain K_1+K_2, K_2 - Q characteristics.

4.3 高次共振について

本実験では、実験の都合上、単位遅延回路として BBD に LPF (低域フィルタ) を縦属に接続したものを用了。その結果、高域におけるループ利得の減少により、繰返特性によって生ずる高次共振は、図9に示すように抑圧される結果となった。

5. むすび

周波数と共に複素平面上のある閉路に沿って動くことのできる極および零点を仮想し、この考え方をい

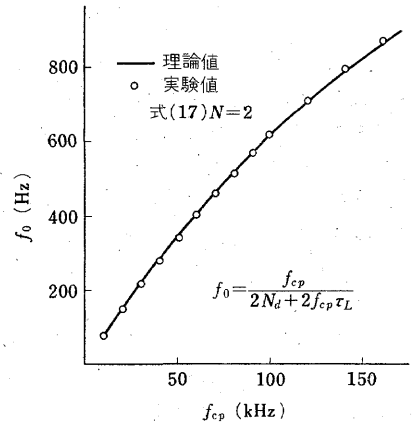


図8 クロック周波数-共振周波数特性
 Fig.8-Clock frequency-resonance frequency characteristics.

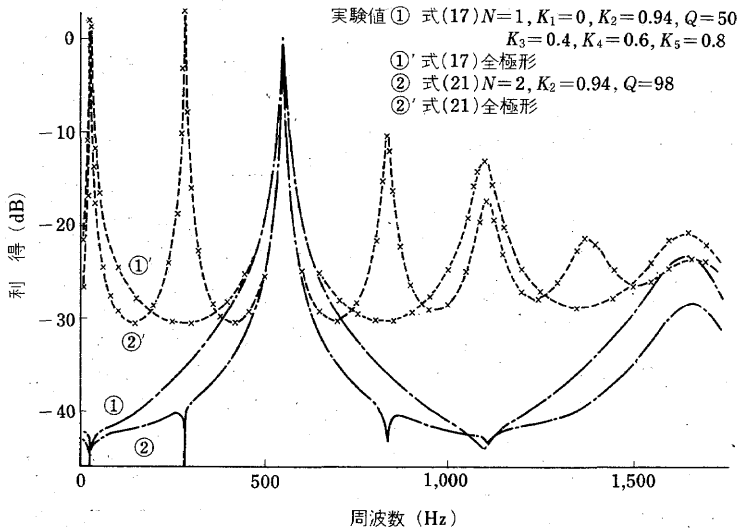


図9 周波数-利得特性 (不要共振と高次共振の抑圧の様子)
 Fig.9-Frequency-gain characteristics (unneeded resonances and higher order resonances suppression).

て低係数感度の伝達関数を設計し、更にそれを標準形回路で構成するという方法により、従来の2次形CTD単一同調形回路^{(6),(7)}に比べ Q に対する安定度を一層改善した単一同調形回路を設計し、その動作を実験により確認した。その結果、図3及び図5のように、単純な回路にもかかわらず、 Q に対する安定度の優れた回路が得られた。ただ、本設計法の場合、共振周波数はクロック周波数のみで可変しなければならない。

又、付録に、本伝達関数設計法の主題である周波数と共に動く極 r 及び零点 θ の一般的考察を示した。この考え方をを用いる利点は、(1)ある周波数特性についてはそれを実現する低係数感度の伝達関数の形を Z 平面上で幾何学的に見い出せる、(2)同時に、その伝達関数の安定、不安定や係数感度についても Z 平面上で容易に理解できる、などである。反面、(3)任意の周波数特性を持つ伝達関数を厳密に設計する場合、 Z 平面上の幾何学的解釈だけでは設計が困難である。

この概念は、ここで述べた単一同調形回路のみならず、他の特性を持つ回路の設計にも活用し得ると思われる。

又、CTD単一同調形回路については、クロック周波数による中心周波数の移動や時分割多重構成など特有の機能をなるべく損なうことなく、安定度、構成素子、1チップ化などの点で更に優れた回路の検討が必要であると思われる。

文 献

- (1) Sequin, C.H. and Tompsett, M.F. : "Charge transfer device", Academic Press, Inc., New York (1975).
- (2) 石田晴久訳, Gold, B., Rader, C.M. 著: "電子計算機による信号処理", 共立出版(昭48).
- (3) 電子通信学会編: "デジタル信号処理", 電子通信学会(昭51).
- (4) 谷川, 伊藤: "CCDトランスバースフィルタ", 信学技報, ED75-94 (1976-03).
- (5) McClellan, J.H., Parks, T.W. and Rabiner, L.R. : "A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters", IEEE Trans. Audio & Electroacoust., AU-21, 6 (Dec. 1973).
- (6) Smith, D.A., Puckette, C.M. and Butler, W.J. : "Active bandpass filtering with bucket brigade delay lines", IEEE J. Solid-State Circuits, SC-7, 5 (Oct. 1972).
- (7) Smith, D.A., Butler, W.J. and Puckette, C.M. : "Programable bandpass filter and tone generator using bucket brigade delay lines", IEEE Trans. Commun., COM-22, 7 (July 1974).
- (8) 武部, 西川, 西: "CTDを用いるリアクタンスは

しご形フィルタ", 信学技報, CST76-43(1976-08).

- (9) 吉弘, 西原, 柳沢: "低感度能動およびデジタルフィルタ-LCはしご形回路の節電圧シミュレーション", 信学論(A), J60-A, 7, p.661(昭52-07).
- (10) 柳沢, 金光: "アクティブフィルタの設計", p.103, 産報(昭49).
- (11) Helms, H.D. and Rabiner, L.R. : "Literature in digital signal processing terminology and permuted title index", IEEE Press (1973).

付 録

極 r 及び零点 θ に関する一般的考察

ここでは、本文の伝達関数設計法で用いた周波数と共に動く極 r 及び零点 θ の性質を二、三述べる。

付録1~3の結果は、極 r 及び零点 θ が周波数と共に動くという概念から容易に導出されるものであり、周知とも思われるが、本論文の理解の助けとなればと思ひ掲げた。

1. 極 r 及び零点 θ の描くことのできる軌跡

極 r 及び零点 θ を用いて伝達関数を設計する場合は、次の2段階に従う。

- 1) 与えられた伝達特性から Z 平面上で極 r 及び零点 θ の描くべき軌跡を決定する。
- 2) それらの軌跡上を動くように極 r 及び零点 θ を決定する。

第1段階の極 r 及び零点 θ の描くべき軌跡の決定法については、本文で述べた単一同調特性のような一部の特性に対しては、 Z 平面上の周波数応答の幾何学的解釈からそれらの描くべき軌跡を容易に決定できる。しかし、任意の振幅、位相特性が与えられた場合、それらを厳密に満足するような極 r 及び零点 θ の軌跡を同時に決定することは、 Z 平面上の幾何学的解釈だけでは無理である。

又、第2段階の極 r 及び零点 θ の決定法については、以下のように考えられる。

一般に極 r は、

$$r = \sum_{K=0}^N A_K Z^K + \sum_{K=0}^N B_K Z^{-K}, \quad Z = e^{j\omega T} \quad (A.1)$$

と表すことができるが、ここで、

$$A_K = (a_K + b_K)/2, \quad B_K = (a_K - b_K)/2 \quad (A.2)$$

と置くと、式(A.1)の r は、

$$r = \sum_{K=0}^N a_K \cos K\theta + j \sum_{K=0}^N b_K \sin K\theta, \quad \theta = \omega T \quad (A.3)$$

となる。式(A-3)で、 a_K, b_K を、

$$\left. \begin{aligned} a_K &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos K\theta d\theta, \quad a_0 = \frac{1}{2} a_K \Big|_{K=0} \\ b_K &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin K\theta d\theta \end{aligned} \right\} \text{(A-4)}$$

と置けば、 r に描かせたい任意の軌跡、

$$f(\theta) + jg(\theta) \quad \text{(A-5)}$$

は、式(A-4)を用いてフーリエ係数 a_K, b_K を求め、式(A-2)の置き換えをすることにより、式(A-1)で近似できる。又、式(A-3)より、 r の描く軌跡は実軸対称になることも明らかである。

なお、零点 δ についても、式(A-1)~(A-5)の関係は全く同様に成立する。

2. 極 r と零点 δ の次数の関係

伝達関数 $H(Z)$ における(分母多項式の Z の最高次数) \geq (分子多項式の最高次数)なる条件¹⁾より、次の関係が成立する。

{極 r と零点 δ の Z に関する次数の関係}

極 r 及び零点 δ を持つ伝達関数 $H(Z)$,

$$\left. \begin{aligned} H(Z) &= \beta \frac{Z - \delta}{Z - r} \\ r &= r(Z^N, Z^{-M}) = \sum_{K=0}^N A_K Z^K + \sum_{K=0}^M B_K Z^{-K} \\ \delta &= \delta(Z^I, Z^{-L}) = \sum_{K=0}^I C_K Z^K + \sum_{K=0}^L D_K Z^{-K} \end{aligned} \right\} \text{(A-6)}$$

において、極 r と零点 δ の Z に関する次数の間に、

I) $N=1$ で且つ $A_1=1$ の場合、

$$H(Z) = \beta \sum_{K=q}^I D_K Z^{-K} / \sum_{K=p}^M B_K Z^{-K} \quad \text{(A-7)}$$

とするとき、“ $q \geq p \geq 0$ ”

II) $N=0$ の場合、“ $I \leq 1$ ”

III) I), II) 以外の場合、“ $I \leq N$ ”

なる関係が成立する。 (証明略)

3. 極 r の描く軌跡と回路の安定、不安定

{極 r の描く軌跡と回路の安定、不安定の関係}

極 r 及び零点 δ を持つ伝達関数 $H(Z)$ 、式(A-6)において、 $H(Z)$ が安定であるための必要十分条件は、 $Z = e^{j\theta}$ 、 $\theta = 0 \sim 2\pi$ の変化に対し、 $\arg\{Z - r\}$ が、

I) $N=1$ で且つ $A_1=1$ の場合、

“ $-2p\pi$ ”；但し、 p は式(A-7)のもの

II) $N=0$ の場合、“ 2π ”

III) I), II) 以外の場合、“ $2N\pi$ ”

変化することである。

表A-1 $D(Z)$ の最高次数

I) の場合	$D(Z) = \sum_{K=p}^M B_K Z^{J-K}$, $p \geq 0$ であるとき“ $J-p$ ”
II) の場合	“ $J+1$ ”
III) の場合	“ $J+N$ ”

(証明) 式(A-6)の $H(Z)$ は、 Z に関する分子多項式 $N(Z)$ と分母多項式 $D(Z)$ の比として、

$$H(Z) = \beta \frac{N(Z)}{D(Z)} = \beta \frac{Z^J \{Z - \delta(Z^I, Z^{-L})\}}{Z^J \{Z - r(Z^N, Z^{-M})\}} \quad \text{(A-8)}$$

但し、 $J = \max(M, L)$

と表せる。すると、式(A-8)の分母多項式 $D(Z)$ の最高次数は、式(A-6)の極 $r = r(Z^N, Z^{-M})$ の形により、表A-1に示すとおりに分類される。

ここで、次の条件が成立する。

[条件1] 有理伝達関数 $H(Z) = N(Z)/D(Z)$ が安定であるための必要十分条件は、 $D(Z)$ の零点がすべて Z 平面上の単位円内にあることである³⁾。(条件終)

条件1は、複素関数論の偏角の原理(argument principle)を用いれば、条件2となる。

[条件2] $H(Z)$ が安定であるための必要十分条件は、 Z が単位円上を正の向きに1回転するとき($Z = e^{j\theta}$, $\theta = 0 \sim 2\pi$ のとき)、 $\arg\{D(Z)\}$ が、 $2\pi \times \{D(Z)$ の単位円内の零点の個数}だけ変化することである。(条件終)

ところで、 $D(Z)$ の零点の個数は、 $D(Z)$ の最高次数に等しいから、条件2と表A-1から、次の条件3が得られる。

[条件3] 式(A-8)の伝達関数 $H(Z)$ が安定であるための必要十分条件は、 $Z = e^{j\theta}$, $\theta = 0 \sim 2\pi$ の変化に対し、 $\arg\{D(Z)\}$ が、

I) の場合、 $D(Z) = \sum_{K=p}^M B_K Z^{J-K}$, $p \geq 0$ であるとき、

“ $2(J-p)\pi$ ”

II) の場合、“ $2(J+1)\pi$ ”

III) の場合、“ $2(J+N)\pi$ ”

だけ変化することである。(条件終)

しかるに、

$$\arg\{D(Z)\} = \arg\{Z^J\} + \arg\{Z - r(Z^N, Z^{-M})\} \quad \text{(A-9)}$$

であり、式(A-9)と条件3から、目的とする関係が得られた。(証明終)

(昭和54年5月9日受付, 10月18日再受付)